М. Д. Сурначёв, О регулярности решений параболических уравнений с двойной нелинейностью и весом, *Тр. ММО*, 2014, том 75, выпуск 2, 309–334

Труды Московского математического общества *Том 75, вып. 2, 2014 г.*

О регулярности решений параболических уравнений с двойной нелинейностью и весом

М. Д. Сурначёв

Исследуется локальная регулярность решений нелинейных параболических уравнений с двойным вырождением и весом. На вес налагается условие p-допустимости, что, в частности, допускает веса из классов Макенхаупта A_p. Доказана локальная гёльдеровость решений без ограничения на постоянство знака. Для неотрицательных решений доказано неравенство Харнака. Прослежена устойчивость констант при приближении параметров уравнения к линейному случаю.

Библиография: 27 названий. *УДК*: 517.957. *MSC2010*: 35K92, 35K65. *Ключевые слова и фразы*: нелинейные параболические уравнения, допустимые веса, регулярность решений, двойное вырождение, классы Макенхаупта, неравенство Харнака.

Посвящается столетию великого математика
Бориса Моисеевича Левитана

§ 1. Введение

В этой работе мы исследуем регулярность решений нелинейных параболических уравнений вида

$$\nu(x)u_t = \operatorname{div}(\nu(x)\mathbf{A}(x,t,u,\nabla u)), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ t \in [T_1, T_2]. \tag{1.1}$$

Предполагается, что поток

$$\mathbf{A}(x,t,u,\xi)\colon \Omega \times [T_1,T_2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

есть каратеодориевская функция (т. е. измеримая по (x,t) для всех (u,ξ) и непрерывная по (u,ξ) для п. в. (x,t)), удовлетворяющая следующим условиям:

$$|\mathbf{A}(x,t,u,\xi)| \leqslant C_0|u|^{m-1}|\xi|^{p-1} + C_u, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{A}(x,t,u,\xi)\cdot\xi \geqslant C_1|\xi|^p|u|^{m-1} - C_l, \tag{1.3}$$

где $p = \mathrm{const} > 2$ и $m = \mathrm{const} > 1$, для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [T_1, T_2]$ и $u \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, где C_0, C_1 есть положительные константы, C_u, C_l есть неотрицательные константы.

Вес $\nu = \nu(x)$ есть неотрицательная функция из $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Той же буквой ν мы будем обозначать и меру, ассоциированную с весом ν, то есть $d\nu = \nu\,dx$ и $\nu(A) = \int\limits_A \nu\,dx$, $\nu(B) = \int\limits_B \nu\,dx\,dt$ для измеримых множеств $A \subset \mathbb{R}^n$ и $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-00058-а и 14-01-31341.

Предполагается, что на вес ν наложено условие *p-допустимости* (*p-admissibility*):

I. (*Удвоение*): Существует константа $C_2 > 0$ такая, что

$$\nu(2B) \leqslant C_2 \nu(B) \tag{1.4}$$

для любого шара $B \subset \mathbb{R}^n$. Здесь $2B$ есть шар с тем же центром, что и B, и удвоенным радиусом.

II. (*Единственность градиента*): Если φ_i есть последовательность локально липшицевых функций, заданных в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и таких, что

$$\int\limits_{\Omega} |\varphi_i|^p \nu \, dx \to 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{\Omega} |\nabla \varphi_i - v|^p \nu \, dx \to 0$$

при $i \to \infty$, где $v \in (L^p(\Omega; \nu \, dx))^n$, то $v \equiv 0$. Это свойство гарантирует, что градиент функции корректно определён.

III. (*Неравенство Соболева*): Существуют константы $\kappa > 1$ и $C_3 > 0$ такие, что

$$\left(\frac{1}{\nu(B)} \int\limits_{B} |\varphi|^{\kappa p} \, d\nu \right)^{1/(\kappa p)} \leqslant C_3 r \left(\frac{1}{\nu(B)} \int\limits_{B} |\nabla \varphi|^p \, d\nu \right)^{1/p} \tag{1.5}$$

для любых шара B радиуса r в $\mathbb{R}^n$ и липшицевой функции φ с компактным носителем в B.

IV. (*Неравенство Пуанкаре*): Существует константа $C_4 > 0$ такая, что

$$\left(\frac{1}{\nu(B)} \int |\varphi - \varphi_B|^p \nu \, dx \right)^{1/p} \leqslant C_4 r \left(\frac{1}{\nu(B)} \int\limits_{B} |\nabla \varphi|^p \nu \, dx \right)^{1/p}, \tag{1.6}$$

где

$$\varphi_B = \frac{1}{\nu(B)} \int\limits_{B} \varphi \, d\nu,$$

для любого шара B радиуса r в $\mathbb{R}^n$ и липшицевой функции φ.

Можно изучать весовые соболевские пространства и не предполагая единственности градиента. Результаты в этом направлении были получены в работе [9].

Два классических примера p-допустимых весов даются классами Макенхаупта A_p и выражениями $[J(x)]^{1-p/n}$, где $J(x)$ есть якобиан квазиконформного отображения при $1 < p < n$. Например, вес $|x|^\delta$ является p-допустимым, если $\delta > -n$. Напомним, что вес ν принадлежит классу Макенхаупта A_p, если

$$C_p(\nu) = \sup \left(\frac{1}{|K|} \int\limits_{K} \nu(x) \, dx \right) \left(\frac{1}{|K|} \int\limits_{K} \left(\frac{1}{\nu(x)} \right)^{1/(p-1)} dx \right)^{p-1} < +\infty, \tag{1.7}$$

где супремум берётся по всем кубам $K \subset \mathbb{R}^n$ с гранями, параллельными координатным плоскостям. Отображение $f(x)\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называют квазиконформным, если $|Df(x)|^n \leqslant C|J_f(x)|$, где $J_f(x) = \mathrm{Det}[Df]$. Другим источником p-допустимых весов служат степени весов из strong A_∞ (см. [21]). Все якобианы квазиконформных отображений являются strong A_∞ весами.

Исключительно важным свойством *p-допустимых* весов является свойство самоулучшаемости, установленное в [22]: если вес является *p-допустимым*, то он и *$(p-\varepsilon)$-допустим* количественно, то есть все константы в определении $(p-\varepsilon)$-допустимости и число $\varepsilon > 0$ вычисляются через константы в определении *p-допустимости*. В этом отношении *p-допустимые* веса ведут себя так же, как и макенхауптовские веса: хорошо известно, что если вес принадлежит макенхауптовскому классу A_p, $p > 1$, то он также принадлежит и $A_{p-\varepsilon}$, при этом диапазон допустимых ε и соответствующая константа $C_{p-\varepsilon}(\nu)$ в определении макенхауптовского веса из $A_{p-\varepsilon}$ выражаются через исходную A_p-константу $C_p(\nu)$. Напомним также, что если вес является *p-допустимым*, то он также *q-допустим* для любого $q > p$.

Градиент ∇u и весовое соболевское пространство $W^{1,p}(\Omega;\nu)$ определяются через процедуру замыкания: будем говорить, что $u \in W^{1,p}(\Omega;\nu)$ и $v \in L^p(\Omega;\nu)$ есть градиент u, $v = \nabla u$, если $u \in L^p(\Omega;\nu)$ и

$$\int\limits_{\Omega} |\varphi_i - u|^p \, d\nu + \int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi_i - v|^p \, d\nu \to 0 \quad \text{при } i \to \infty$$

для некоторой последовательности локально липшицевых на Ω функций φ_i. Норма в $W^{1,p}(\Omega;\nu)$ определяется как

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega;\nu)} = \|u\|_{L^p(\Omega;\nu)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\nu)}.$$

Для p-допустимых весов градиент, определённый таким образом, совпадает с обычным градиентом на локально липшицевых функциях. Если вес ν принадлежит макенхауптовскому классу A_p, то нетрудно убедиться в том, что градиент функции из $W^{1,p}(\Omega;\nu)$ принадлежит $L^1(\Omega)$ и совпадает с градиентом этой функции в смысле теории распределений. Пространство $W_0^{1,p}(\Omega;\nu)$ определяется как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^{1,p}(\Omega;\nu)$.

Определение (слабого) решения уравнения (1.1) является стандартным: будем говорить, что u есть решение уравнения (1.1) в цилиндре $\mathcal{Q} := \Omega \times [T_1, T_2]$, если

$$u \in C([T_1, T_2]; L^2(\Omega;\nu)), \qquad (1 + |u|^{(m-1)p/(p-1)})|\nabla u|^p \in L^1(\mathcal{Q};\nu)$$

и

$$\int u\varphi \, d\nu \Big|_{t=a}^{t=b} - \int\limits_{\Omega\times(a,b)} u\varphi_t \, d\nu \, dt + \int\limits_{\Omega\times(a,b)} \mathbf{A}(x,t,u,\nabla u)\nabla\varphi \, d\nu \, dt = 0 \tag{1.8}$$

для любых $[a,b] \subset [T_1, T_2]$ и $\varphi \in W^{1,1}(T_1, T_2; L^2(\Omega;\nu)) \cap L^p(T_1, T_2; W_0^{1,p}(\Omega;\nu))$. Определение суб(супер)-решения уравнения (1.1) отличается тем, что пробная функция φ берётся неотрицательной, и для суперрешений в (1.8) имеет место знак $\geqslant$, а для субрешений знак $\leqslant$ вместо равенства.

Уравнения с двойной нелинейностью вида (1.1) в случае отсутствия веса, $\nu(x)\equiv 1$, были достаточно подробно изучены А. В. Ивановым в цикле работ [1–8]. Заметим, что А. В. Ивановым изучались знакопостоянные решения, хотя применяемая им техника работает и в общем случае. В частности, были установлены локальные оценки максимума модуля решений и гёльдеровская непрерывность решений. Параллельно исследования в том же направлении проводились В. Веспри [25–27].

Линейные параболические уравнения с весом изучались в работах [12–16]. Для нелинейных параболических уравнений типа p-лапласиана с макенхауптовским весом гёльдеровость решений была получена в работе [23], а неравенство Харнака в работе автора [24]. Для уравнений с двойной нелинейностью с макенхауптовским весом гёльдеровская непрерывность решений изучалась в работе [11].

Следует отметить, что рассматриваются в основном два случая. В первом вес находится только под знаком дивергенции. Модельное уравнение имеет вид

$$u_t = \operatorname{div}(\nu(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

При этом в шкале классов Макенхаупта требование на вес есть $\nu\in A_{1+p/n}$. Именно этому случаю посвящены работы [11, 23, 24] и предшествовавшие им результаты для линейного случая [12–14, 16]. В последних двух работах были рассмотрены веса, зависящие от времени, $\nu=\nu(x,t)$.

Второй класс уравнений — это уравнения, рассматриваемые в настоящей работе, то есть когда вес находится и при производной по времени, и под знаком дивергенции:

$$\nu(x)u_t = \operatorname{div}(\nu(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

В этом случае в шкале классов Макенхаупта класс допустимых весов более широк — $\nu\in A_p$, и совпадает с классом допустимых макенхауптовских весов для эллиптических уравнений. Такие уравнения в линейном случае изучались в работе [15].

Используя классическую мозеровскую итерацию, несложно показать, что все решения (1.1) локально ограничены. Мы не приводим здесь доказательство этого факта. Далее будем предполагать, что все решения, с которыми мы работаем, априори ограничены.

Обозначения. Нам понадобятся следующие обозначения. Через B_R мы обозначаем шар радиуса R с центром в начале координат, x_0+B_R обозначает шар радиуса R с центром в x_0. Для цилиндров вводятся обозначения

$$Q(R,T) = B_R\times[-T,0],$$
$$(x_0,t_0)+Q(R,T) = \{(x,t)\colon |x-x_0|<R,\ t_0-T\leqslant T\leqslant t_0\}.$$

Удобно ввести величины
$$l = \frac{m-1}{p} \quad \text{и} \quad h = 1 - \frac{1}{\kappa},$$
где $\kappa > 1$ есть константа из соболевского неравенства (1.5). Будем говорить, что величина зависит от параметров уравнения и писать $C = C(\text{data})$, если эта величина зависит только от n, p, m и констант C_{0-4}, C_u, C_l. Будем использовать символы C и γ для обозначения различных констант. В разных местах значение этих величин может быть различным. Введём функции
$$\theta(T, \mu, \omega, R) = \frac{T}{(\max(|\mu|, \omega))^{1-m} \omega^{2-p} R^p}$$
и
$$\Gamma(\mu, \omega, R) = \left(C_l + C_u \frac{\omega}{R}\right) \left(\frac{\omega}{R}\right)^{-p} (\max(|\mu|, \omega))^{1-m}.$$
В случае однородного уравнения ($C_u = C_l = 0$) величина Γ есть тождественный нуль. Для цилиндра Q, основание которого есть шар радиуса R, будем обозначать
$$T_\pm(u, Q) = (\max(|\mu_\pm|, \omega))^{1-m} \omega^{2-p} R^p,$$
где
$$\mu_+ = \operatorname{ess\,sup}\{u; Q\}, \quad \mu_- = \operatorname{ess\,inf}\{u; Q\}, \quad \omega = \frac{\mu_+ - \mu_-}{2}.$$
Для знакопеременной величины k выражение k^{1+l} понимается как $|k|^l k$.

Теорема 1. *Пусть u — решение* (1.1) *в цилиндре $\mathscr{Q} = \Omega \times [T_1, T_2]$, причём* $\operatorname{ess\,sup}\{u; \mathscr{Q}\} = M < \infty$. *Тогда, с точностью до изменения на множестве меры ноль, функция u локально непрерывна по Гёльдеру с модулем непрерывности во внутреннем подцилиндре $\Omega_1 \times (T_1 + \varepsilon, T_2)$, $\Omega_1 \Subset \Omega$, $\varepsilon > 0$, зависящем только от данных уравнения, M, ε и от расстояния от Ω_1 до границы Ω.*

В следующей теореме, без ограничения общности, считаем, что рассматриваемое решение непрерывно.

Теорема 2. *Пусть в цилиндре $\mathscr{Q} = (x_0, t_0) + B_{17R} \times [-\lambda T_1, T]$, $\lambda > 0$, задано неотрицательное ограниченное решение уравнения* (1.1). *Пусть $u(x_0, t_0) \geqslant k > 0$. Тогда найдутся положительные константы $\gamma_i = \gamma_i(\text{data}, \lambda)$, $i = 1, 2, 3$, такие, что если $T_1 > k^{3-m-p} R^p$, $T \geqslant \gamma_1 k^{3-p-m} R^p$ и $\Gamma(0, k, R) \leqslant \gamma_2$, то*
$$u(x, t_0 + \gamma_1 k^{3-p-m} R^p) \geqslant \gamma_3 k, \quad |x - x_0| < R.$$

Замечание. Оценки теорем 1, 2 устойчивы при $p \to 2$, $m \to 1$.

§ 2. Свойства весов и весовых соболевских пространств

Известно, что условия эллиптической p-допустимости, приведённые выше, могут быть сведены всего к двум условиям: условию удвоения I и $(1, p)$-неравенству Пуанкаре. Для шара B в $\mathbb{R}^n$ через λB будем обозначать шар с тем же центром и радиусом, равным λ радиусам B.

$(1, p)$-*Неравенство Пуанкаре*: Для некоторых констант $\lambda \geqslant 1$ и $C_5 > 0$ выполняется

$$\frac{1}{\nu(B)} \int |\varphi - \varphi_B| \nu \, dx \leqslant C_5 r \left(\frac{1}{\nu(\lambda B)} \int\limits_{\lambda B} |\nabla \varphi|^p \nu \, dx \right)^{1/p} \tag{2.1}$$

для любого шара $B \subset \mathbb{R}^n$ и ограниченной локально липшицевой функции $\varphi \colon \lambda B \to \mathbb{R}$, где r есть радиус шара B. Известно, что если для веса выполняется условие удвоения и (2.1) с некоторым $\lambda > 1$, то (2.1) выполняется и с $\lambda = 1$ (за счёт изменения C_5).

Очевидно, что $(1, p)$-неравенство Пуанкаре есть следствие IV. С другой стороны, любой вес, который удовлетворяет условию удвоения и $(1, p)$-неравенству Пуанкаре, также удовлетворяет всем условиям p-допустимости, причём константы в I–IV выражаются через константу удвоения в I и константы в $(1, p)$-неравенстве Пуанкаре.

Для нас также важна теорема Лебега о дифференцируемости:

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\nu(B(x, r))} \int\limits_{B(x,r)} f d\nu = f(x) \tag{2.2}$$

для любой $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n; \nu)$ и п. в. $x \in \mathbb{R}^n$. Следующий факт является следствием свойства удвоения, приведём его с доказательством (см. [17]).

Лемма 3. *Для любого шара $B = x_0 + B_r$ и любой $\sigma \in (0, 1)$ выполняется*

$$\frac{\nu(B \setminus (1-\sigma)B)}{\nu(B)} \leqslant C \sigma^\alpha, \quad (1-\sigma)B = x_0 + B_{(1-\sigma)r}, \tag{2.3}$$

где положительные константы α, C зависят только от константы удвоения веса ν и размерности пространства n.

Доказательство. Пусть $r_j = r(1 - 2^{-j})$ и $B_j = x_0 + B_{r_j}$. Рассмотрим сферические слои $L_i = B \setminus B_j$. Из свойства удвоения ν следует, что $\nu(L_i \setminus L_{i+1}) \geqslant \delta \nu(L_{i+1})$, где $\delta > 0$. Отсюда $\nu(L_i) \geqslant (1+\delta)\nu(L_{i+1})$. Итерируя, получаем

$$\nu(L_j) \leqslant (1+\delta)^{1-j} \nu(L_1) < (1+\delta)^{-j} \nu(B).$$

Теперь легко видеть, что

$$\frac{\nu(B \setminus (1-\sigma)B)}{\nu(B)} \leqslant (1+\delta)^{[\log_2 \sigma]} \leqslant (1+\delta)^{\log_2 \sigma + 1} = (1+\delta)\sigma^\alpha,$$

где $\alpha = 1/\log_2(1+\delta)$. □

Весовые соболевские пространства $W^{1,p}(\Omega; \nu)$ и $W_0^{1,p}(\Omega; \nu)$ наследуют все естественные свойства соболевских пространств $W^{1,p}(\Omega)$ и $W_0^{1,p}(\Omega)$ соответственно. Так как мы используем в этой работе технику типа Ди Джорджи, нас особенно интересуют срезки функций по уровню: для $u \in W^{1,p}(\Omega; \nu)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ срезки

$$(u - \lambda)_+ = \max(u, \lambda) - \lambda \quad \text{и} \quad (u - \lambda)_- = \lambda - \min(u, \lambda)$$

также принадлежат $W^{1,p}(\Omega;\nu)$ и их градиенты есть

$$\nabla(u-\lambda)_+ = \begin{cases} 0 & \text{на } \{u \leqslant \lambda\}, \\ \nabla u & \text{на } \{u > \lambda\}, \end{cases} \qquad \nabla(u-\lambda)_- = \begin{cases} 0 & \text{на } \{u \geqslant \lambda\}, \\ -\nabla u & \text{на } \{u < \lambda\}. \end{cases}$$

Более того, если $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\nu)$ и $t \in \mathbb{R}$, то $\nabla u = 0$ п. в. на множестве $\{u = t\} \cap \Omega$. Далее, если u и v есть ограниченные функции из $W^{1,p}(\Omega;\nu)$, то $uv \in W^{1,p}(\Omega;\nu)$ и $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$. Если, кроме того, $v \in W^{1,p}_0(\Omega;\nu)$, то произведение $uv \in$ $\in W^{1,p}_0(\Omega;\nu)$.

Более подробную информацию о p-допустимых весах читатель может найти в [21].

Нам нужно мультипликативное неравенство типа Соболева — Гальярдо — Ниренберга.

Лемма 4. *Пусть $s \in \mathbb{R}$. Для любого шара B радиуса R в $\mathbb{R}^n$ и любой функции $v \in W^{1,p}_0(B;\nu)$ выполняется следующее неравенство*:

$$\frac{1}{\nu(B)} \int\limits_B |v|^{p+sh}\, d\nu \leqslant C \left(\frac{1}{\nu(B)} \int\limits_B |v|^s\, d\nu \right)^h \frac{R^p}{\nu(B)} \int\limits_B |\nabla v|^p\, d\nu \tag{2.4}$$

с положительными константами C и h, не зависящими от B и v.

Доказательство. Пусть $h = 1 - 1/\kappa$, где κ взято из неравенства (1.5). Используя это неравенство и неравенство Гёльдера, получаем

$$\frac{1}{\nu(B)} \int\limits_B |v|^{p+sh}\, d\nu \leqslant \left(\frac{1}{\nu(B)} \int\limits_B |v|^s\, d\nu \right)^h \left(\frac{1}{\nu(B)} \int\limits_B |v|^{\kappa p}\, d\nu \right)^{1/\kappa} \leqslant$$

$$\leqslant C_3^p \left(\frac{1}{\nu(B)} \int\limits_B |v|^s\, d\nu \right)^h \frac{R^p}{\nu(B)} \int\limits_B |\nabla v|^p\, d\nu. \quad \square$$

§ 3. Энергетическая оценка

Лемма 5. *Пусть u — решение* (1.1) *в цилиндре $Q = \Omega \times [T_1, T_2]$. Пусть ξ есть неотрицательная липшицева функция, обращающаяся в нуль в окрестности боковой границы Q. Тогда для любого $k \in \mathbb{R}$ выполняется следующая энергетическая оценка*:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in (T_1,T_2)} \int\limits_\Omega (u-k)_\pm^2 \xi^p\, d\nu + C_0 \iint\limits_Q |u|^{m-1} |\nabla(u-k)_\pm|^p \xi^p\, d\nu\, dt \leqslant$$

$$\leqslant p \iint\limits_Q (u-k)_\pm^2 \xi^{p-1} \xi_t\, d\nu\, dt + C_6 \iint\limits_Q |u|^{m-1} (u-k)_\pm^p |\nabla \xi|^p\, d\nu\, dt +$$

$$+\int\limits_{\Omega}(u-k)_{\pm}^2\xi^p\,d\nu\Big|_{t=-T_1}+\iint\limits_{(u-k)_{\pm}>0}\left(C_l\xi+C_u(u-k)_{\pm}|\nabla\xi|\right)\xi^{p-1}\,d\nu\,dt, \qquad (3.1)$$

где $C_6=2(pC_1)^p(C_0/2)^{1-p}$.

Замечание. Если u есть субрешение (1.1), то оценка (3.1) выполняется для $(u-k)_+$, а если u есть суперрешение (1.1), то оценка (3.1) выполняется для $(u-k)_-$. Таким образом, леммы следующего раздела, основанные на этом неравенстве, справедливы для субрешений в утверждениях, содержащих μ_+, и для суперрешений в утверждениях, содержащих μ_-.

§ 4. Вспомогательные леммы

Следующая лемма является центральным инструментом в нашем доказательстве.

Лемма 6. *Пусть u — неотрицательное решение уравнения* (1.1) *в цилиндре $Q=(x_0,t_0)+Q(R,T)$. Пусть $\mu_+\geqslant\operatorname{ess\,sup}\{u;Q\}$, $\mu_-\leqslant\operatorname{ess\,inf}\{u;Q\}$, $\omega>0$, $a\in(0,1)$. Обозначим $Q_1=(x_0,t_0)+Q(R/2,T/2)$. Тогда найдётся положительная константа $\gamma=\gamma(\mathrm{data})$ такая, что если обозначить*

$$f(\theta,a,\Gamma)=\gamma(1-a)^{(2+p/h)(1+l)}\theta^{-1}\left(1+\Gamma+\frac{1}{\theta}\right)^{-1-1/h},$$

то выполняется следующее:

1) *если*

$$\nu(\{u<\mu_-+\omega\}\cap Q)<f(\theta,a,\Gamma)\nu(Q),$$

где $\theta=\theta(T,\mu_-,\omega,R)$ и $\Gamma=\Gamma(\mu_-,\omega,R)$, тогда $u\geqslant\mu_-+a\omega$ п. в. в цилиндре Q_1;

2) *если*

$$\nu(\{u>\mu_+-\omega\}\cap Q)<f(\theta,a,\Gamma)\nu(Q),$$

где $\theta=\theta(T,\mu_+,\omega,R)$ и $\Gamma=\Gamma(\mu_+,\omega,R)$, тогда $u\leqslant\mu_+-a\omega$ п. в. в цилиндре Q_1.

Доказательство. Будем проводить доказательство одновременно для обоих случаев. Для $j=0,1,\ldots$ введём последовательность уровней

$$k_j=\mu_{\pm}\mp(a\omega+(1-a)2^{-j}\omega),$$

где наличие μ_- соответствует первому случаю, а наличие μ_+ соответствует второму случаю. Для $R_j=(2^{-1}+2^{-j})R$ и $T_j=(2^{-1}+2^{-j})T$ рассмотрим последовательность цилиндров $Q_j=(x_0,t_0)+Q(R_j,T_j)$. Обозначим

$$Y_j=\nu(\{(u-k_j)_{\pm}>0\}\cap Q_j).$$

Для доказательства первого пункта леммы будем использовать семейство энергетических неравенств (3.1) с $(u-k)_-$, а для доказательства второго пункта леммы будем использовать неравенства (3.1) с $(u-k)_+$.

Пусть ξ_j есть гладкие неотрицательные функции, равные нулю возле параболической границы Q_j, равные 1 на цилиндре Q_{j+1} и такие, что

$$|\nabla\xi| + |\xi_t| \leqslant \frac{C}{2^j}, \quad C = C(n).$$

В неравенстве (3.1) оценим интегранты в правой части следующим образом:

$$|u|^{m-1}(u-k)_\pm^p \leqslant 2^{m-1}\max(|\mu_\pm|, \omega)^{m-1}\omega^p, \quad (u-k_j)_\pm^2 \leqslant \omega^2.$$

Третий интеграл в правой части (3.1) исчезает за счёт выбора ξ. Во втором интегранте в левой части (3.1) используем равенство

$$|u|^{m-1}|\nabla(u-k)_\pm|^p = \frac{1}{p+m-1}|\nabla(u^{l+1}-k_j^{l+1})_\pm|^p.$$

Таким образом, мы получаем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \int\limits_{x_0+B_R} (u-k_j)_\pm^2\xi_j^p\,d\nu + \iint\limits_Q |\nabla(u^{l+1}-k_j^{l+1})_\pm|^p\xi_j^p\,d\nu\,dt \leqslant$$
$$\leqslant C2^{pj}Y_jR^{-p}\omega^p(\max(|\mu_\pm|, \omega))^{m-1}\left(1+\Gamma+\frac{1}{\theta}\right).$$

Так как $p>2$ и $0\leqslant\xi_j\leqslant 1$, мы можем заменить ξ^p во втором интегранте в левой части на $\xi^{p^2/2}$. Очевидно, что там же $\xi^{p/2}$ можно внести под знак ∇ за счёт увеличения константы C в правой части. В итоге получаем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \int\limits_{x_0+B_R} (u-k_j)_\pm^2\xi_j^p\,d\nu + \iint\limits_Q \left|\nabla[(u^{l+1}-k_j^{l+1})_\pm\xi_j^{p/2}]\right|^p\,d\nu\,dt \leqslant$$
$$\leqslant C2^{pj}Y_jR^{-p}\omega^p(\max(|\mu_\pm|, \omega))^{m-1}\left(1+\Gamma+\frac{1}{\theta}\right). \quad (4.1)$$

Чтобы применить параболическое соболевское неравенство (2.4), нам надо преобразовать первый интеграл в левой части в интеграл от $(u^{l+1}-k_j^{l+1})_\pm^2\xi^p$. Легко видеть, что

$$(u^{l+1}-k^{l+1})_\pm \leqslant C\max(|\mu_\pm|, \omega)^l(u-k)_\pm.$$

Обозначим $v_j=(u^{l+1}-k_j^{l+1})_\pm\xi_j^{p/2}$. Из (4.1) получаем

$$(\max(|\mu_\pm|, \omega))^{-2l}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \int\limits_{x_0+B_R} v_j^2\,d\nu + \iint\limits_Q |\nabla v_j|^p\,d\nu\,dt \leqslant$$
$$\leqslant C2^{pj}Y_jR^{-p}\omega^p(\max(|\mu_\pm|, \omega))^{m-1}\left(1+\Gamma+\frac{1}{\theta}\right). \quad (4.2)$$

Применяя лемму 4 с параметром $s=2$, получаем

$$\left|k_j^{l+1}-k_{j+1}^{l+1}\right|^{p+2h}Y_{j+1} \leqslant \int\limits_{Q_j} v_j^{p+2h}\,d\nu\,dt \leqslant$$
$$\leqslant C2^{p(1+h)j}R^{-ph}(\nu(B_R))^{-h}Y_j^{1+h}\left(1+\Gamma+\frac{1}{\theta}\right)^{1+h}\omega^{p(1+h)}(\max(|\mu_\pm|, \omega))^{(m-1)(1+h)+2lh}.$$

Для того чтобы получить верхнюю оценку на Y_{j+1}, оценим снизу разность $\left|k_j^{l+1}-k_{j+1}^{l+1}\right|$. Имеем:

$$\left|k_j^{l+1}-k_{j+1}^{l+1}\right| \geqslant C|k_j-k_{j+1}|\left(|k_j|^l+|k_{j+1}|^l\right) \geqslant \\ \geqslant (1-a)\omega 2^{-j(l+1)} \max(|\mu_\pm \mp a\omega|, (1-a)\omega)^l \geqslant \\ \geqslant (1-a)^{1+l}\omega 2^{-j(l+1)} \max(|\mu_\pm|, \omega)^l.$$

В обоих случаях для Y_{j+1} мы получаем следующую оценку:

$$\frac{Y_{j+1}}{2^{(2p(1+h)+l)j}Y_j^{1+h}} \leqslant C(1-a)^{-(p+2h)(1+l)}(\nu(Q))^{-h}\theta^h\left(1+\Gamma+\frac{1}{\theta}\right)^{1+h}.$$

В силу леммы о гипергеометрической сходимости Ладыженской — Уральцевой, $Y_j \to 0$ при $j\to\infty$ при условии что

$$Y_0 \leqslant \gamma(1-a)^{(2+p/h)(1+l)}\theta^{-1}\left(1+\Gamma+\frac{1}{\theta}\right)^{-1-1/h}\nu(Q).$$

Это и есть результат, сформулированный в утверждении леммы. □

Следуя доказательству предыдущей леммы, нетрудно получить следующий факт.

Лемма 7. *Пусть u — решение* (1.1) *в цилиндре* $Q=(x_0,t_0)+Q(R,T)$. *Пусть* $\mu_-\leqslant \operatorname{ess\,inf}\{u;Q\}$, $\mu_+\geqslant \operatorname{ess\,sup}\{u;Q\}$, $\omega>0$, $a\in(0,1)$. *Тогда существует положительная константа* $\gamma=\gamma(\mathrm{data})$ *такая, что*:

1) *если*

$$u(\cdot,t_0-T)\geqslant \mu_-+\omega \ \text{ п. в. на } x_0+B_R$$

и

$$\theta=\theta(T,\mu_-,\omega,R)<\gamma(1-a)^{(2+p/h)(1+l)}(1+\Gamma)^{-1-1/h}, \quad \Gamma=\Gamma(\mu_-,\omega,R),$$

то $u\geqslant\mu_-+a\omega$ *п. в. в цилиндре* $(x_0,t_0)+Q(R/2,T)$;

2) *если*

$$u(\cdot,t_0-T)\leqslant \mu_+-\omega \ \text{ п. в. на } x_0+B_R$$

и

$$\theta=\theta(T,\mu_+,\omega,R)<\gamma(1-a)^{(2+p/h)(1+l)}(1+\Gamma)^{-1-1/h}, \quad \Gamma=\Gamma(\mu_+,\omega,R),$$

то $u\leqslant\mu_+-a\omega$ *п. в. в цилиндре* $(x_0,t_0)+Q(R/2,T)$.

Доказательство. Пусть $R_j=(2^{-1}+2^{-j})R$, $j=0,1,2,\ldots$, $T_j=T$. Все рассуждения леммы 6 повторяются с двумя отличиями: а) срезающие функции ξ_j теперь берутся независимыми от t, т. е. $\xi=\xi(x)$ есть положительная гладкая функция, принимающая значения из $[0,1]$, с компактным носителем в $x_0+B_{R_j}$, равная 1 на $x_0+B_{R_{j+1}}$, удовлетворяющая $|\nabla\xi_j|\leqslant C2^jR^{-1}$; б) цилиндры Q_j имеют ту же высоту, что и исходный цилиндр, т. е. $Q_j=(x_0,t_0)+Q(R_j,T)$. Так как ξ_j не зависят от переменной времени t, первый член в правой части энергетической оценки (3.1), содержащий производную по времени от ξ_j, исчезает. Следовательно, все оценки, полученные нами при доказательстве леммы 6, начиная с (4.1), верны. При этом $(1+\Gamma+1/\theta)$ заменяется на $(1+\Gamma)$. Таким образом, мы приходим к следующему заключению:

1) если

$$\frac{\nu(\{u > \mu_- + \omega\} \cap Q)}{\nu(Q)} < \gamma(1-a)^{(2+p/h)(1+l)}\theta^{-1}(1+\Gamma)^{-1-1/h}, \tag{4.3}$$

то $u \geqslant \mu_- + a\omega$ п. в. в цилиндре $(x_0, t_0) + Q(R/2, T)$;

2) если

$$\frac{\nu(\{u < \mu_+ - \omega\} \cap Q)}{\nu(Q)} < \gamma(1-a)^{(2+p/h)(1+l)}\theta^{-1}(1+\Gamma)^{-1-1/h}, \tag{4.4}$$

то $u \leqslant \mu_+ - a\omega$ п. в. в цилиндре $(x_0, t_0) + Q(R/2, T)$.

Константа $\gamma = \gamma(\text{data}) > 0$ в (4.3) и (4.4) есть константа из утверждения леммы. Очевидно, что левая часть (4.3) и (4.4) не превосходит 1. С другой стороны, если θ удовлетворяет условию в утверждении леммы, то правая часть (4.3) (или (4.4)) больше единицы. Таким образом, в условиях леммы выполнено (4.3) (или (4.4)), откуда и следует требуемое утверждение. □

Прямым следствием этой леммы является следующее утверждение.

Лемма 8. *Пусть u — решение* (1.1) *в цилиндре $Q = (x_0, t_0) + Q(2R, T)$. Пусть $\mu_- \leqslant \operatorname{ess\,inf}\{u, Q\}$, $\mu_+ \geqslant \operatorname{ess\,sup}\{u; Q\}$, $\omega > 0$. Пусть $\theta_\pm = \theta(T, \mu_\pm, \omega, 2R)$. Тогда существует константа $\gamma = \gamma(\text{data}) > 0$ такая, что*:

1) *если для некоторых $t_* \in (t_0 - T, t_0)$ и $\tau \in (0, 1)$ выполняется неравенство $u(x, t_*) < \mu_+ - \tau\omega$ п. в. на $x_0 + B_{2R}$, то $u \leqslant \mu_+ - \xi\omega/2$ п. в. в цилиндре $(x_0, t_0) + Q(R, t_0 - t_*)$, где $\xi = \min(\tau, \delta_0)$, $\delta_0 = (\gamma/\theta_+)^{1/(p-2)}$, при условии что $\Gamma(\mu_+, \xi\omega, R) \leqslant 1$;*

2) *если для некоторых $t_* \in (t_0 - T, t_0)$ и $\tau \in (0, 1)$ выполняется неравенство $u(x, t_*) > \mu_- + \tau\omega$ п. в. на $x_0 + B_{2R}$, то $u \geqslant \mu_- + \xi\omega/2$ п. в. в цилиндре $(x_0, t_0) + Q(R, t_0 - t_*)$, где $\xi = \min(\tau, \delta_0)$, $\delta_0 = (\gamma/\theta_-)^{1/(p-2)}$, при условии что $\Gamma(\mu_-, \xi\omega, R) \leqslant 1$.*

Доказательство. Обозначим

$$Q_1 = (x_0, t_0) + Q(R, t_0 - t_*) \quad \text{и} \quad Q_2 = (x_0, t_0) + Q(2R, t_0 - t_*).$$

Докажем первую часть леммы. Очевидно, что $u(x, t_*) \leqslant \mu_+ - \xi\omega$ п. в. на множестве $x_0 + B_{2R}$ для любого $\xi \in [0, \tau]$. В силу леммы 7, применённой с параметром $a = 1/2$, мы имеем: $u \leqslant \mu_+ - \xi\omega/2$ п. в. в цилиндре Q_1, если

$$\frac{T}{\max(|\mu_+|, \xi\omega)^{1-m}(\xi\omega)^{2-p}(2R)^p} \leqslant \gamma, \tag{4.5}$$

где $\gamma = \gamma(\text{data}) > 0$. Так как левая часть (4.5) не превосходит $\xi^{p-2}\theta_+$, можно взять $\xi = \min(\tau, (\gamma/\theta_+)^{1/(p-2)})$, что и даёт искомую оценку. Доказательство для второго случая аналогично. □

Замечание. Оценка леммы 8 достаточно грубая — например, в случае $\mu = 0$ правильная степень в определении δ_0 есть $\dfrac{1}{m+p-3}$. Однако для наших целей приведённой формы достаточно.

Лемма 9. *Пусть u — решение* (1.1) *в цилиндре $Q = (x_0, t_0) + Q(R, T)$. Пусть $\mu_- \leqslant \operatorname{ess\,inf}\{u; Q\}$, $\mu_+ \geqslant \operatorname{ess\,sup}\{u; Q\}$, $\omega > 0$, $\gamma \in (0, 1)$. Тогда существуют поло-*

жительные константы $\theta_*, \delta, \sigma \in (0,1)$, *которые зависят только от параметров уравнения и* γ, *такие что*:

1) *если*

$$\nu\big(\{u(\cdot, t_0 - T) > \mu_- + \omega\} \cap (x_0 + B_R)\big) \geqslant \gamma\nu(x_0 + B_R) \quad \text{и} \quad \theta = \theta(T, \mu_-, \omega, R) < \theta_*,$$

то

$$\nu\big(\{u(\cdot, t) > \mu_- + (1-\delta)\omega\} \cap (x_0 + B_R)\big) \geqslant \frac{\gamma}{2}\nu(x_0 + B_R)$$

для всех $t \in (t_0 - T, t_0)$, *при условии что* $\Gamma(\mu_-, \omega, \sigma R) \leqslant 1$;

2) *если*

$$\nu\big(\{u(\cdot, t_0 - T) < \mu_+ - \omega\} \cap (x_0 + B_R)\big) \geqslant \gamma\nu(x_0 + B_R) \quad \text{и} \quad \theta = \theta(T, \mu_+, \omega, R) < \theta_*,$$

то

$$\nu\big(\{u(\cdot, t) < \mu_+ - (1-\delta)\omega\} \cap (x_0 + B_R)\big) \geqslant \frac{\gamma}{2}\nu(x_0 + B_R)$$

для всех $t \in (t_0 - T, t_0)$, *при условии что* $\Gamma(\mu_+, \omega, \sigma R) \leqslant 1$.

Доказательство. Доказательство для обоих случаев одно и то же, поэтому мы проводим его только для первого случая. Пусть $k = \mu_- + \omega$. Пусть $\sigma \in (0,1)$ и $\delta > 0$. Пусть $\xi = \xi(x)$ есть гладкая неотрицательная функция со значениями из $[0,1]$, обращающаяся в ноль в окрестности границы $x_0 + B_R$, равная 1 на $x_0 + B_{(1-\sigma)R}$ и такая, что $|\nabla\xi| \leqslant C/(\sigma R)$, $C = C(n)$. Из энергетической оценки (3.1) получаем

$$(\delta\omega)^2\nu\big(\{u(x,t) \leqslant \mu_- + (1-\delta)\omega\} \cap (x_0 + B_{(1-\sigma)R})\big) \leqslant \int\limits_{x_0 + B_R} (u-k)_-^2(\cdot, t)\xi^p\, d\nu \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{x_0 + B_R} (u-k)_-^2(\cdot, t_0 - T)\xi^p\, d\nu + C\int\limits_Q |u|^{m-1}(u-k)_-^p|\nabla\xi|^p\, d\nu\, dt + \Big(C_l + \frac{C_u\omega}{\sigma R}\Big)\nu(Q) \leqslant$$

$$\leqslant \big[(1-\gamma)\omega^2 + C\theta\omega^2\sigma^{-p} + \Gamma(\mu_-, \omega, \sigma R)\theta\omega^2\sigma^{-p}\big]\nu(x_0 + B_R).$$

Отсюда для всех $t \in (t_0, t_0 - T)$ имеем:

$$\frac{\nu\big(\{u(x,t) \leqslant \mu_- + (1-\delta)\omega\} \cap (x_0 + B_R)\big)}{\nu(x_0 + B_R)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1-\gamma}{\delta^2} + \frac{(C + \Gamma(\mu_-, \omega, \sigma R))\theta\sigma^{-p}}{\delta^2} + \frac{\nu(x_0 + B_R \setminus B_{(1-\sigma)R})}{\nu(x_0 + B_R)}.$$

Вначале выберем δ так, что $(1-\gamma)/\delta^2 = 1 - 3\gamma/4$. Далее, выберем σ так, что $\nu(x_0 + B_R \setminus B_{(1-\sigma)R}) \leqslant \gamma\nu(x_0 + B_R)/8$. Для завершения доказательства осталось выбрать θ так, что $(C + \Gamma(\mu_-, \omega, \sigma R))\theta\sigma^{-p}/\delta^2 \leqslant \gamma/8$. □

Следующая лемма известна под названием «телескопический аргумент».

Лемма 10. *Пусть* u — *решение* (1.1) *в цилиндре* $Q = (x_0, t_0) + Q(2R, 2T)$, $\mu_- \leqslant \operatorname{ess\,inf}\{u; Q\}$, $\mu_+ \geqslant \operatorname{ess\,sup}\{u; Q\}$, $\omega > 0$. *Обозначим* $Q_1 = (x_0, t_0) + Q(R, T)$.

1. *Пусть*

$$\nu\big(\{u(\cdot, t) > \mu_- + \omega\} \cap (x_0 + B_R)\big) > \gamma\nu(x_0 + B_R), \quad \gamma > 0,$$

для всех $t\in(t_0-T,t_0)$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *найдётся* $\delta=\delta(\varepsilon,\gamma,\mathrm{data})>0$ *такое, что если* $\theta(T,\mu_-,\delta\omega,R)\geqslant 1$ *и* $\Gamma(\mu_-,\delta\omega,R)\leqslant 1$, *то*

$$\nu(\{u\leqslant\mu_-+\delta\omega\}\cap Q_1)<\varepsilon\nu(Q_1).$$

2. *Пусть*

$$\nu\big(\{u(\cdot,t)<\mu_+-\omega\}\cap(x_0+B_R)\big)>\gamma\nu(x_0+B_R),\quad \gamma>0,$$

для всех $t\in(t_0-T,t_0)$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *найдётся* $\delta=\delta(\varepsilon,\gamma,\mathrm{data})>0$ *такое, что если* $\theta(T,\mu_+,\delta\omega,R)\geqslant 1$ *и* $\Gamma(\mu_+,\delta\omega,R)\leqslant 1$, *то*

$$\nu(\{u\geqslant\mu_+-\delta\omega\}\cap Q_1)<\varepsilon\nu(Q_1).$$

Доказательство. Возьмём гладкую срезающую функцию ξ, обращающуюся в ноль возле параболической границы Q, равную 1 на Q_1, принимающую значения из $[0,1]$ и такую, что $|\nabla\xi|\leqslant 4/R$, $|\xi_t|\leqslant 4/T$. Пусть $k_j=\mu_-+2^{-j}\omega$ для $j=0,1,\ldots,j_*$. Повторяя приведённые выше рассуждения, получим:

$$\int\limits_{Q_1}\left|\nabla(u^{l+1}-k_j^{l+1})_-\right|^p d\nu\,dt\leqslant C2^{-pj}\omega^p\max(|\mu_-|,2^{-j}\omega)^{m-1}R^{-p}\nu(Q)\tag{4.6}$$

при условии что $\theta(T,\mu_-,2^{-j}\omega,R)\geqslant 1/2$ и $\Gamma(\mu_-,2^{-j}\omega,R)\leqslant 1$. Обозначим

$$B=x_0+B_R,\quad A_j=\{u\leqslant k_j\}\cap Q_1,\quad \bar A_j=\{u>k_j\}\cap Q_1,$$
$$A_j(t)=\{u(\cdot,t)\leqslant k_j\}\cap B,\quad \bar A_j(t)=\{u(\cdot,t)>k_j\}\cap B.$$

Далее, нам необходимо следствие неравенства Пуанкаре, которое играет ту же роль, что неравенство Ди Джорджи — Пуанкаре в невесовом случае. Пусть φ есть неотрицательная функция из $W^{1,p}(B,\nu)$. Очевидно, что

$$\overline{\varphi}=\frac{1}{\nu(B)}\int\limits_B\varphi\,d\nu\geqslant k\frac{\nu(\{\varphi\geqslant k\}\cap B)}{\nu(B)}.$$

С другой стороны, для любого $\beta>0$ мы имеем:

$$\frac{1}{\nu(B)}\int\limits_B|\varphi-\overline{\varphi}|^\beta\,d\nu\geqslant\frac{\nu(\{\varphi=0\}\cap B)}{\nu(B)}\overline{\varphi}^\beta\geqslant\left(k\frac{\nu(\{\varphi\geqslant k\}\cap B)}{\nu(B)}\right)^\beta\frac{\nu(\{\varphi=0\}\cap B)}{\nu(B)}.$$

Так как любой p-*допустимый* вес является q-*допустимым* для некоторого положительного $q<p$, определяемого константами, входящими в условия p-допустимости (см. [22]), мы можем использовать (q,q)-неравенство Пуанкаре с $\varphi=(u^{l+1}-k_j^{l+1})_-$, чтобы получить

$$\gamma\left(\left|k_j^{l+1}-k_{j+1}^{l+1}\right|\frac{\nu(A_{j+1}(t))}{\nu(B)}\right)^q\leqslant\left(\left|k_j^{l+1}-k_{j+1}^{l+1}\right|\frac{\nu(A_{j+1}(t))}{\nu(B)}\right)^q\frac{\nu(\overline{A_j}(t))}{\nu(B)}\leqslant$$
$$\leqslant C\frac{R^q}{\nu(B)}\int\limits_{A_j(t)\setminus A_{j+1}(t)}\left|\nabla(u^{l+1}-k_j^{l+1})_-\right|^q d\nu\leqslant$$

$$\leqslant C\frac{R^q}{\nu(B)}\big(\nu(A_j(t)\setminus A_{j+1}(t))\big)^{1-q/p}\left(\int\limits_{A_j(t)\setminus A_{j+1}(t)}\left|\nabla(u^{l+1}-k_j^{l+1})_-\right|^p\,d\nu\right)^{q/p}.$$

Отсюда

$$\left|k_j^{l+1}-k_{j+1}^{l+1}\right|\frac{\nu(A_{j+1}(t))}{\nu(B)}\leqslant$$

$$\leqslant CR\left(\frac{1}{\nu(B)}\int\limits_{A_j(t)\setminus A_{j+1}(t)}\left|\nabla(u^{l+1}-k_j^{l+1})_-\right|^p\,d\nu\right)^{1/p}\left(\frac{\nu(A_j(t)\setminus\, A_{j+1}(t))}{\nu(B)}\right)^{1/q-1/p}.$$

Интегрируя это неравенство по $t\in[t_0-T,t_0]$ и применяя тройное неравенство Гёльдера с показателями $(1/p)^{-1}$, $(1/q-1/p)^{-1}$ и $(1-1/q)^{-1}$ к правой части, мы получаем

$$\left|k_j^{l+1}-k_{j+1}^{l+1}\right|\frac{\nu(A_{j+1})}{\nu(B)}\leqslant$$

$$\leqslant CR\left(\frac{1}{\nu(B)}\int\limits_{A_j\setminus A_{j+1}}\left|\nabla(u^{l+1}-k_j^{l+1})_-\right|^p\,d\nu\,dt\right)^{1/p}\left(\frac{\nu(A_j\setminus A_{j+1})}{\nu(B)}\right)^{1/q-1/p}T^{1-1/q}.$$

Легко видеть, что

$$\left|k_j^{l+1}-k_{j+1}^{l+1}\right|\geqslant C\max(|\mu_-|,2^{-j}\omega)^l2^{-j-1}\omega.$$

Используя эту оценку в предыдущем неравенстве, приходим к

$$\frac{\nu(A_{j+1})}{\nu(Q_1)}\leqslant C\left(\frac{\nu(A_j\setminus A_{j+1})}{\nu(Q_1)}\right)^{1/q-1/p}.$$

Возводя это неравенство в степень $(1/q-1/p)^{-1}$, суммируя по j и используя то, что последовательность $\nu(A_j)$ невозрастающая, для любого j получаем

$$(j+1)\left(\frac{\nu(A_{j+1})}{\nu(Q_1)}\right)^{(1/q-1/p)^{-1}}\leqslant\sum_{i=0}^{j}\left(\frac{\nu(A_{i+1})}{\nu(Q_1)}\right)^{(1/q-1/p)^{-1}}\leqslant C\sum_{i=0}^{j}\frac{\nu(A_i\setminus A_{i+1})}{\nu(Q_1)}\leqslant C.$$

Таким образом, для любого $j\geqslant 1$ имеем

$$\frac{\nu(A_j)}{\nu(Q_1)}\leqslant\left(\frac{C}{j}\right)^{1/q-1/p}. \tag{4.7}$$

Чтобы завершить доказательство леммы в этом случае, остаётся выбрать j_* такой, что $C/j_*\leqslant\varepsilon^{pq/(p-q)}$. Тогда $\delta=2^{-j_*}$. Так как $\theta(T,\mu_-,2^{-j}\omega,R)$ убывает по j, а $\Gamma(\mu_-,2^{-j}\omega,R)$ растёт, то выполнения условий $\theta(T,\mu_-,2^{-j}\omega,R)\geqslant 1$ и $\Gamma(\mu_-,2^{-j}\omega,R)\leqslant 1$ достаточно требовать на последнем шаге. Доказательство для второго случая совершенно аналогично. □

Замечание. Константы в технических леммах этого раздела устойчивы при $p\to 2$, $m\to 1$. Для стабилизации констант гёльдеровской непрерывности при $p\to 2$, $m\to 1$ нужна модификация леммы 10. В формулировку надо внести такие дополнения. Если $\delta\omega<|\mu|$, то найдётся такая $\sigma=\sigma(\varepsilon,\gamma,\mathrm{data})>0$, что условие $\theta(T,\mu,\delta\omega,R)\geqslant 1$ можно заменить на $\theta(T,\mu,\omega,R)\geqslant 1$, если $p<2+\sigma$. Величина σ от p не зависит. Если $\delta\omega>|\mu|$, то такую замену можно сделать при условии, что $m+p<3+\sigma$, где σ не зависит m,p. Для этого надо заметить, что для $\sigma=j_*^{-1}$ указанные условия гарантируют, что $\theta(T,\mu,2^{-j}\omega,R)\geqslant 1/2$ при $j=1,\dots,j_*$, если $\theta(T,\mu,\omega,R)\geqslant 1$. Далее, условие $\theta(T,\mu,\omega,R)>1$ может быть заменено на $\theta(T,\mu,\omega,R)>\lambda$ для любого фиксированного $\lambda>0$. При этом в неравенстве (4.7) величина C заменится на $C(1+\lambda^{-1})$. Соответственно величины δ,σ будут зависеть также и от λ.

§ 5. Доказательство гёльдеровской непрерывности

Лемма 11. *Пусть u — решение* (1.1) *в цилиндре* $Q=(x_0,t_0)+Q(8R,T)$. *Обозначим* $T_+=T_+(u,Q)$, $Q_{\text{top}}=(x_0,t_0)+Q(R,T_+)$, $\mu_-=\operatorname{ess\,inf}\{u;Q\}$, $\mu_+=\operatorname{ess\,sup}\{u;Q\}$, $\omega=(\mu_+-\mu_-)/2$. *Тогда существуют такие* $N=N(\text{data})\in\mathbb{N}$, $\delta=\delta(\text{data})>0$ *и* $C=C(\text{data})>0$, *что если* $T\geqslant 2NT_+(u,Q)$ *и* $\Gamma(\mu_+,\omega,R)\leqslant C$, *то*

$$\operatorname{ess\,osc}\{u;Q_{\text{top}}\}<(1-\delta)\operatorname{ess\,osc}\{u;Q\}.$$

Доказательство. Будем обозначать $T_\pm=T_\pm(u,Q)$. Заметим, что

$$4^{1-m}\leqslant\left(\frac{\max(|\mu_+|,|\mu_+-\mu_-|/2)}{\max(|\mu_-|,|\mu_+-\mu_-|/2)}\right)^{m-1}\leqslant 4^{m-1}$$

в силу неравенства треугольника. Поэтому,

$$4^{1-m}\leqslant\frac{T_-}{T_+}\leqslant 4^{m-1},\qquad 4^{1-m}\leqslant\frac{\Gamma(\mu_-,\omega,R)}{\Gamma(\mu_+,\omega,R)}\leqslant 4^{m-1}.$$

Пусть $T\geqslant 2NT_+$, где $N\geqslant 2$ есть натуральное число, которое будет выбрано позже. Для $j=0,\dots,N$ обозначим $t_j=t_0-jT_0$. Рассмотрим цилиндры $Q_j=$ $=(x_0,t_j)+Q(4R,T_+)$, $Q^{(1)}=(x_0,t_0)+Q(4R,NT_+)$ и $Q^{(2)}=(x_0,t_0)+Q(2R,NT_+/2)$.

Будем применять в цилиндрах Q_j, $j=1,\dots,N$, лемму 6 с параметром $a=1/2$. Эта лемма утверждает, что если

$$\nu(\{u>\mu_+-\omega\}\cap Q_j)<\gamma\theta^{-1}\Big(1+\frac{1}{\theta}\Big)^{-1-1/h}\nu(Q_j),$$

где $\gamma=\gamma(\text{data})>0$, $\theta=\theta(T_+,\mu_+,\omega,4R)$ и $\Gamma(\mu_+,\omega,4R)\leqslant 1$, то в цилиндре $(x_0,t_j)+Q(2R,T_+/2)$ мы имеем $u\leqslant\mu_+-\omega/2$. Легко видеть, что число $\theta=2^p$. Таким образом, существует малое положительное число $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\text{data})$ такое, что если в каком-то Q_j выполняется

$$\nu(\{u>\mu_+-\omega\}\cap Q_j)<\varepsilon_0\nu(Q_j),$$

то

$$u\leqslant\mu_+-\frac{\omega}{2}\quad\text{в цилиндре}\quad(x_0,t_j)+Q\Big(2R,\frac{T_+}{2}\Big).$$

В силу леммы 8, применённой в цилиндре $(x_0,t_0)+Q(2R,t_0-t_j)$, последняя оценка влечёт

$$\operatorname{ess\,sup}\{u;Q_{\text{top}}\}\leqslant\mu_+-\gamma N^{1/(2-p)}\omega,$$

при условии что $\Gamma(\mu_+, \xi\omega, R) \leqslant 1$, где $\xi = \min(1/2, (\gamma/N)^{1/(p-2)})$. Это есть желаемое уменьшение осцилляции, как только мы зафиксируем число N.

Теперь мы переходим ко второй части альтернативы — когда во всех цилиндрах Q_j, $j = 1, \ldots, N$, выполняется

$$\nu(\{u > \mu_+ - \omega\} \cap Q_j) > \varepsilon_0 \nu(Q_j).$$

Из этого следует, что для всех j найдётся момент времени $\tau_j \in (t_{j+1}, t_j)$ такой, что

$$\nu\big(\{u(\cdot, \tau_j) > \mu_- + \omega\} \cap (x_0 + B_{4R})\big) > \varepsilon_0 \nu(x_0 + B_{4R}). \tag{5.1}$$

Используя лемму 9, мы можем продолжить эту оценку меры вперёд по времени до момента t_{j-1}. Пусть $Q_j^{(1)} = (x_0, t_{j-1}) + Q(4R, t_{j-1} - \tau_j)$ и $\xi \in (0, 1)$. Очевидно, что вместо ω в (5.1) можно писать $\xi\omega$. Лемма 9 утверждает, что найдётся число $\delta_1 = \delta_1(\mathrm{data}) > 0$ такое, что

$$\nu\big(\{u(\cdot, t) > \mu_- + \delta_1 \xi\omega\} \cap (x_0 + B_{4R})\big) > \frac{\varepsilon_0}{2} \nu(x_0 + B_{4R}) \tag{5.2}$$

для всех $t \in (\tau_j, t_{j-1})$, если только

$$\theta(t_{j-1} - \tau_j, \mu_-, \xi\omega, 4R) < \theta_*, \quad \text{где } \theta_* = \theta_*(\mathrm{data}) > 0,$$

и

$$\Gamma(\mu_-, \xi\omega, 4\sigma R) \leqslant C, \quad \text{где } C = C(\mathrm{data}), \ \ \sigma = \sigma(\mathrm{data}) \in (0, 1).$$

Так как

$$\theta(t_{j-1} - \tau_j, \mu_-, \xi\omega, 4R) \leqslant \xi^{p-2} 2^p \frac{T_+}{T_-} \leqslant C(m, p) \xi^{p-2},$$

неравенство (5.2) выполняется с $\xi = \xi(\mathrm{data}) > 0$ для всех j. Таким образом, для всех $t \in (t_N, t_0)$ мы имеем:

$$\nu\big(\{u(\cdot, t) > \mu_- + \alpha\omega\} \cap (x_0 + B_{4R})\big) > \frac{\varepsilon_0}{2} \nu(x_0 + B_{4R}), \quad \text{где } \alpha = \alpha(\mathrm{data}) > 0,$$

при условии что $\Gamma(\mu_-, \xi\omega, 4\sigma R) \leqslant 1$. В силу леммы 10 для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если

$$\theta_2(\varepsilon) = \theta(NT_+, \mu_-, \alpha\delta(\varepsilon)\omega, 4R) \geqslant 1 \quad \text{и} \quad \Gamma(\mu_-, \alpha\delta(\varepsilon)\omega, 4R) \leqslant 1, \tag{5.3}$$

то

$$\nu\big(\{u < \mu_- + \alpha\delta(\varepsilon)\omega\} \cap Q^{(1)}\big) < \varepsilon \nu(Q^{(1)}). \tag{5.4}$$

Обозначим

$$\theta_3(\varepsilon) = \theta(T_+, \mu_-, \alpha\delta(\varepsilon)\omega, 4R).$$

Несложно видеть, что

$$\theta_2(\varepsilon) = N\theta_3(\varepsilon) = N\left(\frac{\max(|\mu_-|, \alpha\delta(\varepsilon)\omega)}{\max(|\mu_+|, \omega)}\right)^{m-1} (\alpha\delta(\varepsilon))^{p-2} 2^p \geqslant CN(\alpha\delta(\varepsilon))^{m+p-3}.$$

Таким образом, если выбрать целое число $N \in [1/\theta_3(\varepsilon), 1/\theta_3(\varepsilon) + 1)$, то (5.3) выполнено, а значит, (5.4) также выполнено. При таком выборе $N = N(\varepsilon)$ имеем:

$$1 \leqslant \theta_2(\varepsilon) \leqslant 1 + \theta_3(\varepsilon) \leqslant C(m, p).$$

Теперь мы будем применять лемму 6 с параметром $a=1/2$ в цилиндре $Q^{(1)}$. Эта лемма утверждает, что если

$$\nu\big(\{u<\mu_-+\alpha\delta(\varepsilon)\omega\}\cap Q^{(1)}\big)<H(\theta_2(\varepsilon)), \tag{5.5}$$

где $H(\theta)=C\theta^{-1}(1+1/\theta)^{-1-1/h}$, $C=C(\mathrm{data})>0$, и $\Gamma(\mu_-, \alpha\delta(\varepsilon), 4R)\leqslant 1$, то

$$u\geqslant \mu_-+\alpha\delta(\varepsilon)\frac{\omega}{2} \quad \text{п. в. в цилиндре } Q^{(2)}. \tag{5.6}$$

Так как при нашем выборе $N=N(\varepsilon)$ выполняется $\theta_2(\varepsilon)\in[1, C(m,p)]$, то для всех $\varepsilon\in(0,1)$ выполняется $H(\theta_2(\varepsilon))\in(\gamma_3,\gamma_4)$, где $\gamma_{3,4}=\gamma_{3,4}(\mathrm{data})>0$. Возьмём $\varepsilon=\gamma_3$. Для этого выбора ε находим значение $N=N(\varepsilon)$ и $\delta=\delta(\varepsilon)$. При этом выборе выполняется (5.5), а значит, и (5.6), что и даёт желаемое уменьшение осцилляции при условии, что

$$\Gamma(\mu_+, \gamma N^{1/(2-p)}\omega, 4R)\leqslant 1, \quad \Gamma(\mu_-, \xi\omega, 4\sigma R)\leqslant 1, \quad \Gamma(\mu_-, \alpha\delta\omega, 4R)\leqslant 1,$$

где $\xi, \gamma, \sigma, \alpha$ — положительные константы, зависящие только от данных задачи. Легко проверить, что найдётся такая константа $C=C(\mathrm{data})>0$, что эти условия выполнены, если $\Gamma(\mu_+, \omega, R)\leqslant C$. □

Замечание. Оценки, полученные в доказательстве леммы 11, вырождаются при $p\to 2$. Покажем устойчивость констант этой леммы при $p\to 2$. Условия на $\Gamma(\ldots)$ писать не будем, в итоге они также сводятся к $\Gamma(\mu_+, \omega, R)\leqslant C=C(\mathrm{data})$.

Будем считать, без ограничения общности, что $|\mu_-|>\omega$. Пусть число $\lambda=\lambda(\mathrm{data})$ достаточно мало. Это число будет зафиксировано в ходе доказательства. Имеет место следующая альтернатива. В цилиндре

$$Q_3=(x_0+B_{4R})\times[t_0-2\lambda T_+, t_0-\lambda T_+]$$

имеем или

$$\nu(\{u>\mu_+-\omega\}\cap Q_3)<\varepsilon_0\nu(Q_3), \tag{5.7}$$

или

$$\nu(\{u>\mu_-+\omega\}\cap Q_3)\geqslant\varepsilon_0\nu(Q_3). \tag{5.8}$$

Число $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\lambda)$ выберем таким образом, чтобы в Q_3 можно было применить лемму 6 с параметром $a=1/2$. Итак, если выполняется первая альтернатива (5.7), то получаем $u(x, t_0-\lambda T_+)\leqslant\mu_+-\omega/2$, $|x-x_0|<2R$. Далее, воспользуемся леммой 7 с параметрами $a=1/2$ и $\omega/2$ вместо ω. Получим $u\leqslant\mu_+-\omega/4$ в цилиндре $(x_0, t_0)+Q(R, \lambda T_+)$ при условии, что $\lambda\leqslant\lambda_1(\mathrm{data})$. Пусть теперь имеет место (5.8). Тогда найдётся такое $t_*\in[t_0-2\lambda T_+, t_0-\lambda T_+]$, что

$$\nu\big(\{u(\cdot, t_*)>\mu_-+\omega\}\cap(x_0+B_{4R})\big)\geqslant\varepsilon_0\nu(x_0+B_{4R}).$$

Применяя лемму 9, получаем существование такого δ_1, что

$$\nu\big(\{u>\mu_-+\delta_1\omega\}\cap(x_0+B_{4R})\big)\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}\nu(x_0+B_{4R}), \quad t_*\leqslant t\leqslant t_0,$$

при условии что $\lambda \leqslant \lambda_2(\mathrm{data})$. Выбираем $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$. Соответственно, фиксируем ε_0, δ_1. Теперь в цилиндре $Q_4 = (x_0, t_0) + Q(8R, \theta_* T_+)$ применим лемму 10 с учётом замечания. Получим, что для любого ε найдутся такие $\delta(\varepsilon), \sigma(\varepsilon) > 0$, что для $Q_5 = (x_0, t_0) + Q(4R, \theta_* T_+/2)$ выполняется

$$\nu\Big(\{u < \mu_- + \delta_1 \delta(\varepsilon)\omega\} \cap Q_5\Big) < \varepsilon \nu(Q_5), \quad \delta(\varepsilon)^{2-p} \leqslant 2,$$

при условии что $p < 2 + \sigma(\varepsilon)$. Осталось взять такое ε, чтобы в Q_5 можно было применить лемму 6 с параметром $a = 1/2$ и $\delta_1 \delta\omega$ вместо ω. Несложно видеть, что

$$\theta + \theta^{-1} \leqslant C(\mathrm{data}), \quad \theta = \theta\Big(\frac{\lambda T_+}{2}, \mu_-, \delta_1 \delta\omega, 4R\Big).$$

Поэтому можно выбрать $\varepsilon = \varepsilon(\mathrm{data})$ такой, что

$$u \geqslant \mu_- + \frac{1}{2}\delta_1 \delta(\varepsilon)\omega \quad \text{в цилиндре } (x_0, t_0) + Q\Big(2R, \frac{\lambda T_+}{4}\Big),$$

если $p < 2 + \sigma(\varepsilon)$. Все константы в этом доказательстве можно считать не зависящими от p, если p близко к 2.

Таким образом, находим такие числа $\theta_* = \theta_*(\mathrm{data}) > 0$, $\sigma = \sigma(\mathrm{data}) > 0$, $\gamma = \gamma(\mathrm{data}) > 0$, не зависящие от p, что если решение u задано в цилиндре $\mathcal{Q} = (x_0, t_0) + Q(8R, T)$, где $T \geqslant 2\theta_* T_+(\mathcal{Q})$ и $p < 2 + \sigma$, то в цилиндре $\mathcal{Q}_1 = (x_0, t_0) + Q(R, \theta_* T/4)$ имеем

$$\operatorname{ess\,osc}\{u; \mathcal{Q}_1\} < (1-\gamma) \operatorname{ess\,osc}\{u; \mathcal{Q}\}.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть u — решение (1.1) в цилиндре $Q = (x_0, \xi_0) + Q(R, T)$. Пусть N есть число из леммы 11. Мы строим последовательность цилиндров

$$Q_j = (x_0, \xi_0) + Q(R_j, t_j), \quad \text{где } R_j = \delta^j R, \quad \delta \in \Big(0, \frac{1}{8}\Big),$$

а t_j зависит от поведения u в цилиндре Q_{j-1}. Без ограничения общности можно считать, что $\delta^p < 1/(2N)$. В каждом из цилиндров Q_j мы обозначаем

$$\mu_j = \operatorname{ess\,sup}\{u; Q_j\}, \quad \omega_j = \frac{1}{2} \operatorname{ess\,osc}\{u; Q_j\},$$

$$b_j = (\max(|\mu_j|, \omega_j))^{m-1} \omega_j^{p-2}, \quad a_j = \frac{2NR_j^p}{t_j}.$$

Удобно иметь в виду соотношение $2Nb_j T_+(Q_j) = a_j t_j$. Определим последовательность t_j, $j = 0, 1, \ldots$, следующим образом. Положим $t_0 = T$. На каждом шаге возможны три варианта.

I. Если $t_j \geqslant 2NT_+(Q_j)$, что эквивалентно $b_j \geqslant a_j$, и $\Gamma(\mu_j, \omega_j, R_j/8) \leqslant 1$, то полагаем $t_{j+1} = T_+(Q_j)$. В силу леммы 11, в этом случае выполняется

$$\omega_{j+1} \leqslant (1-\gamma)\omega_j, \quad \text{где } \gamma = \gamma(\mathrm{data}) > 0, \tag{5.9}$$

а также

$$t_{j+1} = T_+(Q_j) \leqslant \delta^{-p} T_+(Q_{j+1}).$$

II. Если $t_j < 2NT_+(Q_j)$, что эквивалентно $b_j < a_j$, или $\Gamma(\mu_j, \omega_j, R_j/8) > 1$, то полагаем $t_{j+1} = t_j/(2N)$. В этом случае выполняется

$$a_{j+1} = \frac{2NR_{j+1}^p}{t_{j+1}} = 2N\delta^p a_j, \tag{5.10}$$

а также

$$t_{j+1} = \frac{t_j}{2N} < T_+(Q_j) \leqslant \delta^{-p} T_+(Q_{j+1}). \tag{5.11}$$

III. Может быть так, что $t_j \geqslant 2NT_+(Q_j)$, но $\Gamma_j = \Gamma(\mu_j, \omega_j, R_j/8) \geqslant 1$. В этом случае также полагаем $t_{j+1} = t_j/(2N)$, что даёт неравенство (5.11). Кроме того, в этом случае из неравенства для Γ_j получаем оценку $\omega_j \leqslant C \max(R_j, R_j^q)$, где $q = (p-1)/(p+m-2) \in (0, 1)$. Таким образом, во всех случаях

$$t_j \leqslant \delta^{-p} T_+(Q_j), \quad j \geqslant 1.$$

Отсюда немедленно следует, что

$$t_{j+1} \geqslant \min\Big(\delta^p, \frac{1}{2N}\Big) t_j \quad \text{и} \quad b_j \leqslant \frac{a_j}{2N\delta^p} \quad \text{для всех } j \geqslant 1.$$

Выберем

$$\delta = \min\Big(\frac{1}{8}, \Big(\frac{1}{4N}\Big)^{1/p}\Big).$$

Заметим, что

$$\omega_j^{m+p-3} \leqslant b_j \leqslant \frac{a_j}{2N\delta^p} \quad \text{для } j \geqslant 1. \tag{5.12}$$

Если номер k максимальный из промежутка $[1, j]$, на котором имеем место вариант III, то из (5.9), (5.10) и (5.12) получаем, что

$$\omega_j \leqslant C\alpha^{j-k} \max(R_k, CR_k^q) \leqslant C(\max(\alpha, \delta))^j \max(R^q, R).$$

Если же среди шагов с номерами из $[1, j]$ нет шага, на котором имеет место вариант III, то получаем оценку

$$\omega_j \leqslant C\alpha^j \omega_1.$$

Изменяя число α, можно считать, что в любом случае

$$\omega_j \leqslant C\alpha^j \max(R^q, R, \omega_1). \tag{5.13}$$

Теперь мы готовы к тому, чтобы выписать явно оценку модуля непрерывности. Возьмём две точки (x_0, ξ_0) и (y, τ) такие, что $\xi_0 > \tau$. Мы можем предположить, что $Q_0 = (x_0, \xi_0) + Q(R, T) \subset \mathcal{Q}$ и $(y, \tau) \in Q_0$. Начиная с Q_0, построим последовательность цилиндров $(x_0, \xi_0) + Q(\delta^j R, t_j)$, как это было сделано выше. Обозначим

$$\Delta x = |y - x_0|, \quad \Delta t = |\tau - \xi_0|,$$

$$\mu_+ = \operatorname{ess\,sup}\{u; Q_0\}, \quad \omega = \frac{1}{2} \operatorname{ess\,osc}\{u; Q_0\}, \quad \mu = \max(|\mu_+|, \omega).$$

Заметим, что

$$t_1 \geqslant \min\Big(\frac{T}{2N}, \mu^{1-m}\omega^{2-p} R^p\Big).$$

Очевидно, что точка (y,τ) лежит внутри цилиндра Q_j, если

$$\frac{\Delta x}{R}\leqslant\delta^j\quad\text{и}\quad\frac{\Delta t}{t_1}\leqslant\Delta t\max\Bigl(\frac{2N}{T},\frac{\mu^{m-1}\omega^{p-2}}{R^p}\Bigr)\leqslant\delta^{p(j-1)}.$$

Таким образом, $(y,\tau)\in Q_j$ для всех

$$j\leqslant j_*=\min\biggl(\log_\delta\frac{\Delta x}{R},\ \log_\delta\Bigl(\Delta t\max\Bigl(\frac{2N}{T},\frac{\mu^{m-1}\omega^{p-2}}{R^p}\Bigr)\Bigr)^{1/p}\biggr)-2,$$

и мы получаем оценку

$$\begin{aligned}|u(y,\tau)-u(x_0,\xi_0)|&\leqslant C\alpha^{j_*}\omega_1\leqslant\\&\leqslant C\max(\omega,R^q,R)\Bigl[\Bigl(\frac{\Delta x}{R}\Bigr)^{p\beta}+\Bigl(\Delta t\max\Bigl(\frac{2N}{T},\frac{\mu^{m-1}\omega^{p-2}}{R^p}\Bigr)\Bigr)^{\beta}\Bigr],\end{aligned}$$

где $\beta=\dfrac{\log_\alpha\delta}{p}$. □

§ 6. Неравенство Харнака

Нам понадобится одна важная техническая лемма о «распространении положительности» (*expansion of positivity* [19]).

Лемма 12. *Пусть u — неотрицательное суперрешение в цилиндре $Q=(x_0,t_0)+B_{8R}\times[0,T]$. Пусть для $k>0$ выполняется*

$$\nu\bigl(\{u(\cdot,t_0)>k\}\cap(x_0+B_R)\bigr)\geqslant\alpha\nu(x_0+B_R),\quad\alpha>0.$$

Тогда найдутся такие положительные константы $\gamma_i=\gamma_i(\mathrm{data},\alpha)$, $i=\overline{1,4}$, что если $T>\gamma_1k^{3-m-p}R^p$ и $\Gamma(0,k,R)\leqslant\gamma_3$, то

$$u(x,t)\geqslant\gamma_4k,\quad|x-x_0|<2R,\quad t\in(\gamma_1k^{3-m-p}R^p,\ \gamma_2k^{3-m-p}R^p).$$

Доказательство. Проведём доказательство только для первого случая. Будем считать, что $t_0=0$. В силу леммы 9, применённой с $\mu_-=0$, $\omega=k$, найдутся такие положительные константы δ,σ,θ_*, зависящие только от параметров уравнения, что для любого $\xi\in(0,1)$ имеем

$$\nu\bigl(\{u(\cdot,t)>\delta\xi k\}\cap(x_0+B_R)\bigr)\geqslant\frac{\alpha}{2}\nu(x_0+B_R),\quad\alpha>0,$$

для всех $t<\theta_*(\xi k)^{3-m-p}R^p$ при условии что $\Gamma(0,\xi k,\sigma R)\leqslant1$. Используя значение

$$\xi=\min\Bigl\{1,\ \Bigl(\frac{t}{\theta_*k^{3-m-p}R^p}\Bigr)^{1/(3-m-p)}\Bigr\},$$

получаем следующую оценку:

$$\nu\bigl(\{u(\cdot,t)>\delta\varphi(t)k\}\cap(x_0+B_R)\bigr)\geqslant\frac{\alpha}{2}\nu(x_0+B_R),\quad\alpha>0,$$

$$\varphi(t)=\begin{cases}1, & t\leqslant\theta_*k^{3-m-p}R^p,\\ \Bigl(\dfrac{t}{\theta_*k^{3-m-p}R^p}\Bigr)^{1/(3-m-p)}, & t>\theta_*k^{3-m-p}R^p.\end{cases}$$

Сделаем замену

$$u = \delta\varphi(t)v, \quad \tau = \tau(t) = \int_0^t (\delta\varphi(s))^{m+p-3}\, ds.$$

Для v получаем уравнение

$$\nu(x)\frac{\partial v}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\nu(x)\mathbf{B}(x, \tau, v, \nabla v)) - \nu(\delta\varphi)^{3-m-p}\varphi_t v,$$

где поток

$$\mathbf{B}(x, \tau, v, \xi) = (\delta\varphi)^{3-m-p}\mathbf{A}(x, t, \delta\varphi(t)v, \delta\varphi(t)\xi), \quad t = t(\tau).$$

Легко проверить, что $\mathbf{B}$ удовлетворяет тем же структурным условиям, что и $\mathbf{A}$. Заметим, что

$$0 \leqslant -(\delta\varphi)^{3-m-p}\varphi_t = \frac{1}{m+p-3}\begin{cases} 0, & t \leqslant \theta_* k^{3-m-p}R^p, \\ \dfrac{k^{m+p-3}}{\theta_*\delta^{m+p-3}R^p}, & t > \theta_* k^{3-m-p}R^p. \end{cases}$$

Таким образом, v является суперрешением уравнения той же структуры, что и исходное, с теми же структурными константами. Из оценки для u немедленно получаем

$$\nu\big(\{v(\cdot, \tau) > k\} \cap (x_0 + B_R)\big) \geqslant \frac{\alpha}{2}\nu(x_0 + B_R),$$

при условии что

$$\Gamma(0, \xi k, R) \leqslant 1, \quad \xi = \xi(\tau) = \min\left\{1, \ \left(\frac{t(\tau)}{\theta_* k^{3-m-p}R^p}\right)^{1/(3-m-p)}\right\}.$$

Далее, будем применять «телескопическую лемму». Получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta_* = \delta_*(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $0 < \delta_1 < \delta_*(\varepsilon)$ в цилиндре $Q(\tau_0) = (x_0 + B_{4R}) \times (\tau_0, 2\tau_0)$ выполняется

$$\nu(\{v < \delta_1 k\} \cap Q) < \varepsilon\nu(Q)$$

при условии, что

$$\tau_0 \geqslant (\delta_1 k)^{3-m-p}(2R)^p, \quad \Gamma(0, \delta_1 k, 2R) \leqslant 1.$$

Возьмём

$$\tau_0 = \tau_0(\varepsilon) = (\delta_1 k)^{3-m-p}(2R)^p.$$

Далее, выберем такой ε, чтобы в соответствующем цилиндре $Q(\tau_0)$ можно было применить лемму 6 с параметрами $a = 1/2$, $\mu_- = 0$, $\omega = \delta_1 k$. В силу нашего выбора τ_0, параметр $\theta(\tau_0, 0, \delta_1 k, 2R) = 1$. Поэтому найдётся такое число ε, что из

$$\nu\big(\{v < \delta_1(\varepsilon)k\} \cap Q(\tau_0)\big) < \varepsilon\nu(Q(\tau_0))$$

следует, что

$$v \geqslant \frac{\delta_1 k}{2} \quad \text{п. в. в } (x_0 + B_R) \times \left(\frac{3\tau_0}{2}, 2\tau_0\right)$$

при условии $\Gamma(0, \delta_1 k, 2R) \leqslant 1$.

Итак, вывод следующий: если выполнены приведённые выше условия на Γ, то найдётся такое положительное число $\delta_1 = \delta_1(\mathrm{data})$, что $v \geqslant \delta_1 k/2$ п. в. в цилиндре $(x_0 + B_R) \times (3\tau_0/2, 2\tau_0)$, где $\tau_0 = (\delta_1 k)^{3-m-p}(2R)^p$. Теперь надо вернуться к исходным переменным. Для t получаем формулу

$$t = \begin{cases} \tau, & \tau \leqslant \theta_* k^{3-m-p} R^p, \\ \theta_* k^{3-m-p} R^p \exp\left(\dfrac{\tau - \theta_* k^{3-m-p} R^p}{\delta^{m+p-3} k^{3-m-p} \theta_* R^p}\right), & \tau > \theta_* k^{3-m-p} R^p. \end{cases}$$

Далее,

$$\varphi(t(\tau)) = \begin{cases} 1, & \tau \leqslant \theta_* k^{3-m-p} R^p, \\ \exp\left(\dfrac{\tau - \theta_* k^{3-m-p} R^p}{(3-m-p)\delta^{m+p-3} k^{3-m-p} \theta_* R^p}\right), & \tau > \theta_* k^{3-m-p} R^p. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем

$$u(x,t) \geqslant \delta \frac{\delta_1}{2} k \varphi(t(2\tau_0)) = \gamma_4 k, \quad \gamma_4 = \gamma_4(\mathrm{data}) > 0,$$

в цилиндре $(x_0 + B_{2R}) \times (t(3\tau_0/2), t(2\tau_0))$. Несложно видеть, что

$$t\left(\frac{3\tau_0}{2}\right) = \gamma_3 k^{3-m-p} R^p, \quad t(2\tau_0) = \gamma_4 k^{3-m-p} R^p.$$

Условия на Γ можно переписать в виде

$$\Gamma(0, \gamma_4 k, R) \leqslant 1,$$

что приводится к $\Gamma(0,k,R) < C$. □

Замечание. Нетрудно видеть, что константы в этой лемме вырождаются, если величина $m + p - 3$ мала. Для того чтобы их стабилизировать, применим приём из [19]. Обозначим $T = \theta_* k^{3-m-p} R^p$. Будем применять лемму 10 (с учётом замечания после неё) в цилиндре $(x_0 + B_{8R}) \times [t_0, t_0 + T]$ с параметрами $\mu_- = 0$, $\omega = k/2$. Обозначим $Q_1 = (x_0 + B_{4R}) \times [t_0 + T/2, t_0 + T]$. Получим для любого $\varepsilon > 0$ существование таких $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0,1)$ и $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$, что при условии $m + p < 3 + \sigma$ и $\Gamma(0, \delta k, 8R) \leqslant 1$ имеем:

$$\nu\left(\left\{u < \frac{\delta k}{2}\right\} \cap Q_1\right) < \varepsilon \nu(Q_1), \quad \delta^{3-m-p} \leqslant 2.$$

Далее, найдём такой ε, чтобы в цилиндре Q_1 можно было применить лемму 6 с параметрами $\mu_- = 0$, $\omega = \delta k/2$, $a = 1/2$. Заметим, что

$$\theta\left(\frac{T}{2}, 0, \frac{\delta k}{2}, 4R\right) + \frac{1}{\theta\left(\frac{T}{2}, 0, \frac{\delta k}{2}, 4R\right)} < C(\mathrm{data}).$$

Следовательно, выбрав подходящее значение ε так, чтобы удовлетворялось условие леммы 6, получаем

$$u(x,t) > \frac{\delta k}{4}, \quad |x - x_0| < 2R, \quad t_0 + \frac{3}{4}\theta_* k^{3-m-p} R^p \leqslant t \leqslant t_0 + \theta_* k^{3-m-p} R^p,$$

где константы δ, θ_* не зависят от m, p, если $m+p<3+\sigma$. Таким образом, оценка леммы 12 устойчива при $m\to 1$, $p\to 2$. Следовательно, и опирающиеся на неё оценки теоремы 2 также устойчивы при $m\to 1$, $p\to 2$.

Доказательство теоремы 2. Теперь приступим к доказательству собственно неравенства Харнака. Используется метод Крылова — Сафонова. Без ограничения общности, считаем $(x_0, t_0)=(0,0)$ и $\lambda=1$. Пусть $\beta>0$, точное значение β будет определено позже. Рассмотрим цилиндры

$$Q(\tau) = B_{(1-\tau)R}\times[-\tau k^{3-m-p}R^p, 0], \quad \tau\in(0,1).$$

Пусть $M(\tau)=\max\{u; \overline{Q(\tau)}\}$. В цилиндре $Q(1)$ решение ограничено, поэтому при τ, близких к единице, $M(\tau)<(1-\tau)^{-\beta}k$. Определим τ_0 как наибольший корень уравнения $M(\tau)=(1-\tau)^{-\beta}k$. Пусть $M(\tau_0)$ достигается в точке $(x_1, t_1)\in\overline{Q(\tau_0)}$. Несложно видеть, что в цилиндре

$$Q_1 = (x_1, t_1) + Q\Big(\frac{(1-\tau)R}{2}, \frac{(1-\tau)k^{3-m-p}R^p}{2}\Big)$$

имеем оценку: $u\leqslant 2^\beta(1-\tau)^{-\beta}k$. Теперь в цилиндре

$$Q_2 = (x_1, t_1) + Q\Big(\frac{(1-\tau_0)R}{2}, T_2\Big)$$

применим лемму 6 с параметрами

$$\mu_+ = 2^\beta(1-\tau_0)^{-\beta}k, \quad \omega = (2^\beta-2^{-1})(1-\tau_0)^{-\beta}k,$$

$$T_2 = T\Big(\mu_+, \omega, \frac{(1-\tau_0)R}{2}\Big), \quad a = \frac{2^\beta-3/4}{2^\beta-1/2}.$$

Получаем, что найдётся $\varepsilon=\varepsilon(\beta)>0$ такой, что при условиях

$$\nu\Big(\Big\{u\geqslant\frac{(1-\tau_0)^{-\beta}k}{2}\Big\}\cap Q_1\Big) < \varepsilon\nu(Q_1), \quad \Gamma(\mu_+, \omega, (1-\tau_0)R)\leqslant 1$$

выполняется $u\leqslant 3(1-\tau_0)^{-\beta}k/4$ в цилиндре

$$Q_3 = (x_1, t_1) + Q\Big(\frac{(1-\tau_0)R}{4}, \frac{T_2}{2}\Big).$$

Так как, по условию, $u(x_1, t_1)=(1-\tau_0)^{-\beta}k$, получаем следующее:

$$\nu\Big(\Big\{u\geqslant\frac{(1-\tau_0)^{-\beta}k}{2}\Big\}\cap Q_1\Big) > \varepsilon\nu(Q_1), \quad \text{если } \Gamma(\mu_+, \omega, (1-\tau_0)R)\leqslant 1.$$

Последнее условие сводится к $\Gamma(0, k, R)<\gamma_2=\gamma_2(\text{data})$.

Следовательно, найдётся такой уровень $t_*\in(t_1-T_2, t_1)$, что

$$\nu\Big(\Big\{u(\cdot, t_*)\geqslant\frac{(1-\tau_0)^{-\beta}k}{2}\Big\}\cap(x_1+B_{(1-\tau_0)R/2})\Big) > \varepsilon\nu(x_1+B_{(1-\tau_0)R/2}), \quad \varepsilon=\varepsilon(\beta).$$

Применим лемму 12. Получим, что

$$u(x, t_2)\geqslant\frac{\gamma_0}{2}(1-\tau_0)^{-\beta}k, \quad |x-x_1|<(1-\tau_0)R,$$

$$t_2 = t_* + \gamma_*\Big(\frac{(1-\tau_0)^{-\beta}k}{2}\Big)^{3-m-p}\Big(\frac{(1-\tau_0)R}{2}\Big)^p,$$

где константы γ_0, γ_* зависят от β. Теперь будем последовательно применять лемму 12. Получаем, что

$$u(x,\tau_N)\geqslant\frac{\gamma_0}{2}\gamma^N(1-\tau_0)^{-\beta},\quad |x-x_1|\leqslant 2^{N-1}(1-\tau_0)R,$$

$$\tau_0=t_2,\quad \tau_N=t_2+\sum_{j=0}^{N-1}C(\gamma_0\gamma^jk(1-\tau_0)^{-\beta})^{3-m-p}((1-\tau_0)R2^j)^p,$$

где γ, C зависят только от параметров уравнения, а от β уже не зависят. Выберем наименьший N такой, что $(1-\tau_0)R2^N\geqslant 4R$, откуда

$$2-\log_2(1-\tau_0)\leqslant N<3-\log_2(1-\tau_0).$$

Для этого выбора N имеем:

$$u(x,\tau_N)\geqslant k\frac{\gamma_0\gamma^3}{2}(1-\tau_0)^{\log_2(1/\gamma)}(1-\tau_0)^{-\beta},\quad x\in B_{2R}.$$

При выборе $\beta=\log_2(1/\gamma)$ получаем оценку:

$$u(x,\tau_N)\geqslant\gamma_4k,\quad x\in B_{2R},\ \gamma_4=\gamma_4(\text{data})>0.$$

Все шаги обоснованы, если

$$\Gamma_1=\Gamma\Big(0,\ \frac{k}{2}(1-\tau_0)^{-\beta},\ \frac{1-\tau_0}{2}R\Big)\leqslant 1,$$
$$\Gamma_2=\Gamma\Big(0,\ \gamma_0\gamma^j(1-\tau_0)^{-\beta}\frac{k}{2},\ (1-\tau_0)R2^j\Big)\leqslant 1$$

для $j=0,1,\dots,N$. Эти условия удовлетворяются при $\Gamma(0,k,R)\leqslant\gamma_2=\gamma_2(\text{data})$. В самом деле,

$$\Gamma_1\leqslant 2^{p+m-1}\Gamma(0,k,R),\quad \Gamma_2\leqslant\gamma_4^{-p-m}8^p\Gamma(0,k,R).$$

Далее, оценим величину τ_N:

$$\tau_N\leqslant t_*+C(1-\tau_0)^{p+\beta(3-m-p)}\gamma^{N(3-m-p)}2^{pN}.$$

В силу нашего выбора N и β имеем:

$$(1-\tau_0)^\beta\gamma^{-N}\leqslant C\gamma^{-2},\quad (1-\tau_0)2^N\leqslant 4.$$

Таким образом, для некоторого $\tau_N\in[-k^{3-m-p}R^p,\ \gamma_1k^{3-m-p}R^p]$ имеем:

$$u(x,\tau_N)\geqslant\gamma_4k,\quad x\in B_{2R},\quad\text{где }\ \gamma_4=\gamma_4(\text{data})>0.$$

Пусть $\xi\in[0,1]$. Применим лемму 7 с параметрами $\mu_-=0$, $\omega=\gamma_4\xi k$, $a=1/2$ в цилиндре $B_{2R}\times[\tau_N,\gamma_1k^{3-m-p}R^p]$. Получим, что

$$u(x,\gamma_1k^{3-m-p}R^p)\geqslant\xi\gamma_4k,\quad x\in B_R,$$

если

$$\gamma_1k^{3-m-p}R^p-\tau_N\leqslant C(\gamma_4\xi k)^{3-m-p}(2R)^p,\quad C=C(\text{data})>0,\tag{6.1}$$

и $\Gamma(0,\xi\gamma_4k,2R)\leqslant 1$. Последнее условие легко преобразуется к виду

$$\Gamma(0,k,R)\leqslant\gamma_2=\gamma_2(\text{data}).$$

Легко видеть, что (6.1) выполняется для некоторого $\xi=\xi(\mathrm{data})>0$. Теорема 2 доказана. Для того чтобы показать устойчивость констант при $m\to 1$, $p\to 2$, надо на последнем шаге вместо леммы 7 несколько раз применить лемму 12. □

Замечания. Во-первых, для начального определения решения можно обойтись предположением $\nabla u^{1+\sigma}\in L^p(Q;\nu)$, $\sigma=(m-1)/(p-1)$. Однако в этом случае надо аккуратнее определять решение. Этому вопросу уделено внимание в работах А. В. Иванова. Во-вторых, более естественно использовать пробные функции, содержащие $(u^{1+\sigma}-k^{1+\sigma})_\pm$. На этом пути получается доказательство и для случая $m<1$, $m+p-3>-1$.

Далее, в формулировках теорем, в условиях $\Gamma(\ldots)\leqslant\gamma$ константу γ можно заменить на произвольное положительное число — при этом, естественно, остальные константы в формулировках теорем также изменятся.

Заметим также, что для доказательства гёльдеровской непрерывности функции $u=u(x,t)$ достаточно лишь информации о том, что для u справедливы оценки (3.1). Для доказательства неравенства Харнака этого пока недостаточно. Вопрос о том, можно ли получить неравенство Харнака, используя только оценки (3.1), является достаточно интересным.

Список литературы

[1] *Иванов А. В.* Гёльдеровские оценки для квазилинейных параболических уравнений с двойным вырождением // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1989. Т. 171. С. 70–105.

[2] *Иванов А. В.* Равномерные гёльдеровские оценки для обобщённых решений квазилинейных параболических уравнений, допускающих двойное вырождение // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3, вып. 2. С. 139–179.

[3] *Иванов А. В.* Классы $\mathscr{B}_{m,l}$ и гёльдеровские оценки для квазилинейных параболических уравнений, допускающих двойное вырождение // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1992. Т. 197. С. 42–70.

[4] *Иванов А. В.* Квазилинейные параболические уравнения, допускающие двойное вырождение // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, вып. 6. С. 114–130.

[5] *Иванов А. В.* Гёльдеровские оценки для уравнений типа быстрой диффузии // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6, вып. 4. С. 101–142.

[6] *Иванов А. В.* Гёльдеровские оценки для естественного класса уравнений типа быстрой диффузии // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1995. Т. 229. С. 29–62.

[7] *Иванов А. В.* Оценки максимумов модулей обобщённых решений для дважды нелинейных параболических уравнений // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1995. Т. 221. С. 83–113.

[8] *Ivanov A. V.* The regularity theory for (m,l)-Laplacian parabolic equation // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1997. Т. 243. С. 87–110.

[9] *Жиков В. В.* О весовых соболевских пространствах // Матем. сб. 1998. Т. 189, № 8. С. 27–58.

[10] *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

[11] *Bonafede S., Skrypnik I. I.* On Hölder continuity of solutions of doubly nonlinear parabolic equations with weight // Укр. матем. ж. 1999. Т. 51, № 7. С. 890–903.

[12] *Chiarenza F., Frasca M.* Boundedness for the solutions of a degenerate parabolic equation // Appl. Anal. 1984. Vol. 17. P. 243–261.

[13] *Chiarenza F. M., Serapioni R. P.* A Harnack inequality for degenerate parabolic equations // Comm. Part. Diff. Eq. 1984. Vol. 9, № 8. P. 719–749.

[14] *Chiarenza F.*, *Serapioni R.* Degenerate parabolic equations and Harnack inequality // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1984. Vol. 137. P. 139–162.

[15] *Chiarenza F.*, *Serapioni R.* A remark on a Harnack inequality for degenerate parabolic equations // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1985. Vol. 73. P. 179–190.

[16] *Chiarenza F.*, *Serapioni R.* Pointwise estimates for degenerate parabolic equaitions // Appl. Anal. 1987. Vol. 23, № 4. P. 287–299.

[17] *Colding T. H.*, *Minicozzi W. P. II.* Liouville theorems for harmonic sections and applications // Comm. Pure. Appl. Math. 1998. Vol. 51, № 2. P. 113–138.

[18] *DiBenedetto E.* Degenerate parabolic equations. New York: Springer-Verlag, 1993.

[19] *DiBenedetto E.*, *Gianazza U.*, *Vespri V.* Harnack estimates for quasi-linear degenerate parabolic differential equations // Acta Math. 2008. Vol. 200, № 2. P. 181–209.

[20] *DiBenedetto E.*, *Gianazza U.*, *Vespri V.* Harnack's inequality for degenerate and singular parabolic equations. New York: Springer, 2012.

[21] *Heinonen J.*, *Kilpeläinen T.*, *Martio O.* Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Dover Publ. Inc., Mineola, NY, 2006.

[22] *Keith S.*, *Zhong X.* The Poincaré inequality is an open ended condition // Ann. Math. (2). 2008. Vol. 167, № 2. P. 575–599.

[23] *Скрыпник И. И.* Регулярность решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений (весовой случай) // Укр. матем. ж. 1996. Т. 48, № 7. С. 972–988.

[24] *Surnachev M.* A Harnack inequality for weighted degenerate parabolic equations // J. Diff. Eq. 2010. Vol. 248, № 8. P. 2092–2129.

[25] *Vespri V.* On the local behaviour of solutions of a certain class of doubly nonlinear parabolic equations // Manuscripta Math. 1992. Vol. 75, № 1. P. 65–80.

[26] *Porzio M. M.*, *Vespri V.* Hölder estimates for local solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations // J. Diff. Eq. 1993. Vol. 103, № 1. P. 146–178.

[27] *Vespri V.* Harnack type inequalities for solutions of certain doubly nonlinear parabolic equations // J. Math. Anal. Appl. 1994. Vol. 181, № 1. P. 104–131.

Михаил Дмитриевич Сурначёв
Москва,
Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН,
лаборатория вычислительной аэроакустики
E-mail: peitsche@yandex.ru

Представлено в редакцию 31.03.2014