



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, Регуляризованные трехслойные разностные схемы с несамосопряженными операторами, *Дифференц. уравнения*, 1993, том 29, номер 7, 1244–1251

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.169

27 марта 2025 г., 19:37:51



УДК 519.63

А. А. САМАРСКИЙ, П. Н. ВАБИЩЕВИЧ

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ТРЕХСЛОЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ С НЕСАМОСПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Теория регуляризации разностных схем [1] позволяет улучшить качество разностных схем за счет введения регуляризирующих операторов. В работах [2, 3] теория регуляризации применяется для построения разностных схем для неустойчивых эволюционных задач. Двухслойные разностные схемы рассматриваются в [2] (задача с обратным временем для параболических уравнений), в [3] — трехслойные разностные схемы (задача Коши для эллиптических уравнений). Для некорректных задач математической физики используются ρ -устойчивые разностные схемы с $\rho > 1$ (допускается ограниченный рост решения).

Основные результаты получены (см. [1—3]) для разностных схем с самосопряженными разностными операторами. Сформулированы соответствующие необходимые и достаточные условия устойчивости регуляризованных разностных схем. Для разностных схем с несамосопряженными операторами в теории разностных схем [4] необходимые и достаточные условия двухслойных разностных схем получены в случае, когда один из разностных операторов является самосопряженным и положительным. Окончательные результаты установлены также в случае схем с весами. Ряд результатов по устойчивости трехслойных разностных схем с несамосопряженными операторами приведен в [4, 5].

В [6] теория регуляризации развивается для двухслойных разностных схем с несамосопряженными операторами. Рассматриваются разностные схемы для корректной и некорректной краевых задач с различными (самосопряженными и несамосопряженными) регуляризаторами. Достаточные условия ρ -устойчивости получены на основе энергетического тождества при определенном условии подчинения косимметричной составляющей разностного оператора. В настоящей работе аналогичные регуляризованные схемы строятся для трехслойных разностных схем. Рассматриваются две модельные задачи: корректная — для уравнения колебаний с несамосопряженным эллиптическим оператором и некорректная — для эллиптического уравнения.

1. Краевые задачи. Обозначим через Ω ограниченную область m -мерного пространства R^m с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В $R^m \times \{-\infty < t < \infty\}$ рассмотрим ограниченный цилиндр

$$Q = \{(x, t) | x \in \Omega, 0 < t < T\}, \quad T > 0,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, с боковой поверхностью

$$\Gamma = \{(x, t) | x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}.$$

Определим для $x \in \Omega$ равномерно эллиптический оператор

$$Lu \equiv - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^m a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (1.1)$$

с достаточно гладкими коэффициентами $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $a_i(x)$, $x \in \Omega$.

Будем рассматривать две краевые задачи. Пусть $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (1.2)$$

граничным условиям

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma, \quad (1.3)$$

при заданных начальных условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.5)$$

Задача (1.1)—(1.5) есть обычная (корректная) краевая задача для уравнения колебаний с несамосопряженным эллиптическим оператором L . В некорректной задаче (задача Коши для эллиптического уравнения) ищется решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (1.6)$$

дополненного краевыми и начальными условиями (1.3)—(1.5). Некорректность задачи (1.3)—(1.6) обусловлена [7] неустойчивостью решения относительно малых изменений начальных условий (функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ в (1.4), (1.5)).

Обычным образом (см. [8]) от дифференциального оператора L , определенного по (1.1) с учетом (1.3), перейдем к сеточному оператору Λ . На сетке ω_h определим пространство сеточных функций $H = L_2(\omega_h)$ со скалярным произведением

$$(y, z) = \sum_{x \in \omega_h} y(x)z(x)h_1h_2\dots h_m.$$

В H оператор Λ положителен ($\Lambda > 0$) и представим в виде суммы самосопряженного и кососимметричного операторов

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1, \quad (1.7)$$

где

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2} (\Lambda + \Lambda^*), \quad \Lambda_1 = \frac{1}{2} (\Lambda - \Lambda^*), \quad (1.8)$$

причем $\Lambda_0 = \Lambda_0^* > 0$, $\Lambda_1 = -\Lambda_1^*$.

Будем считать, что для кососимметричного оператора Λ_1 выполнено условие подчинения

$$\|\Lambda_1 y\|^2 \leq c(\Lambda_0 y, y) \quad (1.9)$$

с постоянной c , которая не зависит от шагов сетки ω_h . Для эллиптических операторов (1.1) с самосопряженной главной частью оператор Λ_1 связан с аппроксимацией слагаемых с первыми производными.

С учетом введенных обозначений от задачи (1.1)—(1.5) перейдем к следующей дифференциально-разностной задаче. Решение определяется из уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \Lambda y = 0, \quad (1.10)$$

дополненного начальными условиями

$$y(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \omega_h, \quad (1.11)$$

$$\frac{dy}{dt}(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \omega_h. \quad (1.12)$$

Аналогично для неустойчивой задачи (1.3) — (1.6) получим уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \Lambda y = 0 \quad (1.13)$$

с начальными условиями (1.11), (1.12). Для того чтобы от (1.10) — (1.12) и (1.11), (1.12) перейти к соответствующим разностным схемам, введем по переменной t равномерную сетку

$$\omega_\tau = \{t | t = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad N\tau = T\}$$

с шагом $\tau > 0$.

2. Регуляризованные трехслойные разностные схемы. Рассмотрим корректную начально-краевую задачу для уравнения колебаний. Регуляризованные разностные схемы для задачи (1.10) — (1.12) построим на основе явной симметричной схемы

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + \Lambda y_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Трехслойные схемы имеют [4, 8] канонический вид

$$B \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + \tau^2 R \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + A y_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

при заданных $y_0(x) = \varphi(x)$, $y_1(x)$, $x \in \omega_h$. Схема (2.1) записывается в каноническом виде (2.2) с

$$B = 0, \quad R = \frac{1}{\tau^2} E, \quad A = \Lambda, \quad (2.3)$$

где E — единичный оператор. В данной работе сеточные операторы B , R и A в (2.2) предполагаются постоянными (не зависящими от n).

Обозначим через $\mathcal{R} > 0$ регуляризирующий сеточный оператор, и пусть $\alpha > 0$ — параметр регуляризации (возмущения). Регуляризованную схему для (2.3) запишем в виде

$$(E + \alpha \mathcal{R}) \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + \Lambda y_n = 0. \quad (2.4)$$

Выбор регуляризатора $\mathcal{R} = \Lambda$ соответствует использованию обычной схемы с весами. Заслуживает внимания выбор $\mathcal{R} = \Lambda_0$, при котором $R = R^*$.

Для каждого $n = 1, 2, \dots$ определим вектор $Y^n = \{y_{n-1}, y_n\}$. Обозначим через H^2 прямую сумму пространств H : $H^2 = H \oplus H$. Для векторов $Y = \{y^1, y^2\}$ сложение и умножение в H^2 определяется по координатам, а скалярное произведение

$$(Y, V) = (y^1, v^1) + (y^2, v^2).$$

Для разностной схемы (2.2) с $R = R^* > 0$, $A = A^*$, $4R - A \geq 0$ определим норму в H_D^2 выражением $\|Y^n\|_D = ((DY^n, Y^n))^{1/2}$, где

$$(DY^n, Y^n) = \frac{1}{4} \|y_n + y_{n-1}\|_A^2 + \|y_n - y_{n-1}\|_{R - (1/4)A}^2, \quad (2.5)$$

а норма в H_A определяется обычным образом: $\|y\|_A^2 = (Ay, y)$.

Трехслойная схема (2.2) записывается в виде двухслойной схемы [4]:

$$Y^{n+1} = SY^n, \quad (2.6)$$

где S — матрица ($S = (S_{\alpha\beta})$) с элементами

$$S_{11} = 0, \quad S_{12} = E, \quad S_{21} = -B_2^{-1}B_0, \quad S_{22} = -B_2^{-1}B_1, \quad (2.7)$$

$$B_0 = R - \frac{B}{2\tau}, \quad B_1 = A - 2R, \quad B_2 = R + \frac{B}{2\tau}. \quad (2.8)$$

На основе (2.6) в [4] получены необходимые и достаточные условия при самосопряженных операторах A и R .

Рассмотрим регуляризованную схему (2.4) в случае, когда $A \neq A^*$, а регуляризатор \mathcal{R} самосопряжен и положителен. Это соответствует тому, что в схеме (2.2)

$$R = R^* > 0, \quad A = A_0 + A_1, \quad A_0 = \frac{1}{2}(A + A^*) = A_0^* > 0. \quad (2.9)$$

Обозначим через D_0 оператор, определяемый согласно (2.5), где A заменено A_0 .

Теорема 1. Для разностной схемы (2.2), (2.9) при выполнении неравенств

$$R \geq \frac{1+\beta}{4}A, \quad B \geq 0, \quad \beta > 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\tau}{2}B + \tau^2R \geq \varepsilon E, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.11)$$

и выполнении условия подчиненности

$$\|A_1 y\|^2 \leq c(A_0 y, y) \quad (2.12)$$

справедлива априорная оценка

$$\|Y^{n+1}\|_{D_0} = \left(1 + \tau \left(\frac{c}{\varepsilon} \frac{1+\beta}{\beta}\right)^{1/2}\right) \|Y^n\|_{D_0}. \quad (2.13)$$

При выполнении (2.9) схему (2.2) можно записать в виде двухслойной схемы

$$Y^{n+1} = S_0 Y^n + \Phi^n. \quad (2.14)$$

Здесь аналогично (2.6) компоненты матрицы S_0 определяются по формулам (2.7), (2.8), где A заменено A_0 . Аналогично (2.5) определяется норма в H_{D_0} . Для вектора Φ^n имеем

$$\Phi^n = \{0, -B_2^{-1}A_1 y_n\}. \quad (2.15)$$

Используя неравенство треугольника, из (2.14) получим

$$\|Y^{n+1}\|_{D_0} = \|S_0 Y^n\|_{D_0} + \|\Phi^n\|_{D_0}. \quad (2.16)$$

Доказательство оценки устойчивости (2.13) основано на том, что при сформулированных предположениях (2.9), (2.10) справедлива оценка

$$\|S_0 Y^n\|_{D_0} \leq \|Y^n\|_{D_0}. \quad (2.17)$$

Для последнего слагаемого в (2.16) с учетом (2.15) и (2.5) получим

$$\|\Phi^n\|_{D_0} = \frac{1}{4} \|B_2^{-1}v_n\|_{A_0} + \|B_2^{-1}v_n\|_{R-(1/4)A_0} = \|B_2^{-1}v_n\|_R, \quad (2.18)$$

где $v_n = A_1 y_n$. При выполнении (2.11) имеет место (см., например, [5]) оценка

$$\|B_2^{-1}v_n\|_R \leq \tau \varepsilon^{-1/2} \|v_n\|. \quad (2.19)$$

Принимая во внимание условие подчиненности (2.12), из (2.18), (2.19) получим

$$\|\Phi^n\|_{D_0} \leq \tau(c/\varepsilon)^{1/2} \|y_n\|_{A_0}. \quad (2.20)$$

При выполнении первого неравенства (2.10) справедлива [4] оценка

$$\|y_n\|_{A_0}^2 \leq \frac{1+\beta}{\beta} \|Y^n\|_{D_0}^2. \quad (2.21)$$

Подстановка (2.17), (2.11) в (2.16) дает искомую оценку (2.13) ρ -устойчивости разностной схемы (2.2), (2.9).

С л е д с т в и е 1. Для регуляризованной схемы (2.4) с $\mathcal{R} = \Lambda_0$ при $\alpha \geq (1+\beta)\tau^2/4$ и выполнении условия подчиненности (1.9) справедлива оценка

$$\|Y^{n+1}\|_{D_0} = \left(1 + \tau \left(c \frac{1+\beta}{\beta}\right)^{1/2}\right) \|Y^n\|_{D_0}, \quad (2.22)$$

причем $A_0 = \Lambda_0$.

В данном случае $R = \tau^{-2}(E + \alpha A_0)$ и неравенство (2.10) будет, очевидно, выполнено при $\alpha \geq (1+\beta)\tau^2/4$, а в неравенстве (2.11) при любых $\alpha \geq 0$ можно взять $\varepsilon = 1$. Неравенство (2.13) переписывается в виде (2.22).

С л е д с т в и е 2. При выполнении (1.9) и выборе $\mathcal{R} = \Lambda_0^2$ для разностной схемы (2.4) имеет место (2.22), если

$$\alpha \geq \frac{\tau^4(1+\beta)^2}{64}. \quad (2.23)$$

Здесь снова можно взять $\varepsilon = 1$ в неравенстве (2.11), а неравенство (2.10) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau^2 \left(R - \frac{1+\beta}{4} A \right) &= E + \alpha \Lambda_0^2 - \frac{\tau^2(1+\beta)}{4} \Lambda_0 = \\ &= \left(\alpha^{1/2} \Lambda_0 - \frac{\tau^2(1+\beta)}{8\alpha^{1/2}} E \right)^2 + \left(1 - \frac{\tau^4(1+\beta)^2}{64\alpha} \right) E \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда и следует оценка (2.23) для параметра регуляризации α .

Тем самым, основываясь на теореме 1 при условии подчиненности (1.9), доказана устойчивость регуляризованных разностных схем (2.4) с регуляризаторами $\mathcal{R} = \Lambda_0$ и $\mathcal{R} = \Lambda_0^2$. Для двухслойных разностных схем (см. [6]) аналогичные результаты получены и при выборе $\mathcal{R} = \Lambda$, $\mathcal{R} = \Lambda^2$.

3. Регуляризованные разностные схемы для эллиптической задачи Коши. Используем принцип регуляризации разностных схем для построения разностных схем для некорректной задачи (1.11) — (1.13). Соответствующая явная разностная схема для (1.11) — (1.13) имеет вид

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} - \Lambda y_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Схема (3.1) записывается в каноническом виде (2.2) с

$$B = 0, \quad R = \frac{1}{\tau^2} E, \quad A = -\Lambda, \quad (3.2)$$

т. е. $A = A^* < 0$.

Регуляризованная схема для (3.2), (2.2) имеет канонический вид (2.2) с

$$B = 0, \quad R = \frac{1}{\tau^2} (E + \alpha \mathcal{R}), \quad A = -\Lambda. \quad (3.3)$$

Схемы (2.2), (3.2) и (2.2), (3.3) характеризуются тем, что оператор A отрицателен. Для того чтобы максимально учесть эту специфику, вместо канонической формы (2.2) используем запись трехслойной схемы в виде

$$B \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + \tau^2 R \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} - A' y_n = 0, \quad (3.4)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Пусть операторы разностной схемы (3.4) удовлетворяют условиям

$$R = R^* > 0, \quad A' = A'_0 + A'_1, \quad A'_0 = \frac{1}{2} (A' + (A')^*) > 0. \quad (3.5)$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. Для разностной схемы (3.4), (3.5) с $B = B^* \geq 0$ при выполнении неравенства

$$\tilde{A}_0 \geq \gamma \rho A'_0 \quad (3.6)$$

при $\gamma > 0$ и $\rho > 1$, где

$$\tilde{A}_0 = \frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho - 1)^2 R - \rho A'_0, \quad (3.7)$$

неравенства (2.11) и условия подчиненности

$$\|A'_1 y\|^2 \leq c(A'_1 y, y) \quad (3.8)$$

справедлива оценка

$$\|Y^{n+1}\|_{\tilde{D}_0} = \left(\rho + \frac{1}{\gamma} \left(2 \frac{c}{\varepsilon} \right)^{1/2} \tau \right) \|Y^n\|_{\tilde{D}_0}, \quad (3.9)$$

а квадратичная форма $(\tilde{D}_0 Y^n, Y^n)$ с $Y^n = \{y_{n-1}, y_n\}$ определяется выражением

$$(\tilde{D}_0 Y^n, Y^n) = \frac{1}{4} \left\| \frac{1}{\rho} y_n + y_{n-1} \right\|_{\tilde{A}_0}^2 + \left\| \frac{1}{\rho} y_n - y_{n-1} \right\|_{\tilde{R} - (1/4)\tilde{A}_0}^2, \quad (3.10)$$

причем

$$\tilde{R} = \frac{\rho^2 - 1}{4\tau} B + \frac{\rho^2 + 1}{2} R. \quad (3.11)$$

Доказательство основано на оценке ρ -устойчивости разностной схемы с самосопряженными операторами. Запишем схему (3.4) с несамосопряженным оператором A' в виде

$$B \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + \tau^2 R \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + Ay_n = \varphi_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

где $A = -A'_0$, а $\varphi_n = A'_1 y_n$. Необходимым и достаточным условием ρ -устойчивости схемы (3.12) в $H_{\tilde{D}_0}$, где оператор \tilde{D}_0 определяется аналогично (3.10), при $\tilde{R} > 0$ являются [4, 8, 9] операторные неравенства

$$\tilde{A} = \frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho - 1)^2 R + \rho A \geq 0, \quad (3.13)$$

$$4\tilde{R} - \tilde{A} = \frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho + 1)^2 R - \rho A \geq 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{\tilde{B}}{\tau} = \frac{\rho^2 + 1}{2\tau} B + (\rho^2 - 1) R \geq 0. \quad (3.15)$$

Для схемы (3.4), (3.5) с учетом введенных обозначений неравенства (3.14), (3.15) с очевидностью выполняются. Принимая во внимание неравенство (3.6), приходим к выводу о справедливости и (3.13). Как и при доказательстве теоремы 1, запишем схему (3.4), (3.5) с учетом (3.12) в виде

$$Y^{n+1} = \tilde{S}_0 Y^n + \Phi^n, \quad (3.16)$$

где

$$\Phi^n = \{0, B_2^{-1} A' y_n\}. \quad (3.17)$$

Аналогично (2.16), (2.17) имеем

$$\|Y^{n+1}\|_{\bar{D}_0} = \rho \|Y^n\|_{\bar{D}_0} + \|\Phi^n\|_{\bar{D}_0}. \quad (3.18)$$

С учетом (3.10), (3.17) непосредственно получаем

$$\|\Phi^n\|_{\bar{D}_0} = \frac{1}{\rho} \|B_2^{-1} \Phi_n\|_{\bar{R}}, \quad (3.19)$$

где B_2 определяется согласно (2.8). Нетрудно показать, что аналогично (2.19) при выполнении (2.11) имеет место оценка

$$\|B_2^{-1} y\|_{\bar{R}}^2 \leq \frac{\rho^2 + 1}{2} \frac{\tau^2}{\varepsilon} \|y\|^2. \quad (3.20)$$

Действительно, при $\rho > 1$ и выполнении (3.20) в силу (2.11) получим

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2 - 1}{4\tau} B + \frac{\rho^2 + 1}{2} R &\leq \frac{\rho^2 + 1}{2} \frac{\tau^2}{\varepsilon} B_2^2 \leq \\ &\leq \frac{\rho^2 + 1}{2} \left(\frac{B}{2\tau} + R \right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание условие подчиненности (3.8), из (3.19), (3.20) имеем

$$\|\Phi^n\|_{\bar{D}_0} = \left(\frac{\rho^2 + 1}{2\rho^2} \frac{c}{\varepsilon} \right)^{1/2} \tau \|y_n\|_{A_0}. \quad (3.21)$$

Из неравенства (3.6) следует

$$\|y_n\|_{A_0} \leq \frac{1}{\gamma\rho} \|y_n\|_{\bar{A}_0}. \quad (3.22)$$

При выполнении неравенства $4\bar{R} \geq (1 + \beta)\bar{A}_0$, $\beta > 0$, аналогично (2.21) справедлива оценка

$$\|y_n\|_{\bar{A}_0}^2 \leq \frac{1 + \beta}{\beta} \|Y^n\|_{\bar{D}_0}^2. \quad (3.23)$$

Для схемы (3.4), (3.5) с учетом (3.13), (3.14) получим

$$\begin{aligned} 4\bar{R} - (1 + \beta)\bar{A} &= (1 - \beta) \frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + \\ &+ ((\rho + 1)^2 - \beta(\rho - 1)^2) R - (1 - \beta)\tau A \geq 0. \end{aligned}$$

Это неравенство для $\rho > 1$ и $A < 0$ будет выполнено при всех $0 < \beta \leq 1$. Поэтому в оценке (3.23) можно взять $\beta = 1$. Подставляя (3.21) — (3.23) в (3.18), получаем априорную оценку

$$\|Y^{n+1}\|_{\bar{D}_0} = \left(\rho + \frac{1}{\gamma} (\rho^2 + 1)^{1/2} \rho^{-2} \left(\frac{c}{\varepsilon} \right)^{1/2} \tau \right) \|Y^n\|_{\bar{D}_0},$$

загрубая которую и приходим к (3.9).

Воспользуемся теоремой 2 для того, чтобы установить ρ -устойчивость регуляризованной разностной схемы (2.2), (3.3). Она записывается в виде (3.4), (3.5) при $A' = \Lambda$.

Следствие 1. Для регуляризованной разностной схемы (2.2), (3.3) с $\mathcal{A} = \Lambda_0$ справедлива оценка устойчивости (3.9) с $\varepsilon = 1$ при

$$\alpha \geq (1 + \gamma) \frac{\rho}{(\rho - 1)^2} \tau^2. \quad (3.24)$$

Для регуляризованной схемы (2.2), (3.3) величину ε в неравенстве (2.11) можно взять равной 1. Неравенство (3.6) при $\mathcal{R} = \Lambda_0$ для схемы (3.3) принимает вид

$$\tau^2(\rho - 1)^2(E + \alpha\Lambda_0) - \rho\Lambda_0 \geq \gamma\rho\Lambda_0.$$

Это неравенство заведомо выполняется при параметре регуляризации α , удовлетворяющем условию (3.24).

Неравенство (3.24) можно использовать для оценки величины ρ при заданном параметре регуляризации. В [3] доказано, что неравенство

$$(\rho - 1)^2\chi - \tau^2\rho \geq 0$$

для положительных χ , τ и $\rho > 1$ выполнено при

$$\rho \geq \exp(\chi^{-1/2}\tau).$$

Поэтому неравенство (3.24) будет выполнено при

$$\rho = \exp((\alpha/(1 + \gamma))^{-1/2}\tau). \quad (3.25)$$

Следствие 2. Для регуляризованной разностной схемы (2.2), (3.3) с $\mathcal{R} = \Lambda_0^2$ справедлива оценка устойчивости (3.9) с $\varepsilon = 1$ при

$$\alpha \geq \frac{(1 + \gamma)^2\tau^4\rho^2}{4(\rho - 1)^4}. \quad (3.26)$$

В этом случае неравенство (3.6) преобразуется следующим образом:

$$E + \alpha\Lambda_0^2 - \frac{(1 + \gamma)\rho\tau^2}{(\rho - 1)^2}\Lambda_0 = \left(\alpha^{1/2}\Lambda_0 - \frac{(1 + \gamma)\rho\tau^2}{2\alpha^{1/2}(\rho - 1)^2}E\right)^2 + \left(1 - \frac{(1 + \gamma)^2\rho^2\tau^4}{4\alpha(\rho - 1)^4}\right)E \geq 0.$$

Отсюда получаем оценку (3.26) для α . Аналогично (3.25) при заданном α ρ -устойчивость (оценка (3.9)) имеет место при

$$\rho = \exp(((1 + \gamma)/2)^{1/2}\alpha^{-1/4}\tau). \quad (3.27)$$

Оценки ρ -устойчивости (3.9), (3.25), (3.27) согласуются с оценками, которые получены (см. [3]) для самосопряженных сеточных операторов \mathcal{R} и A .

Литература

1. Самарский А. А. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 1. С. 62—93.
2. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. // Мат. моделирование. 1990. Т. 2, № 11. С. 89—98.
3. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 1992. Vol. 3, N 3. P. 295—315.
4. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М., 1973.
5. Арделян Н. В. // Вестн. Моск. ун-та. Вычислит. математика и кибернетика. 1979. № 2. С. 65—59.
6. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. // Мат. моделирование. 1992. Т. 4, № 2. С. 36—44.
7. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986.
8. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1983.
9. Гулин А. В. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1968. Т. 8, № 4. С. 899—902.