В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами, *Матем. сб.*, 2003, том 194, номер 7, 25–56

https://www.mathnet.ru/sm751

2003 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Том 194, №7

УДК 517.9+513.83

В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев

Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами

В статье устанавливаются новые соотношения между структурой периодических орбит систем Морса–Смейла (потоков и диффеоморфизмов) и родом разбиения Хегора несущего многообразия. Получена точная нижняя оценка числа незамкнутых гетероклинических кривых для некоторых диффеоморфизмов Морса–Смейла на линзах.

Библиография: 21 название.

§ 1. Введение

Одним из основных вопросов теории динамических систем является вопрос о взаимосвязи между динамикой и топологической структурой несущих многообразий. Особенно этот вопрос важен для структурно устойчивых динамических систем, которые существуют на любом компактном многообразии. Среди структурно устойчивых динамических систем простейшими со многих точек зрения (конечное число неблуждающих точек, нулевая энтропия и т. д.) являются системы Морса–Смейла, для которых с помощью неравенств Морса установлена связь между числами Бетти и структурой периодических точек [1]. В работе [2] получены аналоги неравенств Морса для потоков Морса–Смейла без состояний равновесия. Заметим, что неблуждающее множество потоков Морса–Смейла без состояний равновесия состоит из периодических траекторий. В [3] для таких потоков на многообразиях размерности $n \geqslant 4$ построено специальное разложение несущего многообразия на круговые ручки и доказано, что если многообразие допускает разложение на круговые ручки, то на данном многообразии существует поток Морса–Смейла без состояний равновесия. Топологическая структура трехмерного многообразия, допускающего поток Морса–Смейла без состояний равновесия, исследована в работе [4], где показано, что несущее многообразие представляет собой либо зейфертово недостаточно большое (в терминологии Вальдхаузена [5]) пространство, либо специальное (в случае, когда многообразие достаточно большое) объединение зейфертовых пространств и "толстых" торов (т.е. произведений $T^2 \times [0,1]$). Отметим также работу [6], где получена классификация градиентноподобных потоков без периодических траекторий на языке диаграмм Хегора. Однако в этой работе не исследовалась связь между динамическими характеристиками потока и топологической структурой несущего многообразия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00098).

В настоящей работе устанавливаются новые соотношения между набором периодических орбит систем Морса–Смейла (потоков и диффеоморфизмов) и родом несущего многообразия, которое предполагается ориентируемым (кроме двумерного случая) и замкнутым. Для двумерного многообразия имеется в виду обычный род, для трехмерного многообразия – род Хегора и род разбиения Хегора. Кроме этого, мы получаем нижнюю (достижимую) оценку числа незамкнутых гетероклинических кривых для некоторых диффеоморфизмов Морса–Смейла на линзах.

Отметим, что поскольку эйлерова характеристика любого замкнутого трехмерного многообразия равна нулю, то известная формула Эйлера–Хопфа в трехмерном случае приводит к одному соотношению (сумма индексов состояний равновесия равна нулю) для всех систем Морса–Смейла. Поэтому соотношения, связывающие род разбиения Хегора или род Хегора трехмерного многообразия с динамическими характеристиками системы Морса–Смейла, являются более содержательными.

Используемые далее основные понятия теории гладких динамических систем мы поместили в § 2.

Пусть f – градиентноподобный диффеоморфизм, заданный на гладком замкнутом ориентируемом многообразии M^3. Так как блуждающее множество градиентноподобного диффеомофизма не содержит гетероклинических точек, то аналогично [7; лемма 1] устанавливается, что если p – седловая периодическая точка диффеоморфизма f, то замыкание каждой одномерной неустойчивой (устойчивой) сепаратрисы точки p гомеоморфно отрезку и состоит из этой сепаратрисы и двух точек: точки p и некоторой стоковой (источниковой) периодической точки ω (α).

Пусть ω – стоковая периодическая точка диффеоморфизма f. Положим $\mathscr{L}^u(\omega) = L_1^u \cup \dots \cup L_k^u$ множество всех неустойчивых одномерных сепаратрис седловых периодических точек, содержащих ω в своем замыкании.

Для $k > 0$ выберем в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ совокупность $l_1, \dots, l_k$ различных прямолинейных лучей, выходящих из начала координат O.

Определение 1.1. Назовем множество сепаратрис $\mathscr{L}^u(\omega)$ *тривиально вложенным в многообразие* M^3, если существует гомеоморфизм $\varphi\colon W^s(\omega) \to \mathbb{R}^3$ такой, что $\varphi(\omega) = O$, $\varphi(L_i^u \cup \{O\}) = l_i$, $i = 1, \dots, k$.

Аналогично определяется тривиально вложенное множество устойчивых одномерных сепаратрис $\mathscr{L}^s(\alpha) = L_1^s \cup \dots \cup L_m^s$, связанное с источником α.

Заметим, что в случае потока множества $\mathscr{L}^u(\omega)$ и $\mathscr{L}^s(\alpha)$ всегда тривиально вложены. В случае же диффеоморфизма это, вообще говоря, не так (см. [8], [9]).

Определение 1.2. Будем говорить, что множество одномерных сепаратрис седловых периодических точек градиентноподобного диффеоморфизма f *тривиально вложено*, если множества $\mathscr{L}^u(\omega)$ и $\mathscr{L}^s(\alpha)$ являются тривиально вложенными для любых стоковых и источниковых периодических точек ω и α.

Пусть f – градиентноподобный диффеоморфизм, для которого множество одномерных сепаратрис тривиально вложено, заданный на гладком замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии M^3. Обозначим через $\nu(f)$ число седловых и $\mu(f)$ число стоковых и источниковых периодических точек диффеоморфизма f.

В § 4 (теорема 4.1) доказано, что многообразие M^3 можно представить в виде разбиения Хегора рода $h_D = (\nu(f) - \mu(f) + 2)/2$. В теореме 4.2 установлено, что число седловых периодических точек диффеоморфизма f не меньше удвоенного рода Хегора многообразия M^3 и на любом замкнутом многообразии M^3 рода Хегора $h(M^3)$ существует градиентноподобный диффеоморфизм f такой, что число седловых периодических точек диффеоморфизма f равно $2h(M^3)$.

Из работы [8; предложение 2] следует, что если диффеоморфизм Морса–Смейла обладает энергетической функцией, то множество одномерных сепаратрис всех седловых периодических точек тривиально вложено. Поэтому полученные в теоремах 4.1, 4.2 соотношение и неравенство распространяются на градиентноподобные диффеоморфизмы, обладающие энергетической функцией. Таким образом, получаем

Следствие. *Пусть $f\colon M^3 \to M^3$ – градиентноподобный диффеоморфизм Морса–Смейла на замкнутом трехмерном многообразии M^3, имеющий энергетическую функцию. Тогда многообразие M^3 можно представить в виде разбиения Хегора рода*

$$h_D = \frac{\nu(f) - \mu(f) + 2}{2}$$

и

$$h(M^3) \leqslant \frac{\nu(f) - \mu(f) + 2}{2}.$$

Для полноты изложения в конце §4 в теореме 4.3 мы приводим аналогичные соотношения для диффеоморфизмов Морса–Смейла двумерных замкнутых поверхностей (как ориентируемых, так и неориентируемых). Эти соотношения выводятся из формулы Лефшеца и работы [10], где доказано, что диффеоморфизм Морса–Смейла индуцирует изоморфизм одномерной группы гомологий, собственные значения которого являются корнями из единицы.

Отметим, что в теореме 4.3 не делается никаких предположений о множестве гетероклинических точек, равно как и о характере вложимости в M_g^2 инвариантных многообразий периодических точек. Приведенная в этой теореме формула аналогична формуле Эйлера–Пуанкаре, связывающей сумму индексов особых точек векторного поля, заданного на двумерной поверхности, с эйлеровой характеристикой. Однако доказательство этой формулы для диффеоморфизмов Морса–Смейла принципиально отличается от доказательства аналогичной формулы для потока, так как при наличии гетероклинических траекторий никакая степень диффеоморфизма не вкладывается в поток.

В §5 мы рассматриваем потоки Морса–Смейла на замкнутых трехмерных ориентируемых многообразиях и в теореме 5.1 доказываем соотношения и оценки, связывающие количества состояний равновесия и седловых периодических траекторий с родом разбиения Хегора данного многообразия.

В §6 рассматриваются диффеоморфизмы Морса–Смейла на линзах $L_{p,q}$, у которых неблуждающее множество диффеоморфизма содержит ровно четыре периодические точки, а множество сепаратрис седловых периодических точек тривиально вложено. В теореме 6.1 установлено, что неблуждающее множество такого диффеоморфизма состоит в точности из одной стоковой, одной источниковой и двух седловых неподвижных точек с различными индексами Морса. Установлено также, что такие диффеоморфизмы являются градиентноподобными и их блуждающие множества содержат не менее чем p незамкнутых гетероклинических кривых, граница которых состоит из седловых неподвижных точек.

Третий параграф носит технический характер и содержит топологический результат (теорема 3.3), который в некотором смысле является обобщением теоремы о кольце. Как нам любезно сообщил С.В. Матвеев, результат теоремы 3.3 является достаточно ясным для специалистов в топологии трехмерных многообразий и может быть получен из теории Хакена нормальных поверхностей. Однако ни формулировки этого факта, ни его непосредственного доказательства не имеется. Теорема 3.3 является прямым следствием теоремы 3.2, подробное доказательство которой мы сочли необходимым привести.

Авторы благодарят Д.В. Аносова и С.В. Матвеева за плодотворные обсуждения.

§ 2. Основные определения

Напомним некоторые понятия и факты, касающиеся потоков и диффеоморфизмов Морса–Смейла. Хорошим источником являются книги [11], [12], а также обзорные статьи [1], [13]–[16]. Везде далее многообразие M^n размерности $n \geqslant 3$ предполагается ориентируемым, если не оговорено противное. Двумерные многообразия (поверхности) могут быть как ориентируемые, так и неориентируемые.

Диффеоморфизмы и потоки Морса–Смейла. Пусть f – C^1-гладкий диффеоморфизм замкнутого n-мерного, $n \geqslant 2$, многообразия M, снабженного некоторой римановой метрикой d. Множество $\Lambda \subset M$, инвариантное относительно f, называется *гиперболическим*, если ограничение $T_\Lambda M$ касательного расслоения TM многообразия M на Λ можно представить в виде суммы Уитни $E^s_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$ df-инвариантных подрасслоений E^s_Λ и E^u_Λ, $\dim E^s_\Lambda + \dim E^u_\Lambda = n$, и существуют константы $C_s > 0$, $C_u > 0$, $0 < \lambda < 1$ такие, что

$$\begin{aligned} \|df^n(v)\| &\leqslant C_s\lambda^n\|v\|, \qquad v \in E^s_\Lambda, \quad n > 0, \\ \|df^{-n}(v)\| &\leqslant C_u\lambda^n\|v\|, \qquad v \in E^u_\Lambda, \quad n > 0. \end{aligned}$$

Устойчивым многообразием точки $x \in \Lambda$ называется множество точек $W^s(x) = \{y \in M^n : d(f^k x, f^k y) \to 0,\ k \to +\infty\}$. *Неустойчивое многообразие* $W^u(x)$ точки $x \in \Lambda$ определяется как устойчивое многообразие относительно диффеоморфизма f^{-1}. Точка $x \in M$ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности $U(x)$ и любого натурального числа N найдется $n_0 \in \mathbb{Z}$, $|n_0| \geqslant N$, такое, что $f^{n_0}(x) \in U(x)$. Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f будем обозначать через $NW(f)$.

Диффеоморфизм многообразия порождает динамическую систему с дискретным временем (каскад), которая представляет собой совокупность итераций диффеоморфизма и которую мы обычно будем отождествлять с данным диффеоморфизмом.

Диффеоморфизм f называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если его неблуждающее множество $NW(f)$ гиперболическое, состоит из конечного числа точек и инвариантные многообразия $W^s(x)$, $W^u(y)$ пересекаются трансверсально для любых точек $x, y \in NW(f)$. Из конечности $NW(f)$ следует, что неблуждающее множество $NW(f)$ состоит из периодических точек. Аналогично определяется поток (динамическая система с непрерывным временем) Морса–Смейла.

Периодическая точка $p \in NW(f)$ диффеоморфизма f называется *седловой*, если ее устойчивое и неустойчивое многообразия имеют ненулевую топологическую размерность. Периодическая точка $p \in NW(f)$ называется *узловой*, если либо $\dim W^s(p) = \dim M$ (в этом случае p является *стоковой* точкой), либо $\dim W^u(p) = \dim M$ (в этом случае p является *источниковой* точкой).

Индексом Морса периодической точки называется размерность ее неустойчивого многообразия.

Неустойчивой (*устойчивой*) *сепаратрисой* седловой периодической точки p называется компонента связности множества $W^u(p) \setminus p$ ($W^s(p) \setminus p$).

Стандартным образом определяются седловая, устойчивая, неустойчивая периодическая траектория, а также седло, устойчивый и неустойчивый узел потока. В дальнейшем основные определения мы будем формулировать только для диффеоморфизмов (для потоков они аналогичные).

Диффеоморфизм f Морса–Смейла называется *градиентноподобным*, если для любых периодических точек $p, q \in NW(f)$, $p \neq q$, из $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \varnothing$ следует, что $\dim W^s(p) < \dim W^s(q)$.

Точка $x \in M$ трансверсального пересечения инвариантных многообразий $W^s(p)$, $W^u(q)$, где $p, q \in NW(f)$, называется *гетероклинической*, если $\dim W^s(p) = \dim W^s(q)$. Непосредственно из определения вытекает, что градиентноподобный диффеоморфизм Морса–Смейла не имеет гетероклинических точек. Так как диффеоморфизм Морса–Смейла структурно устойчив, то справедливо и обратное утверждение.

Функция Ляпунова и энергетическая функция. Пусть $f\colon M \to M$ – диффеоморфизм. Функция $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ называется *функцией Ляпунова*, если $\varphi(f(x)) \leqslant \varphi(x)$ для всех $x \in M$ и равенство имеет место только для неблуждающих точек. Если $f\colon M \to M$ – диффеоморфизм Морса–Смейла, то существует гладкая функция Ляпунова, все критические точки которой невырождены в смысле теории Морса.

Функция Ляпунова диффеоморфизма Морса–Смейла $f\colon M \to M$ называется *энергетической*, если все ее критические точки невырождены и образуют неблуждающее множество диффеоморфизма f. Каждая периодическая точка f является критической точкой любой функции Ляпунова. Поэтому смысл определения энергетической функции состоит в требовании, что каждая ее критическая точка является неблуждающей.

Род и разбиение Хегора. Пусть B^n – стандартный единичный замкнутый n-мерный шар евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Множество, гомеоморфное произведению $B^i \times B^{n-i}$, называется *ручкой индекса* i, $0 \leqslant i \leqslant n$. Подмножество $\partial B^i \times B^{n-i}$ ручки индекса i называется *подошвой*. Говорят, что многообразие M получается из многообразия N *приклеиванием нескольких ручек*, если $\operatorname{clos}(M - N)$ является несвязным объединением ручек, подошвы которых лежат в ∂N (см. детали в [17]).

Многообразие D^3_g размерности 3 называется *3-мерным шаром с g ручками*, если D^3_g получается из B^3 приклеиванием $g \geqslant 0$ ручек индекса 1. *Разбиением Хего-*

ра рода $g \geqslant 0$ замкнутого 3-мерного многообразия M^3 называется представление M^3 в виде склейки двух 3-мерных шаров с g ручками с помощью некоторого гомеоморфизма, отождествляющего их границы. *Родом Хегора* многообразия M^3 называется наименьшее g, для которого существует соответствующее разбиение Хегора многообразия M^3.

§ 3. О вложении поверхности в произведение поверхности на отрезок

Пусть $M_{g,k}$ – ориентируемая компактная связная поверхность рода $g \geqslant 0$ с краем $\partial M_{g,k}$, который либо пуст, $k = 0$, либо состоит из $C_1, \dots, C_k$, $k \geqslant 1$, простых попарно непересекающихся замкнутых кривых. Положим $\mathscr{C}_k = \bigcup_{i=1}^k C_i$

Пусть $P_{g,k}$ – трехмерное многообразие, являющееся прямым произведением $M_{g,k}$ на отрезок $[0,1]$, $P_{g,k} = M_{g,k} \times [0,1]$. Положим

$$M^0_{g,k} = M_{g,k} \times \{0\}, \qquad M^1_{g,k} = M_{g,k} \times \{1\}.$$

Тогда граница $\partial P_{g,k}$ многообразия $P_{g,k}$ состоит из двух компактных поверхностей $M^0_{g,k}$, $M^1_{g,k}$ и множества, которое либо пусто, либо является объединением k непересекающихся между собой замкнутых колец $C_1 \times [0,1], \dots, C_k \times [0,1]$. Положим в этом случае $\mathscr{K}_k = \bigcup_{i=1}^k C_i \times [0,1]$.

В этом параграфе мы исследуем топологические свойства компонент связности множества $P_{g,k} \setminus Q$, где Q – гладко вложенное в множество $P_{g,k} \setminus (M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k})$ двумерное компактное ориентируемое многообразие (поверхность), край ∂Q которого либо пуст (если Q замкнутое), либо состоит из конечного числа простых замкнутых кривых. При этом мы будем всегда предполагать, что многообразие Q собственно вложено в многообразие $P_{g,k}$. Напомним, что компактное двумерное многообразие N является собственно вложенным в трехмерное компактное многообразие M, если внутренность многообразия N лежит во внутренности многообразия M, граница многообразия N лежит в границе многообразия M и многообразие N трансверсально к границе многообразия M.[1]

Основным результатом этого параграфа является теорема 3.3, утверждающая, что если Q является замкнутой ориентируемой поверхностью рода g, не ограничивающей область в $P_{g,k}$, то замыкание каждой компоненты $P_{g,k} \setminus Q$ гомеоморфно $P_{g,k}$.

Для доказательства этого результата мы докажем ряд лемм и теоремы 3.1, 3.2, которые имеют самостоятельное значение. При этом теорема 3.3 является непосредственным следствием теоремы 3.2.

Будем говорить, что поверхность $Q \subset P_{g,k} \setminus (M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k})$ разделяет поверхности $M^0_{g,k}$ и $M^1_{g,k}$ в многообразии $P_{g,k}$, если $M^0_{g,k}$ и $M^1_{g,k}$ лежат в различных компонентах связности множества $P_{g,k} \setminus Q$. В противном случае будем говорить, что поверхность $Q \subset P_{g,k} \setminus (M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k})$ не разделяет поверхности $M^0_{g,k}$ и $M^1_{g,k}$.

В следующей лемме и двух следствиях содержатся достаточные условия того, что $Q \subset P_{g,k} \setminus (M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k})$ разделяет и не разделяет поверхности $M^0_{g,k}$, $M^1_{g,k}$.

[1]Трансверсальность ∂N к ∂M означает, что в любой точке $x \in (\partial M \cap \partial N)$ пересечение M с N выглядит как пересечение координатной xy-плоскости с координатной yz-полуплоскостью в $\mathbb{R}^3$.

Лемма 3.1. *Для того чтобы связная замкнутая ориентируемая поверхность* $Q \subset P_{g,k} \setminus (M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k})$ *не разделяла поверхности* $M^0_{g,k}$, $M^1_{g,k}$, *необходимо и достаточно, чтобы* Q *ограничивала область* $A \subset P_{g,k} \setminus (M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k})$ *с границей* $\partial A = Q$.

Доказательство. Докажем *необходимость*. Предположим, что поверхность $Q \subset P_{g,k} \setminus (M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k})$ не разделяет поверхности $M^0_{g,k}$, $M^1_{g,k}$.

Не уменьшая общности, можно считать, что многообразие $M_{g,k}$ стандартно вложено в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Тогда $P_{g,k}$ можно рассматривать как "утолщение" этого многообразия в $\mathbb{R}^3$. Достаточно рассмотреть случай $k = 0$, так как для $k \neq 0$ утверждение следует из случая $k = 0$.

Множество $\mathbb{R}^3 \setminus (M^0_{g,0} \cup M^1_{g,0})$ распадается на три непересекающиеся области: неограниченную в $\mathbb{R}^3$ область A_1, в границу которой входит только $M^0_{g,0}$; область $A_2 = P_{g,0} \setminus (M^0_{g,0} \cup M^1_{g,0})$; область A_3, лежащую в компактной части $\mathbb{R}^3$ и ограниченную поверхностью $M^1_{g,0}$. Так как многообразие Q также вложено в $\mathbb{R}^3$, то оно разбивает $\mathbb{R}^3$ на неограниченную область B_1 и ограниченную область B_2 (см., например, [18; разд. 26, теорема 6]).

Рассмотрев все логически возможные случаи взаимного расположения областей A_i, B_i и многообразий $M^j_{g,0}$, Q, получим необходимое утверждение, что B_2 целиком лежит в A_2.

Достаточность немедленно следует из определения неразделяемости.

Следствие 3.1. *Пусть связная замкнутая ориентируемая поверхность* Q *вложена в* $P_{g,k} \setminus (M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k})$ *так, что существует простая дуга* γ *с граничными точками* x_1, x_2, *принадлежащими* $M^0_{g,k}$, $M^1_{g,k}$ *соответственно, и такая, что* γ *трансверсально пересекает* Q *только в одной точке. Тогда поверхность* Q *разделяет* $M^0_{g,k}$ *и* $M^1_{g,k}$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда в силу леммы 3.1 поверхность Q ограничивает некоторую область A, что противоречит существованию дуги γ с указанными свойствами.

Следствие 3.2. *Пусть связная компактная ориентируемая поверхность* Q *с краем* ∂Q, *состоящим из* $r > 0$ *замкнутых кривых, вложена в* $P_{g,k} \setminus (M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k})$, $k > 0$, *таким образом, что существует по крайней мере одна кривая* C_i *из множества* $\mathscr{C}_k$, $i \in \{1, \dots, k\}$, *которой гомотопна в точности одна замкнутая кривая* S *из* ∂Q. *Тогда* Q *разделяет* $M^0_{g,k}$ *и* $M^1_{g,k}$.

Доказательство. Можно считать, что многообразие $P_{g,k}$ есть часть многообразия $P_{g,0} = M_{g,0} \times [0,1]$, являющегося прямым произведением замкнутого ориентируемого двумерного многообразия $M_{g,0} \supset M_{g,k}$ рода g на отрезок $[0,1]$.

Заклеим край Q гладкими двумерными непересекающимися между собой дисками, лежащими в множестве $P_{g,0} \setminus P_{g,k}$, так, чтобы образовалось гладкое замкнутое ориентируемое многообразие Q'. Тогда на $C_i \times [0,1]$ найдется путь, соединяющий точки $x_1 \in M^0_{g,k}, x_2 \in M^1_{g,k}$, пересекающий S, а следовательно, и Q' только в одной точке. По следствию 3.1 получим, что Q' разделяет $M^0_{g,0}$ и $M^1_{g,0}$ в $P_{g,0}$, и поэтому Q разделяет многообразия $M^0_{g,k}$ и $M^1_{g,k}$ в $P_{g,k}$.

Теорема 3.1. *Пусть в $P_{g,k} \setminus (M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k})$, $g > 0$, вложено связное двумерное ориентируемое компактное многообразие Q рода $r < g$. Тогда Q не разделяет в $P_{g,k}$ двумерные многообразия $M^0_{g,k}$, $M^1_{g,k}$.*

Доказательство. Сначала доказательство проведем для $k = 0$, применяя метод математической индукции по роду g, начиная с $g = 1$. Так как Q собственно вложено в $P_{g,0} \setminus (M^0_{g,0} \cup M^1_{g,0})$, то оно также не имеет края, т.е. является замкнутым многообразием. Для $g = 1$ многообразие $P_{g,0}$ является прямым произведением двумерного тора на отрезок $[0, 1]$, т.е. неприводимым трехмерным многообразием (это означает, что любая цилиндрически вложенная в $P_{1,0} \setminus (M^0_{1,0} \cup M^1_{1,0})$ двумерная сфера ограничивает открытый трехмерный шар). Так как единственным ориентируемым двумерным замкнутым многообразием рода $r < 1$ является двумерная сфера, то Q – двумерная сфера, ограничивающая трехмерный шар в $P_{1,0}$. Тогда в силу леммы 3.1 теорема справедлива для $g = 1$.

Теперь предположим, что теорема справедлива для всех родов меньших g, $g > 1$. Докажем, что она справедлива и для рода g. Пусть Q – любое ориентируемое двумерное замкнутое многообразие рода $r < g$, вложенное в $P_{g,0} \setminus (M^0_{g,0} \cup M^1_{g,0})$. Возьмем замкнутую гладкую кривую $c \subset M_{g,0}$, неразбивающую $M_{g,0}$, и рассмотрим двумерное кольцо $K_0 = c \times [0, 1]$. Малым шевелением Q можно добиться того, что пересечение $Q \cap K_0$ либо пусто, либо состоит из p гладких непересекающихся между собой замкнутых кривых c_i, $i = 1, \dots, p$. Если пересечение $Q \cap K_0$ пусто или все кривые c_i гомотопны нулю в кольце K_0, то существует простая дуга, внутренность которой лежит в K_0, а граничные точки принадлежат различным компонентам границы кольца K_0. Это означает, что поверхность Q не разделяет $M^0_{g,0}$, $M^1_{g,0}$, и теорема 3.1 доказана для $k = 0$.

Таким образом, предположим, что $Q \cap K_0 \neq \varnothing$ и среди кривых c_i найдется, по крайней мере, одна кривая (скажем c_1), не гомотопная нулю в K_0.

Разрежем многообразие $P_{g,0}$ по K_0. Так как c не разбивает $M_{g,0}$, то при этом разрезании образуется связное двумерное многообразие $M_{g-1,2}$ и связное трехмерное многообразие $P_{g-1,2}$, являющееся прямым произведением многообразия $M_{g-1,2}$ на отрезок $[0, 1]$, в границу которого входят два кольца K_1, K_2, соответствующие кольцу K_0.

Так как $Q \cap K_0 \neq \varnothing$, то после разрезания Q по K_0 получится компактное, вообще говоря, несвязное двумерное многообразие, которое обозначим Q_1. Можно считать, что многообразие $P_{g-1,2}$ есть часть многообразия $P_{g-1,0}$, причем $M_{g-1,2} \subset M_{g-1,0}$, а множество $P_{g-1,0} \setminus P_{g-1,2}$ распадается на два непересекающихся между собой множества, замыкания которых являются трехмерными шарами b_1, b_2, пересекающимися с $P_{g-1,2}$ по K_1, K_2 соответственно.

Через c^i_j, $j = 1, \dots, p$, обозначим кривые на K_i, $i = 1, 2$, соответствующие кривым c_j после разрезания многообразия $P_{g,0}$ по кольцу K_0.

Подклеим ко всем замкнутым кривым c^i_j, $j = 1, \dots, p$, двумерные непересекающиеся между собой диски d^i_j, лежащие внутри шара b_i (рис. 1). Тогда получим замкнутую ориентируемую поверхность $Q' = Q_1 \cup \bigcup_{j=1}^{p} d^i_j$ (подчеркнем, что многообразие Q' может состоять из нескольких двумерных связных замкнутых ориентируемых многообразий $Q'_1, \dots, Q'_q$, непересекающихся между собой и собственно вложенных в $P_{g-1,0}$ несмотря на то, что Q связно). Так как кривая c_1 не гомотопна нулю в K_0, то она не гомотопна нулю в $P_{g,0}$. Поэтому c_1 не гомотопна нулю в Q и,

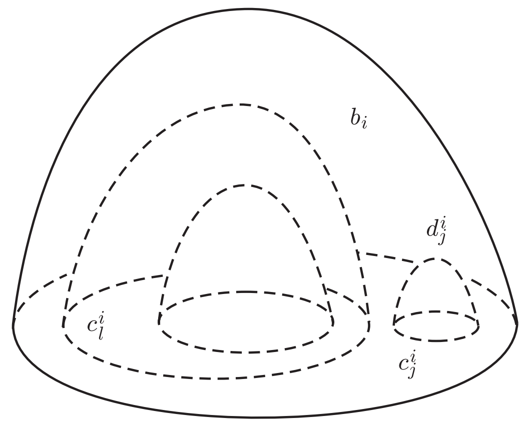

Рис. 1. Диски d^i_j

следовательно, род каждой компоненты Q'_i будет меньше рода многообразия Q.

По предположению математической индукции поверхность Q'_i не разделяет многообразия $M^0_{g-1,0}$ и $M^1_{g-1,0}$. Тогда по лемме 3.1 поверхность Q'_i (при каждом $i \in \{1,\dots,q\}$) ограничивает область в $P_{g-1,0}$. Отсюда следует, что $M^0_{g-1,0}$ и $M^1_{g-1,0}$ лежат в одной компоненте связности множества $P_{g-1,0} \setminus \bigcup_{i=1}^{q} Q'_i$. Тогда существует путь ω, соединяющий точки $x \in M^0_{g-1,0}$, $y \in M^1_{g-1,0}$ и не пересекающий многообразия $Q' = \bigcup_{i=1}^{q} Q'_i$. Если $\omega \cap \operatorname{int}(b_1 \cup b_2) = \varnothing$, то отсюда сразу будет следовать, что поверхность Q не разделяет $M^0_{g,0}$, $M^1_{g,0}$, и теорема 3.1 доказана.

Предположим, что $\omega \cap \operatorname{int}(b_1 \cup b_2) \neq \varnothing$. Поскольку Q' находится на ненулевом расстоянии от $M^0_{g-1,0} \cup M^1_{g-1,0}$, то, не нарушая общности, можно считать, что $x \in M^0_{g-1,2}$, $y \in M^1_{g-1,2}$. Не уменьшая общности, можно также считать, что ω трансверсально пересекает кольца K_i при входе и выходе из шаров b_i, $i = 1, 2$. Пусть $(x_1, x_2) \subset \omega \cap (b_1 \cup b_2)$ – первая дуга на ω при движении от x к y, лежащая в $\operatorname{int}(b_1 \cup b_2)$, граничные точки которой принадлежат границе $b_1 \cup b_2$. Для определенности будем считать, что $(x_1, x_2) \subset \omega \cap \operatorname{int} b_1$, $x_1, x_2 \in K_1$. Так как диски d^1_j, $j = 1, \dots, p$, попарно не пересекаются, то (x_1, x_2) лежит в одной компоненте связности, скажем K_{12}, множества $b_1 - \bigcup_{j=1}^{p} d^1_j$. Поэтому точки x_1, x_2 также лежат в одной компоненте $C_{12} \subset \operatorname{clos} K_{12} \cap K_1$ множества $K_1 - \bigcup_{j=1}^{p} c^1_j$. Тогда (x_1, x_2) можно заменить на дугу $(x_1, x_2)' \subset C_{12}$ с теми же концевыми точками x_1, x_2.

Вблизи x_1, x_2 на дуге ω выберем точки y_1, y_2, лежащие вне $b_1 \cup b_2$, и соединим их гладкой дугой (y_1, y_2), проходящей вблизи $(x_1, x_2)'$ вне $\operatorname{clos}(b_1 \cup b_2)$, не пересекая поверхность Q'. Проделав описанное выше построение со всеми компонентами из множества $\omega \cap \operatorname{int}(b_1 \cup b_2)$, получим дугу

$$h \subset P_{g-1,0} \setminus \operatorname{int}(b_1 \cup b_2),$$

соединяющую точки x, y. Поэтому и в $P_{g,0}$ дуга h соединяет точки $x \in M^0_{g,0}$, $y \in M^1_{g,0}$, не пересекая поверхности Q. Таким образом, теорема 3.1 полностью доказана для случая, когда $M_{g,0}$ не имеет края.

Если многообразие $M_{g,k}$ имеет край, то можно считать, что оно является частью многообразия $M_{g,0}$ и, значит, многообразие $P_{g,k}$ является частью многообразия $P_{g,0}$, являющегося прямым произведением $M_{g,0}$ на отрезок $[0,1]$.

Если многообразие Q рода r меньшего, чем g, имеет край, то он состоит из конечного множества простых непересекающихся кривых. Так как многообразие Q собственно вложено, то можно приклеить к каждой компоненте края поверхности Q двумерный гладкий диск, находящийся в многообразии $P_{g,0} \setminus P_{g,k}$. Тогда получим замкнутое ориентируемое двумерное многообразие Q' рода r, гладко вложенное в $P_{g,0}$. В силу доказанного выше существует путь, соединяющий точки, лежащие на разных компонентах границы многообразия $P_{g,0}$, и не пересекающий многообразия Q'. Тогда, применяя выше приведенные рассуждения об исправлении пути ω, построим новый путь, который соединяет пару точек, одна из которых лежит на $M^0_{g,k}$, другая – на $M^1_{g,k}$, и не пересекается с поверхностью Q. Теорема 3.1 полностью доказана.

Для доказательства теоремы 3.2 нам понадобятся несколько технических лемм о вложениях двумерных колец в $P_{g,k}$ для $g \geqslant 1$. При этом по-прежнему все вложения рассматриваемых колец предполагаются собственными.

Возьмем на поверхности $M_{g,k}$ две простые замкнутые кривые c и e, каждая из которых не разбивает многообразие $M_{g,k}$ и пересекающиеся ровно в одной точке x. Так как $g \geqslant 1$, то такие кривые существуют. Через K_e (K_c) обозначим кольцо вида $e \times [0,1] \subset P_{g,k}$ ($K_c = c \times [0,1] \subset P_{g,k}$) с граничными кривыми $e_0 = e \times \{0\}$, $e_1 = e \times \{1\}$ ($c_0 = c \times \{0\}$, $c_1 = c \times \{1\}$). Положим $x_0 = x \times \{0\}$, $x_1 = x \times \{1\}$, $A_x = K_c \cap K_e$.

Лемма 3.2. *Пусть K – замкнутое кольцо, вложенное в $P_{g,k}$ таким образом, что оно ограничено замкнутыми кривыми c_0, c_1 и трансверсально пересекает кольца K_c и K_e. Тогда существует гомотопный тождественному диффеоморфизм $f\colon P_{g,k} \to P_{g,k}$, тождественный на $M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k}$ и такой, что*

1) *кольцо $f(K)$ пересекает кольца K_c и K_e трансверсально;*
2) *множество $\gamma = f(K) \cap K_c$ состоит из нескольких негомотопных в K_c замкнутых кривых, каждая из которых пересекает A_x только в одной точке;*
3) *пересечение $\operatorname{int} f(K) \cap \operatorname{int} K_e$ состоит в точности из одной простой дуги $a(K_e, f(K))$ с граничными точками x_0, x_1.*

Доказательство. Так как по условию леммы K трансверсально K_c, то множество $\operatorname{int} K \cap \operatorname{int} K_c$ состоит из конечного (возможно пустого) множества простых замкнутых кривых. Если среди этого множества имеются кривые, негомотопные нулю в K_c, то найдется сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $h_0\colon K_c \to K_c$, изотопный тождественному диффеоморфизму и тождественный на множестве $c_0 \cup c_1$, который переводит каждую замкнутую кривую, негомотопную нулю в K_c, из множества $\operatorname{int} K \cap \operatorname{int} K_c$, в замкнутую кривую, пересекающую A_x только в одной точке. Тогда диффеморфизм h_0 можно распространить до сохраняющего ориентацию диффеоморфизма $h_1\colon P_{g,k} \to P_{g,k}$ такого, что

1) на K_c диффеоморфизм h_1 совпадает с диффеоморфизмом h_0;

2) вне некоторой малой окрестности кольца K_c и на множестве $M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k}$ диффеоморфизм h_1 является тождественным диффеоморфизмом;
3) кольцо $h_1(K)$ трансверсально пересекается с кольцами K_c и K_e.

При дальнейшем доказательстве леммы для удобства изложения обозначим кольцо $h_1(K)$ снова буквой K.

Если в множестве $\gamma = K \cap K_c$ есть замкнутые кривые, ограничивающие двумерные диски на K_c, то выберем такую замкнутую кривую $s \subset \gamma$, чтобы ограниченный замкнутой кривой s двумерный открытый диск $D_c \subset K_c$ не содержал бы точек из γ.

Замкнутая кривая s также ограничивает открытый двумерный диск D и на K. (В противном случае s была бы не гомотопна нулю в K и, следовательно, s не гомотопна нулю на $P_{g,k}$, что невозможно.)

Тогда $D_c \cup s \cup D$ образует двумерную кусочно-гладкую сферу $S^2_1 \subset P_{g,k}$. В силу неприводимости многообразия $P_{g,k}$ сфера S^2_1 ограничивает в $P_{g,k} \setminus (M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k})$ трехмерный открытый шар b_1, замыкание которого есть замкнутый трехмерный шар $\operatorname{clos} b_1$. Очевидно, $\operatorname{clos} b_1 \cap (M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k}) = \varnothing$. Поэтому найдется диффеоморфизм $f_1\colon P_{g,k} \to P_{g,k}$, тождественный в некоторой окрестности множества $\operatorname{clos} b_1$, такой, что число замкнутых кривых в пересечении $\operatorname{int} f_1(K) \cap \operatorname{int} K_c$ уменьшится не менее чем на единицу (диффеоморфизм $f_1\colon P_{g,k} \to P_{g,k}$ можно мыслить как "выдавливание" шара b_1 через диск D_c). Продолжая этот процесс, окончательно получим диффеоморфизм $f_2\colon P_{g,k} \to P_{g,k}$ такой, что

1) кольцо $f_2(K)$ пересекает кольца K_c и K_e трансверсально;
2) множество $f_2(K) \cap K_c$ состоит из негомотопных нулю в K_c замкнутых кривых, каждая из которых пересекает A_x только в одной точке.

Если пересечение $\operatorname{int} f_2(K) \cap \operatorname{int} K_e$ состоит в точности из одной дуги с граничными точками x_0, x_1, то можно положить $f = f_2$, и лемма доказана.

Предположим, что это не так, и вновь обозначим $f_2(K)$ через K.

Кольцо K пересекает K_e трансверсально, а границы этих колец пересекаются в двух точках. Поэтому пересечение $K \cap K_e$ будет состоять из нескольких замкнутых кривых и одной открытой дуги $a(K_e, K)$.

Так как замыкание дуги $a(K_e, K)$ соединяет разные компоненты границ колец K_e и K, то разрезание обоих колец вдоль $\operatorname{clos} a(K_e, K)$ превращает их в диски. Следовательно, все замкнутые кривые из $\operatorname{int} K \cap \operatorname{int} K_e$ гомотопны нулю в каждом кольце K_e и K. Аналогично случаю пересечения $K_c \cap K$ по замкнутым кривым, гомотопным в K_c, можно построить диффеоморфизм $f_3\colon P_{g,k} \to P_{g,k}$ такой, что множество $f_3(K) \cap K_c$ будет совпадать с множеством $K \cap K_c$, а множество $f_3(K)$ будет состоять только из одной дуги $a(K_e, K)$. Положив $f = f_3$, получим утверждение леммы.

Лемма 3.3. *Пусть K – вложенное в $P_{g,k}$ кольцо с граничными кривыми c_0, c_1. Тогда существует диффеоморфизм многообразия $P_{g,k}$ на себя, тождественный на $M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k}$ и переводящий K в K_c.*

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что кольцо K трансверсально пересекает кольца K_c и K_e. Тогда согласно лемме 3.2 можно также считать, что

1) пересечение $\operatorname{int} K \cap \operatorname{int} K_e$ состоит из одной дуги $a(K_e, K)$;
2) пересечение $\operatorname{int} K \cap \operatorname{int} K_c$ состоит только из простых замкнутых кривых, негомотопных нулю на K_c, каждая из которых пересекает A_x только в одной точке.

Сначала рассмотрим случай $g = 1, k = 0$, т.е. многообразие $P_{1,0}$ – прямое произведение двумерного тора на отрезок.

Рассмотрим некоторый гомеоморфизм $h_0 \colon M^0_{1,0} \cup M^1_{1,0} \cup K \to M^0_{1,0} \cup M^1_{1,0} \cup K_c$ такой, что

1) h_0 является тождественным на множестве $M^0_{1,0} \cup M^1_{1,0}$;
2) ограничение гомеоморфизма h_0 на кольцо K является диффеоморфизмом таким, что $h_0(K) = K_c$;
3) $h_0(a(K_e, K)) = A_x$.

Через Q_c (Q) обозначим многообразие с краем, полученное после разрезания многообразия $P_{1,0}$ по кольцу K_c (K). По конструкции граница многообразия Q_c (Q) является двумерным тором Γ_c (Γ). Кроме того, существует двумерный диск D_c (D), образующийся из кольца K_e после разрезания по K_c (K), граница ∂D_c (∂D) которого является меридианом, т.е. простой замкнутой кривой, негомотопной нулю на торе Γ_c (Γ) и гомотопной нулю на Q_c (Q). Отсюда и из того, что $P_{1,0}$ является неприводимым многообразием, следует, что Q_c (Q) является полноторием, т.е. трехмерным многообразием с краем, гомеоморфным прямому произведению двумерного диска на окружность.

Гомеоморфизм h_0 индуцирует гомеоморфизм $\widetilde{h}_0 \colon \Gamma \to \Gamma_c$, который преобразует меридиан ∂D в меридиан ∂D_c. Тогда $\widetilde{h}_0$ можно продолжить до некоторого гомеоморфизма $\widetilde{h}_1 \colon Q \to Q_c$, который является диффеоморфизмом на множестве $\operatorname{int} Q$. В силу конструкции гомеоморфизм $\widetilde{h}_1$ индуцирует диффеоморфизм $h_1 \colon P_{0,1} \to P_{0,1}$, сопадающий с гомеоморфизмом h_0 на множестве $M^0_{1,0} \cup M^1_{1,0} \cup K$. Таким образом, лемма в случае $g = 1$, $k = 0$ доказана.

Теперь рассмотрим оставшийся случай, когда g, k образуют любой набор, кроме $g = 1$, $k = 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда кривые $\operatorname{clos} a(K_e, K)$, $\operatorname{clos} A_x$ пересекаются только в концевых точках $x_0 = \{x\} \times 0$, $x_1 = \{x\} \times 1$.

Тогда кольца K, K_c пересекаются только вдоль своих граничных кривых $c_0 = c \times 0$, $c_1 = c \times 1$. Следовательно, объединение $K \cup K_c$ является двумерным тором, который мы обозначим через T.

Возможны два подслучая:

a) простая замкнутая кривая $S = \operatorname{clos} a(K_e, K) \cup \operatorname{clos} A_x$ гомотопна нулю в K_e;
b) кривая S негомотопна нулю в K_e.

В случае a) кривая S ограничивает на кольце K_e диск d и является негомотопной нулю кривой на торе T (так как $\operatorname{clos} a(K_e, K)$ (соответственно $\operatorname{clos} A_x$) не разбивает кольцо K_e (соответственно K)). Следовательно, тор T ограничивает в $P_{g,k}$ полноторие. Отсюда вытекает существование гомотопного тождественному диффеоморфизма, тождественного на $M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k}$ и преобразующего K в K_c. Лемма в этом случае доказана.

В случае b) существует простая открытая дуга $\gamma \subset \operatorname{int} K_e$ с граничными точками γ_0, γ_1 такая, что:

1) $\gamma_0 \in e_0$ и $\gamma_0 \neq x_0$, $\gamma_1 \in e_1$ и $\gamma_1 \neq x_1$;
2) дуга γ имеет в точности одну общую точку с тором T.

Из трансверсальности пересечения K с K_c следует, что в трубчатой полуокрестности тора T существует гладкий двумерный тор $\widetilde{T}$, собственно вложенный в $P_{g,k} \setminus (M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k})$ и такой, что дуга γ пересекает тор $\widetilde{T}$ в точности в одной точке.

Тогда по следствию 3.1 тор $\widetilde{T}$ будет разделять на $P_{g,k}$ поверхности $M^0_{g,k}$ и $M^1_{g,k}$. Но тогда в силу теоремы 3.1 получаем, что что $g = 1, k = 0$, что невозможно.

Осталось рассмотреть случай, когда $\operatorname{int} a(K_e, K)$ пересекает A_x. Пусть замкнутая дуга $S_A \subset A_x$ пересекается с замыканием дуги $a(K_e, K)$ только по концевым точкам, и пусть дуга $S_K \subset a(K_e, K)$ ограничена концевыми точками дуги S_A. Тогда объединение $S_1 = S_K \cup S_A$ является простой замкнутой кривой на кольце K_e. Через концевые точки дуг S_K, S_A проходят две замкнутые кривые $C_1, C_2 \subset K \cap K_c$, негомотопные нулю как на K, так и на K_c. Поэтому они ограничивают кольца $A_K \subset K$, $A_c \subset K_c$. Так как в пересечении $K \cap K_c$ нет замкнутых кривых, гомотопных нулю в кольцах K, K_c, и дуги $S_K \subset a(K_e, K)$, $S_A \subset A_x$ во внутренних точках не пересекаются между собой, то кольца $A_K \subset K$, $A_c \subset K_c$ пересекаются только вдоль своих границ. Поэтому объединение $A_K \cup A_c = T_A$ является двумерным тором. Поскольку дуги S_K, S_A не разбивают кольца A_K, A_c соответственно, то кривая S_1 негомотопна нулю на T_A.

Далее, логически возможны два случая:

a$_1$) кривая S_1 гомотопна нулю на K_e;
b$_1$) кривая S_1 не гомотопна нулю на K_e.

Как и выше (при рассмотрении случая b)), устанавливается, что случай b$_1$) невозможен.

В случае a$_1$) кривая S_1 ограничивает диск $d_1 \subset K_e$ и, следовательно, тор T_A ограничивает в $P_{g,k}$ полнотории. Следовательно, существует деформация кольца A_K в кольцо A_c через это полнотории, при которой дуга S_K деформируется в дугу S_A через диск d_1. В результате кольцо K деформируется в кольцо K', пересечение P которого с кольцом K_c содержит кольцо A_c, и в остальных точках множество P совпадает с пересечением кольца K с K_c. Так как S_A и S_K пересекаются в концевых точках, то K' можно продеформировать в кольцо K_1, которое не будет пересекаться с K_c вдоль кольца A_c. При этом можно проследить за тем, чтобы новых пересечений не возникло. Тогда полученное кольцо K_1 имеет в пересечении с K_c не менее чем на одну кривую меньше, чем K. Соответственно дуга $a(K_e, K_1)$ имеет в пересечении с A_x не менее чем на одну точку меньше, чем $a(K_e, K)$.

Продолжая этот процесс, получаем кольцо $h(K)$ для некоторого диффеоморфизма $h\colon P_{g,k} \to P_{g,k}$, тождественного на множестве $M^0_{g,k} \cap M^1_{g,k}$, которое будет пересекаться с K_c только по замкнутым кривым c_0, c_1. Тогда получим уже рассмотренный случай, что завершает доказательство леммы.

Из доказанной леммы получаем следующее важное

Следствие 3.3. *Пусть* K – *вложенное в* $P_{g,k}$ *кольцо с граничными кривыми* c_0, c_1. *Тогда при разрезании многообразия* $P_{g,k}$ *вдоль кольца* K *получается многообразие* $P_{g-1,k+2}$, *которое является прямым произведением некоторого двумерного многообразия* $M_{g-1,k+2}$ *на отрезок* $[0,1]$.

Лемма 3.4. *Пусть в* $P_{g,k}\setminus(M^0_{g,k}\cup M^1_{g,k})$, $g\geqslant 1$, *вложено двумерное связное компактное ориентируемое многообразие* Q *рода* g *с краем* ∂Q, *состоящим из* k *замкнутых кривых, разделяющее поверхности* $M^0_{g,k}$, $M^1_{g,k}$. *Пусть* K, *кольцо с граничными кривыми* c_0, c_1, *вложено в* $P_{g,k}$ *так, что* $K\cap Q$ *состоит из конечного числа простых замкнутых кривых, негомотопных нулю в* Q. *Тогда все эти кривые негомотопны нулю и в* K.

Доказательство. Сначала сделаем следующее важное замечание. Так как Q собственно вложено, разделяет $M^0_{g,k}$, $M^1_{g,k}$ и число компонент края многообразия Q совпадает с числом компонент края многообразия $M_{g,k}$, то на каждом кольце $C_i\times[0,1]\subset\mathscr{K}_k$ имеется ровно одна замкнутая кривая $\widetilde{C}_i$ из ∂Q, которая гомотопна кривой C_i (напомним, что через C_i, $i=1,\ldots,k$, были обозначены все замкнутые кривые, лежащие в $\partial M_{g,k}$).

Перейдем к доказательству леммы. Предположим противное. Тогда в $K\cap Q$ найдется кривая s, которая ограничивает на K некоторый двумерный диск d_K, не содержащий точек из $K\cap Q$. Выбирая достаточно малую окрестность кривой s, можно найти открытое кольцо K_s, лежащее в этой окрестности, такое, что оно содержит s, не пересекается с кривыми из $Q\cap K$, отличными от s, и такое, что после вырезания этого кольца из Q полученные дыры можно заклеить непересекающимися двумерными дисками d_1, d_2. Через Q' обозначим поверхность, полученную после такого заклеивания. Через g' обозначим число, равное максимальному роду компонент связности, из которых состоит поверхность Q', и покажем, что $g'\leqslant g-1$. Предположим противное, т.е. $g'=g$. Тогда Q' распадается на две компоненты связности, одна из которых (обозначим ее через Q'_1) будет плоским двумерным многообразием с краем, лежащим в $\bigcup_{i=1}^k\widetilde{C}_i$. Но тогда Q'_1 имеет нулевой род и по следствию 3.2 разделяет поверхности $M^0_{g,k}$, $M^1_{g,k}$ в $P_{g,k}$. Так как $g>0$, то получаем противоречие с теоремой 3.1. Полученное противоречие показывает, что $g'\leqslant g-1$.

Согласно теореме 3.1 ни одна из компонент связности поверхности Q' не разделяет $M^0_{g,k}$, $M^1_{g,k}$ в $P_{g,k}$, т.е. существует путь ω от $M^0_{g,k}$ к $M^1_{g,k}$, не пересекающийся с Q'. По условию леммы Q разделяет края $M^0_{g,k}$, $M^1_{g,k}$. Поэтому $\omega\cap K_s\neq\varnothing$. Множество $d_1\cup d_2\cup K_s$ является двумерной сферой, ограничивающей замкнутый шар $B\subset P_{g,k}\setminus(M^0_{g,k}\cup M^1_{g,k})$. Следовательно, часть пути ω, попадающую в B, можно заменить на путь, лежащий в малой окрестности K_s, не пересекающий B и Q. Но тогда ω не будет пересекать Q, что противоречит условию леммы.

Следующая лемма является достаточно простым фактом топологии двумерных многобразий, тем не менее, для полноты изложения мы приведем ее доказательство.

Лемма 3.5. *Пусть на двумерном ориентируемом многообразии* Q *рода* $g\geqslant 1$ *с краем, состоящим из* $k\geqslant 0$ *простых замкнутых кривых, имеется семейство* $s_1,\ldots,s_m$, $m\geqslant 3$, *простых замкнутых кривых, удовлетворяющих* *следующим условиям:*

1) $s_i \cap s_j = \varnothing$ *для* $i \neq j$;
2) $s_i \cap \partial Q = \varnothing$ *для любого* $i \in \{1, \dots, m\}$;
3) s_i *не гомотопна нулю на* Q *для любого* $i \in \{1, \dots, m\}$;
4) *существует компонента связности множества* $Q \setminus \bigcup_{1=1}^{m} s_i$, *род которой не меньше* $g-1$ *и которая в случае* $k \neq 0$ *содержит край* ∂Q *многообразия* Q.

Тогда существуют по крайней мере две кривые из множества $s_1, \dots, s_m$, *которые ограничивают компоненту связности множества* $Q \setminus \bigcup_{1=1}^{m} s_i$, *гомеоморфную открытому двумерному кольцу.*

Доказательство. Если среди замкнутых кривых $s_1, \dots, s_m$ есть пара кривых, ограничивающая двумерное кольцо K, то в силу негомотопности нулю s_i в Q множество $K \setminus \bigcup_{1=1}^{m} s_i$ является объединением открытых колец. Поэтому лемма в этом случае доказана.

Теперь предположим противное, т.е. что любая пара замкнутых кривых из множества $s_1, \dots, s_m$ не является границей двумерного кольца. Сначала рассмотрим случай, когда среди замкнутых кривых $s_1, \dots, s_m$ есть хотя бы одна замкнутая кривая, например s_1, неразбивающая многообразие Q. По условию леммы существует компонента связности множества $Q \setminus \bigcup_{1=1}^{m} s_i$ рода большего, чем $g-2$, которая содержит край Q. Поэтому $Q \setminus (s_1 \cup s_2)$ распадается на две компоненты Q_1, Q_2 такие, что компонента Q_1 имеет род больший, чем $g-2$, и содержит край многообразия Q, а компонента Q_2 является плоской областью, ограниченной кривыми s_1, s_2. В силу предположения о противном область Q_2 является трехсвязной областью.

По условию леммы s_3 не гомотопна нулю в Q и по предположению о противном не ограничивает ни с s_1, ни с s_2 двумерное кольцо. Поэтому s_3 лежит в Q_1. Но тогда из условия леммы следует, что одна из компонент $Q_1 \setminus s_3$ имеет род $g-1$ и содержит край многообразия Q. Поэтому s_2, s_3 на Q_1 ограничивают двумерное кольцо. Противоречие.

Осталось рассмотреть случай, когда любая замкнутая кривая s_i, $i \in \{1, \dots, m\}$, разбивает Q на две компоненты. В этом случае $Q \setminus s_1$ распадается на две компоненты Q_1, Q_2 такие, что Q_1 имеет род $g-1$ и содержит край многообразия Q, а Q_2 имеет род 1 и содержит одну компоненту края, являющуюся кривой s_1.

Через Q_* обозначим ту компоненту из Q_1 и Q_2, которая содержит s_2. Тогда s_2 разбивает Q_* на две компоненты, одна из которых будет плоской и не содержащей ни одной компоненты края исходного многообразия Q. Но тогда s_1, s_2 ограничивают на Q_* двумерное кольцо. Опять получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Пусть в* $P_{g,k} \setminus (M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k})$, $g \geqslant 1$, *вложено двумерное связное компактное ориентируемое многообразие* Q *рода* g *с краем* ∂Q, *состоящим из* k *замкнутых кривых, разделяющее поверхности* $M^0_{g,k}$, $M^1_{g,k}$. *Тогда существует кольцо* K *с граничными кривыми* c_0, c_1, *вложенное в* $P_{g,k}$ *так, что* K *трансверсально* Q *и пересечение* $K \cap Q$ *состоит в точности из одной простой замкнутой кривой, не разбивающей* Q *и негомотопной нулю в* K.

Доказательство. Первым шагом изменим кольцо K_c в малой окрестности пересечения $Q \cap K_c$ так, что новое кольцо K_0, имеет ту же границу, что и кольцо K_c, и трансверсально пересекает Q. Тогда пересечение $Q \cap K_0$ состоит из конечного числа замкнутых кривых.

Покажем, что, деформируя K_0, можно получить новое кольцо K_1, не имеющее в пересечении с Q замкнутых кривых, гомотопных нулю в Q.

Действительно, пусть $Q \cap K_0$ содержит замкнутые кривые, гомотопные нулю в Q. Тогда существует кривая $s \subset Q \cap K_0$, ограничивающая на Q диск d_Q, внутри которого нет точек из $Q \cap K_0$. Кривая s ограничивает некоторый диск d_K на K_0 (так как в противном случае кривая s была бы негомотопной нулю в K_0, а значит, и в $P_{g,k}$, что невозможно, так как s ограничивает диск d_Q).

Так как $g \geqslant 1$, то многообразие $P_{g,k}$ является неприводимым. Объединение $d_Q \cup d_K \cup s$ является цилиндрически вложенной сферой и, следовательно, ограничивает в $P_{g,k}$ шар (внутри которого нет точек кольца K_0). Тогда существует деформация K_0, тождественная на его границе, в новое кольцо, которое будет иметь в пересечении с Q на одну кривую меньше. Продолжая этот процесс, получаем кольцо K_1 такое, что пересечение $K_1 \cap Q \neq \varnothing$ и $K_1 \cap Q$ состоит из конечного числа простых замкнутых кривых $s_1, \ldots, s_m$, негомотопных нулю в Q. В силу леммы 3.4 все эти кривые являются негомотопными нулю и в K_1.

Разрежем многообразие $P_{g,k}$ по кольцу K_1. Тогда в силу следствия 3.3 получим связное многообразие $P_{g-1,k+2}$, которое является прямым произведением некоторого многообразия $M_{g-1,k+2}$ на отрезок $[0,1]$. При этом кольцу K_1 будут соответствовать два кольца $K_1^1, K_1^2 \subset \partial P_{g-1,k+2}$, а множествам $C_i \times [0,1]$ из $\mathscr{K}_k$ будут соответствовать множества, лежащие в $\partial P_{g-1,k+2}$, которые обозначим через H_i, $i = 1, \ldots, k$.

Предположим сначала, что $K_1 \cap Q$ состоит в точности из одной кривой (т.е. $m = 1$). Покажем, что замкнутая кривая $s_1 = Q \cap K_1$ не разбивает Q. Предположим противное. Тогда s_1 разбивает Q на две компоненты, и после разрезания $P_{g,k}$ по кольцу K_1 в многообразие $P_{g-1,k+2}$ будут вложены два двумерные непересекающиеся многообразия Q_1, Q_2, соответствующие компонентам множества $Q \setminus s_1$. Причем кривой s_1 будут соответствовать кривые $t_i = Q_i \cap K_1^i$, $i = 1, 2$.

По построению t_1 является единственной замкнутой кривой края поверхности Q_1, гомотопной граничной компоненте кольца K_1^1. Тогда по следствию 3.2 поверхность Q_1 разделяет в $P_{g-1,k+2}$ многообразия $M^0_{g-1,k+2}$ и $M^1_{g-1,k+2}$. Так как $Q_1 \cap K_1^2 = \varnothing$, то в кольце K_1^2 существует путь, соединяющий точки на многообразиях $M^0_{g-1,k+2}$ и $M^1_{g-1,k+2}$ и непересекающий Q_1. Получаем противоречие. Таким образом, в случае $m = 1$ лемма доказана.

Рассмотрим теперь случай $m > 1$. Так как по условию Q разделяет в $P_{g,k}$ многообразия $M^0_{1,k}$, $M^1_{1,k}$, то $m \geqslant 3$ (если бы m равнялось двум, то в кольце K_1 нашелся бы путь, соединяющий точки многообразий $M^0_{g,k}$, $M^1_{g,k}$ и пересекающий проверхность Q только в двух точках, что невозможно).

Покажем, что по крайней мере одна из компонент множества $Q \setminus \bigcup_{i=1}^m s_i$ гомеоморфна двумерному открытому кольцу и ограничена двумя кривыми из множества $s_1, \ldots, s_m$.

В силу леммы 3.5 для этого достаточно показать, что в множестве $Q \setminus \bigcup_{i=1}^m s_i$ имеется по крайней мере одна компонента связности, род которой не меньше $g - 1$ и которая в случае $k \neq 0$ содержит край ∂Q многообразия Q.

Так как по условию многообразие Q разделяет многообразия $M^0_{g,k}$, $M^1_{g,k}$, то в силу следствия 3.2 после разрезания $P_{g,k}$ по кольцу K_1 найдется многообразие Q_1 рода g_1, соответствующее одной из компонент связности множества $Q \setminus \bigcup_{i=1}^m s_i$, гладко вложенное в $P_{g-1,k+2}$ и разделяющее $M^0_{g-1,k+2}$, $M^1_{g-1,k+2}$. Тогда согласно теореме 3.1 имеет место неравенство $g-1 \leqslant g_1 \leqslant g$.

Покажем теперь, что если $k \neq 0$, то край поверхности Q целиком лежит в компоненте Q_1.

Предположим противное, т.е. край многообразия Q лежит в разных компонентах связности множества $Q \setminus \bigcup_{i=1}^m s_i$. Тогда существует номер $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ такой, что $Q_1 \cap H_i = \varnothing$. Но тогда на H_i найдется путь, соединяющий точки на многообразиях $M^0_{0,k+2}$, $M^1_{0,k+2}$ и не пересекающий Q_1, что невозможно.

Таким образом, в множестве $Q \setminus \bigcup_{i=1}^m s_i$ имеется по крайней мере одна компонента, скажем A, гомеоморфная открытому кольцу с граничными кривыми из семейства $s_1, \dots, s_m$. Для определенности будем считать, что A ограничено кривыми s_1, s_2. Эти кривые ограничивают на K_1 кольцо, скажем A_*, поскольку s_1, s_2 негомотопны нулю и в K_1. Заменив A_* на A, получим кольцо K_1', пересекающееся с Q вдоль кольца A и имеющее общую границу с K_1. Далее можно так продеформировать K_1' вблизи A, что полученное кольцо K_1'' будет трансверсально пересекаться с Q и иметь на одну или две кривые меньше в пересечении с Q.

Продолжая процесс, получаем требуемое кольцо K с граничными кривыми c_0, c_1, которое пересекается с Q ровно по одной простой замкнутой кривой, негомотопной нулю в K. Из доказанного выше вытекает, что эта кривая не разбивает Q. На этом доказательство леммы заканчивается.

Теорема 3.2. *Пусть в $P_{g,k} \setminus (M^0_{g,k} \cup M^1_{g,k})$, $g \geqslant 0$, $k \geqslant 0$, вложено гладкое, двумерное, связное, ориентируемое, компактное многообразие Q рода g с краем ∂Q, состоящим из k замкнутых кривых. Предположим, что Q разделяет в $P_{g,k}$ двумерные многообразия $M^0_{g,k}$, $M^1_{g,k}$. Тогда множество $P_{g,k} \setminus Q$ состоит из двух компонент, замыкание каждой из которых гомеоморфно $P_{g,k}$.*

Доказательство. Для $i = 0, 1$ обозначим через $A^i_{g,k}$ замыкание компоненты связности множества $P_{g,k} \setminus Q$, в границу которой входит многообразие $M^i_{g,k}$.

Докажем теорему методом математической индукции по роду $g \geqslant 0$. Начнем с рода $g = 0$ и рассмотрим сначала случай $k = 0$. Затем для $g = 0$ и любого $k \geqslant 1$ докажем теорему методом математической индукции по числу k.

Для $k = 0$ многообразия $M^0_{0,0}$, $M^1_{0,0}$ являются двумерными сферами. Более того, не уменьшая общности, можно считать, что $P_{0,0}$ есть замкнутое стандартное трехмерное кольцо (т.е. замкнутая область трехмерного евклидового пространства, заключенная между концентрическими двумерными сферами). Поскольку двумерная сфера Q разделяет $M^0_{0,0}$, $M^1_{0,0}$, то она разбивает стандартное трехмерное кольцо на две области, в границу каждой из которых входит ровно одно многообразие из $M^0_{0,0}$, $M^1_{0,0}$. Из того, что Q является сферой, цилиндрически вложенной в $P_{0,0}$, следует, что замыкание $A^i_{0,0}$, $i = 0, 1$, каждой из этих областей гомеоморфно замкнутому стандартному трехмерному кольцу, т.е. $P_{0,0}$ (см., например, [19]).

Покажем, далее, что для любого $k \geqslant 1$, $g = 0$, множество $P_{0,k} \setminus Q$ состоит из двух компонент (замыкания которых есть $A^0_{0,k}$, $A^1_{0,k}$) и существует гомеоморфизм $\psi_{i,0,k} \colon A^i_{0,k} \to P_{0,k}$ такой, что $\psi_{i,0,k}\big|_{M^i_{0,k}} = \mathrm{id}$, $\psi_{i,0,k}(Q) = M^j_{0,k}$, где $i = 0, 1$,

$j \neq i$.

Для $k=1$ многообразие $P_{0,1}$ есть трехмерный замкнутый шар, а Q есть двумерный гладкий диск, трансверсально пересекающий границу $P_{0,1}$ по гладкой простой замкнутой кривой l. Отметим, что граница $P_{0,1}$ гомеоморфна двумерной сфере, являющейся объединением двух дисков $M^0_{0,1}$, $M^1_{0,1}$ и цилиндра. Тогда l разбивает границу $P_{0,1}$ на два диска, объединение каждого из которых с Q образует кусочно-гладкую двумерную сферу, вложенную в $P_{0,1}$. Поэтому $P_{0,1}$ разбивается многообразием Q на два замкнутых шара $A^0_{0,1}$, $A^1_{0,1}$. В этом случае для каждого $i=0,1$ стандартным образом строится гомеоморфизм $\psi_{i,0,1}\colon A^i_{0,1} \to P_{0,1}$ такой, что $\psi_{i,0,1}\big|_{M^i_{0,1}} = \mathrm{id}$, $\psi_{i,0,1}(Q) = M^j_{0,1}$, $j \neq i$.

Теперь предположим, что $k>1$, для всех значений $0<l<k$, $i=0,1$ множество $P_{0,l} \setminus Q$ состоит из двух компонент (замыкания которых суть $A^0_{0,l}$, $A^1_{0,l}$) и существует гомеоморфизм $\psi_{i,0,l}\colon A^i_{0,l} \to P_{0,l}$ такой, что $\psi_{i,0,l}\big|_{M^i_{0,l}} = \mathrm{id}$, $\psi_{i,0,l}(Q) = M^j_{0,l}$, где $i=0,1$, $j \neq i$. Докажем, что эти утверждения имеют место и для $l=k$.

Рассмотрим многообразие $P_{0,k}$, $k \geqslant 2$. Пусть x, y – любые две точки, принадлежащие двум различным компонентам связности края многообразия $M^0_{0,k}$, и $h_0 \subset M^0_{0,k}$ – любая простая гладкая дуга с граничными точками x, y, не пересекающая других компонент края многообразия $M^0_{0,k}$.

Составим замкнутый контур γ_0, состоящий из дуги h_0 и трех дуг $h_x = x \times [0,1]$, $h_1 = h_0 \times 1$ ($h_1 \subset M^1_{0,k}$), $h_y = y \times [0,1]$. Положим $D_0 = h_0 \times [0,1]$. По построению граница диска D_0 есть γ_0. Так как по условию множество $Q \cap \mathscr{K}_k$ состоит в точности из k замкнутых кривых и поверхность Q разделяет $M^0_{0,k}$ и $M^1_{0,k}$, то каждая кривая из $Q \cap \mathscr{K}_k$ лежит ровно в одном кольце из множества $\mathscr{K}_k$ и не гомотопна на нем нулю. Через K_x, K_y обозначим кольца из $\mathscr{K}_k$, содержащие точки x, y, и через c_x, c_y – компоненты края многообразия Q, лежащие в K_x, K_y соответственно. По построению пересечения $h_x \cap c_x$, $h_y \cap c_y$ не пусты. Если эти пересечения трансверсальны и каждое состоит в точности из одной точки, то положим $Q_0 = Q$. Если же хотя бы одно из этих условий не выполняется, то положим $Q_0 = F_0(Q)$, где $F_0\colon P_{0,k} \to P_{0,k}$ – изотопный тождественному диффеоморфизм такой, что F_0 оставляет неподвижными точки множества $M^0_{0,k} \cup M^1_{0,k}$, пересечения $h_x \cap F_0(c_x)$, $h_y \cap F_0(c_y)$ трансверсальны и каждое состоит в точности из одной точки. Покажем существование диффеоморфизма F_0. Так как кривые c_x, c_y не гомотопны нулю в кольцах K_x, K_y соответственно, то найдутся сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы $f_x\colon K_x \to K_x$, $f_y\colon K_y \to K_y$, оставляющие неподвижными точки края K_x, K_y соответственно и такие, что пересечения $f_x(c_x) \cap h_x$ и $f_y(c_y) \cap h_y$ трансверсальны и каждое состоит в точности из одной точки. Так как диффеоморфизмы f_x, f_y изотопны тождественному на K_x, K_y соответственно, то найдется изотопный тождественному диффеоморфизм F_0 такой, что F_0 оставляет неподвижными точки множества $M^0_{0,k} \cup M^1_{0,k}$ и совпадает с f_x, f_y на множестве K_x, K_y соответственно. Тогда по построению F_0 является искомым диффеоморфизмом.

Далее, найдется диффеоморфизм $F_1\colon P_{0,k} \to P_{0,k}$ такой, что вне некоторой малой окрестности множества $D_0 \cap Q_0$ диффеоморфизм F_1 является тождественным и двумерное многообразие $Q_1 = F_1(Q_0)$ пересекает двумерный диск D_0 трансверсально по одной дуге и по нескольким замкнутым кривым. Тогда стандартным образом, деформируя Q_1, последовательно удалим из пересечения эти замкнутые кривые. Формально это означает, что найдется диффеоморфизм $F_2\colon P_{0,k} \to P_{0,k}$ такой, что $F_2(Q_1)$ пересекается с D_0 трансверсально ровно по одной дуге d_0. Положим $Q_2 = F_2(Q_1)$.

Через $M^i_{0,k-1}$ обозначим двумерное многообразие с краем, полученное после разрезания многообразия $M^i_{0,k}$ по кривой h_i, $i = 0, 1$, через $P_{0,k-1}$ – трехмерное многообразие, полученное после разрезания $P_{0,k}$ по двумерному диску D_0, и через Q_3 – двумерное многообразие, полученное после разрезания многообразия Q_2 по кривой d_0. Отметим, что по построению многообразие $P_{0,k-1}$ является прямым произведением некоторого многообразия $M_{0,k-1}$ на отрезок $[0,1]$ так, что $M^i_{0,k-1} = M_{0,k-1} \times \{i\}$.

Далее, обозначим через D_1, D_2 двумерные диски, образовавшиеся после разрезания по диску D_0, через $G\colon D_1 \to D_2$ – диффеоморфизм, который склеивает диски D_1, D_2 в один диск D_0. По предположению индукции множество $P_{0,k-1} \setminus Q_3$ состоит из двух компонент, замыкание $A^i_{0,k-1}$ каждой из которых гомеоморфно $P_{0,k-1}$ с помощью гомеоморфизма $\psi_{i,0,k-1}$, $i = 0, 1$. Пусть K_0 – двумерное кольцо края $\mathscr{K}_{k-1}$ многообразия $P_{0,k-1}$, которое содержит двумерные диски D_j, $j = 1, 2$. Для каждого значения $i \in \{0, 1\}$ диски $\psi_{i,0,k-1}(D_1 \cap A^i_{0,k-1})$, $\psi_{i,0,k-1}(D_2 \cap A^i_{0,k-1})$ не пересекаются. Поэтому в силу свойств гомеоморфизма $\psi_{i,0,k-1}$ найдется сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\phi_i\colon K_0 \to K_0$ такой, что

$$\phi_i(\psi_{i,0,k-1}(D_1 \cap A^i_{0,k-1})) = D_1, \qquad \phi_i(\psi_{i,0,k-1}(D_2 \cap A^i_{0,k-1})) = D_2$$

и ϕ_i тождествен на $K_0 \cap M^i_{0,k-1}$.

Так как гомеоморфизм ϕ_i сохраняет ориентацию, то он изотопен тождественному отображению. Следовательно, ϕ_i можно продолжить до сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $\Phi_i\colon P_{0,k-1} \to P_{0,k-1}$ такого, что

$$\Phi_i(K_0) = K_0, \qquad \Phi_i(\psi_{i,0,k-1}(D_j \cap A^i_{0,k-1})) = D_j, \quad j = 1, 2, \qquad \Phi_i\big|_{M^i_{0,k-1}} = \mathrm{id}\,.$$

Тогда отображение

$$\theta_i\big|_{A^i_{0,k-1} \cap D_1} = \psi^{-1}_{i,0,k-1}\Phi^{-1}_i G^{-1}\Phi_i\psi_{i,0,k-1}G\big|_{A^i_{0,k-1} \cap D_1}$$

является гомеоморфизмом, сохраняющим ориентацию множества $A^i_{0,k-1} \cap D_1$. Поэтому θ_i можно распространить с множеств $A^i_{0,k-1} \cap D_1$ до сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $\Theta_i\colon A^i_{0,k-1} \to A^i_{0,k-1}$ так, что на $A^i_{0,k-1} \cap D_1$ гомеоморфизм Θ_i совпадает с θ_i и вне некоторой малой окрестности множеств $A^i_{0,k-1} \cap D_1$ (такой, что D_2 не пересекает эту окрестность) гомеоморфизм Θ_i является тождественным гомеоморфизмом. Тогда гомеоморфизм $\Phi_i\psi_{i,0,k-1}\Theta_i$ отображает $A^i_{0,k-1}$ в $P_{0,k-1}$ и удовлетворяет условию

$$\Phi_i\psi_{i,0,k-1}\Theta_i G\big|_{A^i_{0,k-1} \cap D_1} = G\Phi_i\psi_{i,0,k-1}\Theta_i\big|_{A^i_{0,k-1} \cap D_1}.$$

Из конструкции многообразия $P_{0,k-1}$ следует, что множество $P_{0,k-1} \setminus Q_3$ состоит из двух компонент и гомеоморфизм $\Phi_i\psi_{i,0,k-1}\Theta_i$ индуцирует гомеоморфизм $\psi_{i,0,k}$ замыкания $A^i_{0,k}$ каждой из этих компонент на $P_{0,k}$.

Это доказывает теорему для $g=0$.

Предположим теперь, что для любого $g\geqslant 1$ и $0\leqslant g'<g$ множество $P_{g',k}\setminus Q$ состоит из двух компонент (замыкания которых обозначены $A^0_{g',k}$, $A^1_{g',k}$) и существует гомеоморфизм $\psi_{i,g',k}\colon A^i_{g',k}\to P_{g',k}$ такой, что $\psi_{i,g',k}\big|_{M^i_{g',k}}=\mathrm{id}$, $\psi_{i,g',k}(Q)=M^j_{g',k}$, где $i=0,1$, $j\neq i$. Докажем, что теорема справедлива для рода g. Согласно лемме 3.6 существует кольцо K с граничными кривыми $c_0=c\times 0\subset M^0_{g,k}$, $c_1=c\times 1\subset M^1_{g,k}$ ($c\subset M_{g,k}$ – любая кривая, не разбивающая $M_{g,k}$), пересекающее трансверсально Q ровно по одной замкнутой кривой s, которая не разбивает Q. Разрезав $P_{g,k}$ по кольцу K, получаем в силу следствия 3.3 многообразие $P_{g-1,k+2}$, в границу которого входят компоненты K_1, K_2, соответствующие кольцу K. Через $G\colon K_1\to K_2$ обозначим склеивающий гомеоморфизм.

В силу неразбиваемости Q замкнутой кривой s род двумерного многообразия Q', полученного после разрезания Q, также понизится на 1. Тогда по предположению индукции множество $P_{g-1,k+2}\setminus Q'$ состоит в точности из двух компонент, замыкания которых $A^1_{g-1,k+2}$, $A^2_{g-1,k+2}$ гомеоморфны $P_{g-1,k+2}$ в силу гомеоморфизмов $\psi_{1,g-1,k+2}$, $\psi_{2,g-1,k+2}$ соответственно.

Положим

$$\phi_i\big|_{A^i_{g-1,k+2}\cap K_1}=\psi^{-1}_{i,g-1,k+2}G^{-1}\psi_{i,g-1,k+2}G\big|_{A^i_{g-1,k+2}\cap K_1}.$$

Тогда легко проверить, что гомеоморфизм ϕ_i сохраняет ориентацию множества $A^i_{g-1,k+2}\cap K_1$. Поэтому ϕ_i можно распространить с множества $A^i_{g-1,k+2}\cap K_1$ до сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $\Phi_i\colon A^i_{g-1,k+2}\to A^i_{g-1,k+2}$ так, что на множестве $A^i_{g-1,k+2}\cap K_1$ гомеоморфизм Φ_i совпадает с гомеоморфизмом ϕ_i, а вне некоторой малой окрестности множества $A^i_{g-1,k+2}\cap K_1$ (K_2 не пересекает эту окрестность) гомеоморфизм Φ_i является тождественным гомеоморфизмом. Тогда гомеоморфизм $\psi_{i,g-1,k+2}\Phi_i\colon A^i_{g-1,k+2}\to P_{g-1,k+2}$ отображает $A^i_{g-1,k+2}$ в $P_{g-1,k+2}$ и удовлетворяет условию

$$\psi_{i,g-1,k+2}\Phi_iG\big|_{A^i_{g-1,k+2}\cap K_1}=G\psi_{i,g-1,k+2}\Phi_i\big|_{A^i_{g-1,k+2}\cap K_1}.$$

Тогда $\psi_{i,g-1,k+2}\Phi_i$ индуцирует гомеоморфизм замыкания каждой компоненты множества $P_{g,k}\setminus Q$ на $P_{g,k}$. Отсюда следует справедливость теоремы.

Следующая теорема есть следствие теоремы 3.2.

Теорема 3.3. *Пусть замкнутое ориентируемое двумерное многообразие Q гладко вложено во внутренность многообразия P, диффеоморфного прямому произведению Q на отрезок $[0,1]$, так, что Q не ограничивает область в P. Тогда замыкание каждой компоненты $P\setminus Q$ будет гомеоморфно P.*

§ 4. Разбиение Хегора для диффеоморфизмов

Теорема 4.1. *Пусть $f\colon M^3\to M^3$ – градиентноподобный диффеоморфизм, заданный на замкнутом трехмерном ориентируемом многообразии M^3, такой, что множество одномерных сепаратрис седловых периодических точек* *диффеоморфизма f тривиально вложено. Тогда многообразие M^3 можно представить в виде разбиения Хегора рода*

$$h_D = \frac{\nu(f) - \mu(f) + 2}{2}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы, не уменьшая общности, можно считать, что все периодические точки диффеоморфизма f являются неподвижными. Через Ω^+ (Ω^-) обозначим множество всех стоковых (источниковых) неподвижных точек, через W_1^u, W_1^s – множество неустойчивых (устойчивых) одномерных многообразий всех седловых периодических точек диффеоморфизма f и положим $\mathscr{A} = \Omega^+ \cup W_1^u$, $\mathscr{R} = \Omega^- \cup W_1^s$. По построению множество $\mathscr{A}$ ($\mathscr{R}$) является связным одномерным континуумом. Так как множество сепаратрис седловых периодических точек диффеоморфизма f тривиально вложено, то для каждой стоковой (источниковой) неподвижной точки ω (α) существует замкнутая окрестность U_ω (U_α) такая, что граница ∂U_ω (∂U_α) является гладко вложенной двумерной сферой, пересекающейся трансверсально с каждой сепаратрисой из множества $\mathscr{L}^u(\omega)$, $\mathscr{L}^s(\alpha)$ ровно в одной точке (напомним, что $\mathscr{L}^u(\omega)$ ($\mathscr{L}^s(\alpha)$) множество всех неустойчивых (устойчивых) сепаратрис седловых периодических точек, замыкание которых содержит точку ω (α)). Выберем окрестности U_ω (U_α) таким образом, чтобы окрестности различных точек не пересекались между собой. Выберем, далее, для каждой компоненты γ^u (γ^s) неустойчивого (устойчивого) многообразия из множества $\Gamma^u = W_1^u \setminus \bigcup_{\omega\in\Omega^+} U_\omega$ $\left(\Gamma^s = W_1^s \setminus \bigcup_{\alpha\in\Omega^-} U_\alpha\right)$ замкнутую трубчатую окрестность U_{γ^u} (U_{γ^s}) такую, что пересечение U_{γ^u} (U_{γ^s}) с каждой сферой ∂U_ω (∂U_α) либо пусто, либо состоит из не более чем двух непересекающихся замкнутых двумерных дисков (под замкнутой трубчатой окрестностью U_{γ^u} (U_{γ^s}) мы здесь понимаем множество, диффеоморфное прямому произведению замкнутого двумерного диска на отрезок $[0,1]$ так, чтобы эти замкнутые трубчатые окрестности попарно не пересекались).

Положим

$$P^+ = \bigcup_{\omega\in\Omega^+} U_\omega \cup \bigcup_{\gamma^u\in\Gamma^u} U_{\gamma u}, \qquad P^- = \bigcup_{\alpha\in\Omega^-} U_\alpha \cup \bigcup_{\gamma^s\in\Gamma^s} U_{\gamma^s},$$
$$M^+ = \partial P^+, \qquad M^- = \partial P^-.$$

По построению множество M^+ (M^-) является связной ориентируемой кусочно-гладкой замкнутой двумерной поверхностью некоторого рода g^+ (g^-). Не уменьшая общности, можно так подправить окрестность P^+ (P^-), что ее граница будет гладкой двумерной поверхностью. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что окрестность P^+ (P^-) обладает этим свойством.

Покажем, что $g^+ = g^-$. Предположим противное и предположим для определенности, что $g^+ > g^-$. Условие тривиальной вложенности множества сепаратрис в многообразие M^3 и конструкция построения множества P^+ позволяют построить диффеоморфизм φ множества $P^+ \setminus \mathscr{A}$ на прямое произведение $(0,1] \times M^2_{g^+}$ так, что $\varphi(M^+) = \{1\} \times M^2_{g^+}$, где $M^2_{g^+}$ есть гладкая замкнутая ориентируемая поверхность рода g^+. По построению континуум $\mathscr{A}$ является аттрактором, поэтому существует номер $N > 0$ такой, что $f^N(M^-) \subset \operatorname{int} P^+$. Положим $M_N^- = f^N(M^-)$ и выберем значение $t_N \in (0,1)$ такое, что внутренность множества P, ограниченного поверхностями $M_N^+ = \varphi^{-1}(\{t_N\} \times M_{g^+}^2)$ и M^+, содержит поверхность M_N^-. По построению множество P диффеморфно прямому произведению $[t_N, 1] \times M_{g^+}^2$.

Так как по предположению о противном род поверхности M_N^- меньше, чем род M^+, то по теореме 3.1 и лемме 3.1 поверхность M_N^- ограничивает некоторую область $Q \subset \operatorname{int} P$. Положим $M_1 = Q \cup M_N^- \cup f^N(P^-)$. По построению множество M_1 является одновременно открытым и замкнутым в многообразии M^3 и, следовательно, совпадает с M^3, что невозможно, так как M_1 не содержит точек континуума $\mathscr{A}$.

Таким образом, поверхности M^- и M^+ имеют одинаковый род. Так как поверхность M_N^- не ограничивает область, то в силу леммы 3.1 M_N^- разделяет поверхности M_N^+ и M^+ в P. В силу теоремы 3.3 замыкание компоненты связности множества $P \setminus M_N^-$, граница которой содержит поверхность M_N^+ (обозначим это замыкание через Q^+), диффеоморфно прямому произведению поверхности $M_{g^+}^2$ на отрезок $[0,1]$.

По построению поверность M_N^+ является границей замнутого множества P_N^+, содержащего континуум $\mathscr{A}$ и лежащего в множестве P^+. Кроме того, множество P_N^+ диффеоморфно множеству P_{g^+}, которое получается приклеиванием g^+ ручек индекса 1 к замкнутому трехмерному шару.

Тогда объединение $M^{3+} = P_N^+ \cup Q^+$ также диффеоморфно P_{g^+}. Положим $M^{3-} = \operatorname{clos}(f^N(P^-))$. Так как $g^+ = g^-$, то получаем, что $M^3 = M^{3+} \cup M^{3-}$, где M^{3+}, M^{3-} пересекаются только по границе, диффеоморфной двумерной поверхности рода $g = g^+ = g^-$, и каждое из них диффеоморфно замкнутому шару с приклеенными g ручками индекса 1. Таким образом, получаем для многообразия M^3 разбиение Хегора рода g.

Осталось доказать формулу

$$g = h_D = \frac{\nu(f) - \mu(f) + 2}{2}.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что множество P^+ обладает свойством $f(P^+) \subset \operatorname{int} P^+$. Так как множество P^+ диффеоморфно множеству P_g, которое получается приклеиванием g ручек индекса 1 к замкнутому трехмерному шару, то существуют в точности g седловых неподвижных точек $p_1, \dots, p_g$ из континуума $\mathscr{A}$ и открытые окрестности $U_1, \dots, U_g$ множеств $W^s(p_i) \cap P^+$ такие, что $\bigcup_{i=1}^g U_i$ не содержит неподвижных точек, отличных от $p_1, \dots, p_g$, и множество $P_* = P^+ \setminus \bigcup_{i=1}^g U_i$ обладает следующими свойствами:

1) P_* диффеоморфно замкнутому трехмерному шару;
2) $f(P_*) \subset \operatorname{int} P_*$.

Из формулы Лефшеца следует, что сумма индексов неподвижных точек диффеоморфизма f, принадлежащих множеству P_*, равна 1. Через ν^+, μ^+ обозначим число седловых и стоковых неподвижных точек соответственно, принадлежащих аттрактору $\mathscr{A}$. Тогда по формуле Лефщеца имеем $\mu^+ - (\nu^+ - g) = 1$. Откуда $g = \nu^+ - \mu^+ + 1$.

Далее, через ν^-, μ^- обозначим число седловых и источниковых неподвижных точек, принадлежащих репеллеру $\mathscr{R}$. Применяя к множеству P^- и диффеоморфизму f^{-1} аналогичные рассуждения, получим формулу $g = \nu^- - \mu^- + 1$.

Складывая полученные формулы, получаем $2g = \nu - \mu + 2$. Откуда следует, что

$$g = h_D = \frac{\nu(f) - \mu(f) + 2}{2}.$$

Теорема 4.2. *Пусть $f\colon M^3 \to M^3$ – градиентноподобный диффеоморфизм на замкнутом трехмерном ориентируемом многообразии M^3. Если множество одномерных сепаратрис седловых периодических точек диффеоморфизма f тривиально вложено, то число седловых периодических точек диффеоморфизма f не меньше удвоенного рода Хегора многообразия M^3. На любом замкнутом многообразии M^3 рода Хегора $h(M^3)$ существует градиентноподобный диффеоморфизм f такой, что число седловых периодических точек диффеоморфизма f равно $2h(M^3)$.*

Доказательство. Так как в силу определения рода Хегора $h(M^3) \leqslant h_D$, то оценка $2h(M^3) \leqslant \nu(f)$ вытекает из теоремы 4.1 и неравенства $\mu(f) \geqslant 2$ (поскольку любой диффеоморфизм Морса–Смейла на компактном многообразии имеет по крайней мере две узловые периодические точки, одну источниковую и одну стоковую [1]).

Пусть M^3 представляется в виде разбиения Хегора рода $g \geqslant 0$, т.е. M^3 получается склейкой двух замкнутых множеств M_g^{3+}, M_g^{3-} вдоль их границ, где M_g^{3+} и M_g^{3-} диффеоморфны множеству P_g, полученному приклеванием g ручек индекса 1 к трехмерному шару. На многообразии M^3 нетрудно построить поток Морса–Смейла f^t без периодических траекторий такой, что

1) траектории потока трансверсальны к границе множества M_g^{3+} (M_g^{3-});
2) неблуждающее множество потока f^t состоит в точности из одного устойчивого узла и g седел, принадлежащих $\operatorname{int} M_g^{3+}$, и одного неустойчивого узла и g седел, принадлежащих $\operatorname{int} M_g^{3-}$;
3) одномерные сепаратрисы седел, лежащих в M_g^{3+} (M_g^{3-}), образуют букет окружностей с базовой точкой в устойчивом (неустойчивом) узле.[2]

Сдвиг на единицу времени вдоль траекторий потока f^t дает градиентоподобный диффеоморфизм f, заданный на многообразии M^3. Из построения следует, что число седловых периодических точек диффеоморфизма f равно числу $2g$, совпадающему с $2h(M^3)$.

Рассмотрим теперь диффеоморфизмы Морса–Смейла замкнутых поверхностей, как ориентируемых, так и неориентируемых.

[2]Построение и классификация таких потоков получена в [6], где они названы полярными. Приведем для удобства читателя схему построения. Пусть M^3 представляется в виде разбиения Хегора рода $g \geqslant 0$. На многообразии M_g^3 с краем, диффеоморфном многообразию, которое получается приклеиванием g ручек индекса 1 к трехмерному шару, нетрудно построить векторное поле Морса–Смейла, трансверсальное границе, ровно с одним источником (либо стоком) и g седлами, одномерные сепаратрисы которых образуют букет окружностей с базовой точкой в узле. Отталкиваясь от этого примера, нетрудно построить поток Морса–Смейла без периодических траекторий на M^3 с $2g$ седлами.

Теорема 4.3. *Пусть $f\colon M_g^2 \to M_g^2$ – диффеоморфизм Морса–Смейла замкнутой поверхности M_g^2 рода g (род $g \geqslant 0$, если поверхность M_g^2 ориентируемая, и $g \geqslant 1$, если M_g^2 неориентируемая). Через $\nu(f)$ обозначим число седловых и через $\mu(f)$ – число стоковых и источниковых периодических точек диффеоморфизма f. Тогда*

$$g = \frac{\nu(f) - \mu(f) + 2}{2}\,, \quad \text{если поверхность } M_g^2 \text{ ориентируемая,}$$
$$g = \nu(f) - \mu(f) + 2\,, \quad \text{если поверхность } M_g^2 \text{ неориентируемая.}$$

Доказательство следует непосредственно из формулы Лефшеца и работы [10]. Для полноты изложения мы приведем соответствующие рассуждения. Рассмотрим сначала случай, когда поверхность M_g^2 ориентируема. Для доказательства утверждения теоремы, не уменьшая общности, мы можем считать, что все периодические точки диффеоморфизма f являются неподвижными и ограничение диффеоморфизма f на неустойчивое многообразие любой седловой периодической точки сохраняет его ориентацию. Таким образом, седловые неподвижные точки диффеоморфизма f имеют индекс, равный -1, а стоковые и источниковые имеют индекс $+1$. В силу [10] диффеоморфизм Морса–Смейла на замкнутом многообразии индуцирует изоморфизм одномерной группы гомологий, заданный матрицей A, собственные значения которой являются корнями из единицы. Поэтому, не уменьшая общности, можно также считать, что все собственные значения этой матрицы равны 1 и ее след равен $2g$. Тогда из формулы Лефшеца получаем $2 - 2g = \mu(f) - \nu(f)$, откуда следует доказываемая формула.

Предположим теперь, что M_g^2 – неориентируемая поверхность рода g. Тогда она двулистно накрывается ориентируемой поверхностью $\widetilde{M}_{g-1}^2$ рода $g-1$. Известно, что в нашем случае существует диффеоморфизм $\overline{f}$ на $\widetilde{M}_{g-1}^2$, накрывающий f. Очевидно, что число седловых и число стоковых и источниковых периодических точек диффеоморфизма $\overline{f}$ вдвое больше, чем соответствующие числа для диффеоморфизма f. Применим к диффеоморфизму $\overline{f}$ доказанную выше формулу и получим $2(g-1) = 2\nu(f) - 2\mu(f) + 2$. Откуда следует доказываемая формула для неориентируемых поверхностей.

§ 5. Разбиение Хегора и потоки Морса–Смейла

Сначала рассмотрим потоки Морса–Смейла без периодических траекторий на замкнутом трехмерном многообразии M^3. Для потока g^t через $\nu(g^t)$ обозначим число седел и через $\mu(g^t)$ – число узлов этого потока.

Лемма 5.1. *Пусть f^t – поток Морса–Смейла без периодических траекторий на замкнутом трехмерном многообразии M^3. Предположим, что f^t имеет $\nu(f^t)$ седел и $\mu(f^t)$ узлов. Тогда многообразие M^3 можно представить в виде разбиения Хегора рода*

$$h_D = \frac{\nu(f^t) - \mu(f^t) + 2}{2}\,.$$

Доказательство. Рассмотрим диффеоморфизм f, который получается из потока f^t сдвигом на единицу времени вдоль траекторий потока. Тогда очевидно, что диффеоморфизм f является градиентноподобным диффеоморфизмом, у которого все одномерные сепаратрисы седловых периодических точек являются траекториями потока f^t и, следовательно, множество таких сепаратрис тривиально вложено (это немедленно следует из того, что поток f^t в окрестности каждого узла топологически сопряжен с линейным потоком). Тогда, применяя к диффеоморфизму f теорему 4.1, получаем утверждение леммы.

Следствие 5.1. *Пусть f^t – поток Морса–Смейла без периодических траекторий на замкнутом трехмерном многообразии M^3. Предположим, что f^t имеет $\nu(f^t)$ седел и $\mu(f^t)$ узлов. Тогда*

$$h(M^3) \leqslant \frac{\nu(f^t) - \mu(f^t) + 2}{2},$$

где $h(M^3)$ – род Хегора многообразия M^3.

Доказательство вытекает из леммы 5.1 и определения рода Хегора как наименьшего g, для которого существует разбиение Хегора многообразия M^3 рода g.

Теперь рассмотрим потоки Морса–Смейла, которые наряду с состояниями равновесия могут иметь периодические траектории. В частности, потоки могут иметь только периодические траектории и не иметь состояний равновесия. В последнем случае доказанная ниже теорема дает альтернативное по сравнению с [3] описание несущего многообразия на языке разбиений Хегора. Кроме этого, мы получаем оценку числа седел и седловых периодических траекторий через род Хегора.

Теорема 5.1. *Пусть на замкнутом трехмерном многообразии M^3 задан поток f^t Морса–Смейла с $\nu(f^t) \geqslant 0$ седлами, $\mu(f^t) \geqslant 0$ узлами, $s(f^t) \geqslant 0$ седловыми и $r(f^t) \geqslant 0$ устойчивыми и неустойчивыми периодическими траекториями. Тогда многообразие M^3 можно представить в виде разбиения Хегора рода*

$$h_D = \frac{\nu(f^t) - \mu(f^t) + 2}{2} + s(f^t)$$

и род Хегора $h(M^3)$ многообразия M^3 удовлетворяет оценке

$$h(M^3) \leqslant \frac{\nu(f^t) + r(f^t)}{2} + s(f^t).$$

Доказательство. Мы сведем рассматриваемый в теореме общий случай к случаю потока Морса–Смейла без периодических траекторий, "разрушив" последние с помощью увеличения числа седел и узлов. Рассмотрим для определенности случай притягивающей периодической траектории l_0. Траектория l_0 обладает открытой притягивающей окрестностью $U(l_0)$, для которой существует гомеоморфизм φ на стандартный заполненный тор $Q = d \times S^1$, где $d = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, такой, что $\varphi(l_0) = S^1_*$, где $S^1_* = \{0,0\} \times S^1$. Нетрудно построить на Q векторное поле с двумя особенностями – седлом индекса 1 и притягивающим узлом, принадлежащими S^1_*, так, чтобы замыкание каждой одномерной сепаратрисы седла содержало узел и объединение замыканий этих сепаратрис образовывало окружность S^1_*. Окружность S^1_* также имеет притягивающую окрестность, гомеоморфную заполненному тору. Заменим исходное векторное поле в окрестности $U(l_0)$ на векторное поле с седлом и узлом описанного типа таким образом, чтобы полученное векторное поле являлось полем Морса–Смейла со "старым" неблуждающим множеством вне $U(l_0)$ (см. рис. 2). Аналогичным образом "поместим" на отталкивающей периодической траектории одно седло индекса 2 и один отталкивающий узел, а на седловой периодической траектории – два седла (см. рис. 3). В результате получим поток g^t Морса–Смейла без периодических траекторий, неблуждающее множество которого содержит $\nu(f^t)+2s(f^t)+r(f^t)$ седел и $\mu(f^t)+r(f^t)$ узлов. Тогда, применяя к потоку g^t лемму 5.1, получаем

$$h_D = \frac{\nu(f^t)+2s(f^t)+r(f^t)-(\mu(f^t)+r(f^t))+2}{2} = \frac{\nu(f^t)-\mu(f^t)+2}{2}+s(f^t).$$

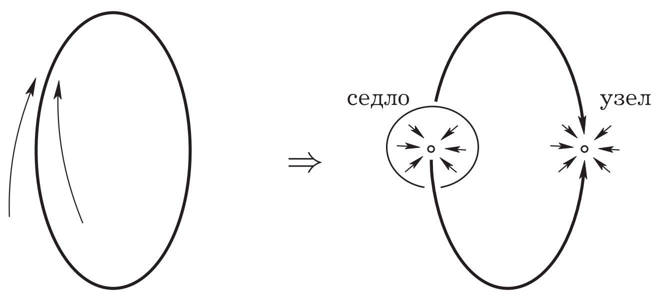

Рис. 2. "Разрушение" периодической траектории и возникновение седла и узла

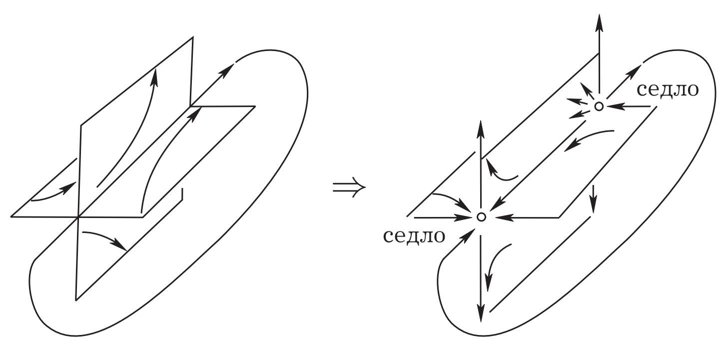

Рис. 3. "Разрушение" периодической траектории и возникновение двух седел

С другой стороны, так как поток g^t есть поток Морса–Смейла, число $\mu(f^t)+r(f^t)$ обязано быть не меньше 2. Из определения рода Хегора следует, что $h(M^3)\leqslant h_D$. Поэтому получаем

$$h(M^3)\leqslant h_D \leqslant \frac{\nu(f^t)+2s(f^t)+r(f^t)}{2} = \frac{\nu(f^t)+r(f^t)}{2}+s(f^t).$$

§ 6. Оценка числа гетероклинических кривых на линзах

Напомним, что если для периодических точек p, q диффеоморфизма Морса–Смейла выполняются соотношения $W^u(p)\cap W^s(q) \neq \varnothing$ и $\dim W^s(p) < \dim W^s(q)$, то компонента связности пересечения $W^u(p)\cap W^s(q)$ называется *гетероклиническим подмногообразием*. Если размерность многообразия равна 3, то любое гетероклиническое подмногообразие является либо простой замкнутой кривой (гомеоморфной окружности), либо незамкнутой кривой без самопересечений (гомеоморфной открытому интервалу). Мы называем такие кривые *гетероклиническими*. Отметим, что отсутствие гетероклинических точек не означает отсутствие гетероклинических кривых. В частности, градиентноподобный диффеоморфизм может (а в некоторых случаях обязан, см. теорему 6.1) иметь гетероклинические кривые.

Напомним, что для взаимно простых целых чисел p, q, $p \geqslant 3$, $1 \leqslant q < p$, *линзой* $L_{p,q}$ называется трехмерное многообразие, которое получается факторизацией стандартной сферы $S^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ по действию, задаваемому формулой

$$(z,w) \mapsto \left(z \exp\frac{2\pi i}{p}, w \exp\frac{2\pi i q}{p}\right).$$

Линза $L_{p,q}$ может быть также получена в результате склеивания двух полноториев вдоль их границ (двумерных торов) с помощью линейного автоморфизма тора вида

$$\begin{cases} \overline{x} = rx + py; \\ \overline{y} = sx + qy, \end{cases}$$

где целые числа r, s удовлетворяют соотношению $ps - qr = \pm 1$.

Мы добавим к списку линз многообразие $S^2 \times S^1 = L_{0,1}$, которое обычно к линзам не причисляют, но которое формально может быть получено с помощью указанной выше склейки двух полноториев.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 6.1. *Пусть $f\colon L_{p,q} \to L_{p,q}$ – диффеоморфизм Морса–Смейла, неблуждающее множество которого состоит в точности из четырех периодических точек. Тогда*

1) *f – градиентноподобный*;
2) *f имеет одну стоковую, одну источниковую неподвижные точки и две седловые неподвижные точки с различными индексами Морса*;
3) *если множество одномерных сепаратрис седловых неподвижных точек диффеоморфизма f тривиально вложено, то существует по крайней мере p гетероклинических незамкнутых кривых, граница каждой из которых состоит из седловых неподвижных точек.*

Доказательство. Пусть $k > 0$ – целое число такое, что все периодические точки диффеоморфизма $g = f^k$ являются неподвижными и ограничения g на устойчивое и неустойчивое многообразия любой его неподвижной точки сохраняют ориентацию этих многообразий. Так как g является диффеоморфизмом Морса–Смейла, то его неблуждающее множество содержит по крайней мере одну источниковую неподвижную точку α и одну стоковую неподвижную точку ω. С другой стороны, его неблуждающее множество не может состоять из двух стоковых и двух источниковых неподвижных точек. Поэтому неблуждающее множество g состоит либо из стоковой, источниковой и двух седловых неподвижных точек, либо из трех неподвижных точек, являющихся стоковыми или источниковыми, и одной седловой неподвижной точки. Последний случай невозможен, так как согласно [9] в этом случае несущее многообразие должно быть трехмерной сферой. Поэтому g имеет источниковую, стоковую и две седловые неподвижные точки σ_1 и σ_2. В силу формулы Лефшеца сумма индексов неподвижных точек диффеоморфизма g равна нулю и, следовательно, индексы неподвижных точек σ_1 и σ_2 должны быть различны. Отсюда следует, что размерности неустойчивых многообразий точек σ_1 и σ_2 различны.[3]

Таким образом, неблуждающее множество исходного диффеоморфизма f имеет источниковую неподвижную точку α, стоковую неподвижную точку ω и две седловые неподвижные точки σ_1, σ_2. Предположим для определенности, что $\dim W^u(\sigma_1) = 2, \dim W^u(\sigma_2) = 1$.

Покажем, что f является градиентноподобным. Из конечности неблуждающего множества и соображений трансверсальности следует, что $W^s(\sigma_1)$ $(W^u(\sigma_2))$ не пересекается ни с $W^u(\sigma_1)$, ни с $W^u(\sigma_2)$ (ни с $W^s(\sigma_2)$, ни с $W^s(\sigma_1)$). Если же $W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2) \neq \varnothing$, то выполняется неравенство $1 = \dim W^s(\sigma_1) < \dim W^s(\sigma_2) = 2$, что означает градиентноподобность.

Положим $l_1 = W^s(\sigma_1) \cup \alpha$, $l_2 = W^u(\sigma_2) \cup \omega$. Пусть $\mathbf{V} = D^2 \times S^1$ – стандартное полноторие и $\mathbf{T} = \partial D^2 \times S^1$ – стандартный тор (D^2 – стандартный диск: $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$).

Так как замыкание каждой из одномерных сепаратрис точки σ_1 (σ_2) содержит точку α (ω), то множество l_1 (l_2) гомеоморфно окружности и $\overline{W^u(\sigma_1)} \setminus W^u(\sigma_1) \subset l_2$ $(\overline{W^s(\sigma_2)} \setminus W^s(\sigma_2) \subset l_1)$. Более того, так как по предположению множество одномерных сепаратрис диффеоморфизма f тривиально вложено, то существуют гомеоморфизмы $\varphi_i \colon \mathbf{V} \to L_{p,q}$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие следующий условиям:

1) ограничение гомеоморфизма φ_i на множество $\mathbf{V} \setminus \{(0, 0)\} \times S^1$ является диффеоморфизмом и $l_i = \varphi_i(\{(0, 0)\} \times S^1)$;
2) поверхность $T_1 = \varphi_1(\partial D^2 \times S^1)$ трансверсально пересекается с многообразием $W^u(\sigma_1)$ по единственной замкнутой кривой c_1, поверхность $T_2 = \varphi_2(\partial D^2 \times S^1)$ трансверсально пересекается с многообразием $W^s(\sigma_2)$ по единственной замкнутой кривой μ_2;
3) неустойчивое многообразие $W^u(\sigma_1)$ трансверсально пересекает поверхность T_2;
4) если множество $W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2)$ содержит незамкнутые гетероклинические кривые, то $\mu_2 \cap W^u(\sigma_1)$ непусто и состоит из конечного множества точек G_2 таких, что каждая точка из G_2 принадлежит незамкнутой гетероклинической кривой и никакие две точки из G_2 не принадлежат одной и той же гетероклинической кривой (см. рис. 4).

Положим $V_i = \varphi_i(D^2 \times S^1)$.

[3] Так как ограничение диффеоморфизма g на устойчивые и неустойчивые многообразия неподвижных точек сохраняет их ориентацию, то индекс любой неподвижной точки p диффеоморфизма g равен $(-1)^{\dim W^u(p)}$.

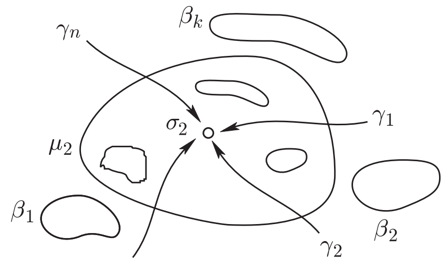

Рис. 4. Построение кривой μ_2

Возможность выполнения свойств 1) и 3) очевидна. Поясним возможность выполнения свойства 4). Пусть f_2 – ограничение диффеоморфизма f на многообразие $W^s(\sigma_2)$. Заметим, что если пересечение $W^u(\sigma_1)\cap W^s(\sigma_2)$ непусто и содержит незамкнутые гетероклинические кривые, то в силу трансверсальности их число ограничено и равно некоторому $n>0$. Обозначим эти гетероклинические кривые $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ и заметим, что каждая гетероклиническая кривая γ_i, $i\in\{1,\dots,n\}$, имеет в точности две граничные точки: σ_1 и σ_2. Если пересечение $W^u(\sigma_1)\cap W^s(\sigma_2)$ непусто и содержит замкнутые гетероклинические кривые, то их множество распадается на некоторое число $k>0$ орбит фиксированных замкнутых кривых $\beta_1,\dots,\beta_k$. Причем ω-предельное множество орбиты любой кривой β_j, $j\in\{1,\dots,k\}$, в силу диффеоморфизма f_2 есть точка σ_2. Из этих свойств гетероклиничеких кривых в множестве $W^u(\sigma_1)\cap W^s(\sigma_2)$ следует, что на многообразии $W^s(\sigma_2)$ существует гладкая замкнутая кривая μ_2 такая, что

a) μ_2 ограничивает область, гомеоморфную диску, внутренность которого содержит точку σ_2;
b) μ_2 не пересекается ни с одной замкнутой гетероклинической кривой;
c) если множество незамкнутых гетероклинических кривых непусто, то кривая μ_2 пересекается с каждой кривой γ_i, $i\in\{1,\dots,n\}$, ровно в одной точке (см. рис. 4).

Далее можно построить поверхность T_2, содержащую кривую μ_2 и удовлетворяющую условиям 1)–4).

Так как $\overline{W^u(\sigma_1)}\setminus W^u(\sigma_1)\subset l_2$, то пересечение $W^u(\sigma_1)\cap T_2$ является непустым компактным множеством, состоящим из конечного числа простых, непересекающихся между собой, гладких замкнутых кривых. Пусть $m>0$ целое число, для которого $f^m(T_1)\subset \operatorname{int} V_2$. Положим $c_m=f^m(c_1)$ и обозначим через $K_{1m}\subset W^u(\sigma_1)$ замкнутую область, гомеоморфную кольцу и ограниченную кривыми c_1 и c_m. Тогда в множестве $K_{1m}\cap T_2$ найдется кривая (обозначим ее через μ_1) такая, что μ_1 гомотопна кривой c_1 в K_{1m} и внутри замкнутой области K_{12} (гомеоморфной кольцу), ограниченной кривыми c_1 и μ_1, нет других кривых из множества $W^u(\sigma_1)\cap T_2$, гомотопных в K_{12} кривой c_1.

Покажем, что множество $V_1^*=\overline{L_{p,q}\setminus V_2}$ гомеомрфно стандартному полноторию. Для этого достаточно показать, что замкнутая область $V_{12}=L_{p,q}\setminus(\operatorname{int} V_1\cup\operatorname{int} V_2)$ гомеоморфна прямому произведению стандартного тора на отрезок.

Положим $T_m=f^m(T_1)$. Поверхность T_m ограничивает множество V_m, которое является заполненным тором, т.е. образом при отображении $\psi = f^m \circ \varphi_1$ произведения $D^2 \times S^1$, причем $l_1 = \psi(\{(0,0)\} \times S^1)$. Положим $\widehat{T}_1 = \psi^{-1}(T_1)$, $\widehat{T}_2 = \psi^{-1}(T_2)$, $\widehat{T}_m = \psi^{-1}(T_m)$ и выберем число $0 < r < 1$ такое, что заполненный тор $D^2_r \times S^1$, где $D^2_r = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant r\}$, не содержит точек поверхности $\widehat{T}_1$. Через $\widehat{T}_r$ обозначим границу множества $D^2_r \times S^1$ и через $\widehat{V}_{rm}$ – замкнутую область, ограниченную поверхностями $\widehat{T}_r$ и $\widehat{T}_m$ (по построению $\widehat{T}_m = \partial D^2 \times S^1$). Область $\widehat{V}_{rm}$ гомеоморфна прямому произведению двумерного тора на отрезок, и поверхность $\widehat{T}_1$ делит $\widehat{V}_{rm}$ на две части, каждая из которых в силу теоремы 3.3 гомеоморфна прямому произведению тора на отрезок. Но тогда область $\widehat{V}_{1m}$, ограниченная поверхностями $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_m$, также гомеоморфна прямому произведению тора на отрезок. Аналогично устанавливается, что область $\widehat{V}_{2m}$, ограниченная поверхностями $\widehat{T}_2$, $\widehat{T}_m$, гомеоморфна прямому произведению тора на отрезок. Но тогда множество $\widehat{V}_{12} = \widehat{V}_{1m} \setminus \widehat{V}_{2m}$ и, следовательно, множество $V_{12} = \psi(\widehat{V}_{12})$ гомеоморфно прямому произведению тора на отрезок.

Так как по построению область K_{12} лежит в множестве $V_{1m} = \psi(\widehat{V}_{1m})$, то кривая μ_1 гомотопна кривой c_1 в V_{1m}. Так как фундаментальная группа поверхности T_2 изоморфна фундаментальной группе V_{1m}, то кривая μ_1 гомотопна c_1 в V_{1m}. Следовательно, кривая μ_1 не гомотопна нулю на T_2. С другой стороны, так как фундаментальные группы V_{12} и V_{1m} изоморфны, то кривая μ_1 гомотопна c_1 и в множестве V_{12}. Так как $V_1 \subset V_1^*$, то кривая c_1 гомотопна нулю в V_1^*. Так как $V_{12} \subset V_1^*$, то c_1 и μ_1 гомотопны в V_1^* и, следовательно, μ_1 гомотопна нулю в V_1^*.

Таким образом, многообразие L_{pq} представлено в виде объединения двух множеств V_1^*, V_2, являющихся гомеоморфными образами стандартного полнотория $\mathbf{V}$ и пересекающимися по двумерному тору $T_2 = V_1^* \cap V_2$ (см. рис. 5). То есть многообразие L_{pq} представлено как линза $L_{p',q'}$. Кроме того, кривые μ_1 и μ_2 не гомотопны нулю на T_2 и μ_1 (μ_2) гомотопна нулю в V_1^* (V_2). Согласно [20; утверждение 2.11] (см. также [17]) $p = p'$, а числа q, q' связаны либо соотношением $q = \pm q' \bmod p$, либо $qq' = \pm 1 \bmod p$.

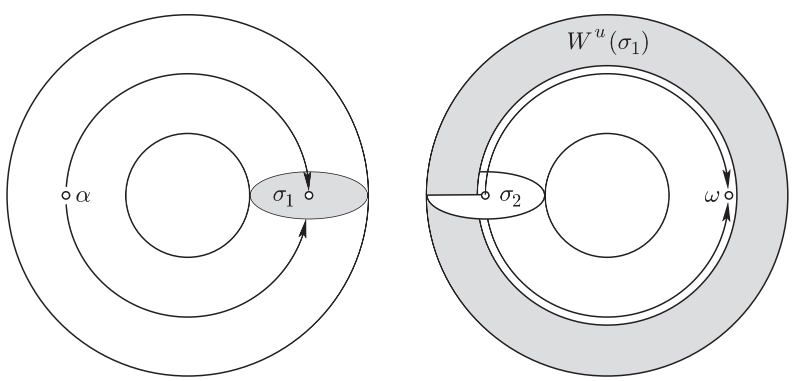

Рис. 5. Полнотории V_1^*, V_2

Представим тор $\mathbf{T}$ как факторпространство евклидовой плоскости по дискретной группе Γ преобразований вида $\overline{x} = x + m$, $\overline{y} = y + n$, где m, n – целые числа и координаты x, y выбраны таким образом, что меридиану тора $\mathbf{T}$ соотвествует элемент группы Γ вида $\overline{x} = x, \overline{y} = y + 1$. Пусть Ψ – автоморфизм тора $\mathbf{T}$ на себя, заданный отображением

$$\begin{cases} \overline{x} = rx + py; \\ \overline{y} = sx + q'y, \end{cases}$$

где выражения в правых частях равенств взяты по модулю один.

Тогда существуют гомеоморфизмы $\widetilde{\varphi}_1 : \mathbf{V} \to V_1^*$, $\widetilde{\varphi}_2 : \mathbf{V} \to V_2$ такие, что $\widetilde{\varphi}_1\big|_{\mathbf{T}} = \widetilde{\varphi}_2 \circ \Psi\big|_{\mathbf{T}}$.

В силу вида отображения Ψ пересечение $\Psi(\widetilde{\varphi}_1^{-1}(\mu_1)) \cap \widetilde{\varphi}_2^{-1}(\mu_2)$ состоит из не менее чем p точек. Так как $\widetilde{\varphi}_2(\Psi(\widetilde{\varphi}_1^{-1}(\mu_1))) = \mu_1$, $\widetilde{\varphi}_2(\varphi_2^{-1}(\mu_2)) = \mu_2$, то пересечение $\mu_1 \cap \mu_2 = \widetilde{\varphi}_2(\Psi(\widetilde{\varphi}_1^{-1}(\mu_1)) \cap \widetilde{\varphi}_2^{-1}(\mu_2))$ и, следовательно, также состоит из не менее чем p точек. В силу выбора кривой μ_2 все эти точки лежат на незамкнутых гетероклинических кривых и никакие две из них не принадлежат одной и той же гетероклинической кривой. Это завершает доказательство теоремы.

Замечание. Нетрудно построить диффеоморфизм Морса–Смейла на линзе $L_{p,q}$, который имеет ровно p незамкнутых гетероклинических кривых, т.е. оценка в теореме 6.1 является точной. С другой стороны, можно построить диффеоморфизм Морса–Смейла, у которого имеется более чем p незамкнутых гетероклинических кривых (более точно, $p + 2k$, где k – произвольное натуральное число).

В список линз данной теоремы можно также включить трехмерную сферу $S^3 = L_{1,0} = L_{1,q}$, но тогда для нее теорема будет справедлива при дополнительном предположении, что неблуждающее множество диффеоморфизма Морса–Смейла содержит две седловые неподвижные точки. В работе [21], в частности, показывается, что оценку для сферы можно доказать без предположения о тривиальной вложенности сепаратрис.

Список литературы

1. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25. №1. С. 113–185.
2. *Franks J.* The period structure of non-singular Morse–Smale flows // Comment. Math. Helv. 1978. V. 53. P. 279–294.
3. *Asimov D.* Round handles and non-singular Morse–Smale flows // Ann. of Math. (2). 1975. V. 102. P. 41–54.
4. *Morgan J. W.* Non-singular Morse–Smale flows on 3-manifolds // Topology. 1979. V. 18. №1. P. 41–53.
5. *Waldhausen F.* Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten I // Invent. Math. 1967. V. 3. P. 308–333.
6. *Fleitas G.* Classification of gradient-like flows on dimensions two and three // Bol. Soc. Brasil. Mat. 1975. V. 6. №2. P. 155–183.
7. *Гринес В. З.* Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях // Матем. заметки. 1993. Т. 54. №3. С. 3–17.
8. *Pixton D.* Wild unstable manifolds // Topology. 1977. V. 16. P. 167–172.
9. *Bonatti Ch., Grines V. Z.* Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 // J. Dynam. Control Systems. 2000. V. 6. №4. P. 579–602.
10. *Shub M., Sullivan D.* Homology theory and dynamical systems // Topology. 1975. V. 14. P. 109–132.
11. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.

12. *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. (Encyclopedia Math. Appl. V. 54.)
13. *Аносов Д. В.* Исходные понятия // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Динамич. системы 1 / ред. Д.В. Аносова. Т. 1. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 156–178.
14. *Аносов Д. В.* Элементарная теория // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Динамич. системы 1 / ред. Д.В. Аносова. Т. 1. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 178–204.
15. *Аносов Д. В., Солодов В. В.* Гиперболические множества // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Динамич. системы 9 / ред. Д.В. Аносова. Т. 66. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 12–99.
16. *Арансон С. Х., Гринес В. З.* Каскады на поверхностях // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Динамич. системы 9 / ред. Д.В. Аносова. Т. 66. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 148–187.
17. *Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. М.: Изд-во МГУ, 1991.
18. *Moise Ed. E.* Geometric topology in dimensions 2 and 3. New York: Springer-Verlag, 1977.
19. *Келдыш Л. В.* Топологические вложения в евклидово пространство. М.: Наука, 1966. (Труды МИАН. Т. 81.)
20. *Hempel J.* 3-manifolds. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1976. (Ann. of Math. Stud. V. 86.)
21. *Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С.* О диффеоморфизмах Морса–Смейла с четырьмя неподвижными точками // Матем. заметки. (в печати).

Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия;
Нижегородский государственный технический университет;
Институт прикладной математики и кибернетики
при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского
E-mail: grines@unn.ac.ru, zhuzhoma@focus.nnov.ru, medvedev@unn.ac.ru

Поступила в редакцию
12.09.2001 и 23.12.2002