



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

B. M. Shirokow, On a class of Dirichlet series,
Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 1975, Volume 50, 187–194

<https://www.mathnet.ru/eng/zns12806>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.87

May 14, 2025, 10:50:05



ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

Пусть $f(n)$ - мультипликативная функция, причем $|f(n)| \leq 1$ для всех n . Ряд

$$F(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it \quad (1)$$

сходится при $\sigma > 1$. Ряд

$$K(s, f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(2^n)}{2^{ns}} \quad (2)$$

сходится при $\sigma > 0$. В своих областях сходимости ряды (1) и (2) суть аналитические функции. Для простоты записи считаем, что $K(s, f) \neq 0$. Наши рассуждения переносятся и на общий случай, если в них $F(s, f)$ заменить на $F(s, f)/K(s, f)$.

Предлагаемая статья посвящена доказательству следующих двух предложений.

Теорема 1. Пусть

- 1°. $F(s, f)$ регулярна на прямой $\sigma = 1$;
 - 2°. $F(s, |f|) = O(1)$ при $\sigma \rightarrow 1+0$ и любом $t \neq 0$.
- Тогда на прямой $\sigma = 1$ имеется не более одного нуля $F(s, f)$, причем этот нуль должен быть простым; $F(s, f) \neq 0$ при $\sigma > 1$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для всех вещественных t , кроме, быть может, одного значения t_0 , справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{p \leq x} \frac{1 - \operatorname{Re}(f(p)p^{-it})}{p} = \log \log x + A(t) + o(1), \quad (3)$$

где $A(t)$ - функция, непрерывная при $t \neq t_0$. Для исключительной точки t_0 имеем: $F(1+it_0, f) = 0$ и

$$\sum_{p \leq x} \frac{1 - \operatorname{Re}(f(p)p^{-it_0})}{p} = 2 \log \log x + B + o(1),$$

где B - постоянная.

Ряд в левой части формулы (3), по-видимому, впервые рассматривался в работе Халаса [2] в связи с изучением функции

$$M(x) = \sum_{n \leq x} f(n).$$

Как доказано Халасом, расходимость этого ряда при всех t с условием $K(s, t) \neq 0$ при $\sigma = 1$ является необходимым и достаточным условием равенства $M(x) = o(x)$ (см. также [3]). Теорема 2 нашей работы характеризует в условиях $1^0, 2^0$ скорость расходимости этого ряда.

Заметим, что из условия 1^0 теоремы I следует, что $M(x) = o(x)$. Действительно, из работы Халаса [2] видно (см. доказательство теоремы 2), что если $F(s, f)$ регулярна при $\sigma = 1$, то ряд в формуле (3) расходится при всех вещественных t , а тогда $M(x) = o(x)$.

Заметим также, что в теореме I утверждать отсутствие нулей $F(s, f)$ на прямой $\sigma = 1$ при поставленных условиях нельзя, так как функция Мебиуса $\mu(n)$ удовлетворяет 1^0 и 2^0 :

$$F(s, \mu) = \frac{1}{\zeta(s)}, \quad F(s, |\mu|) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

и при этом $F(1, \mu) = 0$.

Доказательство теоремы I. Так как при $\sigma > 1$ справедлива формула

$$F(s, f) = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right),$$

то отсутствие нулей при $\sigma > 1$ следует из оценки

$$|F(s, f)| \geq \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{\sigma-1}} \right)$$

и

$$\log |F(s, f)| \geq \sum_p \log \left(1 - \frac{1}{p^{\sigma-1}} \right) \geq - \sum_p \frac{1}{p^{\sigma-2}}.$$

Покажем, что $F(s, f)$ может иметь лишь простые нули. При $\sigma > 1$ имеем (см., например, [1], стр. 305):

$$F(s, f) = \exp \left\{ \sum_{p > 2} \frac{f(p)}{p^s} + A(s, f) \right\}, \quad (4)$$

где $A(s, f)$ - функция, регулярная в области $\sigma > 1 - \delta$ с некоторым $\delta > 0$. Поэтому

$$\log |F(s, f)| = \sum_{p > 2} \frac{\operatorname{Re}(f(p)p^{-it})}{p^\sigma} + \operatorname{Re} A(s, f).$$

Из этого равенства следует оценка

$$|\log |F(s, f)|| \leq \sum_{\rho > 2} \frac{1}{\rho^\sigma} + |\operatorname{Re} A(s, f)|.$$

Следовательно, если $s_0 = 1 + it_0$ есть нуль $F(s, f)$, то в достаточно малой окрестности этой точки при $\sigma > 1$ получаем

$$|\log |F(s, f)|| \leq \log \frac{1}{\sigma - 1} + C.$$

А так как $F(s, f)$ — аналитична на прямой $\sigma = 1$, то из последнего неравенства следует, что s_0 есть нуль первого порядка.

Теперь нам осталось убедиться в том, что $F(s, f)$ не может иметь двух различных нулей на прямой $\sigma = 1$.

Сначала докажем, что у нее не может быть двух симметричных относительно прямой $t = 0$ нулей. Допустим противное: существует такое $t \neq 0$, что $F(1 + it, f) = 0$. При $\sigma > 1$ составим вещественную функцию

$$\begin{aligned} H(\sigma, t) = & F^2(\sigma, f) \cdot |F(\sigma + 2it, f)| \cdot |F(\sigma - it, f)| \times \\ & \times |F(\sigma + it, f)| \cdot |F(\sigma + 3it, f)|. \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что

$$\operatorname{Re}(f(\rho) \rho^{it}) = \rho(\rho) \cos(\theta(\rho) + t \log \rho), \quad (6)$$

где $\rho(\rho) = |f(\rho)|$, $\theta(\rho) = \arg f(\rho)$. При любых вещественных числах x и y справедливо неравенство

$$\varphi(x, y) \geq 0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & 2 + 2 \cos 2x + \cos(x + y) + 2 \cos(y - x) + \\ & + \cos(y - 3x). \end{aligned}$$

Действительно:

$$\varphi(x, y) = 4 \cos^2 x + 2 \cos x \cdot (\cos y + \cos(y - 2x)) = 4 \cos^2 x \cdot (1 + \cos(y - x)) \geq 0.$$

Из формул (4)–(7) получаем:

$$\log H(\sigma, t) = \sum_{\rho > 2} \frac{\rho(\rho)}{\rho^\sigma} \varphi(t \log \rho, \theta(\rho)) + G(\sigma, t) \geq G(\sigma, t), \quad (8)$$

где

$$G(\sigma, t) = 2(\sigma, |f|) + \operatorname{Re} \{ 2A(\sigma + 2it, |f|) + A(\sigma - it, f) + \\ + 2A(\sigma + it, f) + A(\sigma + 3it, f) \}.$$

В виду свойств $A(s, f)$ заключаем, что

$$G(\sigma, t) = O(1) \text{ при } \sigma \rightarrow 1 + 0.$$

Следовательно, $\log H(\sigma, t)$ ограничен снизу при $\sigma \rightarrow 1 + 0$, а значит $H(\sigma, t)$ не стремится к нулю.

С другой стороны, учитывая, что

$$F(\sigma, |f|) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^{\sigma}} \leq \zeta(\sigma),$$

а в точках $1 + it$ функция $F(s, f)$ имеет простые нули, получаем оценку, исходя из формулы (6),

$$H(\sigma, t) = O \left\{ \frac{1}{(\sigma-1)^2} (\sigma-1)^3 \right\} = O(\sigma-1).$$

Полученное противоречие доказывает, что $F(s, f)$ не может иметь двух таких нулей.

Допустим теперь, что $F(s, f)$ имеет нули $1 + it_1$ и $1 + it_2$, причем $t_1 < t_2$. В таком случае рассмотрим функцию

$$g(n) = f(n) \cdot n^{-i \frac{t_1+t_2}{2}}.$$

Для этой функции имеем:

$$F(s, g) = F\left(\sigma + it + i \frac{t_1+t_2}{2}, f\right)$$

и

$$F(s, |g|) = F(s, |f|),$$

т.е. для $g(n)$ выполнены условия 1^o и 2^o, а поэтому $F(s, g)$ не может иметь двух симметричных относительно вещественной оси нулей. Но, с другой стороны, если положим

$$t_0 = \frac{t_2 - t_1}{2} > 0,$$

то увидим, что $1 + it_0$ являются такими нулями $F(s, g)$, что невозможно. Следовательно, функция $F(s, f)$ может иметь на прямой $\sigma = 1$ не больше одного нуля.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2 предварим рядом лемм. Начнем с определения. Говорим, что функция $d(x)$, определенная для $x \geq 0$, медленно изменяется, если $d(x') - d(x) \rightarrow 0$ при $x, x' \rightarrow \infty$ и $x'/x \rightarrow 1$.

Лемма I. Если последовательность чисел a_n такова, что $|a_n| \leq 1$ при всех n , то функция

$$d(x) = \sum_{\log p \leq x} \frac{a_p}{p}$$

медленно изменяется.

Доказательство. Пусть $\lambda > 1$ и $x' = \lambda x$. Тогда

$$|d(x') - d(x)| \leq \sum_{e^x < p \leq e^{x'}} \frac{1}{p} = \log \lambda + o(1),$$

и при $\lambda \rightarrow 1$ и $x \rightarrow \infty$ получаем то, что и требовалось доказать.

Мы будем использовать следующее утверждение, которое, следуя А.Г.Постникову [1] стр.41, будем называть обобщенной теоремой Литтлвуда.

Теорема. Если $d(x)$ - вещественная медленно изменяющаяся функция и

$$f(\sigma) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma x} d d(x)$$

определена при $\sigma > 0$, и существует предел

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} f(\sigma) = A$$

то при $x \rightarrow \infty$ существует предел

$$\lim d(x) = A.$$

Лемма 2. Если $1 + it$ не является нулем $F(s, f)$, то ряд

$$\sum_p f(p) / p^{1+it} \tag{9}$$

сходится.

Доказательство. Положим

$$d(x) = \sum_{\log p \leq x} \frac{\operatorname{Re}(f(p)p^{-it})}{p}.$$

По лемме I, в силу того, что $|f(n)| \leq 1$, $d(x)$ есть медленно изменяющаяся функция. При $\sigma > 0$ определена функция

$$\Phi(\sigma) = \sum_p \frac{\operatorname{Re}(f(p)p^{-it})}{p^{1+\sigma}} = \int_0^\infty e^{-\sigma x} d\alpha(x)$$

Ввиду того, что $F(s, f)$ регулярна на прямой $\sigma = 1$ и в точке $1 + it$ не обращается в нуль, то существует конечный предел

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1+0} \log |F(\sigma + it, f)|,$$

следовательно, существует предел

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \Phi(\sigma) = \Phi(0+).$$

Тогда по обобщенной теореме Литтлвуда существует предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} d(x) = \sum_p \frac{\operatorname{Re}(f(p)p^{-it})}{p} = \Phi(0+).$$

Теперь рассмотрим ряд

$$\sum_p \frac{\operatorname{Im}(f(p)p^{-it})}{p}. \quad (10)$$

Полагая

$$\alpha_1(x) = \sum_{\log p \leq x} \frac{\operatorname{Im}(f(p)p^{-it})}{p}$$

и вновь пользуясь леммой I и обобщенной теоремой Литтлвуда, находим, что ряд (10) также сходится. Таким образом, установлено, что ряд (9) сходится, и лемма доказана.

Лемма 3. Если $F(1 + it_0, f) = 0$, то ряд

$$\sum_p \frac{\operatorname{Re}(f(p)p^{-it_0}) + 1}{p}$$

сходится.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(s, f)\zeta(s - it_0)$. Она регулярна и не обращается в нуль на прямой $\sigma = 1$. Следовательно, по лемме 2 сходится при всех вещественных t ряд

$$\sum_p \frac{1 + f(p)p^{-it_0}}{p^{1+i(t-t_0)}}.$$

Переходя в этом ряде к вещественной части при $t = t_0$, получим утверждение леммы.

В том случае, если $1 + it_0$ — нуль $F(s, f)$, рассмотрим функцию $F(s, f) \zeta(s - it_0)$, которая регулярна на прямой $\sigma = 1$ и не имеет на ней нулей. Рассуждая аналогично доказательству леммы 2, получим, что (10) при $t = t_0$ сходится, т.е. он сходится при всех t .

Следствие. В условиях теоремы I ряд

$$\sum_p \frac{f(p)}{p^{1+it}}$$

сходится при всех вещественных t , кроме t_0 , для которого $F(1 + it_0, f) \neq 0$.

Доказательство теоремы 2. Если вещественное t таково, что $F(1 + it, f) \neq 0$, то воспользуемся теоремой Мертенса

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + C + o(1)$$

и леммой 2 и получим первое утверждение теоремы. Если же $F(1 + it_0, f) = 0$, то прибегая к теореме Мертенса и лемме 3, получаем второе утверждение теоремы. Так как по теореме I такое t_0 может быть лишь одно, то и второе утверждение теоремы 2 доказано. Покажем непрерывность $A(t)$ при $t \neq t_0$. Выберем δ настолько малым, чтобы $t_0 \notin [t - \delta, t + \delta]$. Тогда,

$$A(t+h) - A(t) = \sum_p \frac{\operatorname{Re}(f(p)p^{-i(t+h)})}{p} - \sum_p \frac{\operatorname{Re}(f(p)p^{-it})}{p}$$

По лемме 2 при $|h| \leq \delta$, оба ряда в правой части сходятся. Поэтому, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем и зафиксируем такое вещественное число X , что

$$\left| \sum_{p > X} \frac{\operatorname{Re}(f(p)p^{-i(t+h)})}{p} \right| + \left| \sum_{p > X} \frac{\operatorname{Re}(f(p)p^{-it})}{p} \right| < \varepsilon.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [f(p)(p^{-i(t+h)} - p^{-it})] &= \\ &= 2p(p) \sin[\theta(p) - t \log p - \frac{h}{2} \log p] \cdot \sin\left(\frac{h}{2} \log p\right). \end{aligned}$$

Следовательно, для $|h| \leq \delta$ можем написать неравенство

$$\begin{aligned} |A(t+h) - A(t)| &\leq 2 \sum_{p \leq x} \frac{|\sin(\frac{h}{2} \log p)|}{p} + \varepsilon \leq \\ &\leq \delta \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} + \varepsilon. \end{aligned}$$

А теперь выберем δ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\delta \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} < \varepsilon.$$

Таким образом, непрерывность $A(t)$ установлена.

Теорема 2 доказана.

Цитированная литература

- [1] Постников А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М., 1971.
- [2] Halász G. Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen. Acta Math. Acad. Scient. Hungaricae, 1968, 19, № 3-4, 365-404.
- [3] Ryavec C. The use of measure theoretic method in study of additive arithmetic functions. Lect. notes in math., 1972, 251, 193-203.