А. Н. Ветохин, Точный бэровский класс асимптотической топологической энтропии семейства неавтономных динамических систем, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, 2023, выпуск 33, 41–53

А. Н. Ветохин*

ТОЧНЫЙ БЭРОВСКИЙ КЛАСС АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ СЕМЕЙСТВА НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается параметрическое семейство неавтономных динамических систем, определенных на компактном метрическом пространстве и непрерывно зависящих от параметра из некоторого топологического пространства. Для любого такого семейства асимптотическая топологическая энтропия входящих в него динамических систем изучается как функция параметра с точки зрения бэровской классификации функций.

Напомним определение асимптотической топологической энтропии неавтономной динамической системы, введенное в [1].

Пусть (X,d) — компактное метрическое пространство, $\mathcal{F} \equiv (f_1, f_2, \ldots)$ — последовательность непрерывных отображений из X в X. Для любого натурального числа n обозначим через F_n подпоследовательность $(f_n, f_{n+1}, \ldots)$ последовательности $\mathcal{F}$. Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_k^{F_n}(x,y) = \max_{0\leqslant i\leqslant k-1} d\big(f_n^{\circ i}(x), f_n^{\circ i}(y)\big),$$
$$(f_n^{\circ i} \equiv f_{n+(i-1)} \circ \ldots \circ f_n,\ f_n^{\circ 0} \equiv \mathrm{id}_X), \quad x,y \in X, \quad k,n \in \mathbb{N}.$$

Для всяких $k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $N_d(F_n, \varepsilon, k)$ максимальное количество точек в X, попарные $d_k^{F_n}$-расстояния между которыми больше, чем ε. Такой набор точек назовем (F_n, ε, k)-отделенным. Тогда *топологическая энтропия* неавтономной динамической системы

$(X,\,\mathcal{F})$ определяется равенством

$$h_{\mathrm{top}}(\mathcal{F})=\lim_{\varepsilon\to 0}\ \limsup_{k\to\infty}\frac{1}{k}\ln N_d(F_1,\varepsilon,k), \tag{1}$$

а *асимптотическая топологическая энтропия* — равенством

$$h^*_{\mathrm{top}}(\mathcal{F})=\sup_{n\in\mathbb{N}}\ \lim_{\varepsilon\to 0}\ \limsup_{k\to\infty}\frac{1}{k}\ln N_d(F_n,\varepsilon,k). \tag{2}$$

Отметим, что величины (1) и (2) не зависят от выбора метрики, порождающей на X данную топологию, поэтому формулы (1) и (2) корректны.

Для того чтобы получить классическое определение топологической энтропии автономной динамической системы [2], нужно в качестве последовательности $\mathcal{F}$ взять стационарную последовательность $(f,f,\ldots)$. В этом случае величины (1) и (2) совпадают между собой, а их общее значение равно топологической энтропии отображения f.

В случае произвольной последовательности $\mathcal{F}$ непосредственно из формул (1) и (2) вытекает неравенство

$$h_{\mathrm{top}}(\mathcal{F})\leqslant h^*_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}).$$

Как показывает следующий пример, величины (1) и (2) могут не совпадать.

На множестве Ω_2 двусторонних последовательностей

$$x=(\ldots,x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,\ldots),\quad x_k\in\{0,\,1\},$$

введем метрику

$$d_{\Omega_2}(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } x=y,\\ 2^{-\min\{|i|:\ x_i\neq y_i\}}, & \text{если } x\neq y.\end{cases}$$

Отметим, что полученное метрическое пространство (Ω_2,d_{Ω_2}) компактно и гомеоморфно множеству Кантора на отрезке $[0,1]$ с метрикой, индуцированной стандартной метрикой вещественной прямой. Пусть отображение $\sigma\colon\Omega_2\to\Omega_2$ — сдвиг влево на один элемент:

$$\sigma\bigl((\ldots,x_{-1},x_0,x_1,\ldots)\bigr)=(\ldots,x_0,x_1,x_2,\ldots),$$

а отображение $\chi\colon\Omega_2\to\Omega_2$ переводит любой элемент из Ω_2 в последовательность из нулей:

$$\chi\bigl((\ldots,x_{-1},x_0,x_1,\ldots)\bigr)=(\ldots,0,0,0,\ldots).$$

Тогда для последовательности $\mathcal{F} \equiv (\chi, \sigma, \sigma, \ldots)$ имеем

$$h_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}) = 0 < \ln 2 = h^*_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}).$$

Отметим, что в данном примере выполнено равенство

$$h^*_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\ \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln N_d(F_2, \varepsilon, k),$$

из которого получаем

$$h^*_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}) = \max_{n\in\mathbb{N}}\ \lim_{\varepsilon\to 0}\ \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln N_d(F_n, \varepsilon, k).$$

В общем случае, как показывает следующий пример, в формуле (2) супремум по n нельзя заменить на максимум. В качестве пространства Λ_2 рассмотрим множество бесконечных матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} \in \{0,\, 1\}$. На этом множестве введем метрику

$$d_{\Lambda_2}(A, B) = \begin{cases} 0, & \text{если } A = B, \\ 2^{-\min\{\max\{i,j\}\colon a_{ij}\neq b_{ij}\}}, & \text{если } A \neq B. \end{cases}$$

Рассмотрим отображение $\varphi\colon \Omega_2 \to \Lambda_2$, определяемое формулой

$$\varphi\bigl((\ldots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)\bigr) = \\ = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_{-4} & x_5 & \ldots \\ x_2 & x_{-1} & x_4 & x_{-5} & \ldots \\ x_{-2} & x_3 & x_{-3} & x_6 & \ldots \\ x_8 & x_{-7} & x_7 & x_{-6} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

В силу определения отображение φ является гомеоморфизмом, а следовательно, пространство $(\Lambda_2, d_{\Lambda_2})$ является компактным метрическим пространством.

Рассмотрим последовательность $\mathcal{F} \equiv (f_1, f_2, \ldots)$ непрерывных отображений из $\Lambda_2 \to \Lambda_2$, определяемых равенствами

$$f_1\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11+1} & a_{12+1} & a_{13+1} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$f_2\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11+1} & a_{12+1} & a_{13+1} & \ldots \\ a_{21+1} & a_{22+1} & a_{23+1} & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \ldots .$$

Для $m, n, k \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество точек

$$\mathcal{N} = \bigl\{A \in \Lambda_2 \colon d_{\Lambda_2}(0, A) \geqslant 2^{-(k+m-n)} \text{ и } a_{ij} = 0,\ i \geqslant n,\ j \in \mathbb{N}\bigr\}.$$

Для любых двух точек A_1 и A_2 из $\mathcal{N}$ имеем $d_k^{F_n}(A_1, A_2) > 2^{-m}$. Мощность множества $\mathcal{N}$ равна $2^{(k+m-n)n}$, а следовательно, получаем неравенство

$$N_d(F_n, 2^{-m}, k) \geqslant 2^{(k+m-n)n}.$$

С другой стороны, имеем

$$N_d(F_n, 2^{-m}, k) \leqslant 2^{(k+m)n},$$

откуда получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln N_d(F_n, \varepsilon, k) = \lim_{m\to\infty}\ \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln N_d(F_n, 2^{-m}, k) = n \ln 2,$$

а следовательно,

$$h^*_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}) = +\infty.$$

Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$h^*_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}) > \max_{1\leqslant m\leqslant n}\ \lim_{\varepsilon\to 0}\ \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln N_d(F_m, \varepsilon, k).$$

Как показывают примеры, даже в случае стационарной последовательности $(f, f, \ldots)$ функция $f \mapsto h_{\mathrm{top}}(f)$ может быть всюду разрывной на пространстве функций, удовлетворяющих условию Липшица, с заданной константой Липшица, превосходящей единицу, наделенном топологией равномерной сходимости на пространстве X [4]. Для описания таких функций Р. Бэр предложил использовать следующую классификацию [5]. Функциями нулевого бэровского класса на топологическом пространстве $\mathcal{M}$ называются непрерывные функции, и для всякого натурального числа p функциями p-го бэровского класса называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p-1)$-го класса.

Пусть $\mathcal{M}$ — топологическое пространство, а X — компактное метрическое пространство. По последовательности непрерывных по совокупности переменных отображений

$$\mathcal{F} \equiv (f_1, f_2, \ldots), \quad f_i \colon \mathcal{M} \times X \to X, \tag{3}$$

образуем функции

$$\mu \mapsto h_{\mathrm{top}}\bigl(\mathcal{F}(\mu, \cdot)\bigr), \tag{4}$$

$$\mu \mapsto h^*_{\mathrm{top}}\bigl(\mathcal{F}(\mu, \cdot)\bigr). \tag{5}$$

Для стационарной последовательности $\mathcal{F}$ в [3] установлено, что в случае пространства $X = [0,1]$ для любого отображения (3) функция (4) полунепрерывна снизу, а следовательно, принадлежит первому бэровскому классу. Вообще же говоря, (при произвольных метрическом пространстве $\mathcal{M}$ и компактном метрическом пространстве X) функция (4) принадлежит второму бэровскому классу [6]. В случае когда пространства $\mathcal{M}$ и X являются множествами Кантора на отрезке $[0,1]$ с метрикой, индуцированной стандартной метрикой вещественной прямой, найдется стационарная последовательность (3), для которой функция (4) всюду разрывна и не принадлежит первому бэровскому классу [7].

Для нестационарной последовательности (3) в [8] доказано, что для произвольных метрического пространства $\mathcal{M}$, компактного метрического пространства X и последовательности отображений (3) функция (4) принадлежит третьему бэровскому классу. В [9] для $X = [0,1]$ и $\mathcal{M}$ — множества иррациональных чисел (с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой) — построена такая последовательность отображений (3), что функция (4) не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$. В данной работе получены аналогичные результаты для функции (5).

Теорема 1. *Для любой последовательности отображений* (3) *функция* (5) *принадлежит третьему классу Бэра на пространстве* $\mathcal{M}$.

Отметим, что из теоремы 1 в силу теоремы Бэра (см. [10, гл. IX, § 39, VI]) вытекает, что для любой последовательности отображений (3) в полном метрическом пространстве $\mathcal{M}$ найдется всюду плотное множество G типа G_δ, такое что сужение функции $\mu \mapsto h^*_{\mathrm{top}}\big(\mathcal{F}(\mu,\cdot)\big)$ на множество G непрерывно.

Как будет показано ниже, функция (5), вообще говоря, может не принадлежать второму бэровскому классу.

Построим метрическое пространство $\mathcal{B}$ следующим образом: точками пространства $\mathcal{B}$ являются, по определению, всевозможные (счетные) последовательности $\mu = (\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел. Расстояние между двумя точками μ и ν определяется формулой

$$d_{\mathcal{B}}(\mu,\nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu = \nu, \\ \dfrac{1}{\min\{k\colon \mu_k \neq \nu_k\}}, & \text{если } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Отметим, что пространство $\mathcal{B}$ гомеоморфно множеству иррациональных чисел на отрезке $[0,1]$ с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой.

Теорема 2. *Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}$ и $X = \Omega_2$, то найдется последовательность непрерывных отображений* (3), *для которой функция* (5) *всюду разрывна и не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$.*

§ 2. О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ТРЕТЬЕМУ БЭРОВСКОМУ КЛАССУ

Предварительно докажем несколько лемм, которые будут использованы для доказательства теоремы 1. Пусть $f\colon \mathcal{M}\times X \to X$ — непрерывное по совокупности переменных отображение.

Лемма 1. *Для произвольных $\mu_0 \in \mathcal{M}$ и положительного числа ε найдется такая окрестность $\mathcal{U}^f_{\mu_0}(\varepsilon)$ точки μ_0, что для любого $\mu \in \mathcal{U}^f_{\mu_0}(\varepsilon)$ выполнено неравенство*

$$\sup_{x\in X} d\big(f(\mu_0,x), f(\mu,x)\big) \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть задано положительное число ε. В силу непрерывности отображения $f(\cdot,\cdot)$ для каждой точки $x \in X$ найдется ее окрестность $\mathcal{V}^f_x(\varepsilon)$ в пространстве X и окрестность $\mathcal{U}^f_{\mu_0,\,x}(\varepsilon)$ точки μ_0 в пространстве $\mathcal{M}$, такие что для любой точки $(\mu,y) \in \mathcal{U}^f_{\mu_0,\,x}(\varepsilon)\times\mathcal{V}^f_x(\varepsilon)$

выполнено неравенство

$$d\big(f(\mu_0,x),f(\mu,y)\big)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Из компактности пространства X следует существование конечного набора точек $(x_l)_{l=1}^n\subset X$, такого что

$$X\subset\bigcup_{l=1}^n\mathcal{V}_{x_l}^f(\varepsilon).$$

Положим

$$\mathcal{U}_{\mu_0}^f(\varepsilon)=\bigcap_{l=1}^n\mathcal{U}_{\mu_0,x_l}^f(\varepsilon).$$

Тогда для любого $\mu\in\mathcal{U}_{\mu_0}^f(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\sup_{x\in X}d\big(f(\mu_0,x),f(\mu,x)\big)\leqslant\varepsilon.$$

Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Для произвольных $\mu_0\in\mathcal{M}$ и положительного числа ε найдутся такие окрестность $\mathcal{U}_{\mu_0}^f(\varepsilon)$ точки μ_0 и число $\delta_{\mu_0}^f(\varepsilon)\in(0,\varepsilon)$, что для любого $\mu\in\mathcal{U}_{\mu_0}^f(\varepsilon)$ из условия $d(x,y)<\delta_{\mu_0}^f(\varepsilon)$ вытекает неравенство*

$$d\big(f(\mu,x),f(\mu,y)\big)<\varepsilon.$$

Доказательство. В силу компактности пространства X отображение $f(\mu_0,\cdot)$ является равномерно непрерывным на X, т. е. для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta_{\mu_0}(\varepsilon)\in(0,\,\varepsilon)$, что из неравенства $d(x,y)<\delta_{\mu_0}(\varepsilon)$ вытекает неравенство

$$d\big(f(\mu_0,x),f(\mu_0,y)\big)<\varepsilon.$$

Для любых $\mu\in\mathcal{U}_{\mu_0}^f(\varepsilon/3)$, где $\mathcal{U}_{\mu_0}^f(\varepsilon)$ — окрестность, найденная в лемме 1, и $x,y\in X$, удовлетворяющих условию $d(x,y)<\delta_{\mu_0}(\varepsilon/3)$, выполнена цепочка неравенств

$$\begin{gathered}d\big(f(\mu,x),f(\mu,y)\big)\leqslant d\big(f(\mu,x),f(\mu_0,x)\big)+d\big(f(\mu_0,x),f(\mu_0,y)\big)+\\+d\big(f(\mu_0,y),f(\mu,y)\big)<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{gathered}$$

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Для произвольных* $\mu_0 \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$ *и* $n, k \in \mathbb{N}$ *найдутся такие окрестность* $\mathcal{U}_{\mu_0,\,n,\,k}(\varepsilon)$ *точки* μ_0 *и число* $\alpha_{\mu_0,\,n,\,k}(\varepsilon) \in (0,\,\varepsilon)$, *что для каждого* $\mu \in \mathcal{U}_{\mu_0,\,n,\,k}(\varepsilon)$ *и любых* $x, y \in X$ *выполнено неравенство*

$$d_k^{F_n(\mu_0,\cdot)}(x,y) - 2\varepsilon \leqslant d_k^{F_n(\mu,\cdot)}(x,y).$$

Доказательство. Зафиксируем натуральные числа n и k. Положим

$$\delta_{\mu_0}(\varepsilon) = \min_{n\leqslant m\leqslant n+k-2} \delta_{\mu_0}^{f_m}(\varepsilon), \quad \alpha_{\mu_0,\,n,\,k}(\varepsilon) = \left(\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}\right)^{\circ k}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right),$$

$$\mathcal{U}_{\mu_0,n,k}(\varepsilon) = \bigcap_{m=n}^{n+(k-2)} \mathcal{U}_{\mu_0}^{f_m}\bigl(\alpha_{\mu_0,n,k}(\varepsilon)\bigr),$$

где $\mathcal{U}_{\mu_0}^{f_m}(\varepsilon)$ и $\delta_{\mu_0}^{f_m}(\varepsilon) \in (0,\varepsilon)$, $m = n, \ldots, n+k-2$, найдены в лемме 2. Для любого $x \in X$ и $\mu \in \mathcal{U}_{\mu_0,n,k}(\varepsilon)$ в силу леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} d\bigl(f_n^{\circ 1}(\mu,x), f_n^{\circ 1}(\mu_0,x)\bigr) = d\bigl(f_n(\mu,x), f_n(\mu_0,x)\bigr) \leqslant \\ \leqslant \left(\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}\right)^{\circ(k-1)}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) < \varepsilon. \end{aligned} \tag{6}$$

Для любого $i = 2, \ldots, k-2$ выполнена оценка

$$\begin{aligned} &d\bigl(f_n^{\circ i}\bigl((\mu_0,x), f_n^{\circ i}(\mu,x)\bigr) \leqslant \\ &\leqslant d\Bigl(f_{n+(i-1)}\bigl(\mu_0, f_n^{\circ(i-1)}(\mu_0,x)\bigr), f_{n+(i-1)}\bigl(\mu_0, f_n^{\circ(i-1)}(\mu,x)\bigr)\Bigr) + \\ &+d\Bigl(f_{n+(i-1)}\bigl(\mu_0, f_n^{\circ(i-1)}(\mu,x)\bigr), f_{n+(i-1)}\bigl(\mu, f_n^{\circ(i-1)}(\mu,x)\bigr)\Bigr) \leqslant \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}\right)^{\circ(k-i)}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) + \left(\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}\right)^{\circ(k-1)}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) \leqslant \\ &\leqslant 2\left(\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}\right)^{\circ(k-i)}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) \leqslant \left(\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}\right)^{\circ(k-i-1)}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) < \varepsilon. \end{aligned} \tag{7}$$

Для $i = k-1$ выполнена оценка

$$\begin{aligned} &d\bigl(f_n^{\circ(k-1)}(\mu,x), f_n^{\circ(k-1)}(\mu_0,x)\bigr) \leqslant \\ &\leqslant d\Bigl(f_{n+(k-2)}\bigl(\mu_0, f^{\circ(n-2)_n}(\mu_0,x)\bigr), f_{n+(k-2)}\bigl(\mu_0, f_n^{\circ(n-2)}(\mu,x)\bigr)\Bigr) + \\ &+ d\Bigl(f_{n+(k-2)}\bigl(\mu_0, f^{\circ(n-2)_n}(\mu,x)\bigr), f_{n+(k-2)}\bigl(\mu, f_n^{\circ(n-2)}(\mu,x)\bigr)\Bigr) \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \left(\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}\right)^{\circ(k-1)}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) < \varepsilon. \end{aligned} \tag{8}$$

Из неравенств (6)—(8) следует

$$d_k^{F_n(\mu_0,\cdot)}(x,y) = \max_{0\leqslant i\leqslant k-1} d\big(f_n^{\circ i}(\mu_0,x), f_n^{\circ i}(\mu_0,y)\big) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant k-1}\Big(d\big(f_n^{\circ i}(\mu_0,x), f_n^{\circ i}(\mu,x)\big) + d\big(f_n^{\circ i}(\mu,x), f_n^{\circ i}(\mu,y)\big) +$$

$$+ d\big(f_n^{\circ i}(\mu,y), f_n^{\circ i}(\mu_0,y)\big)\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \max_{0\leqslant i\leqslant k-1} d\big(f_n^{\circ i}(\mu,x), f_n^{\circ i}(\mu,y)\big) + \varepsilon = 2\varepsilon + d_k^{F_n(\mu,\cdot)}(x,y).$$

Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Для любых натуральных чисел n, k и каждого положительного числа ε функция $\mu\mapsto \ln N_d(F_n(\mu,\cdot),\varepsilon,k)$ полунепрерывна снизу в каждой точке пространства $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $\mu_0 \in \mathcal{M}$. Пусть множество $E_{\mu_0} \subset X$ является $(F_n(\mu_0,\cdot),\varepsilon,k)$-отделенным. Тогда найдется такое натуральное число m, что множество E_{μ_0} является $(F_n(\mu_0,\cdot),\varepsilon+1/m,k)$-отделенным. Пусть $\mu\in\mathcal{M}$ удовлетворяет условию $\mu\in\mathcal{U}_{\mu_0,n,k}\big(1/(2m)\big)$, где окрестность $\mathcal{U}_{\mu_0,n,k}(\varepsilon)$ найдена в лемме 2. Тогда в силу леммы 2 для любых двух точек $x,y\in E_{\mu_0}$ выполнены неравенства

$$d_k^{F_n(\mu,\cdot)}(x,y) \geqslant d_k^{F_n(\mu_0,\cdot)}(x,y) - 2\frac{1}{2m} > \varepsilon.$$

Таким образом, множество $E_{\mu_0}\subset X$ является $(F_n(\mu,\cdot),\varepsilon,k)$-отделенным, и следовательно, выполнено неравенство

$$N_d\big(F_n(\mu,\cdot),\varepsilon,k\big) \geqslant N_d\big(F_n(\mu_0,\cdot),\varepsilon,k\big).$$

Лемма 4 доказана. □

Завершение доказательства теоремы 1. По лемме 4 для всяких $\varepsilon>0$ и $n,k\in\mathbb{N}$ функция $\mu\mapsto \ln N_d(F_n(\mu,\cdot),\varepsilon,k)$ полунепрерывна снизу. Следовательно, по [10, гл. IX, § 37, XI] существует последовательность непрерывных функций $\mu\mapsto g^m_{n,\varepsilon,k}(\mu)$ на пространстве $\mathcal{M}$, такая что

$$\frac{1}{n}\ln N_d\big(F_n(\mu,\cdot),\varepsilon,n\big) = \sup_{m\in\mathbb{N}} g^m_{n,\varepsilon,k}(\mu), \quad \mu\in\mathcal{M}.$$

Отсюда в силу формулы (2) получаем

$$h^*_{\mathrm{top}}\big(\mathcal{F}(\mu,\cdot)\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\ \lim_{\varepsilon\to 0}\ \limsup_{k\to\infty}\frac{1}{k}\ln N_d\big(F_n(\mu,\cdot),\varepsilon,k\big) =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{r\in\mathbb{N}} \limsup_{k\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} g^m_{n,1/r,k}(\mu) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{r\in\mathbb{N}} \inf_{s\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant s} \sup_{m\in\mathbb{N}} g^m_{n,1/r,k}(\mu) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \max_{1\leqslant n\leqslant p} \max_{1\leqslant r\leqslant p} \lim_{t\to\infty} \min_{1\leqslant s\leqslant t} \lim_{q\to\infty} \max_{s\leqslant k\leqslant q} \max_{1\leqslant m\leqslant q} g^m_{n,1/r,k}(\mu).$$

Так как максимум и минимум конечного множества функций из некоторого бэровского класса принадлежит тому же классу [10, гл. IX, § 37, III], функция $\mu \mapsto h^*_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}(\mu,\cdot))$ принадлежит третьему классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$. Теорема 1 доказана. □

§ 3. О НЕПРИНАДЛЕЖНОСТИ ВТОРОМУ БЭРОВСКОМУ КЛАССУ

Для доказательства теоремы 2 напомним еще одну формулу для вычисления асимптотической топологической энтропии неавтономной динамической системы [1].

Для всяких $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $B_{F_n}(x,\varepsilon,k)$ открытый шар

$$B_{F_n}(x,\varepsilon,k) = \{y \in X \colon d^{F_n}_k(x,y) < \varepsilon\}.$$

Множество $E \subset X$ называется (F_n,ε,k)-покрытием, если

$$X \subset \bigcup_{x\in E} B_{F_n}(x,\varepsilon,k).$$

Пусть $S_d(F_n,\varepsilon,k)$ обозначает минимальное количество элементов (F_n,ε,k)-покрытия. Тогда асимптотическая топологическая энтропия может быть вычислена по формуле

$$h^*_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln S_d(F_n,\varepsilon,k).$$

Рассмотрим семейство неавтономных динамических систем из [8]. Каждому элементу $\mu = (\mu_k)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{B}$ поставим в соответствие последовательность натуральных чисел $(q_k(\mu)_{k=1}^{\infty})$, определяемую равенством

$$q_k(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{при } 1 \leqslant k < 4, \\ \min\{\mu_{[\log_2(\log_2 k)]}, [\log_2(\log_2 k)]\} & \text{при } k \geqslant 4. \end{cases}$$

Рассмотрим последовательность отображений

$$F(\cdot,\cdot) = (\sigma_1(\cdot,\cdot), \sigma_2(\cdot,\cdot), \ldots)$$

из $\mathcal{B} \times \Omega_2$ в Ω_2, где

$$\sigma_k(\mu, x) = (\ldots, x'_{-1}, x'_0, x'_1, \ldots), \quad x'_i = \begin{cases} x_i & \text{при } |i| < q_k(\mu), \\ x_{i+1} & \text{при } i \geqslant q_k(\mu), \\ x_{-i} & \text{при } i = -q_k(\mu), \\ x_{i+1} & \text{при } i < -q_k(\mu). \end{cases}$$

Непосредственно из определения вытекает, что для любого натурального k функция $\sigma_k(\cdot,\cdot)$ является непрерывной и гомеоморфизмом из Ω_2 на Ω_2 при всяком фиксированном значении $\mu \in \mathcal{B}$.

Для любого натурального числа l обозначим через P_l множество тех последовательностей из $\mathcal{B}$, у которых все члены, кроме, быть может, конечного числа, больше l. Обозначим через $\mathcal{E}$ пересечение всех множеств P_l, т. е. множество тех последовательностей, которые стремятся к бесконечности.

Пусть $\mu \notin \mathcal{E}$. Тогда существуют подпоследовательность

$$(\mu_{k_j})_{j=1}^{\infty} \subset (\mu_k)_{k=1}^{\infty}$$

и натуральное число $q(\mu)$, такие что $\mu_{k_j} = q_\mu$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Обозначим $N_j = 2^{2^{k_j}}$. Тогда для всех $j \in \mathbb{N}$, $k \in \{N_j, \ldots, N_j^2 - 1\}$ и $x \in \Omega_2$ выполнено равенство $\sigma_k(\mu, x) = \sigma_{N_j}(\mu, x)$. Отображение $\sigma_{N_j}(\mu,\cdot)$ имеет вид

$$\sigma_{N_j}(\mu, x) = (\ldots, x'_{-1}, x'_0, x'_1, \ldots), \quad x'_i = \begin{cases} x_i & \text{при } |i| < q_\mu, \\ x_{i+1} & \text{при } i \geqslant q_\mu, \\ x_{-i} & \text{при } i = -q_\mu, \\ x_{i+1} & \text{при } i < -q_\mu, \end{cases}$$

т. е. является сдвигом последовательности $x \in \Omega_2$ на один элемент влево начиная с номера $q_\mu + 1$.

Пусть заданы натуральные числа n и $m > q_\mu$. Для каждого j такого, что $N_j > n$ и $N_j^2 - N_j > m$, рассмотрим множество $\mathcal{S}_{j,m}$ точек $x \in \Omega_2$, которые под действием отображения $\sigma_{N_j}(\mu,\cdot) \circ \ldots \circ \sigma_n(\mu,\cdot)$ переходят в точки $y = (\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots) \in \Omega_2$ вида

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leqslant m, \\ 0 \text{ или } 1 & \text{при } m + 1 \leqslant i \leqslant N_j^2 - N_j - 1, \\ 0 & \text{при } i \geqslant N_j^2 - N_j. \end{cases}$$

Таким образом, для любых двух точек $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ из $\mathcal{S}_{j,m}$ имеем

$$\max_{0\leqslant i\leqslant N_j^2-1} d\big(\sigma_n^{\circ i}(\mu,x^{(1)}),\sigma_n^{\circ i}(\mu,x^{(2)})\big)\geqslant$$
$$\geqslant \max_{N_j+1\leqslant i\leqslant N_j^2-1} d\big(\sigma_n^{\circ i}(\mu,x^{(1)}),\sigma_n^{\circ i}(\mu,x^{(2)})\big)\geqslant 2^{-m}.$$

Мощность множества $\mathcal{S}_{j,m}$ не меньше чем $2^{N_j^2-1-N_j-m}$. Отсюда получаем

$$S_{d_{\Omega_2}}\big(\mathcal{F}_n(\mu,\cdot),2^{-m},N_j^2\big)\geqslant 2^{N_j^2-1-N_j-m},$$

а следовательно,

$$h^*_{\mathrm{top}}\big(\mathcal{F}(\mu,\cdot)\big)\geqslant \lim_{n\to\infty}\ \lim_{m\to\infty}\ \lim_{j\to\infty}\frac{1}{N_j^2}\ln(2^{N_j^2-1-N_j-m})=\ln 2. \tag{9}$$

Для фиксированного $\varepsilon>0$ возьмем такое натуральное m, что $2^{-m}<\varepsilon$. Пусть $\mu\in\mathcal{E}$. Тогда найдется такой номер k_0, что для любого $k\geqslant k_0$ выполнено неравенство $q_k>m$. Следовательно, для любых $x,y\in\Omega_2$, удовлетворяющих условию $d(x,\,y)<2^{-m}$, для всех $k\geqslant k_0$ выполнено неравенство $d(\sigma_k(\mu,x),\sigma_k(\mu,y))<2^{-m}$. Отсюда получаем, что если $d^{F_n}_{k_0}(x,y)<2^{-m}$, то при всех $k\geqslant k_0$ выполнено неравенство $d^{F_n}_k(x,y)<2^{-m}$. Таким образом, при $k\geqslant k_0$ справедлива оценка

$$S_{d_{\Omega_2}}\big(F_n(\mu,\cdot),\varepsilon,k\big)\leqslant S_{d_{\Omega_2}}\big(F_n(\mu,\cdot),2^{-m},k_0\big)\leqslant 2^{k_0+1+2m},$$

из которой получаем

$$h^*_{\mathrm{top}}\big(\mathcal{F}(\mu,\cdot)\big)\leqslant \lim_{n\to\infty}\ \lim_{m\to\infty}\ \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\ln 2^{k_0+1+2m}=0. \tag{10}$$

Воспользуемся следующим утверждением, установленным в [11]: если функционал $\mu\mapsto h^*_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}(\mu,\cdot))$ принадлежит второму классу Бэра, то пересечение замыканий множеств $h^*_{\mathrm{top}}\big(\mathcal{F}(\mathcal{E},\cdot)\big)$ и $h^*_{\mathrm{top}}\big(\mathcal{F}(\mathcal{B}\setminus\mathcal{E},\cdot)\big)$ непусто. В силу неравенств (9) и (10)

$$h^*_{\mathrm{top}}\big(\mathcal{F}(\mathcal{E},\cdot)\big)=0<\ln 2\leqslant h^*_{\mathrm{top}}\big(\mathcal{F}(\mathcal{B}\setminus\mathcal{E},\cdot)\big),$$

следовательно, функция $\mu\mapsto h^*_{\mathrm{top}}\big(\mathcal{F}(\mu,\cdot)\big)$ не принадлежит второму бэровскому классу, а так как множества $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B}\setminus\mathcal{E}$ всюду плотны в пространстве $\mathcal{B}$, то функция $\mu\mapsto h^*_{\mathrm{top}}\big(\mathcal{F}(\mu,\cdot)\big)$ всюду разрывна на пространстве $\mathcal{B}$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kolyada S., Snoha L.* Topological entropy of nonautonomous dynamical systems // Random Comput. Dynamics. 1996. V. 4, N 2-3. P. 205—233.
2. *Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M.H.* Topological entropy // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 114, N 2. P. 309—319.
3. *Misiurewicz M. T.* Horseshoes for mappings of the interval // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astron. Phys. 1979. V. 27. P. 167—169.
4. *Ветохин А. Н.* О некоторых свойствах топологической энтропии динамических систем // Матем. заметки. 2013. Т. 93, № 3. С. 347—356.
5. *Бэр Р.* Теория разрывных функций. М.; Л., 1932.
6. *Ветохин А. Н.* Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравн. 2017. Т. 53, № 4. С. 448—453.
7. *Ветохин А. Н.* Непринадлежность первому классу Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2016. № 2. С. 44—48.
8. *Ветохин А. Н.* Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем // Матем. заметки. 2019. Т. 106, № 3. С. 341—348.
9. *Ветохин А. Н.* О непринадлежности второму бэровскому классу топологической энтропии одного семейства гладких неавтономных динамических систем на отрезке, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравн. 2020. Т. 56, № 1. С. 133—136.
10. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.: ОНТИ, 1937.
11. *Ветохин А. Н.* Класс Бэра максимальных полунепрерывных снизу минорант показателей Ляпунова // Дифференц. уравн. 1998. Т. 34, № 10. С. 1313—1317.