S. S. Goncharov, A. T. Nurtazin, Constructive models of complete decidable theories, *Algebra Logika*, 1973, Volume 12, Number 2, 125–142

Алгебра и логика, 12, № 2 (1973), 125-142.

УДК 517.15

КОНСТРУКТИВНЫЕ МОДЕЛИ ПОЛНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ТЕОРИЙ

С.С.ГОНЧАРОВ, А.Т.НУРТАЗИН

В работе изучается конструктивизируемость простых и универсальных моделей полных разрешимых теорий, получен критерий существования сильно конструктивизируемой простой модели полной разрешимой теории, приводятся примеры разрешимых тотально трансцендентных теорий, у которых простая и универсальная модели неконструктивизируемы и конструктивизируема только простая модель. Для сравнения заметим, что всякая счётная модель разрешимой категоричной теории сильно конструктивизируема [8]. В § 1 излагаются результаты Гончарова о сильной конструктивизируемости простых моделей, в § 2 приводятся некоторые свойства конструктивизаций булевых алгебр, доказанные Нуртазиным, а в § 3 и 4 - совместные результаты, полученные в более сильном варианте Нуртазиным.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть $(\mathfrak{M}_1, \nu_1)$ и $(\mathfrak{M}_2, \nu_2)$ - конструктивные модели сигнатуры σ. Определение конструктивности и сильной конструктивности можно найти в [5] и [7].

Гомоморфизм $\varphi : \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$ называется конструктивным, если существует о.р.ф. f такая, что $\varphi\nu_1 = \nu_2 f$. Если φ и φ^{-1} - конструктивные изоморфизмы, то модели $(\mathfrak{M}_1, \nu_1)$ и $(\mathfrak{M}_2, \nu_2)$ конструктивно изоморфны.

Обозначим $|\mathfrak{M}|$ основное множество модели $\mathfrak{M}$. Подмножество S из $|\mathfrak{M}|$ назовем вычислимым, если $\nu^{-1}(S)$ р.п. и соответственно семейство $\{S_n \mid n \in N$ и $S_n \subseteq |\mathfrak{M}|\}$ вычислимо, если вычислимо семейство числовых множеств $\{\nu^{-1}(S_n)\}_{n \in N}$. Пусть $\mathcal{K}$ - некоторый класс моделей сигнатуры σ, тогда $\mathfrak{N}\in\mathcal{K}$ простая в $\mathcal{K}$, если она элементарно вкладывается в любую модель из $\mathcal{K}$, и универсальная, если в неё элементарно вкладывается любая из $\mathcal{K}$. Определения и обозначения для ч.р.ф. и р.п. множеств можно найти в [4].

§ 2. Критерий сильной конструктивизируемости

В этом параграфе T – полная разрешимая теория, а Φ_n будет обозначать формулу с геделевским номером n.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функция $f(m,n)$ называется <u>спускающей</u> для теории T, если выполнены следующие условия:

1. Для любого m существует $s(m)\rightleftharpoons\lim\limits_{n\to\infty} f(m,n)$ и $f(m,0)=m$.
2. Для любых n и m $T\vdash\Phi_{f(n,m+1)}\supseteq\Phi_{f(n,m)}$.
3. Если Φ_n непротиворечива, то $\Phi_{s(n)}$ атомная.
4. Для любых формул Φ_n и Φ_k с одним множеством свободных переменных из $T\vdash\Phi_n\subseteq\Phi_k\subseteq\Phi_{s(n)}$ следует $T\vdash\Phi_{s(n)}\leftrightarrow\Phi_{s(k)}$.

ТЕОРЕМА 1. Существует простая сильно конструктивизируемая модель теории T, если и только если существует спускающая о.р.ф. для T.

ДОКАЗАТЕЛЬСВО. 1. <u>Достаточность</u>. Пусть $f(m,n)$ – спускающая о.р.ф. для T, а $<i_1,\ldots,i_k>$–геделевский номер кортежа $<i_1,\ldots,i_k>$. Рассмотрим сигнатуру $\sigma=\sigma_0\cup\{c_0,c_1,\ldots\}$, где c_i – константы, которых нет в σ_0. Будем строить теперь по шагам некоторую полную разрешимую теорию сигнатуры σ

<u>Шаг 0</u>. Пусть $T_0\rightleftharpoons T$.

Шаг $n'=<n,m,<e_1,\ldots,e_m>,K>>0$.

Рассмотрим теперь для подслучая. Пусть $\Phi(c_{i_1},\ldots,c_{i_k})$ – конъюнкция всех формул, добавленных к T_0 на предыдущих шагах, и $c_{i_1},\ldots$ $\ldots,c_{i_k}$ – все константы, входящие в нее.

1. Если Φ_n имеет не m свободных переменных или формула $\Phi_n(c_{e_1},\ldots,c_{e_m})\,\&\,\Phi(c_{i_1},\ldots,c_{i_k})$ противоречива, то, положив $T_{n'}\rightleftharpoons T_{n'-1}$, перейдем к следующему шагу.

2. Если случай 1 не имеет места, то для всех наборов $<c_{e_1^i},\ldots,c_{e^i_{k_i}}>$ таких, что $<e_1^i,\ldots,e^i_{k_i}><<e_1,\ldots e_k>$ рассмотрим формулы $\Phi_{n_i}'\equiv$ $\equiv(\exists x)\Phi(c^i_{e_1},\ldots,c_{e^i_{k_i}},x)$, где x – все свободные переменные

$\Phi(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})\ \&\ \Phi_n(x_{e_1},\ldots,x_{e_m})$, которые не входят в набор $\langle x_{e_1 i},\ldots,x_{e_{k_i} i}\rangle$, и Φ_{n_i} – формула с наименьшим номером. И теперь для всех n_i спустимся с помощью функции $f(m,n)$ до формулы $\Phi_{f(n_i,p_i)}$ такой, что $T\vdash\Phi_{f(n_i,p_i)}\supseteq(\exists x)(\Phi(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})\ \&\ \Phi_k(x_{e_1},\ldots,x_{e_m})$ или $T\vdash\Phi_{f(n_i,p_i)}\supseteq(\exists x)\cdot(\Phi(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})\ \&\ \neg\Phi_n(x_{e_1},\ldots,x_{e_m}))$. Это возможно, так как $f(m,n)$ спускается в атомную формулу. Если теперь для всех n_i

$$T\vdash\Phi_{f(n_i,p_i)}\equiv(\exists x)\big((\Phi\ \&\ \Phi_{f(n_i^*,k)})(x_{e_1 i},\ldots,x_{e_{k_i} i},x)\big),$$

где $\Phi_{n^*}\equiv(\exists x)(\Phi(x_{e_1},\ldots,x_{e_m},x)\ \&\ \Phi_n(x_{e_1},\ldots,x_{e_m}))$, то положим $T'_{n'}\leftrightharpoons T_{n'-1}\cup\{\Phi_{f(n_i^*,k)}(c_{e_1},\ldots,c_{e_m}),\Phi_n(c_{e_1},\ldots,c_{e_m})\}$, и если теперь Φ_n не начинается с квантора $\exists$, то положим $T_{n'}\leftrightharpoons T'_{n'}$, если же $\Phi_n=(\exists x)\Phi'(x,\bar{x})$, то положим $T_{n'}\leftrightharpoons T'_{n'}\cup\{\Phi'(c_i,c_{e_1},c_{e_2},\ldots,c_{e_m})\}$, где c_i – константа с наименьшим номером, которая еще не входит в формулы из $T'_{n'}$. В противном случае переходим к следующему шагу.

Пусть $\tilde{T}\leftrightharpoons\bigcup_{n\geq 0}T_n$.

По лемме 2.2 $\tilde{T}$ – непротиворечивая теория, по лемме 2.5, $\tilde{T}$ – полная разрешимая теория, поэтому отношение эквивалентности $c_i\sim c_j$, определенное так: $c_i\sim c_j\Leftrightarrow\tilde{T}\vdash P_0^2(c_i,c_j)$, где P_0^2 – отношение равенства – является разрешимым.

Рассмотрим множество $\bar{C}\leftrightharpoons\{c_i/\sim\}$ и определим на нем модель $\mathfrak{N}^*$ сигнатуры σ, положив для всех $P_k^{n_k}$ из σ $P_k^{n_k}(\bar{c}_{e_1},\ldots,\bar{c}_{e_{n_k}})$, если и только если $\tilde{T}\vdash P_k^{n_k}(c_{e_1},\ldots,c_{e_{n_k}})$.

По лемме 2.6 это определяется корректно.

По лемме 2.7 $\mathfrak{N}^*=\langle\bar{C},\sigma\rangle$ – сильно конструктивная модель теории $\tilde{T}$, так как $\tilde{T}\supseteq T$, следовательно, $\mathfrak{N}\leftrightharpoons\mathfrak{N}^*\upharpoonright\sigma_0$ – сильно конструктивная модель теории T. Из леммы 2.3 и 2.7 следует, что для любого набора $\langle c_{e_1},\ldots,c_{e_m}\rangle$ существует атомная формула $\Phi(x_1,\ldots,x_m)$ такая, что $\mathfrak{N}\models\Phi(\bar{c}_{e_1},\ldots,\bar{c}_{e_m})$, то есть $\mathfrak{N}$ – атомная модель теории T и из [10] $\mathfrak{N}$ – простая модель. Достаточность доказана.

2. Необходимость. Пусть $(\mathfrak{N},\nu)$ – простая сильно конструктивная модель теории T. Определим функцию $f(m,n)$ следующим образом: $f(m,0)\leftrightharpoons m$ и $f(m,n+1)\leftrightharpoons f(m,n)$, если Φ_n имеет не столько переменных, сколько Φ_m, или $\mathfrak{N}\models\neg\Phi_n(\nu(i_1),\ldots,\nu(i_k))$, где $\langle i_1,\ldots,i_k\rangle$ – минимальное такое, что $\mathfrak{N}\models\Phi_m(\nu(i_1),\ldots,\nu(i_k))$, или Φ_m противоречива; в противном случае $f(m,n+1)=n^*$, где n^* – наименьшее такое, что $T\vdash\Phi_{n^*}\leftrightarrow\Phi_n\ \&\ \Phi_m$. Из простоты $\mathfrak{N}$, используя [10], видно, что $\mathfrak{N}$ – атомная модель и, следовательно, построенная функция $f(m,n)$

общерекурсивная спускающая. Теорема доказана.

ЛЕММА 2.2. $\widetilde{T}$ - непротиворечивая теория.

По теореме о компактности достаточно доказать, что для всех n T_n непротиворечива.

Допустим противное и рассмотрим наименьшее n' такое, что $T_{n'}$ противоречива. Очевидно, что если $T'_{n'}$ непротиворечива, то и $T_{n'}$ непротиворечива, поэтому $T'_{n'}$ противоречива и, следовательно,

$$T \vdash \neg(\Phi(c_{i_1},\dots,c_{i_k}) \& \Phi_{f(n^*,k)}(c_{e_1},\dots,c_{e_m}) \& \Phi_n(c_{e_1},\dots,c_{e_m})),$$

где $\Phi(c_{i_1},\dots,c_{i_k})$ - конъюнкция всех формул из $T_{n-1}\setminus T_0$, а так как константы c_i не входят в формулы из T, то $T\vdash(\forall x)\neg(\Phi(x_{i_1},\dots,x_{i_k})\& \&\Phi_{f(n^*,k)}\&\Phi_n)$, но по построению $T\vdash\Phi_{f(n^*,k)}(y)\supsetneq \Phi_{n^*}(y)$, следовательно, $T\vdash(\forall x)\neg(\Phi\&\Phi_{f(n,k)})$, но формула $\Phi(x_{i_1},\dots,x_{i_k})\&\Phi_{f(n,k)}(x_{e_1},\dots \dots,x_{e_m})$ по построению непротиворечива, следовательно, получили противоречие и лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Для любого набора $\langle c_{e_1},\dots,c_{e_m}\rangle$ существует атомная формула $\Phi(x_1,\dots,x_m)$ такая, что $\Phi(c_{e_1},\dots,c_{e_m})\in\widetilde{T}$.

Докажем это утверждение от противного.

Рассмотрим набор $\langle c_{e_1},\dots,c_{e_m}\rangle$ с наименьшим номером, для которого не выполнена эта лемма, и рассмотрим теперь шаг N, для которого для всех наборов с номерами, меньшими $\langle e_1,\dots,e_m\rangle$, уже добавлены в T_N атомные формулы. Пусть $\Phi(c_{i_1},\dots,c_{i_k})$ - конъюнкция всех формул из $T_N\setminus T_0$ и

$$\widetilde{\Phi}(x_{e_1},\dots,x_{e_m},x_{i_1},\dots,x_{i_k}) \rightleftharpoons \Phi(x_{i_1},\dots,x_{i_k})\&\mathop{\&}_{i=1}^{m} x_{e_i}=x_{e_i}.$$

Очевидно, что $T\vdash\Phi(c_{i_1},\dots,c_{i_k})\supsetneq(\exists x)\widetilde{\Phi}.(c_{e_1},\dots,c_{e_m},x)$.

Пусть n - номер формулы $(\exists x)\widetilde{\Phi}(x_{e_1},\dots,x_{e_m},x)$, тогда на шаге $\langle s(n),m,\langle e_1,\dots,e_m\rangle,N\rangle$ будет, очевидно, добавлена формула $\Phi_{s(n)}(c_{e_1},\dots \dots,c_{e_m})$, т.е. получили противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. Для любой формулы $\Phi(x_1,\dots,x_n)$ и любого набора $\langle c_{e_1},\dots,c_{e_m}\rangle$ $\Phi(c_{e_1},\dots,c_{e_m})\in\widetilde{T}$ или $\neg\Phi(c_{e_1},\dots,c_{e_m})\in\widetilde{T}$.

Рассмотрим шаг N такой, что в T_N уже добавлена атомная формула $\psi(x_1,\dots,x_m)$ от набора констант $\langle c_{e_1},\dots,c_{e_m}\rangle$, и если теперь

$T \vdash \psi(x_1,\dots,x_m) \supseteq \Phi_p(x_1,\dots,x_m)$, где $\Phi_p = \Phi$ или $\Phi_p = \neg\Phi$, то на шаге $p' = \langle \bar{p}, m, \langle e_1,\dots,e_m\rangle, N\rangle$, где $\Phi_{\bar{p}} \rightleftharpoons \Phi_p(x_{e_1},\dots,x_{e_m})$ к $T_{p'-1}$ будет добавлена формула $\Phi_p(c_{e_1},\dots,c_{e_m})$.

ЛЕММА 2.5. $\tilde{T}$ - полная разрешимая теория сигнатуры σ.

Полнота сразу следует из леммы 1.4, и из неё же, так как построение T_n эффективно по n, следует разрешимость.

ЛЕММА 2.6. Если $\Phi(c_{e_1},\dots,c_{e_m}) \in \tilde{T}$ и для всех $i \le m$ $P_0^2(c_{e_i}, c_{e_i'}) \in \tilde{T}$, то $\Phi(c_{e_1'},\dots,c_{e_m'}) \in \tilde{T}$.

Следует из того, что $\tilde{T} \supseteq T$ и T содержит аксиомы равенства.

ЛЕММА 2.7. Для любой формулы $\Phi(x_1,\dots,x_m)$ сигнатуры σ_0 $\mathfrak{N} \models \Phi(\bar{c}_{e_1},\dots,\bar{c}_{e_m})$, если и только если $\Phi(c_{e_1},\dots,c_{e_m}) \in \tilde{T}$.

Эта лемма легко доказывается по индукции.

Пусть $\mathfrak{N}$ - простая модель полной разрешимой теории T и $\mathcal{F} \rightleftharpoons \{\Phi(x_1,\dots,x_n) \mid n \in N$ и $[\Phi(x_1,\dots,x_n)]_T$ - элемент идеала Фреше б.а. $F_n(T)\}$.

ТЕОРЕМА 2. Если множество $\mathcal{F}$ вычислимо, то $\mathfrak{N}$ - сильно конструктивизируемая модель.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g(m,n) \rightleftharpoons \mu k((\Phi_k \supset \Phi_m) \vee ((k>n) \& \& \Phi_k \supseteq \Phi_m))$ и $\chi(n,t)$ - такая о.р.ф., что $(\exists t)(\chi(n,t)=0)$, если и только если $\Phi_n \in \mathcal{F}$. Для доказательства этой теоремы по теореме 1 достаточно построить спускающую о.р.ф. Определим последнюю.

1) Если Φ_m противоречива или $n=0$, то $f(m,n) \rightleftharpoons m$.

2) Если случай 1) не имеет места и существует $\langle m', n'\rangle$ такое, что $n' \ne 0$, $\langle m', n'\rangle < \langle m, n\rangle$ и $T \vdash \Phi_{f(m',n')} \supset \Phi_{f(m,n-1)} \supseteq \Phi_{m'}$ то, если m' наименьшее, $f(m,n) \rightleftharpoons f(m',n')$.

3) В противном случае, если $n=1$, то, перечисляя $\mathcal{F}$, найдем первое k такое, что $\Phi_k \in \mathcal{F}$ и $T \vdash \Phi_k \geq \Phi_m$. Отсюда $f(m,1) = k$.
В оставшихся случаях положим $f(m,n) \rightleftharpoons g(f(m,n-1),n)$.

Очевидно, что f - такая о.р.ф., что $\Phi_{f(m,1)} \in \mathcal{F}$, поэтому очевидно, что через конечное число шагов мы спустимся в атомную формулу.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Если множество номеров атомных формул рекурсивно, то $\mathfrak{N}$ сильно конструктивизируема.

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Если каждая атомная формула имеет конечное множество решений, то $\mathfrak{N}$ сильно конструктивизируема.

Легко видеть, что в этом случае $\Phi(x_1,\dots,x_n)\in\mathcal{F}$, если и только если существует m такое, что $T\vdash\exists^{\le m}(x_1,\dots,x_m)\Phi(x_1,\dots,x_n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если множество номеров формул, лежащих хотя бы в одном рекурсивном неглавном ультрафильтре р.п. в каждом $F_n(T)$ множество таких ультрафильтров конечно, то $\mathfrak{N}$ сильно конструктивизируема.

§ 3. Конструктивизация булевых алгебр

Докажем вначале лемму о конструктивизации линейно-упорядоченного множества (л.у.м.) $\omega+\omega^*$, которая была впервые доказана С.Д.Денисовым (не опубликована).

ЛЕММА 3.1. Существует конструктивизация ν л.у.м. $\omega+\omega^*$ такая, что $\nu^{-1}(\omega)$ не р.п.

Здесь ω – тип л.у.м. N, а ω^* – обратный к нему.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть $\mathcal{L}=\langle L,\le\rangle$ – л.у.м. Подмножество $M\subseteq L$ называется нижним (верхним) интервалом $\mathcal{L}$, если

$$\forall x,y\in L\,[x<y\,\&\,y\in M\Rightarrow x\in M]\ (\forall x,y\in L\,[x>y\,\&\,y\in M\Rightarrow x\in M]).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть график двухместной функции Клини $K(n,x)$ перечисляется п.р.ф. $f(t)$.

$$\pi_n(t)\leftrightharpoons\{y\mid\exists t_0<t\,\exists x[f(t_0)=\langle n,x,y\rangle]\}.$$

Очевидно, $\pi_n(0)\subseteq\dots\subseteq\pi_n(t)\subseteq\dots$ и $\pi_n=\bigcup_t\pi_n(t)$.

Шагами по t будем строить расширяющуюся последовательность л.у.м. $\mathcal{X}_0\subseteq\dots\subseteq\mathcal{X}_t\subseteq\dots$, $\mathcal{X}_t=\langle\{x_0,\dots,x_{t-1}\},\le\rangle$ так, что $\mathcal{X}=\bigcup_t\mathcal{X}_t$ удовлетворит условия леммы. На каждом шаге t будет определяться система нижних интервалов $Y_{-1}(t)=\emptyset\subseteq Y_0(t)\subseteq\dots\subseteq Y_{t-1}(t)$, система верхних интервалов

$$Z_{-1}(t)=\emptyset\subseteq Z_0(t)\subseteq\dots\subseteq Z_{t-1}(t),\ Y_{t-1}(t)\cap Z_{t-1}(t)=\emptyset,\ Y_{t-1}(t)\cup Z_{t-1}(t)=X_t.$$

Индукционное определение

Шаг 0. $X_0=\langle\emptyset,\leq\rangle$.

$Y_{-1}(0)=Z_{-1}(0)=\emptyset$.

Шаг $t+1$. $X_{t+1}=X_t\cup\{x_t\}$.

В л.у.м. X_t элемент x_t больше всех элементов из интервала $Y_{t-1}(t)$ и меньше всех элементов из разности $X_t-Y_{t-1}(t)$.

Пусть для $i<s<t+1$ определены интервалы $Y_i(t+1)$ и $Z_i(t+1)$.

1. $Y_s(t+1)$ - наименьший нижний интервал X_{t+1} такой, что

а) $Y_{s-1}(t+1)\subseteq Y_s(t+1)$;

б) если $m_0=\min(\pi_s(t)\cap\{m\mid x_m\in X_{t+1}-Z_{s-1}(t+1)\})$, то $x_{m_0}\in Y_s(t+1)$.

П. $Z_s(t+1)$ - наименьший верхний интервал X_{t+1}, такой, что

а) $Z_{s-1}(t+1)\subseteq Z_s(t+1)$;

б) если $n_0=\min(\pi_s(t)\cap\{n\mid x_n\in X_{t+1}-Y_s(t+1)\})$, то $x_{n_0}\in Z_0(t+1)$.

Определение закончено.

Непосредственно из определения видно, что для любого $t>s$ $Y_s(t)\cap Z_s(t)=\emptyset$.

Докажем, что для любого s существует достаточно далекий шаг t_s такой, что

а) если $t>t_s$, то $Y_s(t)=Y_s(t_s)=Y_s$ и $Z_s(t)=Z_s(t_s)=Z_s$;

б) если $k=\min\pi_s$, то $x_k\in Y_s$ или $x_k\in Z_s$;

в) если π_s бесконечно, то существуют $m_0,n_0\in\pi_s$, такие, что $x_{m_0}\in Y_s$, а $x_{n_0}\in Z_s$.

Допустим, что эти утверждения верны для $i<s$ и шаг t^0 таков, что $Y_i(t^0)=Y_i$, $Z_i(t^0)=Z_i$ для $i<s$. Докажем сначала, что существует шаг t^1 такой, что $Y_s(t^1)=Y_s(t)$ для любого $t>t^1$, а затем - что существует t^2, $t^2>t^1$, такой, что $Z_s(t^2)=Z_s(t)$ для любого $t>t^2$. Тогда можно положить $t_s=t^2$.

Существование t^1.

Случай 1. $\pi_s\subseteq\{m\mid x_m\in Z_{s-1}\}$.

По индукционному определению шага $t+1$, I, так как $\pi_s(t)\cap\{n\mid x_n\in X_{t+1}-Z_{s+1}(t+1)\}=\emptyset$ для любого $t\geq t^0$, то $Y_s(t+1)=Y_{s-1}(t)=Y_{s-1}(t^0)$ доказывается индукцией по t. Следовательно, в этом случае $t^1=t^0$.

Случай 2. $\pi_s-\{m\mid x_m\in Z_{s-1}\}\neq\emptyset$.

Пусть $m_0 = \min(\pi_s - \{m \mid x_m \in Z_{s-1}\})$. Тогда $m_0 = \min(\pi_s(t'-1) \setminus \{m \mid x_m \in Z_{s-1}\})$ для некоторого $t' > \max\{t_s^0, m_0\}$. По выбору шага t', $x_{m_0} \in X_{t_1} - Z_{s-1}(t')$. Так как $m_0 = \min(\pi_s(t_1 - 1) \cap \{m \mid X_m \in X_{t_1} - Z_{s-1}(t')\})$, то $x_{m_0} \in Y_s(t')$, по условию 1, б). Но для любого $t \geq t'$ $Y_{s-1}(t) = Y_{s-1}$ и $m_0 = \min(\pi_s(t) \cap \{m \mid x_m \in X_{t+1} - Z_{s-1}(t+1)\})$. Следовательно, $Y_s(t+1) = Y_s(t')$ для любого $t \geq t'$.

Существование t^2.

Случай 1. $\pi_s \subseteq \{n \mid x_n \in Y_s\}$.

Аналогично случаю 1 в доказательстве существования t^1 можно показать, что $t^2 = t^1$ подходит.

Случай 2. $n_0 = \min(\pi_s - \{n \mid x_n \in Y_s\})$.

Аналогично случаю 2 в доказательстве существования t^1 можно показать, что если $n_0 \in \pi_s(t^2 - 1)$ для $t^2 > \max(t^1, n_0)$, то $Z_s(t) = Z_s(t^2)$ для любого $t > t^2$. Следовательно, пункт а) доказан.

Для доказательства пункта б) достаточно заметить, что если $k = \min \pi_s$ и $x_k \notin Y_s$, то на шаге $t^0 > \max\{t_s, k\}$ по индукционному определению П, б) $x_k \in Z_s(t)$, если $k \in \pi_s(t^0 - 1)$, таким образом, $x_k \in Z_s$.

Если π_s бесконечно, то в доказательствах существования t^1 и t^2 не может иметь место случай 1, а в случае 2 находятся элементы $x_{m_0} \in Y_s$ и $x_{n_0} \in Z_s$, где $m_0, n_0 \in \pi_s$.

Следовательно, утверждение доказано. Из него очевидно следует, что:

1. Для любого k существует s такое, что $x_k \in Y_s$ или $x_k \in Z_s$.
2. Для любого s_0 существует s_1 $(s_1 > s_0)$ такое, что включения $Y_{s_0} \subset Y_{s_1}$ и $Z_{s_0} \subset Z_{s_1}$ собственные.

Конструктивность нумерации $\nu: n \longrightarrow x_n$ следует из эффективности процесса построения x_t. Из 2 видно, что $Y = \bigcup_{s \geq 0} Y_s$, а из 1, что $X = Y \cup \bigcup_{s=0} Z_s$. Так как для любого s $Y_s \cap Z_s = \emptyset$, то и $Y \cap Z_s = \emptyset$. Следовательно, $\mathfrak{X} = \omega + \omega^*$. Если бы множество Y было вычислимым, то для некоторого s_0 π_{s_0} бесконечно и $\pi_{s_0} = \{m \mid x_m \in Y\}$. Но по случаю в) найдется $n_0 \in \pi_{s_0}$ такое, что $x_{n_0} \in Z_{s_0}$, $x_{n_0} \notin Y$. Противоречие. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Конструктивная модель* $(\mathfrak{X}, \nu)$ *не имеет собственных конструктивных элементарных расширений.*

Если $(x,\nu)\prec(x',\nu')$ и $\nu'(n_0)\in x'-x$, то из элементарности расширения следует, что $(\forall n)(\nu' f(n)= i(\nu(n))\leq\nu'(n_0)\Longleftrightarrow \nu n\in\omega)$, где $\nu' f= -i\nu$, а это противоречит нерекурсивности $\nu^{-1}(\omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Если α - тип л.у.м. с первым элементом, то $\mathcal{L}_\alpha \leftrightharpoons \langle B_\alpha, U, \cap, \neg, \phi, \alpha\rangle$, где $B_\alpha \leftrightharpoons \{[x_1,x_2[\,U\ldots U[x_n, x_{n+1}[\;|\;, n\in N$ и $x_i\in\alpha$ или $x_i=\hat\omega\}$. $\hat\omega$ - добавленный к α последний элемент.

ТЕОРЕМА 3. $\mathcal{L}_\omega$ имеет конструктивизацию, при которой множество элементов неглавного ультрафильтра нерекурсивно.

Рассмотрим конструктивизацию $\mathcal{L}_{\omega+\omega^*}$, порожденную конструктивизацией ν из леммы 2.1, и n такое, что $\nu n\in\omega+\omega^*\setminus\omega$. Очевидно, что $[\nu m,\nu n[$ принадлежит неглавному ультрафильтру, если и только если $\nu m\in\omega$. Следовательно, так как $\mathcal{L}_\omega$, очевидно, изоморфно $\mathcal{L}_{\omega+\omega^*}$, то теорема доказана.

Пусть $\mathcal{L}$ - булева алгебра. Обозначим $[0,b]\leftrightharpoons\{x\in|\mathcal{L}|\,|\,x\leq b\}$. Очевидно, $[0,b]$ - булева алгебра, и $\mathcal{L}\cong[0,b]\times[0,\neg b]$.

ТЕОРЕМА 3'. Любая сильно конструктивизируемая атомная булева алгебра неавтоустойчива, то есть существуют две конструктивизации ν_1 и ν_2 булевой алгебры $\mathcal{L}$ такие, что $(\mathcal{L},\nu_1)\not\cong(\mathcal{L},\nu_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle\mathcal{L},\tilde\nu\rangle$ - сильно конструктивная атомная булева алгебра, $F(\mathcal{L})$ - идеал Фреше алгебры $\mathcal{L}$. Если $\mathcal{L}/F(\mathcal{L})$ безатомна, то по теореме из [7], она неавтоустойчива. Пусть теперь $b/F(\mathcal{L})$ $(b\in|\mathcal{L}|)$ - атом алгебры $\mathcal{L}/F(\mathcal{L})$. Тогда $[0,b]\cong\mathcal{L}_\omega$ и $\mathcal{L}_\omega\times[0,\neg b]\cong\mathcal{L}$. В теореме 3 построена конструктивизация ν алгебры $\mathcal{L}_\omega$, в которой множество атомов алгебры $\mathcal{L}_\omega$ нерекурсивно и, очевидно, существует индуцированная $\tilde\nu$ конструктивизация $\varkappa$ алгебры $[0,\neg b]$. Покажем, что множество атомов конструктивной булевой алгебры $\langle\mathcal{L}_\omega\times[0,\neg b],\nu\times\varkappa\rangle$ нерекурсивно. Пусть M - множество $\nu\times\varkappa$ - номеров атомов $F_\omega\times[0,\neg b]$ и $\varkappa n_0=\emptyset$. Тогда функция $n\to\langle n,n_0\rangle$ сводит множество ν-номеров атомов алгебры F_ω к множеству M. Нерекурсивное множество не может m-сводиться к рекурсивному множеству. Так как множество атомов булевой алгебры $\mathcal{L}$ формульно, то оно рекурсивно в $(\mathcal{L},\tilde\nu)$. Допустим, что для некоторого изоморфизма

$\varphi: \mathcal{L}_\omega \times [0,7\mathcal{b}] \to \mathcal{L}$ и о.р.ф. f диаграмма коммутивна.

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\;\nu\times\varkappa\;} & \mathcal{L}_\omega \times [0,7\mathcal{b}] \\ \downarrow f & & \downarrow \varphi \\ N & \xrightarrow[\;\tilde{\nu}\;]{} & \mathcal{L} \end{array}$$

Тогда функция f m -сводит множество M к множеству $\tilde{\nu}$ -номеров атомов алгебры $\mathcal{L}$. Противоречие. Теорема доказана.

§ 4. Вычислимые семейства ультрафильтров

Нам понадобятся некоторые понятия и результаты из § 3 работы [7].

Рассматриваются п.р.ф., определяемые следующим образом:

$$P(x) \leftrightharpoons \left[\frac{x \dot{-} 1}{2}\right], \quad R(x) = 2x+1, \quad L(x) \leftrightharpoons 2x+2;$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x+1) = R(f(x)) \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi(x,0) = x \\ \varphi(x,y+1) = P(\varphi(x,y)) \end{cases} \qquad x' = \begin{cases} x+1, & x \text{ нечётно,} \\ x \dot{-} 1, & x \text{ чётно} \end{cases}$$

и рекурсивное бинарное отношение

$$x \prec y \Longleftrightarrow \prod_{i=0}^{x} |\varphi(x,i) - y| = 0,$$

упорядочивающее множество N.

Деревом называется множество $\mathcal{D}$, удовлетворяющее условиям:

а) $x \in \mathcal{D},\ y \succ x \Longrightarrow y \in \mathcal{D}$;

б) $x \in \mathcal{D} \Longrightarrow x' \in \mathcal{D}$;

$T(\mathcal{D}) \leftrightharpoons \{x \mid x \in \mathcal{D} \;\&\; R(x) \notin \mathcal{D}\}$ - множество атомов дерева $\mathcal{D}$.

По теореме 5 из [7] каждому рекурсивно-перечислимому дереву $\mathcal{D}$ определенным образом ставится в соответствие конструктивная булева алгебра $(\mathcal{L}_\mathcal{D}, \nu_\mathcal{D})$. Теорема 6 из [7] легко может быть переформулирована следующим образом.

ТЕОРЕМА (М.Г.Перетятькин). *Имеется взаимно-однозначное соответствие между всеми максимальными рекурсивными цепями перечислимого дерева $\mathcal{D}$ и всеми рекурсивными ультрафильтрами алгебры $(\mathcal{L}_\mathcal{D}, \nu_\mathcal{D})$. При этом конечным мак-*

симальным цепям соответствуют главные ультрафильтры $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$, а вычислимым семействам максимальных цепей $\mathcal{D}$ – вычислимые семейства ультрафильтров $(\mathcal{L}_{\mathcal{D}}, \nu_{\mathcal{D}})$.

Пусть о.р.ф. $F(n,x)$ вычисляет семейство максимальных цепей перечислимого дерева $\mathcal{D}$. Тогда нумерация, осуществляемая этой функцией, негативна, так как

$$\forall n_0 n_1 \in N \quad \{F(n_0,x) \mid x \in N\} \neq \{F(n_1,x) \mid x \in N\} \Leftrightarrow (\exists x) F(n_0,x)$$

и $F(n_1,x)$ несравнимы. По предложению 4 из § 2 [2] произвольное бесконечное вычислимое семейство максимальных цепей перечислимого дерева вычислимо однозначно.

ТЕОРЕМА 4. Существует перечислимое дерево $\mathcal{D}$, в котором (1) все максимальные цепи вычислимы; (2) семейство всех максимальных цепей невычислимо; (3) семейство всех конечных максимальных цепей невычислимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть график трехмерной функции Клини перечисляется п.р.ф. $\psi(x)$. Введем обозначения:

$$K_{m,n}(t) \leftrightharpoons \{y \mid \exists x \exists t_0 < t [\langle m,n,x,y \rangle = \psi(t_0)]\},$$

$$K_{m,n} \leftrightharpoons \bigcup_t K_{m,n}(t),$$

$$\mathcal{D}_0 \leftrightharpoons \{n \mid PP(n) \in \rho f\},$$

где функция f определена в начале этого параграфа. Множество $\mathcal{D}_0$ является перечислимым деревом, в котором функция f перечисляет единственную бесконечную цепь, а функция Lf однозначно перечисляет все элементы x дерева $\mathcal{D}_0$ такие, что $R(x)$ и $L(x)$ – атомы в $\mathcal{D}_0$.

Шагами по t эффективно построим расширяющуюся последовательность рекурсивных деревьев $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{D}_n \subseteq \ldots$ так, что $\mathcal{D} = \bigcup_t \mathcal{D}_t$ удовлетворит условия леммы. В процессе построения будут использоваться множества меток $A = \{A_0, A_1, \ldots\}$ и $\mathcal{B} = \{B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots\}$. На каждом шаге t все метки из множеств A и $\mathcal{B}$

отмечают различные числа дерева $\mathcal{D}_t$. Кроме того, некоторые метки из множества $\mathcal{B}$, начиная с некоторого момента снабжаются натуральными индексами, которые остаются при них на всех последующих шагах.

Выполняются условия:

1. Если метка $B_n \in \mathcal{B}$ не сдвигалась до шага $t+1$, а на шаге $t+1$ сдвинулась, то на шагах $0,1,\dots,t$ она не имеет индекса, а на шаге $t+1$ снабжается индексом, который остается при неи на всех последующих шагах.

2. Если в $\mathcal{D}_t$ метка $A_n(B_n)$ отмечает элемент x, то $R(x)$ и $L(x)$ – атомы дерева $\mathcal{D}_t$.

3. На каждом нечётном шаге может сдвигаться только одна метка из $\mathcal{B}$, а на четном – только одна метка из $\mathcal{A}$ на один элемент вниз (сравнение здесь и дальнейшем относительно порядка $\preccurlyeq$).

4. Для любого n, если на шаге t метка B_n имеет индекс m, то $K_{n,m}(t)$ содержит число, отмеченное меткой B_n.

Дадим индукционное определение.

Шаг 0. $\mathcal{D}_0$ определено выше.

Для каждого n метка A_n отмечает в $\mathcal{D}_0$ элемент $Lf(2n)$, а метка B_n $Lf(2n+1)$.

В $\mathcal{D}_0$ никакие метки из $\mathcal{B}$ не имеют индексов.

<u>Шаг $2t+1$.</u> <u>Случай 1.</u> Метка $B_{e(t)}$ на шагах $0,\dots,2t$ не имела индекса. Проверяем, имеется ли n такое, что $K_{e(t),n}(t)$ – максимальная цепь в дереве $\mathcal{D}_{2t}$, которая содержит элемент $Lf(2\ell(t)+1)$. Если n имеется и n_0 – наименьшее из таких n, x_0 – максимальный элемент цепи $K_{e(t),n_0}(t)$, то полагаем

$$\mathcal{D}_{2t+1} \leftrightharpoons \mathcal{D}_{2t} \cup \{R(x_0), L(x_0)\}$$

и, присвоив метке $B_{e(t)}$ индекс n_0, в дереве $\mathcal{D}_{2t+1}$ сдвигаем её в x_0. В противном случае ничего не меняем.

<u>Случай П.</u> В $\mathcal{D}_{2t}$ метка $B_{e(t)}$ имела индекс n_0 (ранее сдвигалась). Проверяем, является ли множество $K_{e(t),n_0}(t)$ максимальной цепью в $\mathcal{D}_{2t}$. Если оно является и x_0 – минимальный элемент этой цепи, то полагаем $\mathcal{D}_{2t+1} \leftrightharpoons \mathcal{D}_{2t} \cup \{R(x_0), L(x_0)\}$ и метку $B_{e(t)}$ в дереве $\mathcal{D}_{2t+1}$ сдвигаем в x_0. ($K_{e(t),n_0}(t)$) обязательно содержит число, отмеченное меткой $B_{e(t)}$ ввиду условия 4). В противном случае ничего не меняем.

Шаг $2t+2$. Случай 1. Существуют числа $m_0,\dots,m_n$ такие, что $K_{e(t),m_0}(t),\dots,K_{e(t),m_n}(t)$ – все различные максимальные цепи дерева $\mathcal{D}_{2t+1}$, содержащие $Lf(2\ell(t))$, и для любого m, если $K_{e(t),m}(t)\cap\{x\mid x\in\mathcal{D}_{2t+1}\ \&\ x\preceq Lf(2\ell(t))\}$ непусто, то $m\in\{m_0,\dots,m_n\}$. Тогда существуют в точности два числа m_i, m_j, $m_i<m_j$ такие, что цепи $K_{e(t),m_i}(t)$, $K_{e(t),m_j}(t)$ содержат число, отмеченное в $\mathcal{D}_{2t+1}$ меткой $A_{e(t)}$. Пусть x_0 – минимальный элемент цепи $K_{e(t),m_j}(t)$ $(m_j>m_i)$, тогда $\mathcal{D}_{2t+2}\leftrightharpoons\mathcal{D}_{2t+1}\cup\{R(x_0),L(x_0)\}$. В $\mathcal{D}_{2t+2}$ метку $A_{e(t)}$ сдвигаем в x_0, а остальные метки оставляем на месте.

Случай П. Если случай 1 не выполняется, ничего не меняем. Определение закончено. Непосредственно из индукционного определения вытекают условия 1 – 4, а также:

5. Если $x\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_0$ и ни на каком шаге не отмечается меткой из $A\cup\mathcal{B}$, то x – атом в $\mathcal{D}$.

6. Любая бесконечная цепь дерева $\mathcal{D}$, не перечисляемая функцией f, определяется бесконечным движением некоторой метки из $A\cup B$ и поэтому вычислима.

Таким образом, пункт (1) теоремы доказан.

Докажем (2). Достаточно показать, что семейство всех максимальных цепей дерева $\mathcal{D}$ однозначно не вычисляется функцией $\lambda n\lambda x K(m,x)$ ни для какого m. Пусть это не так и $K(m_0,n,x)$ – противоречащий пример. Имеются две возможности:

а) В процессе построения дерева $\mathcal{D}$ метка A_{m_0} сдвигалась бесконечное число раз.

Покажем, что цепь, определяемая по 6 бесконечным движением метки A_{m_0}, не вычисляется функцией $\lambda x K(m_0,n,x)$ ни для какого n. Предположим противное: функция $\lambda x K(m_0,n_0,x)$ вычисляет эту цепь. Найдется t_0 такое, что $\ell(t_0)=m_0$,

$$K_{m_0,n_0}(t_0)\cap\{x\mid x\in\mathcal{D}_{2t_0+1}\ \&\ x\preceq Lf(2m)\}$$

непусто. Так как, по предположению, метка A_{m_0} сдвигалась бесконечное число раз, то имеется бесконечная последовательность $t_1<\dots<t_s<\dots$ $\dots, t_s>t_0$, такая, что метка A_{m_0} сдвигается на шагах $2t_1+2,\dots$ $\dots,2t_s+2,\dots$. По индукционному определению шага $2t+2$ (случай 1), так как $t_s>t_0$ $(s\geqslant 1)$, имеется бесконечная последовательность различных чисел r_s, $s=1,2,\ldots,n,\ldots$ такая, что $K_{m_0n_0}(t_s)$ и $K_{n_0r_s}(t_s)$ – две максимальные цепи в $\mathcal{D}_{2t_s+1}$, содержащие элемент, отмеченный в $\mathcal{D}_{2t_s+1}$ меткой A_{m_0}. Тогда для некоторого s_0, $r_{s_0}>m_0$, $e(t_{s_0})=m_0$ и в $\mathcal{D}_{2t_{s_0}+1}$ множества $K_{m_0,n_0}(t_{s_0})$ и $K_{m_0r_{s_0}}(t_{s_0})$ являются различными максимальными цепями, содержащими элемент, отмеченный в $\mathcal{D}_{2t_{s_0}+1}$ меткой A_{m_0}. По индукционному определению шага $2t+2$ (случай 1), в $\mathcal{D}_{2t_{s_0}+1}$ метка A_{m_0} может сдвигаться только в минимальный элемент цепи $K_{m_0r_{s_0}}(t_{s_0})$, так как $r_{s_0}>n_0$. Противоречие.

б) Начиная с шага $2t_0+2$, метка A_{m_0} остается на месте. По условиям 5 и 6, в $\mathcal{D}$ все максимальные цепи, содержащие элемент $Lf(2m_0)$ конечны, обозначим их через $q_0,\ldots,q_r$. Тогда найдется шаг $2t_1+2$, $t_1>t_0$, и числа $n_0,\ldots,n_r$ такие, что $e(t_1)=m_0$, $q_0=K_{m_0,n_0}(t_1),\ldots,q_r=K_{m_0n_r}(t_1)$. По индукционному определению (шаг $2t+2$, случай 1), на шаге $2t_1+2$ метка B_{m_0} сдвигается. Противоречие.

Докажем (3). Допустим, что все конечные цепи дерева $\mathcal{D}$ однозначно вычисляются функцией $\lambda n\lambda x K(m_0,n,x)$. В $\mathcal{D}$ обязательно имеется максимальная конечная цепь q, содержащая (хотя бы по условию 2) $Lf(2m_0)$. Для некоторого n и $t_0(\ell(t_0)=m_0)$ имеем $q=K_{m_0,n}=K_{m_0n}(t_0)$, в силу конечности q, и q является максимальной цепью в дереве $\mathcal{D}_{2t_0}$. По индукционному определению (шаг $2t+1$, случай 1), на шаге $2t_0+1$ метка B_{m_0} уже должна иметь индекс, скажем, n_0. Покажем, что $K_{m_0n_0}$ не может быть максимальной конечной цепью дерева $\mathcal{D}$. Если это не так, то для некоторого t_1 $e(t_1)=m_0$, $K_{m_0n_0}=K_{m_0,n_0}(t_1)$ – максимальная цепь дерева $\mathcal{D}_{2t_1+1}$. По индукционному определению (шаг $2t+1$, случай 2), $K_{m_0n_0}(t_1)$ не является максимальной цепью в $\mathcal{D}_{2t_1}$. Противоречие. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Существует конструктивная булева алгебра $(\mathcal{L},\mu)$, у которой

(1) все ультрафильтры рекурсивны;

(2) семейство всех ультрафильтров невычислимо;

(3) семейство всех главных ультрафильтров невычислимо.

§ 5. Примеры разрешимых полных теорий.

ТЕОРЕМА 5. I. По произвольной конструктивной булевой алгебре $(\mathcal{L},\nu)$ эффективно строится полная разрешимая теория $T(\mathcal{L},\nu)$ счётного множества одноместных предикатов с равенством такая, что $(F_1(T(\mathcal{L},\nu)),\gamma) \overset{m}{\cong} (\mathcal{L},\nu)$.

П. Если множество всех ультрафильтров $\mathcal{L}$ счётно, то $T(\mathcal{L},\nu)$ тотально трансцендентна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Сигнатурой теории $T(\mathcal{L},\nu)$ считаем

$$\sigma \leftrightharpoons \langle =, P_0^1, P_1^1, \ldots, P_n^1, \ldots \rangle .$$

Аксиомами теории $T(\mathcal{L},\nu)$ будет такое множество предложений $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4$, где $\Delta_1 \leftrightharpoons \{\forall x P_n^1(x) \mid$ если $\nu n = 1_{\mathcal{L}}\}$;

$$\Delta_2 \leftrightharpoons \{\exists x_0,\ldots,x_{m-1}(\mathop{\&}_{i<m} P_n^1(x_i) \,\&\, \mathop{\&}_{\substack{i\neq j\\ i,j<m}} x_i \neq x_j) \mid m\in N \,\&\, \nu n \neq 0_{\mathcal{L}}\};$$

$\Delta_3 \leftrightharpoons \{\forall x(P_m^1(x) \vee P_n^1(x) \equiv P_\tau^1(x)) \mid$ в алгебре $\mathcal{L}$ $\nu m \cup \nu n = \nu\tau\}$;

$\Delta_4 \leftrightharpoons \{\forall x(\neg P_m^1(x) \equiv P_n^1(x)) \mid$ в алгебре $\mathcal{L}$ $\neg\nu m = \nu n\}$.

Теория $T(\mathcal{L},\nu)$, вследствие конструктивности нумерации ν алгебры $\mathcal{L}$, допускает эффективную элиминацию кванторов, а каждая формула с одной свободной переменной эффективно эквивалентна в $T(\mathcal{L},\nu)$ атомарной формуле. Таким образом, отображение $f: [P_n(x)] \longrightarrow \nu n$, где $[P_n(x)]$ – смежный класс $F_1(T(\mathcal{L},\nu))$, содержащий формулу $P_n(x)$, является рекурсивным изоморфизмом $(F_1(T(\mathcal{L},\nu)),\gamma)$ на $(\mathcal{L},\nu)$. Любое предложение теории $T(\mathcal{L},\nu)$ эффективно эквивалентно предложению вида $\exists x P_n(x)$ или отрицанию такого предложения. Предложение $\exists x P_n(x)$ тогда и только тогда принадлежит $T(\mathcal{L},\nu)$, когда νn не является нулем алгебры $\mathcal{L}$. Следовательно, теория $T(\mathcal{L},\nu)$ полна и разрешима.

П. Достаточно заметить, что булева алгебра $F_1(Th(\mathfrak{M},A))$ суператомная для любого счётного обогащения модели $\mathfrak{M}$ теории $T(\mathcal{L},\nu)$*). Можно заметить, что каждая формула $\Phi(x)$ из обогащения эквивалентна формуле вида

$$\bigvee_{i=1}^{k_1} (P_{n_i}(x) \,\&\, \mathop{\&}_{i=1}^{k_2} (x \neq a_{ji})) \vee$$

$$\vee \left(\bigvee_{\ell=1}^{k_3} x = a_{i_\ell}\right) \vee P_{n_0}(x) \quad , \text{ где } \nu n_0 = 0_{\mathcal{L}} \text{ и } a_j \in A.$$

Если $\mathcal{F}(\mathcal{F}_0)$ – идеал Фреше булевой алгебры $F_1(Th(\mathfrak{M},A))$, $(F(T(\mathcal{L};\nu)))$, то определим отображение из $F_1(Th(\mathfrak{M},A))/_{\mathcal{F}}$ в $F_1(T(\mathcal{L},\nu))/_{\mathcal{F}_0}$

$$\varphi\left([\bigvee_{i=1}^{k_1} (P_{n_i}(x) \,\&\, \mathop{\&}_{i=1}^{k_2} x \neq a_{ji}) \vee \left(\bigvee_{\ell=1}^{k_3} x = a_{i_\ell}\right) \vee P_{n_0}(x)]_{Th(\mathfrak{M},A)/\mathcal{F}}\right) \leftrightharpoons$$

$$\left[\bigvee_{i=1}^{k_1} P_{n_i}(x) \vee P_{n_0}(x),\right]_{T(\mathcal{L},\nu)/\mathcal{F}_0},$$

которое является изоморфизмом. Так как $\mathcal{L}$ изоморфна $F_1(T(\mathcal{L},\nu))$ и суператомна, то, используя [11], легко получить, что $F_1(Th(\mathfrak{M},A))$ суператомная. Теорема доказана.

Из доказательства последней теоремы и теоремы из [10] видно также, что модель $\mathfrak{M}$ теории $T(\mathcal{L},\nu)$ проста, если любой её элемент определяет главный тип в $F_1(T(\mathcal{L},\nu))$. Кроме того, семейство ультрафильтров алгебры $(F_1(T(\mathcal{L},\nu)),\gamma)$, реализуемых в некоторой конструктивной модели $(\mathfrak{N},\tilde{\nu})$ теории $T(\mathcal{L},\nu)$, вычислимо функцией $\Phi(n,x)$, которая для любого n при различных значениях x перечисляет множество номеров сигнатурных предикатов, истинных на элементе $\tilde{\nu}(n)$.

Из теорем 4 и 5 имеем

СЛЕДСТВИЕ 5.1. С у щ е с т в у е т р а з р е ш и м а я т о т а л ь н о т р а н с ц е н д е н т н а я т е о р и я, у к о т о р о й п р о с т а я и у н и в е р с а л ь н а я м о д е л ь н е к о н с т р у к т и в и з и р у е м ы.

*) Счётным обогащением модели $\mathfrak{M}$ элементами из A, $A \subseteq |\mathfrak{M}|$, A счётно, называется модель $(\mathfrak{M},A)$, получаемая из $\mathfrak{M}$ добавлением в сигнатуру имен всех элементов из A при соответствующей интерпретации. Полная теория T тотально-трансцендентна, если для любого счетного обогащения модели $\mathfrak{M}$ теории $T(\mathfrak{M},A)$ булева алгебра $F_1(T(\mathfrak{M},A))$ имеет счётное множество ультрафильтров.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Существует разрешимая тотально трансцендентная теория, у которой конструктивизируема только простая модель.

Это следствие получается из теорем 3 и 5.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Любая конструктивная модель из $T(\mathcal{L}, \nu)$ сильно конструктивна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теории T из следствия 4.1. для любой конструктивной модели $\mathfrak{N} \in Mod(T)$ существуют конструктивные модели $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2 \in Mod(T)$ такие, что $\mathfrak{N}_1 \prec \mathfrak{N} \prec \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N} \not\prec \mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2 \not\prec \mathfrak{N}$.

Пусть $K(T)$ - класс всех конструктивизируемых моделей теории T

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Существует разрешимая тотально трансцендентная теория, у которой нет простой и универсальной моделей в $K(T)$.

Это следствие легко получается из следствия 4.1. и замечания 2.

Литература

1. Г.БИРКГОФ, Теория структур, И Л , М., 1952.

2. Ю.Л.ЕРШОВ, Теория нумераций, 1, Новосибирск, 1969.

3. Ю.Л.ЕРШОВ, Конструктивные модели, В сб.: Избранные вопросы алгебры и логики, Новосибирск, 1973, 111-130.

4. А.И.МАЛЬЦЕВ, Алгоритмы и рекурсивные функции, Наука , 1965.

5. А.И.МАЛЬЦЕВ, Конструктивные алгебры, УМН, 16 (1961), № 3, 3-60.

6. А.И.МАЛЬЦЕВ, О рекурсивных абелевых группах, ДАН, 146, № 5 (1962), 1009-1012.

7. М.Г.ПЕРЕТЯТЬКИН, Сильно конструктивные модели и нумерации булевой алгебры рекурсивных множеств, Алгебра и логика, 10(1971),№5, 535-537.

8. L.A.HARRINGTON, Structures with rec.presentation,Notes Amer.Math.Soc.,18,N5(1971),826.

9. R.L.VAUGHT, Models of complete theories, Bull.Amer.Math. Soc.,69,N3(1963).

10. R.L.VAUGHT, Denumerable models of complete theories, Infinistic methods, Proc.Symp.Foundations of Mathematics,Warszawe , 1961,303-321.

11. С.С.ГОНЧАРОВ, Конструктивные суператомные булевы алгебры, Алгебра и логика, 12, № 1 (1973), 31-40.

Поступило 18 января 1973 г.