V. Smirnoff, Sur quelques séries de polynomes, *J. Soc. Phys.-Math. Léningrade*, 1927, Volume 1, Issue 2, 268–274

https://www.mathnet.ru/eng/lfmo24

# Sur quelques séries de polynomes.

*V. Smirnoff.*

1. Dans ses recherches sur les figures d'équilibre d'un liquide en rotation Liapounoff a rencontré le problème d'analyse suivant: $P_0$, $P_1$, $P_2$, ... étant des polynomes en variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$, le degré de $P_n$ ne dépassant pas $n$, trouver le domaine de convergence par rapport à $x_s$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$ de la série

$$(1) \qquad P_0 + P_1\alpha + P_2\alpha^2 + \ldots,$$

si $|P_n| < L$ ($L$ est une constante) quelque soit $n$ et quelles que soient les valeurs réelles des $x_s$, appartenant à l'intervalle $(-1, +1)$, le paramètre $\alpha$ satisfaisant à la condition $|\alpha| < 1$. La solution de ce problème a été donnée par Liapounoff dans son mémoire „Sur les séries de polynomes (Bull. de l'Acad. des Sciences, Petrograd, 1915, p. 1857). Dans la note présente nous voulons faire voir que le résultat de Liapounoff pourrait être perfectionné et le problème généralisé. Nous donnons une détermination exacte du domaine de convergence de la série (1) par rapport à $x_s$ dans le cas où l'inégalité $|P_n| < L$ a lieu quand les $x_s$ appartiennent à quelques ensembles $E_s$ de points. Nous démontrerons dans la suite le théorème suivant.

Soit $P_n$ — les polynomes en variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$ le degré de $P_n$ ne dépassant par $n$. Supposons que l'inégalité

$$(2) \qquad |P_n| < L \quad (n = 0, 1, 2, \ldots; \; L \text{—une constante})$$

a lieu quand chaque $x_s$ est situé sur un ensemble fermé et borné $E_s$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$, et que les ensembles $E'_s$ complémentaires à $E_s$, qui contiennent le point à l'infini, constituent les domaines simplement connexes avec le contour, ayant plus d'un point. Soit

$$(3) \qquad x_s = \tau_s z_s + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_j^{(s)}}{z_s^j} \quad (s = 1, 2, \ldots, k)$$

la fonction qui fournit la représentation conforme du domaine $E_s'$ sur le domaine $|z_s| > 1$ et soit $C_\rho^{(s)}$ — la courbe sur le plan $x_s$, qui est l'image de la circonférence $|z_s| = \rho$ ($\rho > 1$; $s = 1, 2, \ldots, k$). Dans ces conditions on peut affirmer que la série (1) avec le paramètre $\alpha$ ($|\alpha| < 1$) converge absolument et uniformément, si chacun des $x_s$ appartient à un domaine, situé avec son contour à l'intérieur de $C_{\frac{1}{|\alpha|}}^{(s)}$. On ne peut pas perfectionner ce résultat, c. à. d. si un des $x_s$ au moins est situé à l'extérieur de $C_{\frac{1}{|\alpha|}}^{(s)}$, on peut construire les polynomes $P_n$ qui satisfont aux conditions mentionnées, mais pour lesquels la série (1) diverge.

2. Considérons d'abord le cas $k = 1$. Nous aurons les polynomes $P_n(x_1)$ d'une variable $x_1$. Substituons dans le polynome $P_n(x_1)$, au lieu de $x_1$ son expression (3). Le quotient

$$P_n\left(\tau_1 z_1 + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^{(1)} z_1^{-j}\right) : z_1^n,$$

est une fonction holomorphe dans le domaine $|z_1| > 1$, y compris $z_1 = \infty$, et quand $z_1$ approche du contour de ce domaine, le module du quotient susdit devient en vertu de (2) moindre que $L$, et par conséquent ce module est moindre que $L$ pour tous les points $z_1$ du domaine $|z_1| > 1$. Nous aurions donc l'inégalité

$$|P_n(x_1)| < L\rho^n$$

pour les valeurs de $x_1$ sur la courbe $C_\rho^{(1)}$, et la convergence de la série (1), indiquée dans le théorème du $n^0$ 1, serait la conséquence immédiate de cette inégalité.

Démontrons maintenant qu'il est impossible de perfectionner ce résultat. Soit

$$T_n^{(1)}(x_1) = x_1^n + a_1^{(1)} x_1^{n-1} + \ldots + a_n^{(1)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

—les polynomes de Tchebycheff pour l'ensemble $E_1$ et $m_n^{(1)}$ — maximum du module de $T_n^{(1)}(x_1)$ sur cet ensemble. Supposons d'abord que le contour de $E_1$ soit une courbe analytique. Dans ce cas les polynomes auraient sur la courbe $C_\rho^{(1)}$ l'expression asymptotique suivante (Faber, Crelle Journal t. 150):

$$T_n^{(1)}(x_1) = \tau_1^n z_1^n \left[1 + \vartheta(x_1) G \cdot \gamma^n\right],$$

où $|\vartheta(x_1)| < 1$, $G$ et $\gamma$—les constantes et $0 < \gamma < 1$. On sait aussi que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{m_n^{(1)}}{|\tau_1|^n} = 1.$$

Les polynomes $\frac{T_n^{(1)}(x_1)}{m_n^{(1)}}$ satisfont aux conditions du théorème du n° 1, mais la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n^{(1)}(x_1)}{m_n^{(1)}} \alpha^n$$

est évidemment divergente, si $x_1$ est situé à l'extérieur de $C^{(1)}_{\frac{1}{|\alpha|}}$.

Dans le cas où le contour de $E_1$ serait arbitraire, prenons au lieu de $E_1$ l'ensemble $E_{1,\eta}$ dont le contour est la courbe analytique $C^{(1)}_{\eta}$ $(\eta > 1)$. Introduisons les symboles

$$\tau_{1,\eta};\ C^{(1)}_{\rho,\eta};\ T^{(1)}_{n,\eta}(x_1);\ m^{(1)}_{n,\eta},$$

qui ont la signification précédente, mais se rapportent à l'ensemble $E_{1,\eta}$. Il est évident que la courbe $C^{(1)}_{\rho}$ est identique avec la courbe $C^{(1)}_{\frac{\rho}{\eta},\eta}$. Soit $\xi_1$ — une valeur de $x_1$ situé à l'extérieur de $C^{(1)}_{\frac{1}{|\alpha|}}$ et $\zeta_1$ — la valeur correspondante de $z_1$, d'où il suit que $|\zeta_1| > \frac{1}{|\alpha|}$.

Nous avons l'expression asymptotique

$$T^{(1)}_{n,\eta}(x_1) = \tau^n_{n,\eta} \left(\frac{z_1}{\eta}\right)^n [1 + \vartheta(x_1) G\gamma^n]$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{m^{(1)}_{n,\eta}}{|\tau_{1,\eta}|^n} = 1.$$

Nous avons

$$\left| \frac{T^{(1)}_{n,\eta}(x_1)}{m^{(1)}_{n,\eta}} \right| < 1 \text{ sur } E_1,$$

mais la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{(1)}_{n,\eta}(\xi_1)}{m^{(1)}_{n,\eta}} \alpha^n$$

est divergente, si le nombre $\eta$ est assez près de l'unité. Ainsi le théorème du n° 1 est démontré pour le cas des polynomes $P_n$ d'une variable.

3. Supposons maintenant que $P_n$ soient des polynomes en variables $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ et qu'ils satisfont aux conditions du n° 1.

Remplaçons dans $P_n$ chacun des $x_s$ par l'expression (3). Nous aurons une série généralement infinie de la forme

$$(4) \qquad P_n = \sum_{(m_1, m_2, \ldots, m_\kappa)} a^{(n)}_{m_1 m_\kappa \ldots m_\kappa} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \ldots z_\kappa^{m_\kappa}$$

où la sommation est étendue à toutes les valeurs de $m_1, m_2, \ldots, m_\kappa$ à partir de $n$ à $(-\infty)$, et la somme de ceux des nombres $m_s$, qui sont positifs, ne doit pas dépasser $n$.

Supposons d'abord que le contour de chaque ensemble $E_s$ soit une courbe analytique. Dans ce cas la série (4) converge absolument et uniformément pour les valeurs $|z_s| = 1$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$. En remplaçant dans cette série chaque $z_s$ par $e^{\theta_s i}$ et en intégrant $|P_n|^2$ par rapport à chaque $\theta_s$ de 0 à $2\pi$, nous aurons en vertu de (2) l'inégalité

$$(5) \qquad \sum_{(m_1, m_2, \ldots m_\kappa)} \left| a^{(n)}_{m_1 m_2 \ldots m_\kappa} \right|^2 < L^2.$$

Supposons que chacun des $x_s$ soit situé à l'intériuur ou sur la courbe $C^{(s)}_\rho$. L'application à la série (4) de l'inégalité de Cauchy nous donne en vertu de (5) l'inégalité

$$(6) \qquad |P_n|^2 < L^2 \sum_{(m_1 m_2 \ldots m_\kappa)} \rho^{2(m_1 + m_2 + \cdots + m_\kappa)}$$

où la régle de sommation est celle qui a été exliqué plus haut. Si au lieu de cette régle nous effectuons la sommation pour chaque $m_s$ à partir de $n$ à $(-\infty)$ avec la condition complémentaire

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_\kappa \leq n,$$

l'inégalité (6) aura lieu d'autant plus. Le nombre des termes de la somme, qui sont égaux à $\rho^{2j}$, s'éxprime par le coefficient binomial

$$\binom{nk - j + k - 1}{k - 1},$$

et par suite

$$(7)\qquad |P_n| < L^2 \sum_{s=0}^{\infty} \binom{(n+1)(k-1)+s}{k-1} \rho^{2n-2s}.$$

Pour les valeurs de $\rho$, qui satisfont à l'inégalité

$$\rho \geq \rho_1 > 1,$$

où $\rho_1$ est un nombre fixé, l'équation (7) nous donne l'inégalité

$$(8)\qquad |P_n| < L^2 C n^{k-1} \rho^{2n}$$

où $C$ est une constante qui ne dépend ni de $\rho$, ni de $n$. De cette inégalité dérive immédiatement la convergence absolue et uniforme de la série (1), si chacun des $x_s$ est situé sur le courbe $C_\rho^{(s)}$ où $\rho < \frac{1}{|\alpha|}$.

Par conséquent, la convergence de la série (1), signalée au n° 1, est demontrée.

Rejetons maintenant la supposition que le contour de chaque $E_s$ soit une courbe analytique. Le quotient

$$\frac{P_n}{z_1^n z_2^n \ldots z_k^n}$$

où dans $P_n$ chacun des $x_s$ est remplacé par l'expression (3), est une fonction holomorphe de $z_s$ dans les domaines $|z_s| > 1$, et l'application du principe du module nous donne, comme au n° 2, l'inégalité

$$(9)\qquad |P_n| < L\eta^{kn}$$

pour les valeurs $x_s$ sur les courbes $C_\eta^{(s)}$ ($\eta > 1$; $s = 1, 2, \ldots, k$). Remplaçons dans la série (4) chaque $z_s$ par $\eta z_s'$

$$P_n = \sum_{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} b^{(n)}_{m_1 m_2 \ldots m_k} z_1'^{m_1} z_2'^{m_2} \ldots z_k'^{m_k}.$$

Dans cette série on peut poser $z_s' = e^{\theta_s i}$ et intégrer $|P^n|^2$ par-rapport à $\theta_s$ de 0 à $2\pi$, ce qui donne en vertu de (9) l'inégalité analogue à (5)

$$\sum_{(m_1 m_2 \ldots m_k)} |b^{(n)}_{m_1 m_2 \ldots m_k}|^2 < L^2 \eta^{2kn}.$$

En reprenant les raisonnements précédents et ayant égard à ce que la condition $|z_s| = \rho$ soit équivalente à $|z_s'| = \frac{\rho}{\eta}$, nous aurons pour $P_n$ au lieu de (8) l'inégalité

$$(10)\qquad |P_n| < L^2 C n^{k-1} \eta^{2(k-1)n} \rho^{2n}.$$

Le nombre $\eta$ on peut prendre assez près de l'unité et on peut tirer de l'inégalité (10) la convergence de la série (1), signaleé au n° 1.

Il est facile de construire les polynomés $P_n$, qui contiennent toutes les variables $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ et satisfont aux conditions du n° 1, mais pour lesquelles la série (1) diverge, si un des $x_s$ au moins est situé à l'extérieur de $C^{(s)}_{\frac{1}{|\alpha|}}$. Dans le cas où $x_1$ serait situé à l'extérieur de $C^{(1)}_{\frac{1}{|\alpha|}}$ et où le contour de $E_1$ serait une courbe analytique on pourrait prendre, par exemple,

$$P_{n+\kappa-1} = \frac{T^{(1)}_n(x_1)}{m^{(1)}_n} x_2 x_3 \ldots x_\kappa.$$

4. Si l'ensemble $E_s$ est constitué par le segment $(-\lambda_s, +\lambda_s)$ de l'axe réelle, la courbe $C^{(s)}_\rho$ est, comme on sait bien, l'ellipse

$$\frac{4x^2}{\lambda_s^2\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2} + \frac{4y^2}{\lambda_s^2\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)^2} = 1. \tag{11}$$

Supposons que la condition $|P_n| < L$ a lieu pour les valeurs réelles des variables $x_s$, satisfaisant à l'inégalité

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_\kappa^2 \leq 1. \tag{12}$$

Limitons la variation de chacuns des $x_s$ par le segment $(-\lambda_s, +\lambda_s)$ où $\lambda_s$ satisfont à la condition

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_\kappa^2 = 1. \tag{13}$$

L'inégalité (12) sera satisfaite, et nous aurons pour ces valeurs de variables $x_s$ la condition $|P_n| < L$. Par conséquent, en vertu du théorème du n° 1, la série (1) sera convergente à l'intérieur des ellipses (11) On arrive ainsi à la proposition suivante.

Soit $P_n$ — les polynomes en variables $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$, le degré de $P_n$ ne dépassant pas $n$ Supposons que l'inégalité (2) a lieu pour les valeurs réelles des variables $x_s$, satisfaisant à l'inégalité (12). Dans ces conditions ou peut affirmer que la série (1) converge absolument et uniformément, si chacuns des $x_s$ appartient à un domaine qui avec son cantour est situé à l'intérieur de l'ellipse (11), $\lambda_s$ étant les nombres réels quelconques, qui satisfont à la condition (13).

Ce probléme a été traité aussi par Liapounoff dans son mémoire susdit, mais le résultat de Liapounoff est plus restreint que le nôtre.

Supposons en dernier lieu que la condition par rapport au degré des polynomes $P_n$ soit remplacée par une autre, plus générale, à savoir qu'on peut fixer deux entiers $m$ et $l$ de telle manière que le degré de $P_n$ ne dépasse pas $(mn+l)$. La proposition du n° 1 serait encore vraie, pour vu que l'on remplaçât les courbes $C^{(s)}_{\frac{1}{|\alpha|}}$ par les courbes $C^{(s)}_{\frac{1}{\sqrt[m]{|\alpha|}}}$.

## О некоторых рядах полиномов.

*В. И. Смирнов.*

В настоящей заметке доказывается теорема:

Пусть $P_n$ — полиномы переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, при чем степень $P_n$ не превосходит $n$. Предположим, что имеет место неравенство

$$|P_n| < L \, (n = 0, 1, 2, \ldots, L \text{ — постоянная}),$$

если каждое $x_s$ принадлежит некоторой замкнутой, ограниченной совокупности $E_s$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$, и предположим, что совокупности $E_s'$, дополнительные для $E_s$ и содержащие бесконечно далекую точку, суть односвязные области с контуром, содержащим более одной точки. Пусть

$$x_s = \tau_s z_s + \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(s)} z_s^{-j} \quad (s = 1, 2, \ldots, k)$$

функция, совершающая конформное преобразование $E_s'$ в область $|z_s| > 1$, и пусть $C_\rho^{(s)}$ — кривая на плоскости $x_s$, являющаяся изображением окружности $|z_s| = \rho$ $(\rho > 1; s = 1, 2, \ldots, k)$. При этих условиях можно утверждать, что ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n \alpha^n$$

с параметром $\alpha$ $(|\alpha| < 1)$ сходится абсолютно и равномерно, если всякое $x_s$ принадлежит области, которая вместе со своим контуром находится внутри $C^{(s)}_{\frac{1}{|\alpha|}}$. Полученную область сходимости нельзя расширить.