В. Е. Корепин, Производящий функционал корреляционных функций для нелинейного уравнения Шрёдингера, *Функц. анализ и его прил.*, 1989, том 23, выпуск 1, 15–23

Функциональный анализ и его приложения,
1989, т. 23, вып. 1, 15—23

УДК 517.43 + 519.46

ПРОИЗВОДЯЩИЙ ФУНКЦИОНАЛ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

В. Е. Корепин

Квантовый метод обратной задачи [1] позволяет существенно продвинуться в изучении вполне интегрируемых квантовых моделей. Наибольший интерес представляют собой корреляционные функции. В работах [2; 3] был введен и исследован производящий функционал одновременных корреляционных функций. В настоящей работе этот производящий функционал вычислен. Он равен определителю интегрального оператора. Причем ядро интегрального оператора является оператором во вспомогательном фоковском пространстве.

Проиллюстрируем новые результаты на примере квантового нелинейного уравнения Шредингера. Гамильтониан модели H и коммутационные соотношения имеют вид

$$H = \int_0^L dx\,(\partial_x\psi^+\partial_x\psi + c\psi^+\psi^+\psi\psi), \quad c > 0, \tag{0.1}$$

$$[\psi(x), \psi^+(y)] = \delta(x-y), \quad [\psi(x), \psi(y)] = 0.$$

Здесь ψ — это каноническое бозе-поле, L — длина периодического ящика, c — константа связи. Представление Лакса для этой модели было построено в [4], модель была погружена в квантовый метод обратной задачи в работах [5; 6].

Корреляторы интересно рассматривать, когда основное состояние модели обладает конечной плотностью D. Важную роль играет коррелятор плотностей $\langle\psi^+(x)\psi(x)\psi^+(0)\psi(0)\rangle$ при $x > 0$. Вместо него удобно рассматривать производящий функционал [2; 3] $\langle\exp\alpha Q_1\rangle$. Здесь α — комплексный параметр, а Q_1 — это оператор числа частиц на отрезке $[0, x]$: $Q_1 = \int_0^x dz\psi^+(z)\psi(z)$. Коррелятор плотностей получается из производящего функционала по следующей формуле

$$\langle\psi^+(x)\psi(x)\psi^+(0)\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\langle\exp\alpha Q_1\rangle|_{\alpha=0}. \tag{0.2}$$

В настоящей работе удается представить производящий функционал $\langle\exp\alpha Q_1\rangle$ в виде определителя интегрального оператора.

§ 1. Обобщенная двухузельная модель

Естественно исследовать корреляционные функции с помощью обобщенной двухузельной модели [2; 3; 7]. Введем эту модель. Рассмотрим две матрицы $T_1(\lambda)$ и $T_2(\lambda)$ (индекс означает номер узла),

$$T_{1,2}(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{1,2}(\lambda), & B_{1,2}(\lambda) \\ C_{1,2}(\lambda), & D_{1,2}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

зависящие от комплексного спектрального параметра λ. Матричные элементы

T_1 и T_2 являются квантовыми операторами в двух различных фоковских пространствах. Векторы

$$\prod_{j=1}^{N} B_1(\lambda_j)\,|\,0\rangle_1 \tag{1.2}$$

образуют базис в первом фоковском пространстве, а векторы

$$\prod_{j=1}^{N} B_2(\lambda_j)\,|\,0\rangle_2 \tag{1.3}$$

образуют базис во втором фоковском пространстве. Два алгебраических вакуума $|\,0\rangle_{1,2}$ обладают следующими свойствами:

$$A_{1,2}(\lambda)\,|\,0\rangle_{1,2} = a_{1,2}(\lambda)\,|\,0\rangle_{1,2}, \quad D_{1,2}(\lambda)\,|\,0\rangle_{1,2} = d_{1,2}(\lambda)\,|\,0\rangle_{1,2}, \quad C_{1,2}(\lambda)\,|\,0\rangle_{1,2} = 0. \tag{1.4}$$

Здесь $a_{1,2}(\lambda)$ и $d_{1,2}(\lambda)$ — это четыре произвольные комплексные функции [8; 9]. Коммутационные соотношения операторов A, B, C, D задаются с помощью R-матрицы

$$R(\lambda, \mu)(T_1(\lambda) \otimes T_1(\mu)) = (T_1(\mu) \otimes T_1(\lambda))R(\lambda, \mu). \tag{1.5}$$

Матрица $R(\lambda, \mu)$ имеет вид

$$R(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} f(\mu, \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(\mu, \lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & g(\mu, \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\mu, \lambda) \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Функции f и g равны

$$f(\mu, \lambda) = \frac{(\mu - \lambda + ic)}{\mu - \lambda}, \qquad g(\mu, \lambda) = \frac{ic}{\mu - \lambda}. \tag{1.7}$$

Важную роль будет играть функция

$$h(\mu, \lambda) = \frac{\mu - \lambda + ic}{ic} = \frac{f(\mu, \lambda)}{g(\mu, \lambda)}. \tag{1.8}$$

Матрица T_2 также удовлетворяет соотношению (1.5). Матричные элементы T_1 коммутируют с матричными элементами T_2. Матричное произведение T_2 и T_1

$$T(\lambda) = T_2(\lambda)\,T_1(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda), & B(\lambda) \\ C(\lambda), & D(\lambda) \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

называется матрицей монодромии. Она также удовлетворяет соотношению (1.5). Алгебраический вакуум матрицы монодромии имеет вид $|\,0\rangle = |\,0\rangle_1 \otimes \otimes\, |\,0\rangle_2$. Выполнены соотношения

$$A(\lambda)\,|\,0\rangle = a(\lambda)\,|\,0\rangle, \quad D(\lambda)\,|\,0\rangle = d(\lambda)\,|\,0\rangle, \quad C(\lambda)\,|\,0\rangle = 0, \quad a(\lambda) = a_1(\lambda)a_2(\lambda), \quad d(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda). \tag{1.10}$$

Базис

$$\prod_{j=1}^{N} B(\lambda_j)\,|\,0\rangle \tag{1.11}$$

можно выразить через векторы (1.2) и (1.3) [7]

$$\prod_{j=1}^{N} B(\lambda_j)\,|\,0\rangle = \sum_{\{\lambda\}=\{\lambda_{\mathrm{I}}\}\cup\{\lambda_{\mathrm{II}}\}} \prod_{\mathrm{I}} \prod_{\mathrm{II}} a_2(\lambda_{\mathrm{I}})\, d_1(\lambda_{\mathrm{II}})\, f(\lambda_{\mathrm{I}}, \lambda_{\mathrm{II}})\, B_2(\lambda_{\mathrm{II}})\,|\,0\rangle_2\, B_1(\lambda_{\mathrm{I}})\,|\,0\rangle_1. \tag{1.12}$$

Здесь суммирование ведется по разбиению множества всех $\{\lambda\}$ на два непересекающихся подмножества $\{\lambda_{\mathrm{I}}\}$ и $\{\lambda_{\mathrm{II}}\}$. Аналогичная формула верна для дуального базиса [7]

$$\langle 0|\prod_{j=1}^{N} C(\lambda_j)=\sum_{\{\lambda\}=\{\lambda_{\mathrm{I}}\}\cup\{\lambda_{\mathrm{II}}\}}\prod_{\mathrm{I}}\prod_{\mathrm{II}}{}_1\langle 0|C_1(\lambda_{\mathrm{I}})_2\langle 0|C_2(\lambda_{\mathrm{II}})\times$$
$$\times f(\lambda_{\mathrm{II}},\lambda_{\mathrm{I}})\,a_1(\lambda_{\mathrm{II}})\,d_2(\lambda_{\mathrm{I}}). \qquad (1.13)$$

Эти формулы позволяют записать матричный элемент производящего функционала $e^{\alpha Q_1}$ в виде [7]

$$\langle 0|\prod_{j=1}^{N} C(\lambda_j^C)\exp\{\alpha Q_1\}\prod_{j=1}^{N} B(\lambda_j^B)|0\rangle=\sum{}_1\langle 0|\prod_{\mathrm{I}} C_1(\lambda_{\mathrm{I}}^C)\prod_{\mathrm{I}} B_1(\lambda_{\mathrm{I}}^B)|0\rangle_1\times$$
$$\times\,{}_2\langle 0|\prod_{\mathrm{II}} C_2(\lambda_{\mathrm{II}}^C)\prod_{\mathrm{II}} B_2(\lambda_{\mathrm{II}}^B)|0\rangle_2\prod_{\mathrm{I}}\prod_{\mathrm{II}} a_2(\lambda_{\mathrm{I}}^B)\,d_2(\lambda_{\mathrm{I}}^C)\,a_1(\lambda_{\mathrm{II}}^C)\,d_1(\lambda_{\mathrm{II}}^B)\times$$
$$\times f(\lambda_{\mathrm{I}}^B,\lambda_{\mathrm{II}}^B)\,f(\lambda_{\mathrm{II}}^C,\lambda_{\mathrm{I}}^C)\exp\{\alpha N_{\mathrm{I}}\}. \qquad (1.14)$$

Здесь суммирование ведется по двум независимым разбиениям набора $\{\lambda^B\}=\{\lambda_{\mathrm{I}}^B\}\cup\{\lambda_{\mathrm{II}}^B\}$ и набора $\{\lambda^C\}=\{\lambda_{\mathrm{I}}^C\}\cup\{\lambda_{\mathrm{II}}^C\}$ при одном дополнительном условии card $\{\lambda_{\mathrm{I}}^C\}=$ card $\{\lambda_{\mathrm{I}}^B\}=N_{\mathrm{I}}$.

Если набор $\{\lambda_j\}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{a(\lambda_n)}{d(\lambda_n)}\prod_{k=1}^{N}\frac{h(\lambda_n,\lambda_k)}{h(\lambda_k,\lambda_n)}=(-1)^{N-1}, \qquad (1.15)$$

то векторы (1.11), (1.13) являются собственными векторами следа матрицы монодромии $A(\mu)+D(\mu)$ (и гамильтониана модели).

Для того чтобы получить производящий функционал корреляторов, необходимо в (1.14) устремить $\{\lambda^C\}\to\{\lambda\}^B$, а затем устремить $\{\lambda\}$ к решению системы уравнений (1.15).

Квантовый вариант нелинейного уравнения Шредингера является частным случаем обобщенной двухузельной модели при

$$\begin{aligned}
&a(\lambda)=\exp\{-i\lambda L/2\}, && d(\lambda)=\exp\{i\lambda L/2\}, && L>0, \quad (1.16)\\
&a_1(\lambda)=\exp\{-i\lambda x/2\}, && d_1(\lambda)=\exp\{i\lambda x/2\}, && x>0,\\
&a_2(\lambda)=\exp\{i\lambda(x-L)/2\}, && d_2(\lambda)=\exp\{i\lambda(L-x)/2\}, && L>x.
\end{aligned}$$

§ 2. Операторы Ω

Для дальнейшего удобно обобщить оператор $\exp\alpha Q_1$ и ввести четыре оператора Ω. *Операторы* Ω_1^B и Ω_2^B *задаются своим действием на базис* (1.2), (1.3)

$$\Omega_1^B\prod_{j=1}^{N} B_1(\lambda_j)|0\rangle_1=\prod_{j=1}^{N}\omega_1^B(\lambda_j)\prod_{j=1}^{N} B_1(\lambda_j)|0\rangle_1, \qquad (2.1)$$

$$\Omega_2^B\prod_{j=1}^{N} B_2(\lambda_j)|0\rangle_2=\prod_{j=1}^{N}\omega_2^B(\lambda_j)\prod_{j=1}^{N} B_2(\lambda_j)|0\rangle_2. \qquad (2.2)$$

Здесь $\omega_{1,2}^B$ — две комплексные функции. *Операторы* Ω_1^C *и* Ω_2^C *задаются своим действием на дуальный базис*

$${}_1\langle 0|\prod_{j=1}^{N} C_1(\lambda_j)\,\Omega_1^C=\prod_{j=1}^{N}\omega_1^C(\lambda_j)\,{}_1\langle 0|\prod_{j=1}^{N} C_1(\lambda_j), \qquad (2.3)$$

$${}_2\langle 0|\prod_{j=1}^{N} C_2(\lambda_j)\,\Omega_2^C=\prod_{j=1}^{N}\omega_2^C(\lambda_j)\,{}_2\langle 0|\prod_{j=1}^{N} C_2(\lambda_j). \qquad (2.4)$$

Здесь $\omega_{1,2}^{C}$ — две другие комплексные функции. Матричный элемент

$$M_N = \langle 0 | \prod_{j=1}^{N} C(\lambda_j^C)\, \Omega_1^C \Omega_2^C \Omega_2^B \Omega_1^B \prod_{j=1}^{N} B(\lambda_j^B) | 0 \rangle \tag{2.5}$$

играет важную роль. Ниже мы увидим, что он обладает рекуррентными свойствами, которые позволяют его вычислить. С помощью формул (1.12), (1.13) матричный элемент M_N можно записать в виде

$$M_N = \sum {}_1\langle 0 | \prod_{\mathrm{I}} C_1(\lambda_{\mathrm{I}}^C) \prod_{\mathrm{I}} B_1(\lambda_{\mathrm{I}}^B) | 0 \rangle_1 \, {}_2\langle 0 | \prod_{\mathrm{II}} C_2(\lambda_{\mathrm{II}}^C) \prod_{\mathrm{II}} B_2(\lambda_{\mathrm{II}}^B) | 0 \rangle_2 \times$$
$$\times \prod_{\mathrm{I}} \omega_1^C(\lambda_{\mathrm{I}}^C)\, \omega_1^B(\lambda_{\mathrm{I}}^B)\, a_2(\lambda_{\mathrm{I}}^B)\, d_2(\lambda_{\mathrm{I}}^C) \prod_{\mathrm{II}} \omega_2^C(\lambda_{\mathrm{II}}^C)\, \omega_2^B(\lambda_{\mathrm{II}}^B)\, a_1(\lambda_{\mathrm{II}}^C) \times$$
$$\times d_1(\lambda_{\mathrm{II}}^B)\, f(\lambda_{\mathrm{I}}^B, \lambda_{\mathrm{II}}^B)\, f(\lambda_{\mathrm{II}}^C, \lambda_{\mathrm{I}}^C). \tag{2.6}$$

Суммирование здесь ведется по тем же разбиениям, что и в формуле (1.14). Напомним, что матричный элемент M_N зависит от восьми произвольных функций

$$M_N = M_N[a_{1,2}(\lambda), d_{1,2}(\lambda), \omega_{1,2}^{B;\,C}(\lambda)]. \tag{2.7}$$

Матричный элемент производящего функционала корреляционных функций $\exp \alpha Q_1$ получается из M_N в следующем частном случае:

$$\omega_2^B = \omega_2^C = \omega_1^C = 1, \quad \omega_1^B = \exp \alpha. \tag{2.8}$$

Сформулируем теперь рекуррентное соотношение для M_N. Оно связывает M_N и M_{N-1} с разными значениями произвольных функций (см. (2.7)). Часть произвольных функций совпадают для M_N и M_{N-1} (их мы выписывать не будем), другие произвольные функции отличаются только множителем (их мы выпишем в явном виде).

Теорема 1. *Матричный элемент* $M_N = \langle 0 | \prod_{j=1}^{N} C(\lambda_j^C)\, \Omega_1^C \Omega_2^C \Omega_2^B \Omega_1^B \times \prod_{j=1}^{N} B(\lambda_j^B) | 0 \rangle$ *удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению*:

$$M_N = a(\lambda_1^C)\, \omega_2^C(\lambda_1^C) \sum_{n=1}^{N} d(\lambda_n^B)\, \omega_2^B(\lambda_n^B)\, g(\lambda_1^C \lambda_n^B) \times$$
$$\times \Big[\prod_{k\neq 1} g(\lambda_1^C, \lambda_k^C) \prod_{j\neq n} g(\lambda_j^B, \lambda_n^B)\Big] M_{N-1}[a_2(\mu)\, h(\mu, \lambda_n^B), d_2(\mu)\, h(\lambda_1^C, \mu)] +$$
$$+ d(\lambda_1^C)\, \omega_1^C(\lambda_1^C) \sum_{n=1}^{N} a(\lambda_n^B)\, \omega_1^B(\lambda_n^B)\, g(\lambda_n^B, \lambda_1^C) \times$$
$$\times \prod_{j\neq n} g(\lambda_n^B, \lambda_j^B) \prod_{k\neq 1} g(\lambda_k^C, \lambda_1^C)\, M_{N-1}[a_1(\mu)\, h(\mu, \lambda_1^C), d_1(\mu)\, h(\lambda_n^B, \mu)] +$$
$$+ a_1(\lambda_1^C)\, d_2(\lambda_1^C)\, \omega_1^C(\lambda_1^C) \sum_{n=1}^{N} d_1(\lambda_n^B)\, a_2(\lambda_n^B)\, \omega_1^B(\lambda_n^B)\, g/\lambda_1^C, \lambda_n^B) \times$$
$$\times \prod_{k\neq 1} g(\lambda_1^C \lambda_k^C) \prod_{j\neq n} g(\lambda_j^B \lambda_n^B)\, M_{N-1}\Big[a_1(\mu)\, h(\mu, \lambda_n^B), d_1(\mu)\, h(\lambda_1^C, \mu), \omega_2^B(\mu) \times$$
$$\times \frac{h(\lambda_n^B, \mu)}{h(\lambda_1^C, \mu)}, \omega_2^C(\mu) \frac{h(\mu, \lambda_1^C)}{h(\mu, \lambda_n^B)}\Big] + \sum_{n=1}^{N} a_1(\lambda_1^C)\, d_2(\lambda_1^C)\, \omega_2^C(\lambda_1^C)\, a_2(\lambda_n^B)\, d_1(\lambda_n^B) \times$$

$$\times\, \omega_2^B(\lambda_n^B)\, g(\lambda_n^B, \lambda_1^C) \prod_{j\neq n} g(\lambda_n^B, \lambda_j^B) \prod_{k\neq 1} g(\lambda_k^C, \lambda_1^C)\, M_{N-1}\Big[a_2(\mu)\, h(\mu, \lambda_1^C),$$

$$d_2(\mu)\, h(\lambda_n^B, \mu), \omega_1^B(\mu)\frac{h(\mu, \lambda_n^B)}{h(\mu, \lambda_1^C)}, \omega_1^C(\mu)\frac{h(\lambda_1^C, \mu)}{h(\lambda_n^B, \mu)}\Big]. \qquad (2.9)$$

Матричный элемент M_{N-1} *в правой части определен следующим образом. В наборе* $\{\lambda^C\}$ *пропущено* λ_1^C, *а в наборе* $\{\lambda^B\}$ *пропущено* λ_n^B.

Доказательство этой теоремы может быть дано с помощью техники, разработанной в работе [9].

Следует отметить, что равенство $M_0 = 1$ вместе с рекуррентным соотношением фиксирует матричный элемент однозначно.

§ 3. Вспомогательное фоковское пространство

Рекуррентное соотношение (2.9) можно разрешить с помощью определителя. Соответствующая матрица оказывается оператором во вспомогательном фоковском пространстве. Введем восемь вспомогательных квантовых полей $\Phi_n(\lambda)$ $(n = 1, \ldots, 8)$

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\lambda) &= q_2^C(\lambda) + q_1^A(\lambda) + q_2^A(\lambda) + \pi_2^D(\lambda),\\
\Phi_2(\lambda) &= q_2^B(\lambda) + q_1^D(\lambda) + q_2^D(\lambda) + \bar\pi_2^A(\lambda),\\
\Phi_3(\lambda) &= q_1^C(\lambda) + q_1^D(\lambda) + q_2^D(\lambda) + \bar\pi_1^A(\lambda),\\
\Phi_4(\lambda) &= q_1^B(\lambda) + q_1^A(\lambda) + q_2^A(\lambda) + \pi_1^D(\lambda),\\
\Phi_5(\lambda) &= q_2^C(\lambda) + q_1^A(\lambda) + q_2^D(\lambda) + \bar\pi_2^A(\lambda) + \pi_1^C(\lambda) - \bar\pi_1^B(\lambda),\\
\Phi_6(\lambda) &= q_2^B(\lambda) + q_2^A(\lambda) + q_1^D(\lambda) + \pi_2^D(\lambda) + \bar\pi_1^B(\lambda) - \pi_1^C(\lambda),\\
\Phi_7(\lambda) &= q_1^C(\lambda) + q_1^A(\lambda) + q_2^D(\lambda) + \pi_1^D(\lambda) + \bar\pi_2^C(\lambda) - \pi_2^B(\lambda),\\
\Phi_8(\lambda) &= q_1^B(\lambda) + q_1^D(\lambda) + q_2^A(\lambda) + \bar\pi_1^A(\lambda) + \pi_2^B(\lambda) - \bar\pi_2^C(\lambda).
\end{aligned} \qquad (3.1)$$

Все импульсы π и $\bar\pi$ коммутируют между собой, все координаты q также коммутируют между собой. Отличны от нуля только коммутаторы между π и q с одинаковыми индексами (а также между $\bar\pi$ и q с одинаковыми индексами)

$$\begin{aligned}
[\pi_j(\lambda), q_k(\mu)] &= \delta_k^j \ln h(\lambda, \mu),\\
[\bar\pi_j(\lambda), q_k(\mu)] &= \delta_k^j \ln h(\mu, \lambda).
\end{aligned} \qquad (3.2)$$

Здесь каждый из индексов j и k пробегает восемь значений $\begin{pmatrix} A, B, C, D \\ 1,2 \end{pmatrix}$. Все импульсы уничтожают вакуум $|0)$ во вспомогательном фоковском пространстве $\pi_j(\lambda)|0) = 0$, $\bar\pi_j(\lambda)|0) = 0$. Дуальный вакуум $(0|$ является собственным для координат

$$\begin{aligned}
(0|\, q_{1,2}^A(\lambda) &= \ln a_{1,2}(\lambda)\,(0|,\\
(0|\, q_{1,2}^D(\lambda) &= \ln d_{1,2}(\lambda)\,(0|,\\
(0|\, q_{1,2}^{C,B}(\lambda) &= \ln \omega_{1,2}^{C,B}(\lambda)\,(0|.
\end{aligned} \qquad (3.3)$$

Важно отметить, что все поля $\Phi_n(\lambda)$ (*см.* (3.1)) *коммутируют между собой* $[\Phi_n(\lambda), \Phi_m(\mu)] = 0$. Построим теперь матрицу $\mathcal{M}$ размерности N. Матричный элемент этой матрицы равен:

$$\mathcal{M}_{jk} = \frac{g(\lambda_j^C\lambda_k^B)}{h(\lambda_j^C\lambda_k^B)} e^{\Phi_1(\lambda_j^C)} e^{\Phi_2(\lambda_k^B)} + \frac{g(\lambda_k^B, \lambda_j^C)}{h(\lambda_k^B, \lambda_j^C)} e^{\Phi_3(\lambda_j^C)} e^{\Phi_4(\lambda_k^B)} +$$

$$+ \frac{g(\lambda_k^B, \lambda_j^C)}{h(\lambda_k^B, \lambda_j^C)} e^{\Phi_5(\lambda_j^C)} e^{\Phi_6(\lambda_k^B)} + \frac{g(\lambda_j^C\lambda_k^B)}{h(\lambda_j^C\lambda_k^B)} e^{\Phi_7(\lambda_j^C)} e^{\Phi_8(\lambda_k^B)}. \qquad (3.4)$$

Различные матричные элементы коммутируют между собой, поэтому детерминат этой матрицы $\det \mathscr{M}$ хорошо определен. Важную роль будет играть вакуумное среднее этого детерминанта $(0 \mid \det \mathscr{M} \mid 0)$. Все обозначения подготовлены для того, чтобы сформулировать теорему 2.

Теорема 2. *Матричный элемент* M_N, *заданный формулой* (2.6), *пропорционален вакуумному среднему определителя матрицы* $\mathscr{M}$, *заданному формулой* (3.4)

$$\langle 0 \mid \prod_{j=1}^{N} C(\lambda_j^C)\, \Omega_1^C \Omega_2^C \Omega_2^B \Omega_1^B \prod_{j=1}^{N} B(\lambda_j^B) \mid 0 \rangle = \\ = M_N = \Big\{ \prod_{j>k} g(\lambda_j^C \lambda_k^C)\, g(\lambda_k^B \lambda_j^B) \Big\} (0 \mid \det \mathscr{M} \mid 0). \tag{3.5}$$

Для доказательства достаточно воспроизвести рекуррентное соотношение (2.9). Для этого раскроем $\det \mathscr{M}$ по первой строке (связанной с λ_1^C) и заметим, что вектор $(0 \mid \exp \{\pi(\mu)\}$ также является собственным вектором оператора координаты с измененным собственным значением.

§ 4. Среднее значение производящего функционала

Для того чтобы перейти к производящему функционалу корреляторов в выражении для M_N (см. (3.4), (3.5)), устремим сначала $\{\lambda^C\} \to \{\lambda^B\} = \{\lambda\}$ (получится среднее значение оператора $\Omega_1^C \Omega_2^C \Omega_2^B \Omega_1^B$):

$$\langle 0 \mid \prod_{j=1}^{N} C(\lambda_j)\, \Omega_1^C \Omega_2^C \Omega_2^B \Omega_1^B \prod_{j=1}^{N} B(\lambda_j) \mid 0 \rangle = \Big\{ \prod_{j>k} g(\lambda_j \lambda_k)\, g(\lambda_k \lambda_j) \Big\} (0 \mid \det \mathscr{M} \mid 0). \tag{4.1}$$

Матрицу $\mathscr{M}_{jk}$ естественно записать в следующем виде: $\mathscr{M}_{jk} = e^{\Phi_1(\lambda_j)} e^{\Phi_2(\lambda_k)} m_{jk}$. Вне диагонали матрица m_{jk} имеет вид $j \neq k$

$$m_{jk} = \frac{g_{jk}}{h_{jk}} + \frac{g_{kj}}{h_{kj}} e^{\Phi_{51}(\lambda_j)} e^{\Phi_{62}(\lambda_k)} + e^{\Phi_{31}(\lambda_j)} e^{\Phi_{42}(\lambda_k)} \Big\{ \frac{g_{kj}}{h_{kj}} + \frac{g_{jk}}{h_{jk}} e^{\Phi_{73}(\lambda_j)} e^{\Phi_{84}(\lambda_k)} \Big\}. \tag{4.2}$$

Здесь $\Phi_{nm} = \Phi_n - \Phi_m$. На диагонали имеем

$$m_{jj} = ic \frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi_{62}(\lambda) \Big/_{\lambda=\lambda_j} - 2 + e^{\Phi_{31}(\lambda_j)} e^{\Phi_{42}(\lambda_j)} \Big\{ ic \frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi_{73}(\lambda) \Big/_{\lambda=\lambda_j} - 2 \Big\}. \tag{4.3}$$

Здесь мы воспользовались следующими тождествами:

$$\begin{gathered} \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_5 + \Phi_6 = q^A + q^D + q_2^C + \pi_2^D + \bar{\pi}_2^A + q_2^B, \\ \Phi_3 + \Phi_4 = \Phi_7 + \Phi_8 = q^A + q^D + q_1^C + q_1^B + \pi_1^D + \bar{\pi}_1^A, \\ q^A = q_1^A + q_2^A,\ q^D = q_1^D + q_2^D. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Для четырех полей, входящих в (4.2), (4.3), имеет место обычное разбиение

$$\begin{aligned} &\Phi_{62} = -\Phi_{51} = q_{62} + p_{62}, && \Phi_{73} = -\Phi_{84} = q_{73} + p_{73}, \\ &\Phi_{31} = q_{31} + p_{31}, && \Phi_{42} = q_{42} + p_{42}, \\ &q_{62} = q_2^A - q_2^D, && p_{62} = \pi_2^D - \bar{\pi}_2^A + \bar{\pi}_1^B - \pi_1^C, \\ &q_{73} = q_1^A - q_1^D, && p_{73} = \pi_1^D - \bar{\pi}_1^A + \bar{\pi}_2^C - \pi_2^B, \\ &q_{31} = q^D - q^A + q_1^C - q_2^C, && p_{31} = \bar{\pi}_1^A - \pi_2^D, \\ &q_{42} = q^A - q^D + q_1^B - q_2^B, && p_{42} = \pi_1^D - \bar{\pi}_2^A. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Матрицу коммутаторов обозначим так: $[p_a(\lambda), q_b(\mu)] = H_{ab}(\lambda, \mu)$. Здесь индексы a, b пробегают четыре значения $a, b = 62, 73, 31, 42$. Размерность матрицы H равна четырем

$$H(\lambda, \mu) = \ln h(\lambda, \mu)\cdot A + \ln h(\mu, \lambda) A^T. \tag{4.6}$$

Матрица A равна

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Действие p на вакуум $|0)$ дает нуль: $p_a(\lambda)\,|0) = 0$. Следует подчеркнуть еще раз, что все четыре поля $\Phi_a(\lambda)$ (4.5) коммутируют между собой $[\Phi_a(\lambda), \Phi_b(\mu)] = 0$, $a, b = 62, 73, 31, 42$. Для того чтобы упростить выражение для $(0\,|\det \mathscr{M}\,|\,0)$, подействуем $\prod\limits_j \exp\{\Phi_1(\lambda_j) + \Phi_2(\lambda_j)\}$ на дуальный вакуум. При этом получится

$$(0|\prod_{j=1}^{N} \exp\{\Phi_1(\lambda_j) + \Phi_2(\lambda_j)\} = \prod_{j=1}^{N} \omega_2^B(\lambda_j)\,\omega_2^C(\lambda_j)\,a(\lambda_j)\,d(\lambda_j) \prod_{j,\,k} h(\lambda_j\lambda_k)(\widetilde{0}|. \tag{4.8}$$

Новый дуальный вакуум равен

$$(\widetilde{0}| = (0|\prod_{j=1}^{N} e^{\pi_2^D(\lambda_j)} e^{\pi_2^{-A}(\lambda_j)}. \tag{4.9}$$

Выделим теперь из полей Φ_a их вакуумные значения $\Phi_a^0 = \Phi_a - (\widetilde{0}\,|\,\Phi_a\,|\,0)$. Поля Φ_a^0 представимы в виде $\Phi_a^0 = q_a^0 + p_a^0$, причем

$$p_a^0(\lambda) = p_a(\lambda),\quad q_a^0(\lambda) = q_a(\lambda) - (\widetilde{0}|\,q_a(\lambda)\,|0),\quad (\widetilde{0}|\,q_a^0(\lambda) = 0,\quad p_a^0(\lambda)\,|0) = 0.$$

Коммутационные соотношения p^0 и q^0 по-прежнему задаются матрицей H (4.6). Воспользуемся системой уравнений (1.15). Получим, что

$$\langle 0|\prod_{j=1}^{N} C(\lambda_j)\,e^{\alpha Q_1} \prod_{j=1}^{N} B(\lambda_j)\,|0\rangle = \prod_{j=1}^{N} a(\lambda_j)\,d(\lambda_j) \prod_{j>k} f_{jk} f_{kj}\,(\widetilde{0}|\det m\,|0). \tag{4.10}$$

Для матрицы m_{jk} (4.2), (4.3) получится следующее выражение:

$$\begin{aligned} m_{jk} = ic\delta_j^k \frac{\partial}{\partial\lambda_j}\left[\ln \frac{a(\lambda_j)}{d(\lambda_j)} \prod_{n=1}^{N} \frac{h(\lambda_j\lambda_n)}{h(\lambda_n\lambda_j)}\right] + \frac{g_{jk}}{h_{jk}} + \\ + \frac{g_{kj}}{h_{kj}}\, l^{-1}(\lambda_k)\, l(\lambda_j)\, e^{\Phi_{62}^0(\lambda_k)} e^{-\Phi_{62}^0(\lambda_j)} + \\ + e^{\alpha} e^{\Phi_{31}^0(\lambda_j)} e^{\Phi_{42}^0(\lambda_k)} \times \left\{\frac{g_{kj}}{h_{kj}} + \frac{g_{jk}}{h_{jk}}\, l(\lambda_j)\, l^{-1}(\lambda_k)\, e^{\Phi_{73}^0(\lambda_j) - \Phi_{73}^0(\lambda_k)}\right\}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Здесь $l(\lambda) = a_1(\lambda)/d_1(\lambda)$. Мы перешли от операторов Ω к оператору $\exp \alpha Q_1$ (см. (2.8)).

Вычисление правой части формулы (4.10) сводится к нормальному упорядочению полей $\Phi_a^0(\lambda)$ (все импульсы $P_a^0(\lambda)$ следует перенести направо, а все координаты $q_a^0(\lambda)$ — налево). Это позволяет [10] свести вычисление среднего значения $\det m$ к вычислению функционального интеграла

$$\int \prod d\Phi_a^0(\lambda) \det m(\Phi_a^0) \exp\left\{-\frac{1}{2}\int d\lambda\, d\mu \sum_{a,\,b} \Phi_a^0(\lambda)\, H_{ab}^{-1}(\lambda, \mu)\, \Phi_b^0(\mu)\right\}.$$

Здесь в выражении для $\det m$ мы заменили квантовые поля на комплексно-значные функции $\Phi_a^0(\lambda)$ (переменные интегрирования), величина $H_{ab}^{-1}(\lambda,\mu)$ — это ядро линейного интегрального оператора, обратного к линейному оператору с ядром $H_{ab}(\lambda, \mu)$.

§ 5. Термодинамический предел

Термодинамический предел легче всего описать вернувшись собственно к квантовому нелинейному уравнению Шредингера. В этом пределе число частиц N и длина ящика L устремляются на бесконечность, но плотность $D = L/N$ остается фиксированной. При нулевой температуре импульсы λ_j сгущаются $(\lambda_{j+1} - \lambda_j) = O(1/L)$ и заполняют интервал $[-q, q]$. Величина q называется зоной Ферми. Формула (4.10) позволяет непосредственно перейти к термодинамическому пределу

$$\langle e^{\alpha Q_1}\rangle = \lim \frac{\langle 0|\prod_{j=1}^{N} C(\lambda_j)\exp\{\alpha Q_1\}\prod_{j=1}^{N} B(\lambda_j)|0\rangle}{\langle 0|\prod_{j=1}^{N} C(\lambda_j)\prod_{j=1}^{N} B(\lambda_j)|0\rangle} =$$

$$= (\widetilde{0}|\det(1+V)|0)/\det\left(1-\frac{1}{2\pi}K\right). \tag{5.1}$$

Здесь V и K — интегральные операторы на отрезке $[-q, q]$. Ядро интегрального оператора K равно $K(\lambda, \mu) = 2c/[c^2 + (\lambda-\mu)^2]$. Ядро интегрального оператора V зависит от четырех вспомогательных квантовых полей (4.5):

$$2\pi c V(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{g_{12}}{h_{12}} + \frac{g_{21}}{h_{21}} e^{ix\lambda_{21}} e^{\Phi_{62}^0(\lambda_2)-\Phi_{62}^0(\lambda_1)} +$$

$$+ e^{\alpha} e^{\Phi_{31}^0(\lambda_1)} e^{\Phi_{42}^0(\lambda_2)}\left[\frac{g_{21}}{h_{21}} + \frac{g_{12}}{h_{12}} e^{ix\lambda_{21}} e^{\Phi_{73}^0(\lambda_1)-\Phi_{73}^0(\lambda_2)}\right]. \tag{5.2}$$

Корреляторы в этой модели при конечной температуре обсуждались в работе [11]. Из этой работы видно, что при конечной температуре операторы V и K заменяются на операторы V_T и K_T, действующие на всей оси. Соответствующие ядра равны

$$V_T(\lambda, \mu) = \frac{V(\lambda, \mu)}{1+\exp\{\varepsilon(\mu)/T\}}; \quad K_T(\lambda, \mu) = \frac{K(\lambda, \mu)}{1+\exp\{\varepsilon(\mu)/T\}}. \tag{5.3}$$

Здесь $\varepsilon(\mu)$ — энергия возбуждения частицы [12]. Она задается интегральным уравнением Янга

$$\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - h - \frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\mu K(\lambda, \mu)\ln\left[1 + e^{\frac{-\varepsilon(\mu)}{T}}\right]. \tag{5.4}$$

Здесь T — температура, h — химический потенциал. При выводе формулы (5.1) мы воспользовались результатами работы [9]. *Формулы* (5.1), (5.2) *представляют собой основной результат настоящей работы.*

В конце отметим, что при бесконечной константе связи $c = \infty$ коммутаторы полей (4.5) обращаются в нуль. Определители в (5.1) упрощаются

$$\det(1 - 1/2\pi\, K) = 1, \quad (\widetilde{0}\,|\det(1+V)|\,0) = \det(1+V_\infty), \tag{5.5}$$

причем ядро V_∞ равно $(\lambda_{12} = -\lambda_{21} = \lambda_1 - \lambda_2)$

$$V_\infty(\lambda_1, \lambda_2) = i(e^{\alpha}-1)(e^{ix\lambda_{21}}-1)/2\pi\lambda_{12}. \tag{5.6}$$

Любопытно отметить, что $\langle \exp\ \alpha Q_1\rangle = \det(1+V_\infty)$ элементарными заменами сводится к определителю Фредгольма оператора с ядром $\sin(\lambda_1-\lambda_2)/(\lambda_1-\lambda_2)$.

Это, в свою очередь, означает [13], что $\langle \exp \alpha Q_1 \rangle$ выражается через решение уравнения Пенлеве. Формула (0.2) позволяет убедиться, что при $c = \infty$ получается правильное выражение для коррелятора

$$\langle \psi^+(x)\,\psi(x)\,\psi^+(0)\,\psi(0\,|\rangle = D^2 - \frac{1}{4\pi^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\lambda}d\lambda}{1+\exp\{(\lambda^2-h)/T\}}\right)^2.$$

Представление (5.1) удобно для вычисления асимптотик корреляторов, так как все поля, входящие в оператор V, коммутируют между собой.

В заключение отмечу, что представление для производящего функционала корреляционных функций в виде определителя, возможно для любой модели, которая решается с помощью алгебраического анзатца Бете. Квантовые поля при этом определяются только R-матрицей. Полное описание различных моделей, связанных с R-матрицей типа (1.6), дано в работе [8]. Наибольший интерес среди этих моделей представляет магнетик Гейзенберга.

Я хочу поблагодарить за дискуссии Л. Д. Фаддеева и А. Г. Изергина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Faddeev L. D.* Qauntum completely integrable models in field theory // Contemporary mathematical physics.— 1980. V. 1c.— P. 107—155.
2. *Izergin A. G.*, *Korepin V. E.* The quantum inverse scattering method approach to correlation functions // Commun. Math. Phys.— 1984. V. 94.— P. 67—92.
3. *Korepin V. E.* Correlation functions of the one-dimensional Bose gas // Commun. Math. Phys.— 1984. V. 94.— P. 93—113.
4. *Захаров В. Е.*, *Шабат А. Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ.— 1971. Т. 61, № 1.— С. 118—134.
5. *Склянин Е. К.*, *Фаддеев Л. Д.* Квантово-механический подход к вполне интегрируемым моделям теории поля // ДАН СССР.— 1978. Т. 243. № 6.— С. 1430—1433.
6. *Склянин Е. К.* Метод обратной задачи рассеяния и квантовое нелинейное уравнение Шредингера // ДАН СССР.— 1978, Т. 244, № 6.— С. 1337—1341.
7. *Bogoliubov N. M.*, *Izergin A. G.*, *Korepin V. E.* Exactly solvable problems in condensed matter and relativistic field theory // Lect. Notes in Physics.— 1985. V. 242.— P. 220—316.
8. *Корепин В. Е.* Анализ билинейного соотношения шестивершинной модели // ДАН СССР.— 1982. Т. 265, № 6.— С. 1361—1364.
9. *Korepin V. E.* Calculation of norms of Bethe wave functions // Comm. Math. Phys.— 1982. V. 86.— P. 391—416.
10. *Васильев А. Н.* Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. // Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.
11. *Bogoliubov N. M.*, *Korepin V. E.* Correlation length of the one-dimensional Bose gas. // Nuclear Physics.— 1985. V. B 257 [FS 114].— P. 760—778.
12. *Yang C. N.*, *Yang C. P.* Thermodynamics of a one-dimensional system of bosons with repalsive delta-function interaction // J. Math. Phys.— 1969. V. 10, № 7.— P. 1115—1122.
13. *Jimbo M.*, *Miwa T.*, *Mori Y.*, *Sato M.* Density matrix of an impenetrable Bose gas, and the fifth Painleve transcendent // Physica D.— 1980. V. 1, № 1.— P. 80—158.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило в редакцию
22 сентября 1987 г.