Современная математика и ее приложения. Том 100 (2016). С. 24–35

ДИАМЕТР СЛУЧАЙНОГО ДИСТАНЦИОННОГО ГРАФА

© 2016 г. **Л. ИСХАКОВ, М. МИРОНОВ**

Аннотация. В работе дано практически исчерпывающее описание случаев, в которых дистанционный случайный граф асимптотически почти наверное имеет диаметр 1, 2 и больше двух.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Дистанционным графом называют граф, множеством вершин которого служит набор точек n-мерного пространства, а ребро между двумя вершинами проводится в том случае, если расстояние между ними равно некоторому наперед заданному числу. Нас будут интересовать достаточно специфические дистанционные графы, которые мы будем обозначать

$$G(n,r,s) = (V(n,r), E(n,r,s)).$$

Дадим следующие определения:

$$V(n,r) = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \mid \forall i \ x_i \in \{0,1\}, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = r \right\},$$

$$E(n,r,s) = \left\{ (v_1, v_2) \mid v_1 = (v_1^1, v_1^2, \ldots, v_1^n), \ v_2 = (v_2^1, v_2^2, \ldots, v_2^n), \ v_1, v_2 \in V(n,r), \ \sum_{i=1}^{n} v_1^i v_2^i = s \right\}.$$

Здесь, разумеется, $0 \leqslant s < r < n$, и данное определение равносильно следующему: вершины графа — r-элементные подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$, а ребра — пары множеств, пересекающихся по s элементам. Такие графы играют важную роль в комбинаторной геометрии (см. [8–10, 12, 13, 17, 20, 24–29]), теории Рамсея (см. [18, 23]) и теории кодирования (см. [7, 14]). При $s = 0$ образуется классический *кнезеровский граф* (см. [22]).

Одним из наиболее мощных инструментов в исследовании «типичных» свойств графов является вероятностный метод (см. [1]). В частности, для любой последовательности графов $H_n = (V_n, E_n)$ и любой последовательности чисел $p_n \in [0,1]$ рассматривается последовательность случайных подграфов H_{n,p_n} графов H_n, т.е. случайных элементов, каждый из которых (элемент H_{n,p_n}) принимает значения во множестве всех остовных подграфов графа H_n и имеет биномиальное распределение:

$$\mathrm{P}(H_{n,p_n} = (V_n, E)) = p_n^{|E|}(1-p_n)^{|E_n|-|E|}$$

(см. [6, 15, 19]).

Изучению свойств случайных графов $G_{p_n}(n, r_n, s_n)$ посвящено множество работ (см., например, [2–5, 11, 16, 21]).

ISSN 1512–1712

Обозначим через Ω_n множество всех остовных подграфов графа $G(n, r_n, s_n)$. Будем говорить, что некоторое свойство (вернее, последовательность свойств) $A_n : \Omega_n \to \{0, 1\}$ выполнено *асимптотически почти наверное* или *а.п.н.*, если при $n \to \infty$ выполнено

$$\mathrm{P}(A_n) := \sum_{G \in \Omega_n} \mathrm{P}\left(G_{p_n}(n, r_n, s_n) = G\right) \mathrm{I}\left(A_n(G) = 1\right) \to 1.$$

В настоящей работе мы дадим практически исчерпывающее описание случаев, в которых граф $G_{p_n}(n, r_n, s_n)$ а.п.н. имеет диаметр больше двух, и случаев, в которых граф $G_{p_n}(n, r_n, s_n)$ а.п.н. имеет диаметр один или два. Подобная задача полностью решена для модели Эрдеша—Реньи, в которой роль H_n исполняет полный граф K_n (см. [15]). Полезно отметить, кстати, что K_n — это в точности $G(n, 1, 0)$, так что классическая модель — это тоже очень специальный случай нашей модели.

2. Формулировки результатов

Отметим прежде всего, что случай $r_n < 2s_n$ тривиален, поскольку тогда в графе $G(n, r_n, s_n)$ найдутся две несмежные вершины, у которых нет общего соседа, и, как следствие, диаметр случайного графа $G_{p_n}(n, r_n, s_n)$ будет заведомо больше двух. Мы представим три теоремы: первая описывает случай $r_n > 2s_n$, две другие посвящены случаю $r_n = 2s_n$.

Теорема 1. *Пусть дана последовательность случайных элементов $G_{p_n}(n, r_n, s_n)$, где $r_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $s_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — такие функции натурального аргумента n, что $r_n > 2s_n$ и $r_n = o\left(\sqrt[3]{n}\right)$ при $n \to \infty$. Тогда свойство “$\mathrm{Diam}\left(G_{p_n}(n, r_n, s_n)\right) \leqslant 2$” имеет пороговую вероятность*

$$p_n^* = \sqrt{\frac{2r_n \ln \frac{n}{r_n}}{\left(C_{r_n}^{s_n}\right)^2 C_{n-2r_n}^{r_n - 2s_n}}}. \qquad (1)$$

Иными словами:

1) *если при всех достаточно больших n выполнено $p_n \geqslant cp_n^*$ для некоторого $c > 1$, то диаметр случайного графа $G_{p_n}(n, r_n, s_n)$* а.п.н. *не больше двух;*
2) *если при всех достаточно больших n выполнено $p_n \leqslant cp_n^*$ для некоторого $c < 1$, то диаметр случайного графа $G_{p_n}(n, r_n, s_n)$* а.п.н. *больше двух.*

В параграфе 3.1 мы убедимся в том, что $p_n^* \to 0$ при $n \to \infty$. Заметим также, что при $r_n \equiv 1$, $s_n \equiv 0$ выполнено

$$p_n^* \sim \sqrt{\frac{2 \ln n}{n}},$$

и это отлично согласуется с классическими результатами для модели Эрдеша–Реньи (см. [15]).

Теорема 2. *Пусть дана последовательность случайных элементов $G_{p_n}(n, r_n, r_n/2)$, где $r_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — такая функция натурального аргумента n, принимающая только четные значения, что $r_n = o\left(\sqrt{n}\right)$ при $n \to \infty$ и для некоторой стремящейся к бесконечности функции f_n выполнено неравенство*

$$r_n \geqslant \frac{1}{\ln 4} \ln \ln n + \frac{1}{\ln 2} \ln \ln \ln n + f_n. \qquad (2)$$

Тогда свойство “$\mathrm{Diam}\left(G_{p_n}(n, r_n, r_n/2)\right) \leqslant 2$” имеет пороговую вероятность

$$p_n^* = \sqrt{\frac{\pi r_n^2 \ln \frac{n}{r_n}}{2^{2r_n}}}.$$

Отметим, что пороговая вероятность, заявленная во второй теореме, асимптотически эквивалентна пороговой вероятности из первой теоремы при $r_n = 2s_n$. В параграфе 3.2 мы также убедимся в том, что $p_n^* \to 0$ при $n \to \infty$, и это не будет, конечно, прямым следствием аналогичного факта из параграфа 3.1, да и условия теоремы 2 слабее условий теоремы 1: $r_n = o\left(\sqrt{n}\right)$ против $r_n = o\left(\sqrt[3]{n}\right)$.

Следующий результат дает нам понимание того, что происходит при r_n, меньших, чем те, о которых шла речь в теореме 2.

Теорема 3. *Пусть дана последовательность случайных элементов $G_{p_n}(n, r_n, r_n/2)$, где $r_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — такая функция натурального аргумента n, принимающая только четные значения, что для некоторой стремящейся к бесконечности функции f_n выполнено неравенство*

$$r_n \leqslant \frac{1}{\ln 4} \ln \ln n + \frac{1}{\ln 2} \ln \ln \ln n - f_n.$$

Тогда свойство "$\mathrm{Diam}(G_{p_n}(n, r_n, r_n/2)) \leqslant 2$" имеет пороговую вероятность

$$p_n^* = 1.$$

Иными словами: если при всех достаточно больших n выполнено $p_n \leqslant c$ для некоторого $c < 1$, то диаметр случайного графа $G_{p_n}(n, r_n, r_n/2)$ а.п.н. *больше двух.*

3. Доказательства результатов

Дабы не нагромождать выражения, далее везде будем писать просто r, s и p вместо r_n, s_n и p_n. Также условимся, что когда мы пишем какое-то неравенство, то подразумеваем, что оно выполнено асимптотически, т.е. существует такое n_0, что для всех n, больших n_0, неравенство верно.

3.1. Доказательство теоремы 1. Прежде всего докажем некоторое утверждение об устройстве графа $G(n, r, s)$, которое будет являться основным в комбинаторной части доказательства.

Пусть J_n — множество всех пар вершин из $V(n, r)$. Тогда $|J_n| = \frac{1}{2} C_n^r (C_n^r - 1)$. Для $j \in J_n$ обозначим j_1 и j_2 вершины из $V(n, r)$, соответствующие j. Пусть d_j — количество общих соседей для j_1 и j_2.

Лемма 1. *Для любого $j \in J_n$ верно, что*

$$d_j \geqslant d_{\min} := (C_r^s)^2 \, C_{n-2r}^{r-2s}.$$

Кроме того, если $s \neq 0$ и $j_1 \cap j_2 \neq \varnothing$, то существует такая стремящаяся к бесконечности функция ω, что

$$d_j \geqslant (C_r^s)^2 \, C_{n-2r}^{r-2s} \omega(n).$$

Доказательство. Пусть $|j_1 \cap j_2| = t$. Тогда

$$d_j = \sum_{i=0}^{\min\{s,t\}} C_t^i \left(C_{r-t}^{s-i}\right)^2 C_{n-2r+t}^{r-2s+i}.$$

Если $s = 0$, то, очевидно,

$$d_j \geqslant C_{n-2r}^r = d_{\min},$$

и все в порядке. Поэтому будем считать ниже, что $s > 0$. Рассмотрим три случая.

1) Если $t = 0$, то $d_j = (C_r^s)^2 \, C_{n-2r}^{r-2s} = d_{\min}$.

2) Пусть $0 < t < s$. Рассмотрим слагаемое при $i = t$. Тогда

$$d_j \geqslant \left(C_{r-t}^{s-t}\right)^2 C_{n-2r+t}^{r-2s+t} = (C_r^s)^2 \, C_{n-2r}^{r-2s} \left(\frac{C_{r-t}^{s-t}}{C_r^s}\right)^2 \frac{C_{n-2r+t}^{r-2s+t}}{C_{n-2r}^{r-2s}} =$$

$$= d_{\min} \left(\frac{(r-t)!}{(s-t)!(r-s)!} \cdot \frac{s!(r-s)!}{r!}\right)^2 \frac{C_{n-2r+t}^{r-2s+t}}{C_{n-2r}^{r-2s}} =$$

$$= d_{\min}\left(\frac{(r-t)!}{r!}\cdot\frac{s!}{(s-t)!}\right)^2\frac{n^{r-2s+t}}{(r-2s+t)!}\cdot\frac{(r-2s)!}{n^{r-2s}}(1+o(1)) \geqslant$$

$$\geqslant d_{\min}\left(\frac{1}{r^t}\right)^2\frac{n^t}{r^t}(1+o(1)) = d_{\min}\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{r}\right)^{3t}(1+o(1)) = d_{\min}\omega(n) \geqslant d_{min}.$$

3) Пусть $s \leqslant t < r$. Рассмотрим слагаемое при $i = s$. Получаем

$$d_j \geqslant C_t^s\left(C_{r-t}^0\right)^2 C_{n-2r+t}^{r-s} \geqslant C_{n-2r+t}^{r-s} = d_{\min}\frac{C_{n-2r+t}^{r-s}}{\left(C_r^s\right)^2 C_{n-2r}^{r-2s}} \geqslant$$

$$\geqslant d_{\min}\frac{n^{r-s}}{(r-s)!}\cdot\frac{(r-2s)!}{n^{r-2s}}\cdot\frac{1}{r^{2s}}(1+o(1)) \geqslant d_{\min}\frac{n^s}{r^{3s}}(1+o(1)) \geqslant$$

$$\geqslant d_{\min}\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{r}\right)^{3s}(1+o(1)) = d_{\min}\omega(n) \geqslant d_{\min}.$$

Так как $0 \leqslant t < r$, мы рассмотрели все случаи. Из пунктов 2 и 3 следует, что $d_j \geqslant d_{\min}\omega(n)$ при $j_1 \cap j_2 \neq \varnothing$. Отсюда и из пункта 1 мы получаем, что $d_j \geqslant d_{\min}$ при достаточно больших n, и лемма доказана. □

Замечание 1. Условие $r = o(\sqrt[3]{n})$ нужно только для доказательства этой леммы. В дальнейших рассуждениях везде будет достаточно требовать $r = o(\sqrt{n})$, этим мы воспользуемся при доказательстве второй и третьей теорем.

Далее нам потребуется стремление p_n^* к 0, покажем это. Действительно,

$$p_n^* = \sqrt{\frac{2r\ln\frac{n}{r}}{\left(C_r^s\right)^2 C_{n-2r}^{r-2s}}} \leqslant \sqrt{\frac{2r\ln n}{C_{n-2r}^{r-2s}}} \leqslant \sqrt{\frac{\sqrt{n}\ln n}{n-2r}} \to 0.$$

Замечание 2. Здесь мы воспользовались тем, что $r > 2s$, и это единственное место в данной теореме, где это используется. Таким образом, дальнейшие рассуждения верны и для $r = 2s$, при условии, что p_n^* стремится к 0. Как будет показано в доказательстве теоремы 2, это условие есть не что иное, как условие (2) из формулировки теоремы 2.

Вернемся к нашей последовательности случайных графов $G_p(n,r,s)$. Зафиксируем конкретное достаточно большое n. Пусть ξ_n — случайная величина, равная числу пар вершин, между которыми нет ребра и цепи длины 2. Тогда

$$\mathrm{P}(\mathrm{Diam}(G_p(n,r,s)) \leqslant 2) = \mathrm{P}(\xi_n = 0).$$

Пусть $\rho(v_1, v_2)$ — кратчайшее расстояние в графе между вершинами v_1 и v_2. Тогда

$$\xi_n = \sum_{j\in J_n}\mathrm{I}_j,$$

где I_j — индикатор события

$$A_j = \{\rho(j_1, j_2) > 2\}.$$

Если вершины j_1 и j_2 несмежны в графе $G(n,r,s)$, то

$$\mathrm{P}(A_j) = (1-p^2)^{d_j},$$

иначе

$$\mathrm{P}(A_j) = (1-p^2)^{d_j}(1-p).$$

Следовательно,

$$\mathrm{P}(A_j) \leqslant (1-p^2)^{d_j}.$$

В силу леммы 1 получаем, что для любого $j \in J_n$ выполнено неравенство
$$\mathrm{P}(A_j) \leqslant (1-p^2)^{d_{\min}}.$$

Пусть $\mathrm{E}\xi_n$ — математическое ожидание случайной величины ξ_n. Тогда
$$\mathrm{E}\xi_n = \sum_{j \in J_n} \mathrm{EI}_j = \sum_{j \in J_n} \mathrm{P}(A_j) \leqslant \sum_{j \in J_n} (1-p^2)^{d_{\min}} = |J_n|(1-p^2)^{d_{\min}}.$$

Пусть
$$J_n' = \{j \in J_n \mid j_1 \cap j_2 = \varnothing\}.$$
Тогда $|J_n'| = \frac{1}{2} C_n^r C_{n-r}^r$ и для любого $j \in J_n'$ известно, что
$$\mathrm{P}(A_j) = (1-p^2)^{d_{\min}} (1-p)^{\mathrm{I}(s=0)},$$
а значит, справедливо следующее неравенство:
$$\mathrm{E}\xi_n \geqslant \sum_{j \in J_n'} \mathrm{P}(A_j) \sim |J_n'|(1-p^2)^{d_{\min}}.$$
Далее, в силу того, что $|J_n| \sim \frac{n^{2r}}{2(r!)^2} \sim |J_n'|$ при $n \to \infty$ (т.к. $r = o(\sqrt{n})$),
$$\mathrm{E}\xi_n \sim |J_n|(1-p^2)^{d_{\min}} \sim \frac{n^{2r}}{2(r!)^2}(1-p^2)^{d_{\min}}.$$

Рассмотрим $p = cp^*$ (как обычно, опускаем индекс n). Поскольку верно, что $p \to 0$, имеем следующее:
$$1 - p^2 = \exp\{\ln(1-(cp^*)^2)\} = \exp\{-(cp^*)^2(1+o(1))\}.$$

Поэтому
$$\mathrm{E}\xi_n \sim \frac{n^{2r}}{2(r!)^2}(1-c^2(p^*)^2)^{d_{\min}} = \frac{n^{2r}}{2(r!)^2} \exp\left\{-c^2(p^*)^2(1+o(1))\left(C_r^s\right)^2 C_{n-2r}^{r-2s}\right\} =$$
$$= \frac{n^{2r}}{2(r!)^2} \exp\left\{-c^2 2r \ln\frac{n}{r}(1+o(1))\right\} = \frac{n^{2r}}{2(r!)^2}\left(\frac{n}{r}\right)^{-2c^2 r(1+o(1))}.$$

Из условия теоремы не следует, что r стремится к бесконечности, поэтому для оценки $r!$ не достаточно просто сослаться на формулу Стирлинга. Вместо этого будем использовать следующую лемму.

Лемма 2. *Для любого натурального r выполнено неравенство:*
$$r^r \geqslant r! \geqslant \left(\frac{r}{e}\right)^r.$$

Доказательство. Левое неравенство очевидно, а правое легко доказывается по индукции.

□

Предположим, что для p нашлось такое $c > 1$, что $p \geqslant cp^*$ при достаточно больших n. Тогда, начиная с какого-то момента, $1 - p^2 \leqslant 1 - c^2(p^*)^2$ и

$$\mathrm{E}\xi_n \leqslant (1+o(1))\frac{n^{2r}}{2\left(\frac{r}{e}\right)^{2r}}\left(\frac{n}{r}\right)^{-2c^2 r(1+o(1))} \leqslant \frac{e^{2r}}{2}\left(\sqrt{n}\right)^{-2r(c^2-1)(1+o(1))} =$$
$$= \frac{e^{2r}}{2}\left(n^{\frac{c^2-1}{2}}\right)^{-2r(1+o(1))} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$
Отсюда, поскольку $\mathrm{P}(\xi_n \geqslant 1) \leqslant \mathrm{E}\xi_n$, мы получаем, что
$$\mathrm{P}(\mathrm{Diam}(G_p(n,r,s)) \leqslant 2) \to 1,$$
и первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь для p нашлось такое $c < 1$, что $p \leqslant cp^*$ при достаточно больших n. Тогда, начиная с какого-то момента, $1 - p^2 \geqslant 1 - c^2(p^*)^2$ и

$$\mathrm{E}\xi_n \geqslant (1+o(1))\frac{n^{2r}}{2r^{2r}}\left(\frac{n}{r}\right)^{-2c^2r(1+o(1))} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{r}\right)^{2r(1-c^2)(1+o(1))} \to +\infty.$$

Осталось показать, что

$$\mathrm{P}(\mathrm{Diam}(G_p(n,r,s)) \leqslant 2) = \mathrm{P}(\xi_n = 0) = o(1).$$

Для этого нам достаточно доказать, что

$$\frac{\mathrm{D}\xi_n}{(\mathrm{E}\xi_n)^2} = o(1),$$

так как в силу неравенства Чебышева

$$\mathrm{P}(\xi_n = 0) = \mathrm{P}(\xi_n \leqslant 0) = \mathrm{P}(-\xi_n \geqslant 0) =$$

$$= \mathrm{P}(\mathrm{E}\xi_n - \xi_n \geqslant \mathrm{E}\xi_n) \leqslant \mathrm{P}(|\mathrm{E}\xi_n - \xi_n| \geqslant \mathrm{E}\xi_n) \leqslant \frac{\mathrm{D}\xi_n}{(\mathrm{E}\xi_n)^2}.$$

Напомним, что $\mathrm{E}\xi_n \to +\infty$. А значит,

$$\frac{\mathrm{E}\xi_n}{(\mathrm{E}\xi_n)^2} = o(1).$$

Таким образом, имеем следующее утверждение:

$$\frac{\mathrm{D}\xi_n}{(\mathrm{E}\xi_n)^2} = \frac{\mathrm{E}{\xi_n}^2 - (\mathrm{E}\xi_n)^2}{(\mathrm{E}\xi_n)^2} = o(1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{E}\xi_n^2}{(\mathrm{E}\xi_n)^2} = \frac{\mathrm{E}\xi_n(\xi_n - 1) + \mathrm{E}\xi_n}{(\mathrm{E}\xi_n)^2} \to 1 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{E}\xi_n(\xi_n - 1)}{(\mathrm{E}\xi_n)^2} \to 1.$$

Пусть

$$X = \{(i,j) \mid i \in J_n, j \in J_n \backslash \{i\}\}.$$

Тогда

$$\mathrm{E}\xi_n(\xi_n - 1) = \sum_{(i,j)\in X} \mathrm{E}(\mathrm{I}_i\mathrm{I}_j) = \sum_{(i,j)\in X} \mathrm{P}(A_i \cap A_j).$$

Для завершения доказательства нам достаточно так представить X в виде $X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3$, чтобы имела место асимптотика

$$\sum_{(i,j)\in X_1} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) \sim (\mathrm{E}\xi_n)^2,$$

а для $y \in \{2,3\}$ выполнялось равенство

$$\sum_{(i,j)\in X_y} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) = o((\mathrm{E}\xi_n)^2).$$

Для этого рассмотрим такую конструкцию: элемент $j \in J_n$, множество вершин

$$S_j = \{v \in V(n,r)\backslash\{j_1, j_2\} \mid (v, j_1), (v, j_2) \in E(n,r,s)\} \quad (|S_j| = d_j)$$

и, соответственно, множество ребер

$$K_j = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in \{j_1, j_2\}, v_2 \in S_j\}.$$

Заметим, что если $K_i \cap K_j = \varnothing$, то A_i и A_j независимы.

Пусть

$$f(i,j) = |i_1 \cup i_2 \cup j_1 \cup j_2|.$$

Рассмотрим множество

$$X_1 = \{(i,j) \in X \mid f(i,j) = 4r\}.$$

Тогда при $s>0$ для любой пары $(i,j)\in X_1$ верно, что $K_i \cap K_j=\varnothing$. А если $s=0$, то $|K_i \cap K_j|\leqslant 4$. В любом случае у нас сейчас $p\to 0$ и $d_i=d_j=d_{\min}$, и, стало быть,

$$\sum_{(i,j)\in X_1} \mathrm{P}(A_i\cap A_j)\sim |X_1|(1-p^2)^{2d_{\min}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}C_n^r C_{n-r}^r\right)\left(\frac{1}{2}C_{n-2r}^r C_{n-3r}^r\right)(1-p^2)^{2d_{\min}}\sim \frac{n^{4r}}{4(r!)^4}(1-p^2)^{2d_{\min}}\sim (\mathrm{E}\xi_n)^2.$$

Лемма 3. *Если среди вершин i_1, i_2, j_1, j_2 нет одинаковых, то*

$$\mathrm{P}(A_i\cap A_j)\leqslant (1-p^2)^{d_i+d_j-2}.$$

Доказательство. Чтобы выполнилось $A_i\cap A_j$, не должно быть одновременно двух ребер из пар

$$\{(i_1,v),(i_2,v)\mid v\in S_i\},$$

вместе с тем не должно быть одновременно двух ребер из пар

$$\{(j_1,v),(j_2,v)\mid v\in S_j\backslash\{i_1,i_2\}\}.$$

Заметим, что каждое ребро встречается не более чем в одной из рассмотренных пар. А значит,

$$\mathrm{P}(A_i\cap A_j)\leqslant (1-p^2)^{|S_i|+|S_j\backslash\{i_1,i_2\}|}\leqslant (1-p^2)^{d_i+d_j-2}.$$

□

Пусть теперь

$$X_2=\{(i,j)\in X\mid f(i,j)\leqslant 4r-1, |\{i_1,i_2,j_1,j_2\}|=4\}.$$

Тогда для любой пары $(i,j)\in X_2$, в силу леммы 3, выполнено

$$\mathrm{P}(A_i\cap A_j)\leqslant (1-p^2)^{2d_{\min}-2}.$$

Оценим $|X_2|$. Выберем номер вершины, которая пересекается с какой-то из остальных, затем выберем три вершины из C_n^r возможных, далее выберем элемент по которому будет пересечение, и наберем оставшиеся элементы. Получим, что

$$|X_2|\leqslant 4(C_n^r)^3 3rC_n^{r-1}\sim \frac{12r^2}{n}\cdot\frac{n^{4r}}{(r!)^4}.$$

А значит,

$$\frac{\sum\limits_{(i,j)\in X_2}\mathrm{P}(A_i\cap A_j)}{(\mathrm{E}\xi_n)^2}\leqslant (1+o(1))\frac{\frac{12r^2}{n}\cdot\frac{n^{4r}}{(r!)^4}(1-p^2)^{2d_{\min}-2}}{(\mathrm{E}\xi_n)^2}\sim\frac{\frac{12r^2}{n}\cdot\frac{n^{4r}}{(r!)^4}(1-p^2)^{2d_{\min}-2}}{\frac{n^{4r}}{4(r!)^4}(1-p^2)^{2d_{\min}}}\sim\frac{3r^2}{n}\to 0,$$

так как $r=o(\sqrt{n})$.

И наконец,

$$X_3=\{(i,j)\in X\mid |\{i_1,i_2,j_1,j_2\}|=3\}.$$

Тогда

$$|X_3|\leqslant 3(C_n^r)^3\sim 3\frac{n^{3r}}{(r!)^3}.$$

Будем считать, без ограничения общности, что $i_1=j_1$. Рассмотрим три попарно непересекающихся множества:

$$U_1=S_i\setminus(S_i\cap S_j),\quad U_2=S_j\setminus(S_i\cap S_j),\quad U_3=S_i\cap S_j.$$

Событие $A_i\cap A_j$ означает, что для каждой вершины $v\in U_1$ нет хотя бы одного ребра из $(v,i_1),(v,i_2)$, что одновременно для каждой вершины $v\in U_2$ нет хотя бы одного ребра из

$(v, j_1), (v, j_2)$ и что, наконец, для каждой вершины $v \in U_3$ либо нет ребра $(v, i_1) = (v, j_1)$, либо это ребро есть, но нет ребер $(v, i_2), (v, j_2)$. Следовательно,

$$\mathrm{P}(A_i \cap A_j) \leqslant \left(1-p^2\right)^{|U_1|+|U_2|} \left(1-p+p(1-p)^2\right)^{|U_3|}.$$

Заметим, что

$$\left(1-p^2\right)^2 = 1-2p^2+p^4 \leqslant 1-2p^2+p^3 = 1-p+p(1-p)^2.$$

Значит,

$$\mathrm{P}(A_i \cap A_j) \leqslant \left(1-2p^2+p^3\right)^{(|U_1|+|U_2|)/2+|U_3|} = \left(1-2p^2+p^3\right)^{(|S_i|-|U_3|+|S_j|-|U_3|)/2+|U_3|} =$$
$$= \left(1-2p^2+p^3\right)^{(|S_i|+|S_j|)/2} \leqslant \left(1-2p^2+p^3\right)^{d_{\min}} = \left(1-2p^2(1+o(1))\right)^{d_{\min}}.$$

Таким образом,

$$\frac{\sum\limits_{(i,j)\in X_3} \mathrm{P}(A_i \cap A_j)}{(\mathrm{E}\xi_n)^2} \leqslant (1+o(1)) \frac{3\frac{n^{3r}}{(r!)^3}\left(1-2p^2(1+o(1))\right)^{d_{\min}}}{(\mathrm{E}\xi_n)^2} \sim$$
$$\sim \frac{3\frac{n^{3r}}{(r!)^3}\left(1-2p^2(1+o(1))\right)^{d_{\min}}}{\frac{n^{4r}}{4(r!)^4}\left(1-p^2\right)^{2d_{\min}}} \leqslant 12\left(\frac{r}{n}\right)^r e^{-(1+o(1))2p^2 d_{\min}} e^{(1+o(1))2p^2 d_{\min}} =$$
$$= 12\left(\frac{r}{n}\right)^r e^{o(p^2 d_{\min})} = 12\left(\frac{r}{n}\right)^r e^{o(r\ln(n/r))} = 12\left(\frac{r}{n}\right)^r e^{(\ln(n/r))o(r)} = \left(\frac{r}{n}\right)^{(1+o(1))r} = o(1),$$

и все в порядке.

Итак, мы представили X в виде $X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3$ с указанными ограничениями на X_1, X_2, X_3. А значит,

$$\frac{\mathrm{E}\xi_n(\xi_n-1)}{(\mathrm{E}\xi_n)^2} \to 1,$$

откуда

$$\mathrm{P}(\mathrm{Diam}(G_p(n,r,s)) \leqslant 2) = o(1),$$

и вторая часть теоремы доказана.

3.2. Доказательство теоремы 2. Будем пользоваться введенными ранее обозначениями применительно к рассматриваемому графу $G_p(n, r, r/2)$. Прежде всего покажем, что $p^* \to 0$. Так как $r = o(\sqrt{n})$, имеем

$$\frac{1}{2}\ln n \leqslant \ln\frac{n}{r} \leqslant \ln n.$$

В силу этого выполнено

$$p^* \to 0 \Leftrightarrow \frac{\pi r^2 \ln\frac{n}{r}}{2^{2r}} \to 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{r^2\ln n}{4^r}\right) \to -\infty \Leftrightarrow r\ln 4 - 2\ln r - \ln\ln n \to +\infty.$$

Ввиду монотонности функции $r\ln 4 - 2\ln r$ при достаточно больших r последнее будет верно, если оно выполнено при

$$r = \frac{1}{\ln 4}\ln\ln n + \frac{1}{\ln 2}\ln\ln\ln n + f_n.$$

Заметим также, что можно считать функцию f_n равной $o(\ln\ln n)$, так как, если мы докажем утверждение для всякой $f_n = o(\ln\ln n)$, то мы докажем его и для произвольной f_n. Имеем

$$\left(\frac{1}{\ln 4}\ln\ln n + \frac{1}{\ln 2}\ln\ln\ln n + f_n\right)\ln 4 - 2\ln\left(\frac{1}{\ln 4}\ln\ln n + \frac{1}{\ln 2}\ln\ln\ln n + f_n\right) - \ln\ln n \to +\infty$$
$$\Leftrightarrow 2\ln\ln\ln n + f_n\ln 4 - 2\ln\left(\ln\ln n\left(\frac{1}{\ln 4} + o(1)\right)\right) \to +\infty$$
$$\Leftrightarrow f_n\ln 4 - 2\ln\left(\frac{1}{\ln 4} + o(1)\right) \to +\infty.$$

Последнее же выполнено в силу стремления f_n к бесконечности, и стремление к нулю пороговой вероятности доказано.

Мы знаем, что нынешняя последовательность значений p^* асимптотически эквивалентна последовательности из теоремы 1 при $r = 2s$. Стало быть, ввиду замечаний 1 и 2 остается убедиться в том, что в текущий ситуации ($r = 2s$) справедлив аналог леммы 1 и при этом достаточно условия $r = o(\sqrt{n})$. Отметим, что сейчас $d_{\min}$ (см. лемму 1) — это $\left(C_r^{r/2}\right)^2$. Более того, сейчас нет случая $s = 0$.

Лемма 1*. *Для любого $j \in J_n$ верно, что*

$$d_j \geqslant \left(C_r^{r/2}\right)^2.$$

Кроме того, если $j_1 \cap j_2 \neq \varnothing$, то существует такая стремящаяся к бесконечности функция ω, что

$$d_j \geqslant \left(C_r^{r/2}\right)^2 \omega(n).$$

Доказательство. Пусть $|j_1 \cap j_2| = t$. Тогда

$$d_j = \sum_{i=0}^{\min\{r/2,t\}} C_t^i (C_{r-t}^{r/2-i})^2 C_{n-2r+t}^i.$$

Рассмотрим такие же 3 случая, как в доказательстве леммы 1.

1) Если $t = 0$, то $d_j = \left(C_r^{r/2}\right)^2$.

2) Пусть $0 < t < r/2$. Рассмотрим слагаемое при $i = t$. Тогда

$$d_j \geqslant \left(C_{r-t}^{r/2-t}\right)^2 C_{n-2r+t}^t \geqslant \left(C_r^{r/2}\right)^2 \left(\frac{C_{r-t}^{r/2-t}}{C_r^{r/2}}\right)^2 C_{n-2r}^t =$$

$$= \left(C_r^{r/2}\right)^2 \left(\frac{(r-t)!}{(\frac{r}{2}-t)!\frac{r}{2}!} \cdot \frac{(\frac{r}{2}!)^2}{r!}\right)^2 C_{n-2r}^t =$$

$$= \left(C_r^{r/2}\right)^2 \left(\frac{(r-t)!}{r!} \cdot \frac{\frac{r}{2}!}{(\frac{r}{2}-t)!}\right)^2 C_{n-2r}^t \geqslant \left(C_r^{r/2}\right)^2 \left(\frac{1}{r^t} \cdot t!\right)^2 C_{n-2r}^t =$$

$$= \left(C_r^{r/2}\right)^2 \left(\frac{t!}{r^t}\right)^2 \frac{n^t}{t!}(1+o(1)) \geqslant \left(C_r^{r/2}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{n}}{r}\right)^{2t} (1+o(1)) = \left(C_r^{r/2}\right)^2 \omega(n) \geqslant \left(C_r^{r/2}\right)^2.$$

3) Пусть $r/2 \leqslant t < r$. Рассмотрим слагаемое при $i = r/2$. Получаем, что

$$d_j \geqslant C_t^{r/2} (C_{r-t}^0)^2 C_{n-2r+t}^{r/2} \geqslant C_{n-2r}^{r/2} = (1+o(1))\frac{n^{r/2}}{(r/2)!} \geqslant (1+o(1))\frac{n^{r/2}}{(r/2)^{r/2}} >$$

$$> \left(\frac{n}{r}\right)^{r/2} > 2^{2r} > \left(C_r^{r/2}\right)^2 \omega(n).$$

Так как $0 \leqslant t < r$, мы рассмотрели все случаи. Из пунктов 2 и 3 следует, что

$$d_j \geqslant \left(C_r^{r/2}\right)^2 \omega(n)$$

при $j_1 \cap j_2 \neq \varnothing$. А с учетом пункта 1 мы получаем, что

$$d_j \geqslant \left(C_r^{r/2}\right)^2$$

при достаточно больших n, и лемма доказана. □

Теорема 2 доказана.

3.3. Доказательство теоремы 3. Благодаря замечаниям 1 и 2, доказательство почти полностью повторяет доказательство второй части теоремы 1, за тем лишь исключением, что нужно при новом ограничении на r_n доказать стремление к бесконечности величины $\mathrm{E}\xi_n$ — математического ожидания количества пар вершин, между которыми нет ребра и цепи длины 2. Отметим, что в замечании 1 говорится про стремление p к нулю. У нас его сейчас, вообще говоря, нет, но оно нужно было исключительно для исследования величины $\mathrm{E}\xi_n$ (а также для случая $s = 0$): здесь заведомо $s \neq 0$, а математическое ожидание мы теперь как раз и изучим.

Мы хотим показать, что

$$\mathrm{E}\xi_n \sim \frac{n^{2r}}{2(r!)^2}(1-p^2)^{\left(C_r^{r/2}\right)^2} \to +\infty.$$

В силу неравенства $p \leqslant c$ имеем

$$\ln \mathrm{E}\xi_n \geqslant 2r\ln n - 2r\ln r + \left(C_r^{r/2}\right)^2 \ln(1-p^2) \sim 2r\ln n + \left(C_r^{r/2}\right)^2 \ln(1-p^2) \geqslant$$
$$\geqslant 2r\ln n + \left(C_r^{r/2}\right)^2 \ln(1-c^2).$$

Рассмотрим теперь 3 случая.

1) Пусть
$$r \leqslant -\ln(1-c^2).$$
Тогда $2r\ln n \to +\infty$, в то время как величина $\left(C_r^{r/2}\right)^2 \ln(1-c^2)$ ограничена, а значит, $\ln \mathrm{E}\xi_n \to +\infty$.

2) Пусть
$$-\ln(1-c^2) \leqslant r \leqslant \frac{1}{\ln 4}\ln\ln n.$$
Тогда
$$\left(C_r^{r/2}\right)^2 \leqslant 2^{2r} \leqslant \ln n.$$
А потому
$$\ln \mathrm{E}\xi_n \geqslant 2r\ln n + (\ln n)\ln(1-c^2) \geqslant r\ln n \to +\infty.$$

3) Пусть
$$\frac{1}{\ln 4}\ln\ln n \leqslant r \leqslant \frac{1}{\ln 4}\ln\ln n + \frac{1}{\ln 2}\ln\ln\ln n - f_n.$$
Тогда r — растущая функция и
$$\left(C_r^{r/2}\right)^2 \sim \frac{2^{2r}}{\pi\frac{r}{2}}.$$
В силу ограничений на r выполнено неравенство
$$2^{2r} = 4^r \leqslant 4^{\left(\frac{1}{\ln 4}\ln\ln n + \frac{2}{\ln 4}\ln\ln\ln n - f_n\right)} = (\ln n)(\ln\ln n)^2 4^{-f_n}.$$
Тогда, поскольку $r \geqslant \frac{1}{\ln 4}\ln\ln n$, имеем,
$$2r\ln n + \left(\frac{2^{2r}}{\pi\frac{r}{2}}(1+o(1))\right)\ln(1-c^2) \geqslant 2r\ln n +$$
$$+\left(\frac{(\ln n)(\ln\ln n)^2 4^{-f_n}}{r}\frac{2(1+o(1))}{\pi}\right)\ln(1-c^2) \geqslant$$
$$\geqslant 2\left(\frac{1}{\ln 4}\ln\ln n\right)\ln n + \left(\frac{(\ln n)(\ln\ln n)^2}{\left(\frac{1}{\ln 4}\ln\ln n\right)}4^{-f_n}\right)\ln(1-c^2) =$$
$$= (\ln\ln n)(\ln n)\left(\frac{1}{\ln 2} + (\ln 4)\left(\ln(1-c^2)\right)4^{-f_n}\right).$$
Последнее в свою очередь стремится к $+\infty$ в силу стремления к нулю выражения 4^{-f_n}.

Получили, что в каждом из трех случаев $\ln \mathrm{E}\xi_n$ стремится к бесконечности, а значит и в общем случае это верно.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. — М.: Бином. Лаборатория знаний. — 2007.
2. *Боголюбский Л. И., Гусев А. С., Пядеркин М. М., Райгородский А. М.* Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов в некоторых последовательностях графов// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 4. — С. 383–387.
3. *Боголюбский Л. И., Гусев А. С., Пядеркин М. М., Райгородский А. М.* Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов некоторых дистанционных графов// Мат. сб. — 2015. — *206*, № 10. — С. 3–36.
4. *Демехин Е. Е., Райгородский А. М., Рубанов О. И.* Дистанционные графы, имеющие большое хроматическое число и не содержащие клик или циклов заданного размера// Мат. сб. — 2013. — *204*, № 4. — С. 49–78.
5. *Жуковский М. Е., Райгородский А. М.* Случайные графы: модели и предельные характеристики// Усп. мат. наук. — 2015. — *70*, № 1. — С. 35–88.
6. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. — М.: Физматлит, 2002.
7. *Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А.* Теория кодов, исправляющих ошибки. — М.: Радио и связь, 1979.
8. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств// Усп. мат. наук. — 2001. — *56*, № 1. — С. 107–146.
9. *Райгородский А. М.* Вокруг гипотезы Борсука// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23*. — С. 147–164.
10. *Райгородский А. М.* О хроматических числах сфер в евклидовых пространствах// Докл. РАН. — 2010. — *432*, № 2. — С. 174–177.
11. *Райгородский А. М., Михайлов К. А.* О числах Рамсея для полных дистанционных графов с вершинами в $\{0,1\}^n$// Мат. сб. — 2009. — *200*, № 12. — С. 63–80.
12. *Agarwal P. K., Pach J.* Combinatorial Geometry. — N.Y.: John Wiley, 1995.
13. *Balogh J., Kostochka A. V., Raigorodskii A. M.* Coloring some finite sets in $\mathbb{R}^n$// Discuss. Math. Graph Theory. — 2013. — *33*, № 1. — С. 25–31.
14. *Bassalygo L., Cohen G., Zémor G.* Codes with forbidden distances// Discr. Math. — 2000. — *213*. — С. 3–11.
15. *Bollobás B.* Random Graphs. — Cambridge Univ. Press, 2001.
16. *Bollobás B., Narayanan B. P., Raigorodskii A. M.* On the stability of the Erdős–Ko–Rado theorem// `arXiv:1408.1288`
17. *Boltyanski V. G., Martini H., Soltan P. S.* Excursions into combinatorial geometry. — Berlin: Springer-Verlag, 1997.
18. *Graham R. L., Rothschild B. L., Spencer J. H.* Ramsey theory. — N.Y.: John Wiley, 1990.
19. *Janson S., Łuczak T., Ruciński A.* Random graphs. — N.Y.: John Wiley, 2000.
20. *Klee V., Wagon S.* Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory. — Math. Association of America, 1991.
21. *Krivelevich M., Sudakov B.* Pseudo-random graphs// В кн.: «More Sets, Graphs and Numbers»/ под ред. Győri E., Katona G. O. H. Lovász L. — Bolyai Soc. Math. Stud. — 2006. — *15*. — С. 199–262.
22. *Matoušek J.* Using the Borsuk–Ulam theorem. — Berlin: Springer-Verlag, 2003.
23. *Nagy Z.* A certain constructive estimate of the Ramsey number// Mat. Lapok. — 1972. — *23*. — С. 301–302.
24. *Raigorodskii A. M.* Three lectures on the Borsuk partition problem// Lect. Note Ser. — London Math. Soc., 2007. — *347*. — С. 202–248.
25. *Raigorodskii A. M.* On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$// Combinbatorica. — 2012. — *32*, № 1. — С. 111–123.
26. *Raigorodskii A. M.* Coloring distance graphs and graphs of diameters// В кн.: «Thirty Essays on Geometric Graph Theory»/ J. Pach ed. — Springer-Verlag, 2013. — С. 429–460.
27. *Raigorodskii A. M.* Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters// В кн.: «Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics». — Amer. Math. Soc./ Contemp. Math. — 2014. — *625*. — С. 93–109.
28. *Soifer A.* The Mathematical Coloring Book. — Springer-Verlag, 2009.

29. *Székely L. A.* Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems// В кн.: «Paul Erdős and his mathematics», Bolyai Series Budapest/ J. Bolyai Math. Soc. — Springer-Verlag, 2002. — *11.* — С. 649–666.

Л. Исхаков
Московский физико-технический институт (государственный университет)
М. Миронов
Московский физико-технический институт (государственный университет)