Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 18

Издание выходит с 2003 года

Р. Михайлов

Гомотопические и комбинаторные аспекты теории нормальных рядов в группах

Москва
2014

УДК 517.518.454+517.518.36+517.518.8
ББК 22.15
С56

С56 **Современные проблемы математики** / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2014. Вып. 18: Гомотопические и комбинаторные аспекты теории нормальных рядов в группах / Р. Михайлов – 146 с.

ISBN 978-5-98419-053-4

Серия "Современные проблемы математики" – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, гранта Правительства РФ, дог. 11.G34.31.0026, гранта Президента МД-381.2014.1 и ОАО "Газпром нефть".

ISBN 978-5-98419-053-4

Содержание

Введение

Основные объекты исследования данной работы – нижние центральные ряды, размерные ряды, производные ряды в группах, а также степени фундаментальных (аугментационных) идеалов групповых колец. Пространство математических связей и приложений данных понятий оказывается едва обозримым. Это и теория гомотопий, и алгебраическая K-теория, и геометрическая топология, и арифметика.

Данная работа следует двум направлениям и целям: 1) изучение аномальных объектов, построение различных контрпримеров; 2) обнаружение гомологических и гомотопических связей, перемешивание теории групп с теорией гомотопий, получение как теоретико-групповых результатов методами гомологической и гомотопической алгебры, так и гомотопических результатов методами теории групп. Большую часть работы можно отнести к *гомотопической теории групп* – области алгебры, находящейся в процессе формирования и не имеющей на данный момент четких границ. Говоря неформально, гомотопическая теория групп – это область, объединяющая теорию симплициальных групп, теорию производных функторов от неабелевых функторов, теорию скрещенных комплексов и т.д.

Введем основные определения. Пусть G – группа. Обозначим через $\{\gamma_n(G)\}_{n\geqslant 1}$ нижний центральный ряд в G, определяемый индуктивно как

$$\gamma_1(G)=G, \qquad \gamma_{n+1}(G)=[\gamma_n(G),G]=\langle [x,y]:=x^{-1}y^{-1}xy \mid x\in\gamma_n(G),\, y\in G\rangle^G, \quad n\geqslant 1.$$

Производный ряд $\{\delta_n(G)\}_{n\geqslant 1}$ определяется индуктивно как

$$\delta_1(G)=G, \qquad \delta_{n+1}(G)=[\delta_n(G),\delta_n(G)], \quad n\geqslant 1.$$

В работе мы также используем стандартные обозначения для элементов трансфинитных рядов

$$\gamma_\omega(G)=\bigcap_i \gamma_i(G), \qquad \gamma_{\omega+1}(G)=[\gamma_\omega(G),G],$$
$$\delta_\omega(G)=\bigcap_i \delta_i(G), \qquad \delta_{\omega+1}(G)=[\delta_\omega(G),\delta_\omega(G)].$$

Рассмотрим целочисленное групповое кольцо $\mathbb{Z}[G]$. *Фундаментальным* (или *аугментационным*) *идеалом* $\Delta(G)$ называется идеал в $\mathbb{Z}[G]$, являющийся ядром гомоморфизма аугментации $\mathbb{Z}[G]\to\mathbb{Z}$, отображающего линейную комбинацию элементов группы в сумму коэффициентов этой комбинации. Степени фундаментального идеала $\{\Delta^n(G)\}_{n\geqslant 1}$ образуют цепочку вложенных идеалов в $\mathbb{Z}[G]$. Для $n\geqslant 1$ определим n-ю размерную подгруппу в G как

$$D_n(G)=G\cap(1+\Delta^n(G)).$$

Несложно увидеть, что убывающая цепочка нормальных подгрупп

$$G=D_1(G)\supseteq D_2(G)\supseteq\cdots\supseteq D_n(G)\supseteq\cdots$$

представляет собой центральный ряд, т.е. $[G,D_n(G)]\subseteq D_{n+1}(G)$ для всех $n\geqslant 1$. Следовательно, имеем естественное включение подгрупп $\gamma_n(G)\subseteq D_n(G)$ для всех $n\geqslant 1$.

Размерные подгруппы были впервые рассмотрены Магнусом. Напомним центральную конструкцию работы Магнуса [1]. Пусть F – свободная группа с базисом $\{x_i\}_{i\in I}$ и $\mathcal{A}=\mathbb{Z}[[X_i\mid i\in I]]$ – кольцо формальных степенных рядов от некоммутирующих переменных $\{X_i\}_{i\in I}$ над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел. Пусть $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ – группа обратимых элементов в $\mathcal{A}$. Отображение $x_i\mapsto 1+X_i$, $i\in I$, продолжается до гомоморфизма групп

$$\theta\colon F\to\mathcal{U}(\mathcal{A}), \tag{1}$$

так как $1 + X_i$ обратим в $\mathcal{A}$ (обратный элемент – это $1 - X_i + X_i^2 - \cdots$). Гомоморфизм θ является мономорфизмом (см. [2; теорема 5.6]). Для $a \in \mathcal{A}$ пусть a_n обозначает однородную компоненту степени n, так что

$$a = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Определим

$$\mathcal{D}_n(F) := \{f \in F \mid \theta(f)_i = 0,\ 1 \leqslant i < n\}, \qquad n \geqslant 1.$$

Легко видеть, что $\mathcal{D}_n(F)$ – нормальная подгруппа в F и что ряд $\{\mathcal{D}_n(F)\}_{n\geqslant 1}$ является центральным в F, т.е. $[F, \mathcal{D}_n(F)] \subseteq \mathcal{D}_{n+1}(F)$ для всех $n \geqslant 1$. Естественно, пересечение ряда $\{\mathcal{D}_n(F)\}_{n\geqslant 1}$ тривиально. Так как $\{\mathcal{D}_n(F)\}_{n\geqslant 1}$ – центральный ряд, то имеется включение $\gamma_n(F) \subseteq \mathcal{D}_n(F)$ для $n \geqslant 1$. Поэтому пересечение $\bigcap_{n\geqslant 1} \gamma_n(F)$ тривиально, т.е. группа F нильпотентно аппроксимируема. Фундаментальным результатом теории групповых колец является теорема Магнуса, утверждающая, что для свободной группы F имеет место равенство

$$\gamma_n(F) = D_n(F) = \mathcal{D}_n(F)$$

для всех $n \geqslant 1$.

Для любой группы G имеет место равенство $D_n(G) = \gamma_n(G)$ для $n = 1, 2, 3$. При этом существуют группы G, для которых

$$D_n(G) \neq \gamma_n(G), \qquad n \geqslant 4.$$

Первый пример группы с $D_4(G) \neq \gamma_4(G)$ принадлежит Рипсу [3]. Группа Рипса – конечная группа порядка 2^{38}. Для любой группы G факторгруппа $D_4(G)/\gamma_4(G)$ оказывается абелевой группой экспоненты 2, но по мере роста размерности разница между размерным и нижним центральным рядами становится все сложнее.

После появления примера Рипса возникло естественное желание построить структурную теорию размерных подгрупп и дать строгое описание размерных факторов как функторов в категории групп. Однако теория размерных подгрупп оказалась очень сложной, а для описания маломерных размерных подгрупп оказалось плодотворным введение гомологических и гомотопических методов.

Гомологические методы в теории размерных подгрупп восходят к работам Пасси [4]. Идеи, лежащие в основе метода Пасси, можно представить следующим образом (приведем их подробно, так как обобщение результатов Пасси представляет собой одну из целей данной работы). Пусть $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ – некоторый двусторонний идеал в целочисленном групповом кольце $\mathbb{Z}[G]$ и M – тривиальный G-модуль. Определим обобщенную размерную подгруппу, задаваемую идеалом $\mathfrak{a}$:

$$D_{\mathfrak{a}}(G) = D(G, \mathfrak{a}) := G \cap (1 + \mathfrak{a}),$$

где пересечение рассматривается в групповом кольце. Рассмотрим следующие классы отображений на $G \times G$. Нормализованный 2-коцикл $f\colon G \times G \to M$ называется *левым* (соответственно *правым*) $\mathfrak{a}$-2-*коциклом*, если линейное расширение на $\mathbb{Z}[G]$ отображения $l_y\colon G \to M$, $y \in G$ (соответственно $r_x\colon G \to M$, $x \in G$), определенного как $l_y(x) = f(x, y)$, $x \in G$ (соответственно $r_x(y) = f(x, y)$, $y \in G$), оказывается нулевым при ограничении на $\mathfrak{a}$. Обозначим через $P_{\mathfrak{a}}(G, M)_l$ (соответственно $P_{\mathfrak{a}}(G, M)_r$) подгруппу в $H^2(G, M)$, т.е. в группе вторых когомологий группы G с коэффициентами в M, состоящую из когомологических классов, представляемых левыми (соответственно правыми) $\mathfrak{a}$-2-коциклами. Далее, обозначим через $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}(G, M)$ подгруппу, состоящую из когомологических классов, представляемых 2-коциклами, являющимися как левыми, так и правыми $\mathfrak{a}$-2-коциклами. Пусть M – делимая абелева группа, рассматриваемая как тривиальный G-модуль. Пусть

$$\delta\colon \operatorname{Ext}^1_G(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}, M) \to \operatorname{Ext}^1_G(\mathfrak{g}, M)$$

– отображение, индуцируемое естественной проекцией $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Тогда (см. теорему 3.1.1)

$$P_{\mathfrak{a}}(G, M)_l = P_{\mathfrak{a}}(G, M)_r = \mathrm{Im}(\delta).$$

Теперь пусть $\mathfrak{a}$ – идеал в $\mathbb{Z}[G]$, содержащийся в $\mathfrak{g}$, и $\overline{\mathfrak{a}}$ – его образ относительно естественного отображения $\mathfrak{g} \to \Delta(G/D_{\mathfrak{a}}(G))$. Тогда (см. теорему 3.1.2):

(a) $P_{\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G), \mathbb{T}) = H^2(G/D_{\mathfrak{a}}(G), \mathbb{T})$ влечет

$$D_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}}(G).D_{\mathfrak{g}\mathfrak{a}}(G) \subseteq [D_{\mathfrak{a}}(G), G];$$

(b) $P_{\overline{\mathfrak{a}},\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G), \mathbb{T}) = H^2(G/D_{\mathfrak{a}}(G), \mathbb{T})$ влечет

$$D_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}+\mathfrak{g}\mathfrak{a}}(G) = [D_{\mathfrak{a}}(G), G].$$

В случае степеней аугментационного идеала $\mathfrak{a} = \Delta^n(G)$ естественно получаем $P_{\mathfrak{a}}(G, M) = P_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}(G, M)$. Таким образом определяется так называемая фильтрация Пасси–Штаммбаха в группе когомологий $H^2(G, M)$. Вышеприведенные рассуждения показывают, что из когомологических свойств группы $G/D_n(G)$ можно извлекать информацию о размерной подгруппе $D_{n+1}(G)$: если фильтация Пасси–Штаммбаха группы $G/D_n(G)$ в соответствующем члене представляет собой всю группу когомологий $H^2(G/D_n(G), \mathbb{T})$, то $D_{n+1}(G) = [D_n(G), G]$. Пусть теперь дана некоторая группа G, для которой мы знаем, что до некоторого фиксированного члена (скажем, n) нижняя центральная и размерная фильтрации совпадают. Представляем произвольный элемент $H^2(G/\gamma_n(G), \mathbb{T})$ как центральное расширение нильпотентной группы

$$1 \to \mathbb{T} \to N \to G/\gamma_n(G) \to 1$$

и пытаемся доказать, что данное центральное расширение задает когомологический класс в соответствующем члене фильтрации Пасси–Штаммбаха. Для этого в соответствии с теоретико-групповыми свойствами группы G выбирается "хороший" набор представителей $G/\gamma_n(G)$ в N, задается соответствующий 2-коцикл и т.д. В случае удобных групп (скажем, нильпотентных класса 2, 2-порожденных и др.) выбор представителей делается естественным образом, откуда и следуют требуемые свойства размерных подгрупп. Так и работает метод Пасси. Используя именно этот метод, Пасси доказал, что $D_4(G) = \gamma_4(G)$ для любой p-группы G при $p \neq 2$. Некоторые гомологические результаты данной работы, к примеру, теоремы 3.1.1, 3.1.2, можно рассматривать как естественные обобщения классических результатов Пасси.

Обратимся теперь к гомотопическим аспектам теории нижних центральных и размерных рядов в группах. Под гомотопической алгеброй часто понимают *неабелево* обобщение гомологической алгебры. Современная гомотопическая алгебра начинается с работ по симплициальным категориям, производным функторам от неаддитивных функторов, модельным категориям и т.д. При этом *аксиоматическим* началом гомотопической алгебры, возможно, следует считать монографию Квиллена [5]. Одни из первых идей применять гомотопические методы в работе с рядами в группах принадлежат Столлингсу [6]. Он пишет следующее: "Рипс показал, что существует разница между размерными подгруппами и членами нижнего центрального ряда... Возникает вопрос, как увидеть это с помощью спектральной последовательности Кертиса, проводя рассмотрение хотя бы на уровне примера Рипса". Отчасти эта программа была реализована Шьегреном, учеником Столлингса. Именно используя спектральные последовательности типа Кертиса, Шьегрен показал, что для любого натурального ns существует конечнозначная функция $c(n)$ такая, что $D_n(G)^{c(n)} \subseteq \gamma_n(G)$ для любой группы G. Уже позже Хартли и Гупта избавились от языка спектральных последовательностей и представили чисто теоретико-групповое доказательство результата Шьегрена.

Что такое теория гомотопий? Следуя идеологии [5], мы можем ответить на данный вопрос следующим образом. Для абстрактной модельной категории с выделенными классами морфизмов, называемых слабыми эквивалентностями, расслоениями и корасслоениями, посредством обращения слабых эквивалентностей определяется локализация, называемая гомотопической категорией. Под (абстрактной) *теорией гомотопий* можем понимать жизнь внутри гомотопической категории. Как показано в [5], для гомотопических категорий естественным образом определяются такие понятия, как надстройки, конусы отображений, последовательности расслоений и корасслоений, спектральные последовательности – в общем все то, с чем привыкли работать в обычной теории гомотопий топологических пространств. Отметим, что можно обобщить класс категорий и рассматривать не модельные категории по Квиллену, а кофибрантные категории в смысле Бауэса [7], при этом основные гомотопические понятия также естественно возникнут и позволят создать абстрактную теорию, обобщающую обычную теорию гомотопий топологических пространств.

Пусть $\mathcal{C}$ – некоторая категория. Симплициальный объект X_* в $\mathcal{C}$ – это семейство объектов $\{X_i\}_{i\geqslant 0}$, $X_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, вместе с двумя семействами морфизмов

$$d_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_q, X_{q-1}), \quad s_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_q, X_{q+1}), \qquad 0 \leqslant i \leqslant q,$$

называемых *отображениями граней* и *вырождений*, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
d_i d_j &= d_{j-1} d_i, && i < j,\\
s_i s_j &= s_{j+1} s_i, && i \leqslant j,\\
d_i s_j &= s_{j-1} d_i, && i < j,\\
d_j s_j &= d_{j+1} s_j = \mathrm{id}, &&\\
d_i s_j &= s_j d_{i-1}, && i > j+1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Симплициальный морфизм $f\colon X_* \to Y_*$ – это семейство морфизмов

$$f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_i), \qquad i \geqslant 0,$$

согласованных с отображениями граней и вырождений. Категорию симплициальных объектов в $\mathcal{C}$ будем обозначать через $\mathcal{SC}$. Под симплициальной группой (соответственно кольцом, абелевой группой, топологическим пространством и т.д.) понимаем симплициальный объект в категории групп (соответственно в категории колец и т.д.). Для симплициальной группы G_* естественным образом определяются гомотопические группы $\pi_i(G_*)$, $i \geqslant 0$, являющиеся абелевыми группами при $i \geqslant 1$.

Как показано в [5], категория симплициальных групп (все необходимые определения см. в главе 1) естественным образом наделяется структурой замкнутой модельной категории. При этом слабыми эквивалентностями выбираются морфизмы симплициальных групп, индуцирующие изоморфизмы гомотопических групп, расслоениями – морфизмы, индуцирующие сюръекции комплексов Мура, а корасслоениями – ретракты свободных морфизмов. Инъективное отображение $f\colon X \to Z$ в категории симплициальных групп называется *свободным*, если для каждого q существуют подмножества $C_q \subset Z_q$ такие, что

(i) $\eta^* C_q \subset C_p$, когда $\eta\colon [q] \to [p]$ – сюръективное монотонное отображение;

(ii) $f_q + g_q\colon X_q \vee FC_q \to Z_q$ – изоморфизм для всех q (здесь $\vee$ – свободное произведение групп, FC_q –свободная группа, порожденная C_q, и $g_q\colon FC_q \to Z_q$ – расширение $C_q \subset Z_q$).

Формально корасслоения могут быть определены проще, исходя из свойств сопряженности, содержащихся в аксиомах модельных категорий [5]. Структура модельной категории может быть задана на симплициальных категориях над многими другими алгебраическими системами, например, над коммутативными алгебрами, ассоциативными алгебрами, алгебрами Ли, йордановыми алгебрами и т.д. Определение слабых эквивалентностей, расслоений и корасслоений практически дословно переносится на эти категории. В этих случаях проверка аксиом модельных категорий, как правило, представляет собой простое упражнение. Отметим, что доказательство факта существования структуры замкнутой модельной категории для симплициальных множеств – задача далеко не простая (именно этому доказательству посвящена последняя глава в книге [8]). Таким образом, существование алгебраических операций в наших категориях существенно облегчает построение соответствующих теорий гомотопий.

Пусть CW – категория CW-комплексов X с тривиальным 0-скелетом $X^0 = *$. Морфизмы в данной категории – непрерывные пунктированные отображения. Гомотопия $\simeq$ на множестве морфизмов определяет факторкатегорию $\mathsf{CW}/\simeq$, которая представляет собой обычную гомотопическую категорию из алгебраической топологии. Для $X, Y \in \mathsf{CW}$ пусть $[X, Y]$ обозначает множество гомотопических классов $X \to Y$ в $\mathsf{CW}/\simeq$. Пусть CW_r – полная подкатегория в CW, состоящая из CW-комплексов X с тривиальным $(r-1)$-скелетом. Кан (см., к примеру, [9]) построил функтор $G\colon \mathsf{CW}_{r+1} \to (\mathcal{S}\mathsf{Gr})_r$, индуцирующий эквивалентность гомотопических категорий

$$G\colon \mathsf{CW}_{r+1}/\simeq \xrightarrow{\sim} \mathsf{Ho}(\mathcal{S}\mathsf{Gr})_r, \qquad r \geqslant 0.$$

Данный функтор отправляет CW-комплекс X в *группу петель Кана* $G(X)$, которая является свободной симплициальной группой. Говоря неформально, эта эквивалентность позволяет перевести все явления классической теории гомотопий на язык теории групп. При этом результат подобного перевода может оказаться слишком сложным. Однако в ряде случаев теория гомотопий позволяет увидеть определенные свойства свободных групп, не видимые комбинаторно (примеры таких свойств, следующих из теоремы Нишиды о нильпотентности и описания кручения в гомотопических группах букета сфер, даны в главе 4).

Какое же отношение теория гомотопий может иметь к теории (обобщенных) размерных подгрупп и нижних центральных рядов в группах? Приведем два примера применения гомотопических методов: сначала в теории размерных подгрупп (конструкция из [10]), определяемых симметрическими произведениями, а затем и для классических размерных подгрупп. Для кольца S и двусторонних идеалов $I_1, \dots, I_n$ $(n \geqslant 2)$ в S рассмотрим их симметрическое произведение

$$(I_1 \cdots I_n)_S = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} I_{\sigma_1} \cdots I_{\sigma_n},$$

где Σ_n – n-я группа перестановок. К примеру, для $n = 2$ имеем $(I_1 I_2)_S = I_1 I_2 + I_2 I_1$. Отметим, что всегда имеет место включение идеалов

$$(I_1 \cdots I_n)_S \subseteq I_1 \cap \dots \cap I_n.$$

Пусть теперь F – свободная группа, $R_1, \dots, R_n$ – нормальные подгруппы в F. Рассмотрим двусторонние идеалы в целочисленном групповом кольце $\mathbb{Z}[F]$, определенные как $\mathbf{r}_i = (R_i - 1)\mathbb{Z}[F]$, $i = 1, \dots, n$. Возникает естественная задача: описать нормальную подгруппу в F, определяемую идеалом $(\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n)_S$, т.е. обобщенную размерную подгруппу

$$D(F; (\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n)_S) := F \cap (1 + (\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n)_S).$$

Рассмотрим симметрическое произведение нормальных подгрупп $R_1, \dots, R_n$, определенное как

$$[R_1, \dots, R_n]_S = \prod_{\sigma \in \Sigma_n} [\dots[R_{\sigma_1}, R_{\sigma_2}], \dots, R_{\sigma_n}].$$

Заметим, что

$$[R_1, \dots, R_n]_S \subseteq D(F; (\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n)_S).$$

Получаем естественное отображение

$$f_{F;R_1,\dots,R_n}\colon \frac{R_1 \cap \dots \cap R_n}{[R_1, \dots, R_n]_S} \to \frac{\mathbf{r}_1 \cap \dots \cap \mathbf{r}_n}{(\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n)_S},$$
$$f_{F;R_1,\dots,R_n}\colon g.[R_1, \dots, R_n]_S \mapsto g - 1 + (\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n)_S, \qquad g \in R_1 \cap \dots \cap R_n.$$

Оказывается, для некоторого выбора $F, R_1, \dots, R_n$, существует пространство X такое, что отображение $f_{F;R_1,\dots,R_n}$ представляет собой n-й гомоморфизм Гуревича:

$$\begin{tikzcd}
\frac{R_1\cap\dots\cap R_n}{[R_1,\dots,R_n]_S} \arrow[r, "f_{F;R_1,\dots,R_n}"] \arrow[d, equal] & \frac{\mathbf{r}_1\cap\dots\cap\mathbf{r}_n}{(\mathbf{r}_1\cdots\mathbf{r}_n)_S} \arrow[d, equal] \\
\pi_{n-1}(X) \arrow[r] & H_{n-1}(X)
\end{tikzcd} \tag{3}$$

(отметим, что в ряде случаев в качестве X можно выбрать пространство петель над гомотопическим копределом классифицирующих пространств факторгрупп $F/R_{i_1}\cdots R_{i_k}$ для разных наборов $\{i_1,\dots,i_k\}$ из $\{1,\dots,n\}$). В этом случае, фактор $D(F;(\mathbf{r}_1\cdots\mathbf{r}_n)_S)/[R_1,\dots,R_n]$ представляет собой в точности ядро гомоморфизма Гуревича, и мы можем использовать топологические методы для его описания. Детали данной конструкции приведены в 7.1. Там же показано, что для определенного выбора подгрупп изучаемый фактор оказывается изоморфен гомотопическим группам двумерной сферы.

Перейдем теперь к классическим размерным подгруппам. Пусть G – группа. Выберем свободную симплициальную резольвенту $G\colon F_\bullet \to G$. Фильтрация по нижнему центральному ряду $F_\bullet$ и по аугментационным степеням $\mathbb{Z}[F_\bullet]$ задает спектральные последовательности $E(G)$ и $\overline{E}(G)$ с начальными членами

$$E^1_{p,q}(G) = \pi_q(\gamma_p(F_\bullet)/\gamma_{p+1}(F_\bullet)), \qquad \overline{E}^1_{p,q}(G) = \pi_q(\Delta^p(F_\bullet)/\Delta^{p+1}(F_\bullet))$$

и естественным отображением $\kappa\colon E(G) \to \overline{E}(G)$, индуцированным каноническим вложением $F_\bullet \to \mathbb{Z}[F_\bullet]$, $f \mapsto f-1$. В данных обозначениях естественным образом получается следующее описание отображения из нижних центральных факторов в аугментационные факторы:

$$\begin{tikzcd}
\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Delta^n(G)/\Delta^{n+1}(G) \arrow[d, equal] \\
E^\infty_{n,0}(G) \arrow[r] & \overline{E}^\infty_{n,0}(G)
\end{tikzcd}$$

и размерные подгруппы снова связываются с ядрами гомоморфизмов Гуревича определенных пространств. Анализ дифференциалов и начальных членов данных спектральных последовательностей приводит к следующей диаграмме, состоящей из естественных эпиморфизмов и мономорфизмов:

$$\begin{tikzcd}
\ker(\kappa^2_{3,0}) \arrow[r, two heads] & D_4(G)/\gamma_4(G) \\
V_2(G) \arrow[u, two heads] \arrow[ur, two heads] \arrow[r, hook] & L_1SP^2(G_{ab})
\end{tikzcd} \tag{4}$$

здесь $L_1SP^2(G_{ab})$ – первый производный функтор в смысле Дольда–Пуппе от симметрического квадрата, примененный к абеленизации группы G, $V_2(G)$ – некоторый функтор, значения которого всегда являются 2-кручением (под $\kappa^k_{i,j}$ мы понимаем соответствующее отображение между членами спектральных последовательностей $E^k_{i,j}(G) \to \overline{E}^k_{i,j}(G)$). Ценность данной диаграммы не просто в том, что она абстрактно связывает размерный фактор $D_4(G)/\gamma_4(G)$ с "производным миром", а в том, что она указывает конкретное место этого сложного теоретико-группового явления внутри теории производных функторов. Для высших размерных подгрупп, т.е. для случая $n > 4$, ситуация оказывается куда более сложной. Определим функтор S_n в категории абелевых групп как

$$S_n(A) = \operatorname{coker}(\mathcal{L}^n(A) \to \otimes^n(A)),$$

где A – абелева группа, $\mathcal{L}^n$ – n-й лиев функтор. В данных обозначениях изучение дифференциалов спектральных последовательностей с неоднократными применениями леммы о змее приводит к следующей диаграмме, являющейся обобщением диаграммы (4):

$$
\begin{tikzcd}
\ker({}^1\kappa^1_{n,0}) \arrow[d] & & & \\
\ker(\kappa^2_{n,0}) \arrow[r] \arrow[dd] & \ker(\kappa^3_{n,0}) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \ker(\kappa^{n-1}_{n,0}) \arrow[d] \\
 & & V_{n-1}(G) \arrow[ull, dashed] \arrow[dl, hook] \arrow[d] & \frac{\gamma_n(G)\cap D_{n+1}(G)}{\gamma_{n+1}(G)} \arrow[dl] \\
\operatorname{coker}(\xi_{n-1}) \arrow[d] & L_1S_{n-1}(G_{ab}) \arrow[l, two heads] \arrow[dl] & \frac{\gamma_n(G)\cap D_{n+1}(G)}{\gamma_{n+1}(G).\mathrm{im}(\ker({}^1\kappa^1_{n,0}))} & \\
\operatorname{coker}({}^1\kappa^1_{n,0}) & & &
\end{tikzcd}
\qquad (5)
$$

Все обозначения отображений и функторов из этой диаграммы приведены в 5.2. Здесь L_1 – обозначает первый производный функтор в смысле Дольда–Пуппе [11]. Ядра $\ker(\kappa^i_{n,0})$, возникающие в данной диаграмме, имеют естественную теоретико-групповую интерпретацию и играют центральную роль в методах Шьегрена и Гупты.

Содержание работы. Глава 1 посвящена изучению свойств нильпотентной и разрешимой аппроксимируемости групп и скрещенных модулей. Основные объекты исследования первой главы – класс нильпотентно аппроксимируемых групп таких, что любое их центральное расширение также нильпотентно аппроксимируемо и класс разрешимо аппроксимируемых групп таких, что любое их абелево расширение разрешимо аппроксимируемо. Рассматриваемые методы изучения нильпотентной аппроксимируемости центральных расширений гомологические, в то время как для изучения свойств разрешимой аппроксимируемости абелевых расширений мы пользуемся теорией точных действий групп.

Мы начинаем 1.1 с изложения основных свойств фильтрации Дваера, играющей важную роль в теории центральных расширений групп. Далее мы показываем, что группа с одним соотношением нильпотентно аппроксимируема тогда и только тогда, когда нильпотентно аппроксимируемо любое ее k-центральное расширение (при $k = 1, 2$) (теорема 1.3.3). Используя свойства представления Гупты, мы строим конечно-представленную нильпотентно аппроксимируемую группу, имеющую не нильпотентно аппроксимируемое расширение, но обладающее нильпотентно аппроксимируемым свободным центральным расширением (теорема 1.3.5).

Мы также показываем (теорема 1.2.2), что существует конечно-представленная нильпотентно аппроксимируемая группа H такая, что для любого $k \geqslant 1$ и любого свободного копредставления $H = F/R$ группа $F/[R, {}_kF]$ не является нильпотентно аппроксимируемой. Для доказательства этого утверждения используется теория производных пределов. Производные пределы от обобщенной фильтации Дваера появляются в рассматриваемой теории естественно (см. следствие 1.2.1) и представляют собой еще один пример гомологических (или гомотопических) методов, позволяющих получать результаты в теории групп.

В 1.4 рассмотрены свойства групп, связанные с разрешимой аппроксимируемостью. Используя методы теории модулей над групповыми кольцами, мы приводим некоторые результаты о связи аппроксимационных свойств в группах с конечными нормальными подгруппами (теорема 1.4.1 и следствие 1.4.1), а также получаем метод построения конечно-порожденных разрешимо аппроксимируемых групп, для которых существуют не разрешимо аппроксимируемые абелевы расширения (теорема 1.4.2). Мы завершаем главу 1 некоторым обоснованием рассмотрения трансфинитных производных рядов в группах, приводя топологические приложения.

В главе 2 мы изучаем связь асферичности с аппроксимационными свойствами скрещенных модулей и cat^1-групп. Используя свойства гомологий и инвариантов Бэра скрещенных модулей, мы получаем следующее (следствие 2.1.1): пусть (M, ∂, F) – скрещенный модуль, для которого группа F свободная, $H_1(\mathrm{Coker}(\partial))$ свободная абелева и $H_2B(M, \partial, F) = 0$; тогда $\ker(\partial) = \gamma_\omega(F, M)$. Таким образом, в ряде случаев ядра скрещенных модулей совпадают с пересечением нижнего центрального ряда.

Мы показываем, что действие коядра на ядре проективного неасферичного модуля всегда является точным. Известная теорема Уайтхеда, по сути явившаяся отправной точкой в теории скрещенных модулей, утверждает, что для любого двумерного CW-комплекса K его фундаментальный скрещенный модуль

$$\partial\colon \pi_2(K, K^{(1)}) \to \pi_1(K^{(1)}) \tag{6}$$

($K^{(1)}$ – одномерный остов K) является свободным, а следовательно, проективным скрещенным модулем. Отсюда следует, что для любого неасферичного двумерного комплекса K стандартное действие $\pi_1(K)$ на $\pi_2(K)$ является точным. В случае когда комплекс X является доминируемым двумерным комплексом, фундаментальный скрещенный модуль (6) также является проективным. Поэтому точность действия $\pi_1(K)$ на $\pi_2(K)$ имеет место и в случае 2-доминируемости комплекса K. При этом сам модуль $\pi_2(K)$, естественно, не обязан быть $\mathbb{Z}[\pi_1(K)]$-точным. Например, в случае проективной плоскости $K = P^2$ элемент $1 + g$ аннулирует весь модуль $\pi_2(K) \simeq \mathbb{Z}$ (g – нетривиальный элемент в $\pi_1(K)$). Как следствие точности действия мы находим связь асферичности некоторых комплексов с разрешимой аппроксимируемостью их фундаментальных cat^1-групп (теорема 2.2.2): пусть K – двумерный комплекс, для которого K^+ асферичен; тогда следующие условия эквивалентны:

(i) $\pi_2(K, K^1) \rtimes \pi_1(K^1)$ разрешимо аппроксимируема (здесь K^1 – 1-мерный остов K);

(ii) K асферичен.

Здесь K^+ – плюс-конструкция Квиллена. При этом имеет место следующий результат Хаусмана [12]: плюс-конструкция подкомплекса асферичного двумерного комплекса асферична. Таким образом, теорема 2.2.2 дает еще одну теоретико-групповую переформулировку гипотезы асферичности Уайтхеда. Эквивалентность асферичности и разрешимой аппроксимируемости фундаментальной cat^1-группы также имеет место в случае двумерного комплекса, у которого первые гомологии без кручения, а вторые тривиальны (следствие 2.2.2). Помимо упомянутых результатов в главе 2 развивиты методы работы с нижними центральными рядами скрещенных модулей, которые приводят в том числе и к теоретико-групповым результатам.

Глава 3 посвящена обобщению гомологических методов Пасси на случай произвольных двусторонних идеалов в групповых кольцах. Вводится понятие когомологической согласованности идеалов в групповых кольцах и указывается связь данного понятия с обобщенными размерными подгруппами. Для любого $n \geqslant 1$ определяются классы гомоморфизмов $\mathfrak{P}_n$ такие, что квазимногообразие групп с тривиальной $(n+1)$-й размерной подгруппой оказывается классом локальных объектов в категории групп, заданных с помощью класса $\mathfrak{P}_n$ (предложение 3.2.4).

Главу 4 мы начинаем со слов Ильи Рипса: “Когда я взглянул на пятую размерную подгруппу, я увидел там бездну” в качестве эпиграфа. В качестве иллюстрации к данной цитате мы представляем диаграмму на рис. (5.4.1), описывающую связи пятой размерной подгруппы с производными функторами. Глава 4 посвящена комбинаторике размерных подгрупп. Мы строим группу с четырьмя порождающими и тремя соотношениями, не обладающую размерным свойством (пример 4.1.3): в группе

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1^4[x_4,x_3]^2[x_4,x_2]=1,\ x_2^{16}[x_4,x_3]^4[x_4,x_1]^{-1}=1,\ x_3^{64}[x_4,x_2]^{-4}[x_4,x_1]^{-2}=1\rangle$$

имеет место

$$[x_1, x_2^{32}][x_1, x_3^{64}][x_2, x_3^{128}] \in D_4 \setminus \gamma_4.$$

Отметим, что для любой 3-порожденной группы G имеет место свойство $D_4(G) = \gamma_4(G)$ (см. [13]). Мы показываем, что что для любой группы G, заданной копредставлением с двумя соотношениями, также выполняется свойство $D_4(G) = \gamma_4(G)$ (теорема 4.2.2). Таким образом, в некотором смысле пример 4.1.3 является минимальным примером группы G с $D_4(G) \neq \gamma_4(G)$.

Далее мы строим новые примеры групп без размерного свойства в произвольной размерности $\geqslant 4$ (пример 4.1.10): для каждого целого числа $n \geqslant 1$ существуют числа k, l, $k > l$, такие, что для группы $\mathfrak{G}_n$, заданной копредставлением[1]

$$\begin{aligned}\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid x_1^4\xi_1 = 1,\ x_2^{2^l}\xi_2 = 1,\ x_3^{2^k}\xi_3 = 1,&\\ [[x_5, {}_n x_4], x_1]^4[[x_5, {}_n x_4], x_3, x_3]^{2^{k-1}} = 1,\ \xi_1^{2^{k-2}}\xi_2^{2^{k-l+1}} = 1\rangle,&\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\xi_1 &= [[x_5, {}_n x_4], x_3]^2[[x_5, {}_n x_4], x_2][x_5, {}_{n+1} x_4]^2,\\ \xi_2 &= [[x_5, {}_n x_4], x_3]^{2^{l-2}}[[x_5, {}_n x_4], x_1]^{-1}[x_5, {}_{n+1} x_4]^2,\\ \xi_3 &= [[x_5, {}_n x_4], x_2]^{-2^{l-2}}[[x_5, {}_n x_4], x_1]^{-2},\end{aligned}$$

имеет место

$$w_n = [x_1, x_2^{2^{l+1}}][x_1, x_3^{2^k}][x_2, x_3^{2^{k+1}}] \in D_{4+n}(\mathfrak{G}_n) \setminus \gamma_{4+n}(\mathfrak{G}_n).$$

Затем мы строим 6-порожденную группу Γ со свойством $D_6(\Gamma) \nsubseteq \gamma_5(\Gamma)$ (пример 4.1.11):

$$\begin{aligned}\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \mid\ & x_1^8[x_4, x_6, x_3]^4[x_4, x_6, x_2],\ x_2^{64}[x_4, x_6, x_3]^{-16}[x_4, x_6, x_1]^{-1}[x_4, x_6, x_5]^{16},\\ & x_3^{2^k}[x_4, x_7, x_2]^{16}[x_4, x_6, x_1]^{-4},\ x_5^{1024}[x_4, x_6, x_2]^{16},\ [x_4, x_6, x_5]^{2048},\\ & [x_4, x_6, x_1]^{16},\ [x_4, x_6, x_2]^{128},\ [x_4, x_6, x_1, x_1][x_4, x_6, x_2, x_2]^{-8},\\ & [x_4, x_6, x_2, x_2]^{-8}[x_4, x_6, x_3, x_3]^{2^{k-3}}\rangle\end{aligned}$$

для $k \geqslant 13$. Также мы приводим доказательство теоремы Тахары о том, что $D_5(G)^6 \subseteq \gamma_5(G)$ для любой группы G. Приведенное доказательство в несколько раз короче оригинального.

В 4.4 мы приводим решение проблемы Плоткина из [14] (теорема 4.4.2), а именно, показываем, что квазимногообразие групп с тривиальной четвертой размерной подгруппой не является конечно базируемым. Данный результат показывает принципиальное различие между нижним центральным и размерным рядами. Далее мы строим примеры групп, не обладающих лиевым размерным свойством (теорема 4.5.2), более того, показываем, что для произвольного натурального числа s существуют число n и нильпотентная группа G класса n такие, что $D_{[n+s]}(G) \neq 1$.

Глава 5 посвящена гомотопическим методам в теории размерных подгрупп. Основные идеи предлагаемого подхода уже были приведены. К примеру, одним из основных результатов этой главы является существование канонической диаграммы (4). Глава 5 начинается с элементарного введения в теорию симплициальных групп, гомотопических модулей и т.д. В начале можно найти простейшие определения и классические утверждения, используемые в работе.

[1] Для элементов a, b, c группы мы используем обозначения $[a, {}_1 b] = [a, b]$, $[a, {}_n b] = [[a, {}_{n-1} b], b]$, $n > 1$, а также $[a, b, c] = [[a, b], c]$.

Как приложение гомотопических методов имеем следующее утверждение (теорема 5.4.1): пусть G – группа с
$$H_2(G)=0, \qquad L_1SP^2(G_{ab})=L_1S_3(G_{ab})=0;$$
тогда $D_5(G)=\gamma_5(G)$. Как технический результат, представляющий, однако, независимый интерес, мы показываем (теорема 5.2.2): если F – свободная группа и R – нормальная подгруппа в F, то

$$F\cap(1+\Delta(F)(R\cap[F,F]-1)+(R\cap[F,F]-1)\Delta(F)+\mathbf{r}(2)+\Delta(F)^4)=[R\cap[F,F],F]\gamma_4(F),$$

где
$$\mathfrak{r}(3)=\Delta^2(F)\mathfrak{r}+\Delta(F)\mathfrak{r}\Delta(F)+\mathfrak{r}\Delta(F)^2, \qquad \mathfrak{r}=(R-1)\mathbb{Z}[F].$$

Глава 6 посвящена дальнейшему описанию гомотопических аспектов теории групп. Пусть двумерный комплекс K представим как объединение трех подкомплексов,

$$K=K_1\cup K_2\cup K_3,$$

которые попарно пересекаются по 1-мерному остову K^1 комплекса K. Тогда существует естественный гомоморфизм $\pi_1(K)$-модулей

$$\pi_3(K)\to\frac{R_1\cap R_2\cap R_3}{[R_1,R_2\cap R_3][R_2,R_3\cap R_1][R_3,R_1\cap R_2]},$$

где
$$R_i=\ker\{\pi_1(K^1)\to\pi_1(K_i)\}, \qquad i=1,2,3.$$

В ряде случаев этот гомоморфизм является изоморфизмом. Таким образом, теоретико-групповая структура, у которой достаточно сложное описание, связывается с гомотопическим модулем, что позволяет применять методы теории гомотопий для получения теоретико-групповых результатов. Как одно из приложений данной конструкции приведен канонический гомоморфизм

$$H_4(F/R_1R_2R_3)\to\frac{R_1\cap R_2\cap R_3}{[R_1,R_2\cap R_3][R_2,R_3\cap R_1][R_3,R_1\cap R_2][F,R_1\cap R_2\cap R_3]}.$$

Отметим, что результаты главы 6 получили дальнейшее развитие в работах [15]–[17]. В 7.1 приведены результаты о размерных подгруппах, определяемых симметрическими произведениями идеалов в групповых кольцах. Приводится доказательство существования диаграммы (3) для некоторого выбора нормальных подгрупп. Таким образом, показано, как теория высших гомотопических групп (а в контексте 7.1 – теории гомотопических групп сфер) позволяет получать результаты из теории групповых колец.

Данная работа основана на докторской диссертации автора. Ряд результатов работы изложены в монографии [18], а также в других статьях автора.

Автор выражает глубокую благодарность И. Б. С. Пасси, Б. И. Плоткину и И. Рипсу за многолетнее общение и наставления.

Часть I
Аппроксимационные свойства

Глава 1. Нильпотентная аппроксимируемость групп

Для группы G обозначим через $\zeta_n(G)$ ее n-й центр:

$$\zeta_n(G) := \{g \in G \mid [\dots[[g, x_1], x_2], \dots, x_n] = 1 \text{ для всех } x_i \in G,\ i = 1, 2, \dots, n\}$$

для $n \geqslant 1$ и $\zeta_0(G) = 1$. Ряд $\{\zeta_n(G)\}_{n \geqslant 0}$ называется *верхним центральным рядом* группы G. Пусть

$$1 \to N \xrightarrow{i} \widetilde{G} \xrightarrow{\pi} G \to 1 \tag{1.0.1}$$

– короткая точная последовательность групп. Скажем, что $\widetilde{G}$ является *k-центральным расширением* группы G, $k \geqslant 1$, если образ $i(N)$ содержится в $\zeta_k(\widetilde{G})$. В частности, 1-центральные расширения – это центральные расширения.

Встает естественный вопрос о сохранении аппроксимационных свойств при переходе от группы к ее k-центральным расширениям. Этот вопрос оказывается нетривиальным уже при $k = 1$ – случае центральных расширений. Так, при $k = 1$ несложно построить нильпотентно аппроксимируемую группу $\widetilde{G}$ такую, что группа G не является нильпотентно аппроксимируемой, и наоборот.

Пример 1.0.1. Обозначим через A свободную абелеву группу бесконечного ранга с базисом $\{a_i\}_{i \geqslant 1}$, а через G_i – 2-порожденную свободную нильпотентную группу ступени нильпотентности $i + 1$ с порождающими x_i, y_i. Пусть $H = A \oplus \prod_{i \geqslant 1} G_i$. Обозначим $\beta_i := [x_{i,i}\, y_i]$, $i \geqslant 1$, и пусть R – центральная подгруппа в H, порожденная элементами

$$a_i a_{i+1}^{-1} \beta_i \beta_{i+1}^{-1}, \qquad i \geqslant 1.$$

Пусть $G = H/R$. Покажем сначала, что G является нильпотентно аппроксимируемой группой. Пусть R_1 – подгруппа в G, порожденная центральными элементами β_i, $i \geqslant 1$. Тогда G/R_1 есть прямое произведение нильпотентных групп и, следовательно, G/R_1 нильпотентно аппроксимируема. Таким образом, $\gamma_\omega(G) \subseteq R_1$. Пусть $x \in \gamma_\omega(G)$. Тогда x может быть представлено как

$$x = \beta_1^{k_1} \cdots \beta_n^{k_n} \tag{1.0.2}$$

для некоторого $n \geqslant 1$ и некоторых целых чисел k_i, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим группу

$$G(n) = \langle a_i, i = 1, \dots, n\rangle \oplus \prod_{i=1}^{n} G_i / \{a_i a_{i+1}^{-1} \beta_i \beta_{i+1}^{-1},\ i < n\}.$$

Тогда существует естественный эпиморфизм $G \to G(n)$, ядро которого есть подгруппа в G, порожденная элементами x_i, y_i, $i > n$. Если не все k_i тривиальны в (1.0.2), то образ элемента x нетривиален и в группе $G(n)$. Но группа $G(n)$ является нильпотентной ступени $n+1$. Таким образом, $x \notin \gamma_{n+1}(G)$ и группа G нильпотентно аппроксимируема. Однако, как легко видеть, группа G/A не является нильпотентно аппроксимируемой, а группа G/AR_1 снова является нильпотентно аппроксимируемой (см., например, пример 1 в [19]). Получаем необходимые утверждения для следующих центральных расширений:

$$1 \to A \to G \to G/A \to 1,$$
$$1 \to R_1A/A \to G/A \to G/R_1A \to 1: \qquad \gamma_\omega(G) = 1, \quad \gamma_\omega(G/A) \neq 1, \quad \gamma_\omega(G/R_1A) = 1.$$

Введем следующие обозначения. Пусть G – нильпотентно аппроксимируемая группа. Будем говорить, что G лежит в классе $\mathcal{J}_k$, $k \geqslant 1$, если для любого ее k-центрального расширения (1.0.1) группа $\widetilde{G}$ также является нильпотентно аппроксимируемой.

Для изучения нильпотентной аппроксимируемости k-центральных расширений будем использовать теорию инвариантов Бэра.

1.1. Инварианты Бэра

Пусть группа G представлена в виде свободного копредставления:

$$1 \to R \to F \to G \to 1. \tag{1.1.1}$$

Для группы G, заданной копредставлением (1.1.1), абелева группа

$$M^{(k)}(G) = \frac{R \cap \gamma_{k+1}(F)}{[R,_k F]} \tag{1.1.2}$$

не зависит от выбора свободного копредставления (1.1.1) для группы G и называется *k-м инвариантом Бэра*. В случае $k = 1$ $M^{(k)}(G)$ представляет собой мультипликатор группы G, т.е. $M^{(1)}(G) = H_2(G)$, и именно поэтому инварианты Бэра часто называют *обобщенными* (или *нильпотентными*) *мультипликаторами*.

Инварианты $M^{(k)}(G)$ задают ковариантные функторы (см. [20]):

$$M^{(k)} \colon \mathcal{G}r \to \mathcal{A}b,$$
$$M^{(k)} \colon G \mapsto M^{(k)}(G),$$

из категории $\mathcal{G}r$ групп в категорию $\mathcal{A}b$ абелевых групп. В работе [20] показано, что для $k \geqslant 1$ функторы $M^{(k)}$ являются первыми левыми производными функторами функторов

$$Z_k \colon \mathcal{G}r \to \mathcal{N}il_{k-1},$$
$$Z_k \colon G \mapsto G/\gamma_k(G)$$

из категории групп в категорию $\mathcal{N}il_{k-1}$ нильпотентных групп ступени $k-1$, т.е.

$$\mathcal{L}_1 Z_k(G) = M^{(k)}(G), \qquad k \geqslant 1.$$

Это проще всего увидеть, выписав для данного свободного копредставления (1.1.1) группы G либо резольвенту Чеха, либо нерв соответствующего скрещенного модуля и применив к ним функтор Z_k (см. [20], [21]). В целом вычисление инвариантов $M^{(k)}(G)$ для заданной группы G представляет собой нетривиальную задачу, значительно более сложную, чем вычисление мультипликатора. В отличие от классической гомологической теории в случае групп с одним определяющим соотношением описание их инвариантов Бэра оказывается непростой задачей. Так, например, для фундаментальной группы бутылки Клейна оказывается нетривиальным второй инвариант Бэра (см. замечание 1.3.3), несмотря на то, что мультипликатор этой группы тривиален.

Аналогом пятичленной последовательности Столлингса–Стаммбаха для инвариантов Бэра является последовательность, данная в следующей теореме, которая доказывается непосредственным применением представления (1.1.2).

Теорема 1.1.1 (см., например, [20]). *Пусть $k \geqslant 1$, G – группа и N – нормальная подгруппа в G. Тогда существует следующая точная последовательность групп*:

$$\mathcal{M}^{(k)}(G) \to M^{(k)}(G/N) \to N/[N,_k G] \to Z_{k+1}(G) \to Z_{k+1}(G/N) \to 1.$$

В частности, при $k \geqslant 1$, $n \geqslant k+1$ имеем точную последовательность абелевых групп

$$M^{(k)}(G) \to M^{(k)}(G/\gamma_n(G)) \to \gamma_n(G)/\gamma_{n+k}(G) \to 1. \tag{1.1.3}$$

Для каждого $k \geqslant 1$ и $m \geqslant k+1$ определим убывающую *обобщенную фильтрацию Дваера*

$$M_k(G) = \phi^{(k)}_{k+1}(G) \supseteq \phi^{(k)}_{k+2}(G) \supseteq \cdots$$

как

$$\phi^{(k)}_m(G) := \ker\{M^{(k)}(G) \to M^{(k)}(G/\gamma_{m-k}(G))\}.$$

При $k = 1$ это обычная фильтрация Дваера вторых гомологий группы [22]. Используя представления функторов Бэра (1.1.2), несложно показать, что члены обобщенной фильтрации Дваера могут быть представлены как

$$\phi^{(k)}_m(G) = \frac{(R \cap \gamma_m(F))[R,_k F]}{[R,_k F]} = \frac{R \cap \gamma_m(F)}{[R,_k F] \cap \gamma_m(F)}, \qquad k \geqslant 1, \quad m \geqslant k+1. \tag{1.1.4}$$

Из представления (1.1.4) элементарно следует

Замечание 1.1.1. Пусть $m \geqslant k+1 \geqslant l+2$. Тогда для любой нормальной подгруппы R свободной группы F существует короткая точная последовательность абелевых групп

$$0 \to \phi^{(l)}_m(F/[R,_{k-l} F]) \to \phi^{(k)}_m(F/R) \to \phi^{(k-l)}_m(F/R) \to 0.$$

Предложение 1.1.1. *Пусть $f\colon G \to H$ – гомоморфизм групп, индуцирующий изоморфизм $G/\gamma_k(G) \to H/\gamma_k(H)$ для некоторого $k \geqslant 1$. Тогда для любого $m \geqslant k+1$ следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *f индуцирует изоморфизм $M^{(k)}(G)/\phi^{(k)}_m(G) \to M^{(k)}(H)/\phi^{(k)}_m(H)$;*

(ii) *f индуцирует изоморфизм $f_m\colon G/\gamma_m(G) \to H/\gamma_m(H)$.*

Доказательство. Из теоремы 1.1.1 следует, что для любого $m \geqslant k+1$ существует следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M^{(k)}(G)/\phi^{(k)}_m(G) \arrow[r] \arrow[d] & M^{(k)}(G/\gamma_{m-k}(G)) \arrow[r] \arrow[d] & \gamma_{m-k}(G)/\gamma_m(G) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
0 \arrow[r] & M^{(k)}(H)/\phi^{(k)}_m(H) \arrow[r] & M^{(k)}(H/\gamma_{m-k}(H)) \arrow[r] & \gamma_{m-k}(H)/\gamma_m(H) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} \tag{1.1.5}$$

индуцированная гомоморфизмом f. Утверждение теоремы непосредственно доказывается индукцией по $m \geqslant k+1$ последовательным применением диаграммы (1.1.5).

Следующая теорема дает метод изучения k-центральных расширений с помощью обобщенной фильтрации Дваера.

Теорема 1.1.2. *Пусть*

$$1 \to N \to \widetilde{G} \xrightarrow{p} G \to 1 \tag{1.1.6}$$

– k-центральное расширение групп для некоторого $k \geqslant 1$. Тогда для каждого $m \geqslant k+1$ существует точная последовательность абелевых групп

$$\phi^{(k)}_m(\widetilde{G}) \xrightarrow{p^*} \phi^{(k)}_m(G) \xrightarrow{\beta} N \cap \gamma_m(\widetilde{G}) \to 1,$$

где гомоморфизм p^* индуцирован эпиморфизмом p.

Доказательство. Рассмотрим свободные копредставления групп из (1.1.6)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widetilde{G} \arrow[r, "p"] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & R/S \arrow[r] & F/S \arrow[r, "p"] & F/R \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

где F – свободная группа и

$$[F,_k R] \subseteq S. \tag{1.1.7}$$

Из представления (1.1.4) обобщенной фильтрации Дваера получаем, что гомоморфизм p^* можно представить как отображение

$$p^*\colon \frac{(S \cap \gamma_m(F))[F,_k S]}{[F,_k S]} \to \frac{(R \cap \gamma_m(F))[F,_k R]}{[F,_k R]},$$

индуцированное вложением $S \to R$. Коядро p^* естественно представимо как

$$\operatorname{coker}(p^*) \simeq \frac{(R \cap \gamma_m(F))[F,_k R]}{(S \cap \gamma_m(F))[F,_k R]}.$$

Определим гомоморфизм

$$f\colon \frac{(R \cap \gamma_m(F))[F,_k R]}{(S \cap \gamma_m(F))[F,_k R]} \to R/S \cap \gamma_m(F/S) = \frac{R \cap \gamma_m(F)S}{S} \simeq N \cap \gamma_m(\widetilde{G})$$

как

$$f\colon r(S \cap \gamma_i(F))[F,_k R] \mapsto rS, \qquad r \in R \cap \gamma_m(F).$$

Из условия k-центральности (1.1.7) непосредственно следует, что f является естественным изоморфизмом.

1.2. Нильпотентная аппроксимируемость k-центральных расширений

Следующее несложное наблюдение позволяет свести изучение нильпотентной аппроксимируемости свободных k-центральных расширений к изучению обобщенной фильтрации Дваера.

Предложение 1.2.1. *Пусть G – нильпотентно аппроксимируемая группа, заданная копредставлением* (1.1.1). *Тогда для любого $k \geqslant 1$ имеет место изоморфизм абелевых групп*

$$\gamma_\omega(F/[R,_k F]) \simeq \bigcap_{m \geqslant k+1} \phi_m^{(k)}(G).$$

Доказательство. Рассмотрим короткую точную последовательность групп

$$1 \to R/[R,_k F] \to F/[R,_k F] \to F/R \to 1.$$

Так как группа F/R нильпотентно аппроксимируема по условию, имеем

$$\gamma_\omega(F/[R,_k F]) \subseteq R/[R,_k F].$$

Также для любого $n \geqslant 1$ имеем включение

$$\gamma_\omega(F/[R,_k F]) \subseteq \gamma_n(F/[R,_k F]) = \frac{\gamma_n(F)[R,_k F]}{[R,_k F]}.$$

Используя представление (1.1.4) обобщенной фильтрации Дваера, заключаем, что

$$\gamma_\omega(F/[R,_k F]) \subseteq \bigcap_{m\geqslant k+1} \phi_m^{(k)}(G).$$

С другой стороны, представление (1.1.4) дает включение

$$\phi_m^{(k)}(G) \subseteq \gamma_m(F/[R,_k F]), \qquad k\geqslant 1, \quad m\geqslant k+1,$$

откуда следует, что для любого $k\geqslant 1$

$$\bigcap_{m\geqslant k+1} \phi_m^{(k)}(G) \subseteq \gamma_\omega(F/[R,_k F]).$$

Из предложения 1.2.1 немедленно следует, что для нильпотентно аппроксимируемой группы G нильпотентная аппроксимируемость группы $F/[R,_k F]$, $k\geqslant 1$, не зависит от выбора копредставления (1.1.1). Также несложно показать, что это верно не только для нильпотентно аппроксимирумых F/R: для любой группы G нильпотентная аппроксимируемость $F/[R,_k F]$ не зависит от выбора свободного копредставления $G=F/R$.

Теорема 1.1.2 дает возможность представить простые условия, при которых нильпотентная аппроксимируемость сохраняется при переходе к k-центральным расширениям.

Предложение 1.2.2. *Пусть G – группа и $\phi_m^{(k)}(G)=0$ для некоторых $k\geqslant 1$ и $m\geqslant k+1$. Тогда для любого k-центрального расширения*

$$1\to N\to \widetilde{G}\to G\to 1 \tag{1.2.1}$$

группа $\widetilde{G}$ нильпотентно аппроксимируема тогда и только тогда, когда нильпотентно аппроксимируема группа G.

Доказательство. По теореме 1.1.2, примененной к k-центральному расширению (1.2.1), имеем $N\cap\gamma_m(\widetilde{G})=0$, откуда следует, что для любого $l\geqslant m$ существует естественный изоморфизм $\gamma_l(\widetilde{G})=\gamma_l(G)$, из которого непосредственно вытекает требуемое утверждение.

Для дальнейших рассмотрений нильпотентной аппроксимируемоти мы будем использовать следующий результат Эллиса.

Теорема 1.2.1 [23]. *Если для некоторой группы G ее мультипликатор $H_2(G)$ состоит из элементов конечного порядка, то для любого $k\geqslant 1$ абелева группа $M^{(k)}(G)$ также состоит из элементов конечного порядка.*

В частности, если G – конечно представленная группа и ее мультипликатор $H_2(G)$ конечен, то и все инварианты Бэра $M^{(k)}(G)$ тоже конечны. Эта теорема может быть доказана с помощью симплициальных техник, а именно как следствие свойств спектральной последовательности Кертиса, построенной по нижней центральной фильтрации симплициальной группы. Теперь элементарно доказывается следующее.

Предложение 1.2.3. *Пусть G – конечно представленная группа и $H_2(G)$ конечна. Тогда для любого $k\geqslant 1$ и k-центрального расширения*

$$1\to N\to \widetilde{G}\to G\to 1$$

из нильпотентной аппроксимируемости группы $\widetilde{G}$ следует нильпотентная аппроксимируемость G.

Доказательство. Перейдем к обратному пределу последовательностей

$$1 \to N \cap \gamma_n(\widetilde{G}) \to \gamma_n(\widetilde{G}) \to \gamma_n(G) \to 1, \qquad n \geqslant 2.$$

Получаем вложение

$$\gamma_\omega(G) \to \varprojlim_n{}^1 (N \cap \gamma_n(\widetilde{G})). \tag{1.2.2}$$

Но ввиду того, что G конечно представлена и $H_2(G)$ конечна, $M^{(n)}(G)$ также конечны при всех $n \geqslant 1$ по теореме 1.2.1. По теореме 1.1.2 $N \cap \gamma_n(\widetilde{G})$, $n \geqslant k+1$, также конечны и поэтому $\varprojlim^1$ тривиален в (1.2.2), и мы имеем требуемое утверждение.

Следствие 1.2.1. *Пусть G – нильпотентно аппроксимируемая группа и*

$$1 \to N \to \widetilde{G} \to G \to 1 \tag{1.2.3}$$

– k-центральное расширение с $\gamma_\omega(\widetilde{G}) \neq 1$ и $\varprojlim^1 \phi_m^{(k)}(\widetilde{G}) = 0$. Тогда $\bigcap_{m \geqslant k+1} \phi_m^{(k)}(G) \neq 0$.

Доказательство. По теореме 1.1.2 для любого $m \geqslant k+1$ существует следующая точная последовательность:

$$\phi_m^{(k)}(\widetilde{G}) \xrightarrow{t_m} \phi_m^{(k)}(G) \to N \cap \gamma_m(\widetilde{G}) \to 1. \tag{1.2.4}$$

Переходя к обратным пределам, получаем точную последовательность

$$0 \to \bigcap_{m \geqslant k+1} \operatorname{im}(t_m) \to \bigcap_{m \geqslant k+1} \phi_m^{(k)}(G) \to N \cap \gamma_\omega(\widetilde{G}) \to \varprojlim{}^1 \operatorname{im}(t_m). \tag{1.2.5}$$

Эпиморфизм $\phi_m^{(k)}(\widetilde{G}) \to \operatorname{im}(t_m)$ индуцирует эпиморфизм производных пределов

$$\varprojlim{}^1 \phi_m^{(k)}(\widetilde{G}) \to \varprojlim{}^1 \operatorname{im}(t_m),$$

поэтому ввиду условия получаем $\varprojlim^1 \operatorname{im}(t_m) = 0$. Так как $N \cap \gamma_\omega(\widetilde{G}) \neq 0$, из (1.2.5) заключаем, что $\bigcap_{m \geqslant k+1} \phi_m^{(k)}(G) \neq 0$.

Предложение 1.2.4. *Пусть G – конечно представленная группа с $\gamma_\omega(G) \neq \gamma_{\omega+1}(G)$ и $H_2(G)$ конечна. Тогда для любого $k \geqslant 1$ и свободного копредставления*

$$1 \to R \to F \to G/\gamma_\omega(G) \to 1$$

группа $\Pi_k := F/[R,_k F]$ не является нильпотентно аппроксимируемой. Если при этом $H_2(F/R)$ конечна, что для любого свободного копредставления

$$1 \to S \to E \to \Pi_k/\gamma_\omega(\Pi_k) \to 1$$

группа $E/[S,_l E]$ не является нильпотентно аппроксимируемой при $1 \leqslant l \leqslant k$.

Доказательство. Пусть $H = G/\gamma_{\omega+k}(G)$. Эпиморфизм $f\colon G \to H$ индуцирует изоморфизмы $f_n\colon G/\gamma_n(G) \to H/\gamma_n(H)$. Следовательно, по предложению 1.1.1 имеем изоморфизмы

$$M^{(k)}(G)/\phi_m^{(k)}(G) \simeq M^{(k)}(H)/\phi_m^{(k)}(H), \qquad m \geqslant 2k. \tag{1.2.6}$$

Но по условию $H_2(G)$ конечна, поэтому по теореме 1.2.1 $M^{(k)}(G)$ также конечна. Поэтому для любого $k \geqslant 1$ фильтрация $\phi_m^{(k)}(G)$ стабилизируется начиная с некоторого шага:

$$\phi_{m_k}^{(k)}(G) = \phi_{m_k+1}^{(k)}(G).$$

Изоморфизм (1.2.6) влечет стабилизацию обобщенной фильтрации Дваера группы H:

$$\phi^{(k)}_{m_k}(H) = \phi^{(k)}_{m_k+1}(H). \tag{1.2.7}$$

Рассмотрим теперь k-центральное расширение

$$1 \to \gamma_\omega(G)/\gamma_{\omega+k}(G) \to H \to G/\gamma_\omega(G) \to 1, \tag{1.2.8}$$

по условию имеющее нетривиальное ядро. Стабилизация (1.2.7) дает условие

$$\varprojlim{}^1 \phi^{(k)}_m(H) = \varprojlim{}^1 \phi^{(k)}_{m_k}(H) = 0,$$

поэтому к k-центральному расширению (1.2.8) применимо следствие 1.2.1. Получаем, что

$$\bigcap_{m\geqslant k+1} \phi^{(k)}_m(G/\gamma_\omega(G)) \neq 0$$

и Π_k не является нильпотентно аппроксимируемой ввиду предложения 1.2.1.

Предположим теперь, что $H_2(G)$ конечна. Рассмотрим эпиморфизмы

$$\pi_l \colon \Pi_k \to R_l := \Pi_k/\gamma_{\omega+l}, \qquad l = 1, \dots, k.$$

Так как π_l индуцирует изоморфизмы факторов по конечным членам нижнего центрального ряда, по предложению 1.1.1 имеем изоморфизмы

$$M^{(l)}(\Pi_k)/\phi^{(l)}_m(\Pi_k) \simeq M^{(l)}(R_l)/\phi^{(l)}_m(R_l), \qquad m \geqslant l+1. \tag{1.2.9}$$

Замечание 1.1.1 дает вложение

$$\phi^{(l)}_m(\Pi_k) \subseteq \phi^{(l+k)}_m(F/R), \qquad l \geqslant 1.$$

Так как по предположению $H_2(F/R)$ конечна, то по теореме 1.2.1 $M^{(l+k)}(F/R)$, а следовательно, и $\phi^{(l)}_m(\Pi_k)$ конечны для любого $l \geqslant 1$. Таким образом, для любого $1 \leqslant l \leqslant k$ $\phi^{(l)}_m(\Pi_k)$ стабилизируется начиная с некоторого конечного шага. Поэтому из (1.2.9) следует, что $\phi^{(l)}_m(R_k)$ тоже стабилизируется начиная с некоторого конечного шага и, следовательно,

$$\varprojlim{}^1 \phi^{(l)}_m(R_l) = 0, \qquad 1 \leqslant l \leqslant k. \tag{1.2.10}$$

Рассмотрим теперь l-центральное расширение

$$1 \to \gamma_\omega(\Pi_k)/\gamma_{\omega+l}(\Pi_k) \to R_l \to \Pi_k/\gamma_\omega(\Pi_k) \to 1. \tag{1.2.11}$$

Так как F/R нильпотентно аппроксимируема, $\gamma_{\omega+k}(\Pi_k) = 1$; следовательно, из того, что группа Π_k не является нильпотентно аппроксимируемой, следует, что $\gamma_\omega(R_l) \neq \gamma_{\omega+1}(R_l)$. Тогда условие (1.2.10) влечет $\bigcap_{m\geqslant l+1} \phi^{(l)}_m(\Pi_k/\gamma_\omega(\Pi_k)) \neq 0$ ввиду следствия 1.2.1, примененного к расширению (1.2.11). Требуемое утверждение теперь следует из предложения 1.2.1.

Теорема 1.2.2. *Существует конечно представленная нильпотентно аппроксимируемая группа H такая, что для любого $k \geqslant 1$ и любого свободного копредставления*

$$1 \to R \to F \to H \to 1$$

группа $F/[R,_k F]$ не является нильпотентно аппроксимируемой.

Доказательство. Рассмотрим свободное произведение группы бутылки Клейна и циклической группы порядка 3

$$G = \langle a, b, c \mid aba^{-1}b = c^3 = 1\rangle.$$

В [24] показано, что $\gamma_\omega(G) = \langle [b,c]\rangle^G \neq \gamma_{\omega+1}(G)$. Так как гомологии свободного произведения групп равны прямой сумме гомологий слагаемых, имеем $H_2(G) = 0$. Таким образом, к группе G применимо предложение 1.2.4, в результате которого получаем требуемое утверждение для группы

$$H := G/\gamma_\omega(G) = \langle a, b, c \mid aba^{-1}b = c^3 = [b,c] = 1\rangle,$$

являющейся HNN-расширением абелевой группы $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$.

Замечание 1.2.1. Для любого $k \geqslant 1$ группы $\Pi_k := F/[R,_k F]$ из теоремы 1.2.2 являются конечно представленными трансфинитно нильпотентными, но не нильпотентно аппроксимируемыми группами. Из последовательности Майера–Виеториса для HNN-расширений групп непосредственно следует, что $H_2(H) \simeq \mathbb{Z}_3$; таким образом, по предложению 1.2.4 для любого $1 \leqslant l \leqslant k$ и любого свободного копредставления

$$1 \to S \to E \to \Pi_k/\gamma_\omega(\Pi_k) \to 1$$

группа $E/[S,_l E]$ не является нильпотентно аппроксимируемой.

Напомним, что группа G называется *парасвободной*, если она нильпотентно аппроксимируема и существует гомоморфизм $f\colon F \to G$, где F – свободная группа, такой, что индуцированные гомоморфизмы $f_n\colon F/\gamma_n(F) \to G/\gamma_n(G)$ являются изоморфизмами. Так как все инварианты Бэра свободных групп тривиальны, получаем следующее.

Замечание 1.2.2. Пусть G – парасвободная группа. Тогда для любого $n \geqslant 1$ и любого свободного копредставления $G = F/R$ имеем $M^{(n)}(G) \simeq \gamma_\omega(F/[R,_k F])$.

Доказательство. Пусть $\{g_i\}_{i\in I}$ – элементы из G такие, что $\{g_i\gamma_2(G)\}_{i\in I}$ есть базис свободной абелевой группы $G/\gamma_{c+1}(G)$. Рассмотрим гомоморфизм $f\colon F \to G$, где F – свободная группа с базисом $\{f_i\}_{i\in I}$, заданным $f_i \mapsto g_i$, $i \in I$. Тогда f индуцирует изоморфизм $F/\gamma_n(F) \simeq G/\gamma_n(G)$ для всех $n \geqslant 1$. По предложению 1.1.1 f индуцирует эпиморфизм (нулевой)

$$M^{(n)}(F)/\phi_k^{(n)}(F) \to M^{(n)}(G)/\phi_k^{(c)}(G), \qquad k \geqslant n+1,$$

т.е. для любого $n \geqslant 1$ имеет место изоморфизм

$$M^{(n)}(G) = \bigcap_{k\geqslant n+1} \phi_k^{(n)}(G),$$

и требуемое утверждение следует из предложения 1.2.1.

Следствие 1.2.2. *Существует парасвободная группа G такая, что для любого ее свободного копредставления $F/R = G$ и любого $k \geqslant 1$ группа $F/[R,_k F]$ не является нильпотентно аппроксимируемой.*

Доказательство. В качестве G возьмем нильпотентное пополнение свободной группы ранга 2: $G = \varprojlim_n F/\gamma_n(F)$. Группа G является парасвободной [25] и ее мультипликатор $H_2(G)$ континуален [26]. Требуемое утверждение следует из замечания 1.2.2.

1.3. Группы с одним определяющим соотношением

Обобщенное вложение Магнуса. Для анализа обобщенной фильтрации Дваера групп с одним определяющим соотношением будем использовать обощенное вложение Магнуса, с описания которого и начнем.

Пусть F – свободная группа с базисом X. Для данного $m \geqslant 2$ обозначим через Ω_m кольцо полиномов $\mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X)]$ от независимых коммутирующих переменных $\lambda_{i,i+1}(x)$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, $x \in X$.

Определим отображение целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}[F]$ свободной группы F в матрицы $m \times m$:

$$\mu_m \colon \mathbb{Z}[F] \to \begin{pmatrix} 1 & \Omega_m & \dots & \Omega_m \\ 0 & 1 & \dots & \Omega_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

задавая μ_m на базисе X как

$$\mu_m \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{12}(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_{23}(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_{m-1,m}(x) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x \in X,$$

отображая единицу в единичную матрицу и распространяя определение отображения на F мультипликативно, т.е.

$$\mu_m(gh) = \mu_m(g)\mu(h), \quad \mu_m(g^{-1}) = \mu_m(g)^{-1}, \qquad g, h \in F,$$

и на групповое кольцо $\mathbb{Z}[F]$ линейно. Заданный таким образом гомоморфизм μ_m является частным случаем обобщенного отображения Магнуса [13] и в рассмотренном нами случае имеет ядро, в точности совпадающее с m-й степенью аугментационного идеала $\Delta(F)$ группового кольца $\mathbb{Z}[F]$, т.е.

$$\ker(\mu_m) = \Delta^m(F), \qquad m \geqslant 1. \tag{1.3.1}$$

При $m = 2$ получаем простейший случай классического вложения Магнуса группового кольца свободной абелевой группы в унитреугольные матрицы 2×2.

Рассмотрим мультипликативную подгруппу в вышеописанных $m \times m$ матрицах, порожденную элементами $\mu_m(x)$, $x \in X$. Из (1.3.1) следует, что эта подгруппа изоморфна $F/\gamma_m(F)$:

$$F/\gamma_m(F) = \langle \mu_m(f), f \in F \rangle.$$

Таким образом, получается матричное представление свободной нильпотентной группы $F/\gamma_m(F)$.

Замечание 1.3.1. Для $m \geqslant 3$ подкопредставление μ_m в $(m-1) \times (m-1)$ матрицы, получаемое из μ_m удалением первой строки и первого столбца (или m-й строки и m-го столбца), совпадает с представлением μ_{m-1}, где в качестве Ω_{m-1} рассмотрено кольцо $\mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X)]$, $i = 2, \dots, m-1$ (соответственно $\mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X)]$, $i = 1, \dots, m-2$).

Лемма 1.3.1. *Пусть $m \geqslant 3$ и*

$$\mu_m(f) = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1,m+2} \\ 0 & 1 & b_{23} & \dots & b_{2,m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

для некоторого $f \in F$. *Тогда*

$$\mu_m((f-1)^{m-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_{12}\cdots b_{m,m+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство получается индукцией по m, с использованием замечания 1.3.1.

Следующий результат принадлежит Магнусу [27]. Мы приводим его с доказательством для демонстрации того, как работает метод вложения Магнуса при решении теоретико-групповых задач.

Предложение 1.3.1 [27]. *Пусть для некоторого* $m \geqslant 1$

$$u \in \gamma_m(F) \setminus \gamma_{m+1}(F) \tag{1.3.2}$$

и $f \in F$ *– такой элемент, что*

$$[u,f] \in \gamma_{m+2}(F). \tag{1.3.3}$$

Тогда:

(i) *если* $m \geqslant 2$, *то* $f \in \gamma_2(F)$;

(ii) *если* $m = 1$, *то* $u = f^k d$, *где* $k \in \mathbb{Z}$, $d \in \gamma_2(F)$.

Доказательство. Рассмотрим теперь образы элементов u и f при обобщенном отображении Магнуса:

$$\mu_{m+2}\colon u \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1,m+1} & a_{1,m+2} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2,m+2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mu_{m+k_0+1}\colon f_{k_0} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1,m+2} \\ 0 & 1 & b_{23} & \dots & b_{2,m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Из того, что $\ker(\mu_{m+2}) = \gamma_{m+2}(F)$, следует, что условие (1.3.3) эквивалентно тому, что

$$\mu_{m+2}(u)\mu_{m+2}(f_{k_0}) = \mu_{m+2}(f_{k_0})\mu_{m+2}(u).$$

Непосредственно перемножая матрицы и сравнивая элементы полученных произведений, стоящих в правом верхнем углу, т.е. элементы с номерами $(1, m+2)$, получаем, что условие (1.3.3) эквивалентно следующему:

$$b_{12}a_{2,m+2} = a_{1,m+2}b_{m+1,m+2}. \tag{1.3.4}$$

Предположение $u \notin \gamma_{m+1}(F)$, $f \notin \gamma_2(F)$ эквивалентно тому, что

$$b_{12} \neq 0, \qquad b_{m+1,2} \neq 0, \qquad a_{2,m+2} \neq 0, \qquad a_{1,m+1} \neq 0.$$

Для любого $i = 1, \dots, m+1$ имеем $b_{i,i+1} \in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X)]$. Так как элементы $\lambda_{12}(X)$ не входят в разложение $a_{2,m+2}$ и элементы $\lambda_{m+1,m+2}(X)$ не входят в разложение $a_{1,m+1}$ (по замечанию 1.3.1), получаем, что существует $z \in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X)]$, $i = 2, \dots, m$, такое, что

$$a_{2,m+2} = b_{m+1,m+2}z, \qquad a_{1,m+1} = b_{12}z. \tag{1.3.5}$$

Ввиду замечания 1.3.1 получаем, что подпредставления mu_{m+2}, получаемые посредством удаления первых и последних строк и столбцов, изоморфны и изоморфизм определяется отображением

$$\lambda_{i,i+1}(x) \to \lambda_{i+1,i+2}(x), \qquad x \in X, \quad i = 1, \dots, m-2.$$

Таким образом, если $a_{1,m+1}$ записывается как некоторый полином

$$a_{1,m+1} = F(\lambda_{1,2}(X), \dots, \lambda_{m,m+1}(X)), \qquad i = 1, \dots, m-2,$$

то элемент $a_{2,m+2}$ является полиномом того же самого вида, только от других координат, т.е.

$$a_{2,m+2} = F(\lambda_{2,3}(X), \dots, \lambda_{m+1,m+2}(X)).$$

Тогда из (1.3.5) следует, что

$$z = b_{23}z_1, \quad z_1 \in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}], \qquad i = 3, \dots, m.$$

Применяя этот же аргумент m раз, получаем

$$a_{1,m+1} = C \cdot b_{12}b_{23} \cdots b_{m,m+1}, \tag{1.3.6}$$
$$a_{2,m+1} = C \cdot b_{23} \cdots b_{m,m+1}b_{m+1,m+2}, \tag{1.3.7}$$

$C \in \mathbb{Z}$. По лемме 1.3.1 и замечанию 1.3.1 получаем, что элемент $(\mu_{m+2}(f)-1)^m$ представляется матрицей вида

$$(\mu_{m+2}(f)-1)^m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_{12}\cdots b_{m,m+1} & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{23}\cdots b_{m+1,m+2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что матрица

$$B := \mu_{m+2}(u) - 1 - C \cdot (\mu_{m+2}(f)-1)^m \tag{1.3.8}$$

состоит из нуневых элементов, кроме, возможно, единственного элемента с координатами $(1, m+2)$:

$$B = \mu_{m+2}(u - 1 - C(f-1)^m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для некоторого $\alpha \in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X)]$. Из (1.3.1) следует, что

$$u - 1 - C(f-1)^m \in \Delta^{m+1}(F). \tag{1.3.9}$$

Рассмотрим сначала случай (i): $u \in \gamma_m(F) \setminus \gamma_{m+1}(F)$, $m \geqslant 2$. В (1.3.9) сделаем переход по модулю $\gamma_2(F)$. Так как $u \in \gamma_2(F)$, имеем

$$C(f\gamma_2(F) - 1)^m \in \Delta^{m+1}(F/\gamma_2(F)).$$

Откуда заключаем, что $f \in \gamma_2(F)$.

Рассмотрим теперь случай (ii): $m = 1$, $u \notin \gamma_2(F)$. Тогда (1.3.9) примет вид

$$uf^{-C} - 1 \in \Delta^2(F),$$

откуда получаем, что $u = f^k d$, $d \in \gamma_2(F)$, $k = C$.

Обобщенная фильтрация Дваера групп с одним определяющим соотношением.

Теорема 1.3.1. *Пусть r – элемент в свободной группе F, обозначим через R нормальное замыкание r в F. Тогда для для $k = 1, 2$ существует $m \geqslant 1$ (зависящее от k и r) такое, что $\phi^{(k)}_{k+m}(F/R) = 0$.*

Доказательство. Будем использовать индукцию по k. Рассмотрим сначала случай $k = 1$ (см. [28]). Число m определяется как такое $m \geqslant 1$, что

$$r \in \gamma_m(F) \setminus \gamma_{m+1}(F).$$

Группа $R/[R, F]$ является бесконечной циклической группой. Для $m = 1$ утверждение является известным элементарным фактом. Действительно, в этом случае имеем короткую точную последовательность

$$0 \to H_2(F/R) \to \mathbb{Z} \to R\gamma_2(F)/\gamma_2(F) \to 1.$$

Но $F/\gamma_2(F)$ не имеет кручения, поэтому из условия $r \notin \gamma_2(F)$ следует, что $R\gamma_2(F)/\gamma_2(F)$ является бесконечной циклической группой и, значит, $H_2(F/R) = 0$. Для произвольного $m \geqslant 2$ имеем $H_2(F/R) = R/[F, R] \simeq \mathbb{Z}$ и мы получаем следующую точную последовательность абелевых групп:

$$0 \to \phi^{(1)}_{m+1}(F/R) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{h} \gamma_m(F)/\gamma_{m+1}(F),$$

где гомоморфизм h индуцирован включением $r \in \gamma_m(F)$. Абелева группа $\gamma_m(F)/\gamma_{m+1}(F)$ не имеет кручения, откуда заключаем, что

$$\phi^{(1)}_{m+1}(F/R) = 0. \tag{1.3.10}$$

Рассмотрим теперь случай $k = 2$. Пусть $r \in \gamma_l(F)\setminus\gamma_{l+1}(F)$, $l \geqslant 1$. Тогда по уже доказанному случаю $k = 1$ из (1.3.10) заключаем, что $\phi^{(1)}_{l+1}(F/R) = 0$, т.е.

$$R \cap \gamma_{l+1}(F) = [R, F] \cap \gamma_{l+1}(F). \tag{1.3.11}$$

Любой элемент из $[R, F]/[R, F, F]$ может быть представлен в виде $[r, f][R, F, F]$ для некоторого $f \in F$. Поэтому из (1.3.11) следует, что для любого $m \geqslant l$ из того, что $\phi^{(2)}_{m+2}(F/R) \neq 0$, следует, что существует $f \in F$ такое, что

$$[r, f] \in \gamma_{m+2}(F),\ \ [r, f] \notin [R, F, F]. \tag{1.3.12}$$

Так как для любого $f \in \gamma_2(F)$ имеем $[r, f] \in [R, F, F]$, из (1.3.12) следует, что

$$f \notin \gamma_2(F). \tag{1.3.13}$$

Если $l \geqslant 2$, то из случая (i) предложения 1.3.1 следует, что при $m > l$ условие (1.3.12) влечет $f \in \gamma_2(F)$, поэтому ввиду (1.3.13) получаем, что $\phi^{(2)}_{l+2}(F/R) = 0$.

Пусть теперь $r \notin \gamma_2(F)$. Если существует такое $f \in F \setminus \gamma_2(F)$, что $[r, f] \in \gamma_3(F)$, то по случаю (ii) предложения 1.3.1 должно выполняться условие

$$r = f^k d, \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad d \in \gamma_2(F). \tag{1.3.14}$$

Если $k = \pm 1$, получаем $[r, f] = [r, r^{\pm 1} d] \in [R, F, F]$, что противоречит требованию. Таким образом, получаем $k \neq -1, 0, 1$ и, следовательно, $F/R\gamma_2(F)$ имеет кручение. Кручение в $F/R\gamma_2(F)$ есть циклическая группа порядка, скажем, $N > 1$, образующую которой обозначим через $wR\gamma_2(F)$, $w \in F$. Таким образом,

$$r = w^N y, \qquad y \in \gamma_2(F).$$

Тогда для любого представления (1.3.14) имеем $f = w^{N_0} d_0$ для некоторого $N_0 > 1$, $d_0 \in \gamma_2(F)$. Значит,
$$[r, f] = [r, w^{N_0} d_0] \equiv [r, w^{N_0}] \equiv [w^N y, w^{N_0}] \,\mathrm{mod}[R, F, F].$$
Обозначим через $q \geqslant 2$ такое число, что выполняется
$$y \in \gamma_q(F) \setminus \gamma_{q+1}(F).$$
Но тогда по предложению 1.3.1 (случай (i)) имеем, что $[y, w^{N_0}] \in \gamma_{q+2}(F)$ влечет $w^{N_0} \in \gamma_2(F)$, а это невозможно по построению. Отсюда следует, что (1.3.12) влечет $m < q$, и поэтому получаем
$$\phi^{(2)}_{q+2}(F/R) = 0. \tag{1.3.15}$$

Замечание 1.3.2. Из доказательства теоремы 1.1.2 видно, что если элемент $r \in F$ такой, что $F/R\gamma_2(F)$ не имеет кручения, то для числа m: $r \in \gamma_m(F) \setminus \gamma_{m+1}(F)$ и $k = 1, 2$ имеем $\phi^{(k)}_{m+k}(F/R) = 0$.

Следующее замечание показывает, что условие на отсутствие кручения в абелианизации является существенным.

Замечание 1.3.3. Пусть $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b = 1\rangle$. Тогда $M^{(2)}(G) \neq 0$.

Доказательство. Перепишем определяющее слово как $r = b^2[b, a]$ и обозначим через F свободную группу с базисом $\{a, b\}$ и через R – нормальное замыкание r в F. Тогда, очевидно, имеем $[r, b] \in R \cap \gamma_3(F)$. Предположим, что $[r, b] \in [R, F, F]$. Тогда
$$[b, a, b] \in [R, F, F] \subseteq \langle b^2, \gamma_4(F)\rangle^4.$$
Проводя аналогичное построение с заменой букв a и b, заключаем, что $[a, b, a] \in \langle a^2, \gamma_4(F)\rangle^F$. Но это значит, что в группе $H = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1\rangle$ элементы $[a, b, a]$ и $[b, a, b]$ лежат в 4-м члене нижнего центрального ряда. Однако эти элементы порождают $\gamma_3(H)$, откуда получаем, что $\gamma_3(H) = \gamma_4(H)$. Но это не верно, так как H является нильпотентно аппроксимируемой не нильпотентной группой. Отсюда заключаем, что $[b, a, b] \notin [R, F, F]$ и $M^{(2)}(G) \neq 0$.

Лемма 1.3.2. *Пусть*
$$1 \to N \to \widetilde{G} \xrightarrow{\pi} G \to 1$$
– некоторое k-центральное расширение $k \geqslant 1$. Тогда $[\pi^{-1}(\gamma_\omega(G)), {}_k\widetilde{G}] \subseteq \gamma_\omega(\widetilde{G})$.

Доказательство. Пусть $x \in \gamma_\omega(G)$ и $g \in \widetilde{G}$ такой, что $\pi(g) = x$. Тогда для всех $m \geqslant 1$ можем записать
$$g = f_m r_m \quad \text{для некоторого} \quad f_m \in \gamma_m(\widetilde{G}), \qquad r_m \in N.$$
Условие k-центральности $[N, {}_k\widetilde{G}] = 1$ влечет, что для любых $g_1, \ldots, g_k$ в $\widetilde{G}$ и $m \geqslant 1$ имеем
$$[f_m r_m, g_1, \ldots, g_k] \in \gamma_m(\widetilde{G}).$$
Следовательно, $[g, g_1, \ldots, g_k] \in \gamma_\omega(\widetilde{G})$.

Теорема 1.3.2. *Пусть $k \geqslant 1$ и G – группа с одним соотношением, а*
$$1 \to N \to \widetilde{G} \xrightarrow{\pi} G \to 1 \tag{1.3.16}$$
– некоторое k-центральное расширение с нильпотентно аппроксимируемой группой $\widetilde{G}$. Тогда G также нильпотентно аппроксимируема.

Доказательство. Предположим, что G не является нильпотентно аппроксимируемой и $x \in \gamma_\omega(G)$, $g \in \widetilde{G}$ такие, что $\pi(g) = x$. По лемме 1.3.2 имеем $[g, {}_k\widetilde{G}] \subseteq \gamma_\omega(\widetilde{G}) = 1$. Следовательно, $[x, {}_kG] = 1$. Так как x – произвольный элемент $\gamma_\omega(G)$, получаем

$$\gamma_{\omega+k}(G) = 1. \tag{1.3.17}$$

Из (1.3.17) следует, что G имеет нетривиальный центр. Чтобы это увидеть, достаточно заметить, что $\gamma_{\omega+k-1}(G)$ лежит в центре G. Предположим, что $\gamma_{\omega+k-1}(G) = 1$, тогда предыдущий член трансфинитного нижнего центрального ряда лежит в центре. В случае если все члены $\gamma_{\omega+l}(G)$, $l \geqslant 1$, тривиальны, получаем, что $1 \neq \gamma_\omega(G)$ лежит в центре G.

Оставшаяся часть доказательства следует схеме доказательства основной теоремы из работы [29]. Мы имеем группу G, являющуюся группой с одним соотношением и нетривиальным центом. Из работы [30] следует, что G может быть представлена с помощью одного из следующих копредставлений:

$$G = \langle a_1, \ldots, a_m \mid a_1^{p_1} = a_2^{q_1},\ \ldots,\ a_{m-1}^{p_{m-1}} = a_m^{q_{m-1}} \rangle, \tag{1.3.18}$$

где $p_i, q_i \geqslant 2$ и $(p_i, q_j) = 1$, $i > j$, или

$$G = \langle a, a_1, \ldots, a_m \mid aa_1a^{-1} = a_m,\ a_1^{p_1} = a_2^{q_1},\ \ldots,\ a_{m-1}^{p_{m-1}} = a_m^{q_{m-1}} \rangle, \tag{1.3.19}$$

где $p_i, q_i \geqslant 2$, $p_1 \cdots p_{m-1} = q_1 \cdots q_{m-1}$ и $(p_i, q_j) = 1$, $i > j$.

Рассмотрим сначала случай, когда группа G задана копредставлением (1.3.18). Тогда G является свободным произведением циклических групп с объединенными подгруппами и содержит подгруппы

$$G_i = \langle a_i, a_{i+1} \mid a_i^{p_i} = a_{i+1}^{q_i} \rangle, \qquad i = 1, \ldots, m-1.$$

Так как группа G трансфинитно нильпотентна ввиду (1.3.17), подгруппы G_i также должны быть трансфинитно нильпотентными. Если для некоторого $1 \leqslant i \leqslant m-1$ пара p_i, q_i не является парой степеней одного и того же простого числа, то G_i не является трансфинитно нильпотентной. Таким образом, для всех $1 \leqslant i \leqslant m-1$ числа p_i и q_i являются степенями одного простого числа: $p_i = P_i^{s_i}$, $q_i = P_i^{t_i}$. Если $m = 2$, то получаем нильпотентно аппроксимируемую группу $G = \langle a_1, a_2 \mid a_1^{P_1^{s_1}} = a_2^{P_2^{t_2}} \rangle$. Следовательно, мы можем предположить, что $m \geqslant 3$. Условие $(p_i, q_j) = 1$, $i > j$, влечет, что P_i разные простые для разных i. Рассмотрим подгруппу H в G, порожденную элементами $a_1^{P_2}$ и $a_3^{P_1}$. Подгруппа H неабелева ввиду конструкции свободного произведения. Получаем следующие сравнения в группе H:

$$[a_1^{P_2}, a_3^{P_1}]^{P_1} \equiv [a_1^{P_2P_1}, a_3^{P_1}] \equiv [a_2^{P_2}, a_3^{P_1}] \equiv 1 \operatorname{mod} \gamma_3(H),$$
$$[a_1^{P_2}, a_3^{P_1}]^{P_2} \equiv [a_1^{P_2}, a_3^{P_1P_2}] \equiv [a_1^{P_2}, a_2^{P_1}] \equiv 1 \operatorname{mod} \gamma_3(H),$$

которые влекут, что $\gamma_2(H) = \gamma_3(H)$. Поэтому для $m \geqslant 3$ трансфинитная нильпотентность G невозможна. Это предоставляет требуемое противоречие.

Теперь рассмотрим случай, когда группа G задается копредставлением (1.3.19). Группа G является HNN-расширением группы, заданной копредставлением (1.3.18) с некоторыми дополнительными условиями на коэффициенты p_i, q_i. Как мы видели, трансфинитная нильпотентность базы этого HNN-расширения возможна лишь в случае $m = 1, 2$. Поэтому G может иметь лишь копредставление

$$G = \langle a, a_1, a_2 \mid aa_1a^{-1} = a_2,\ a_1^{P^{s_1}} = a_2^{P^{s_1}} \rangle$$

для некоторого простого P. Однако такая группа является нильпотентно аппроксимируемой (см., например, [29]), что предоставляет требуемое противоречие.

Теорема 1.3.3. *Пусть G – группа с одним соотношением и*

$$1 \to N \to \widetilde{G} \to G \to 1 \tag{1.3.20}$$

– некоторое k-центральное расширение G с $k \in \{1, 2\}$. Тогда $\widetilde{G}$ нильпотентно аппроксимируема тогда и только тогда, когда G нильпотентно аппроксимируема.

Доказательство. По условию группа G обладает копредставлением

$$1 \to R \to F \to G \to 1,$$

где R – нормальное замыкание в F некоторого элемента $r \in F$. По теореме 1.3.1 существует число m такое, что

$$\varphi^{(k)}_{m+k}(G) = 0.$$

Теорема 1.1.2, примененная к k-центральному расширению (1.3.20), влечет

$$N \cap \gamma_{m+k}(\widetilde{G}) = 1,$$

поэтому $\widetilde{G}$ нильпотентно аппроксимируема. Утверждение теперь следует из теоремы 1.3.3.

Приведенные результаты позволяют привести следующие примеры нильпотентно аппроксимируемых групп.

Пример 1.3.1. Группа $\langle a, b \mid [a, b, a] = [aba, b] = 1\rangle$ нильпотентно аппроксимируема, так как является свободным центральным расширением фундаментальной группы бутылки Клейна $\langle a, b \mid b^{-1}aba = 1\rangle$, которая нильпотентно аппроксимируема.

Пример 1.3.2. Группа $\langle a, b \mid [a^p, b] = [b^p, a] = 1\rangle$ (p простое) нильпотентно аппроксимируема, так как является свободным центральным расширением нильпотентно аппроксимируемой группы $\langle a, b \mid a^p b^p = 1\rangle$.

Пример 1.3.3. Рассмотрим группу $G = \langle a, t \mid [a, t, a] = 1\rangle$. Группа G является HNN-расширением свободной абелевой группы $H = \langle a, b \mid [a, b] = 1\rangle$:

$$G = \langle a, b, t \mid [a, b] = 1,\ a^t = b\rangle.$$

Так как $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \{1\}$ в H и $H/\langle a\rangle \simeq H/\langle b\rangle \simeq \mathbb{Z}$, по критерию Раптиса–Варсоса [31] получаем, что G является нильпотентно аппроксимируемой. Отсюда следует, что группа

$$\langle a, t \mid [a, t, a, a] = [a, t, a, t] = 1\rangle$$

также нильпотентно аппроксимируема.

Свободные произведения групп с одним соотношением. Теоремы 1.3.1 и 1.3.3 могут быть обобщены на свободные произведения групп с одним определяющим соотношением. При этом доказательство требует дополнительного анализа вложения Магнуса.

Теорема 1.3.4. *Пусть G_i, $i = 1, \dots, n$, – семейство групп с одним определяющим соотношением и $G = G_1 * \dots * G_n$ – их свободное произведение. Тогда для $k = 1, 2$ существует m такое, что $\phi^{(k)}_m(G) = 0$.*

Доказательство. Пусть G_i заданы свободными копредставлениями

$$1 \to R_i \to F_i \to G_i \to 1,$$

где подгруппы R_i являются нормальными замыканиями элементов $r_i \in F_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда группа G имеет свободное копредставление

$$1 \to R \to F \to G \to 1,$$

где $F = F_1 * \cdots * F_n$, $R = \langle r_1, \ldots, r_n \rangle^F$.

Сначала докажем утверждение для $k = 1$. Пусть l_i – такие числа, что выполнено

$$r_i \in \gamma_{l_i}(F_i) \setminus \gamma_{l_i+1}(F_i), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.3.21}$$

Обозначим $l = \max(l_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Предположим, что $\phi^{(1)}_{l+1}(G) \neq 0$. Тогда существуют такие $k_1, \ldots, k_n$, что

$$r_1^{k_1} \cdots r_n^{k_n} \in \gamma_{l+1}(F), \qquad r_1^{k_1} \cdots r_n^{k_n} \notin [R, F].$$

Значит, существует $1 \leqslant j \neq n$ такое, что $r_j^{k_j} \notin [R_j, F_j]$. Рассмотрим тогда образ элемента $r_j^{k_j}$ при естественной проекции $d_i \colon F \to F_i$. Имеем $d(r_j^{k_j}) \in \gamma_{l+1}(F_j) \setminus [R_j, F_j]$. Но по теореме 1.3.1 имеем $\phi^{(1)}_{l+1}(F_j/R_j) = 0$, откуда следует, что $d(r_j^{k_j}) = 1$ в F_j. Это противоречит конструкции свободного произведения, откуда заключаем, что $\phi^{(1)}_{l+1}(G) = 0$.

Докажем теперь утверждение для $k = 2$. Используя элементарные приемы коммутаторного исчисления, легко показать, что если для некоторого $m \geqslant 3$ $\phi^{(2)}_m(G) \neq 0$, то существуют такие $f_j \in F_j$, что

$$[r_1, f_1] \cdots [r_n, f_n] \in \gamma_m(F) \setminus ([R, F, F] \cap \gamma_m(F)). \tag{1.3.22}$$

Ввиду теоремы 1.3.1 можем считать, что $n \geqslant 2$. Докажем сначала утверждение для $n = 2$. Пусть

$$w := [r_1, f_1][r_2, f_2] \in \gamma_m(F), \qquad [r_1, f_1][r_2, f_2] \notin [R, F, F]. \tag{1.3.23}$$

Тогда можем считать, что $f_1, f_2 \notin \gamma_2(F)$, так как в противном случае рассмотрение сводится к $n = 1$, который следует из теоремы 1.3.1. Пусть

$$\begin{aligned} f_1 &= g_1 g_2 g_3, \qquad g_1 \in F_1, \quad g_2 \in F_2, \quad g_3 \in \gamma_2(F), \\ f_2 &= g_4 g_5 g_6, \qquad g_4 \in F_1, \quad g_5 \in F_1, \quad g_6 \in \gamma_2(F). \end{aligned}$$

Тогда если $[r_1, g_1] \notin [R_1, F_1, F_1]$, то, проецируя $[r_1, g_1]$ на F_1 при естественной проекции $d_1 \colon F \to F_1$, получаем, что $d_1(w) \in \gamma_m(F_1)$. Но по теореме 1.3.1 имеем, что существует m_0, зависящее от r_1, такое, что $\phi^{(2)}_{m_0}(F_1/R_1) = 0$. Следовательно, в (1.3.23) $m < m_0$. Таким образом, для доказательства требуемого утверждения мы можем считать, что

$$f_1 \in F_2 \setminus (F_2 \cap \gamma_2(F)), \qquad f_2 \in F_1 \setminus (F_1 \cap \gamma_2(F)). \tag{1.3.24}$$

Предположим, что $l_1 \neq l_2$, где l_i определены в (1.3.21). Для определенности будем считать, что $l_1 > l_2$. Тогда при $m > l_1$ из (1.3.23) следует, что $[r_2, f_2] \in \gamma_{l+1}(F)$. Если $l_2 > 1$, то по предложению 1.3.1 (случай (i)) получаем $f_2 \in \gamma_2(F)$, что противоречит (1.3.24). Если $l_1 = 1$, по предложению 1.3.1 (случай (ii)) получаем $r_2 d = f_2^C$, $d \in \gamma_2(F)$. Но это тоже невозможно, так как $r_2 \in F_2$, $f_2 \in F_1$ ввиду (1.3.24).

Значит, достаточно рассмотреть вариант $l_1 = l_2$. Рассмотрим отображение Магнуса:

$$\mu_{l_1+1}\colon \quad r_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_{1,l_1+1} & s_{1,l_1+2} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{2,l_1+2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & t_{1,l_1+1} & t_{1,l_1+2} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & t_{2,l_1+2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & q_{12} & q_{13} & \dots & q_{1,l_1+2} \\ 0 & 1 & q_{23} & \dots & q_{2,l_1+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad f_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1,l_1+2} \\ 0 & 1 & p_{23} & \dots & p_{2,l_1+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} s_{1,l_1+1} &\in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X_1)], \quad i = 1, \dots, l_1, \\ s_{2,l_1+2} &\in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X_1)], \quad i = 2, \dots, l_1+1, \\ t_{1,l_1+1} &\in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X_2)], \quad i = 1, \dots, l_1, \\ t_{2,l_1+2} &\in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X_2)], \quad i = 2, \dots, l_1+1, \\ q_{ij} &\in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X_2)], \quad i = 1, \dots, l_1+1, \\ p_{ij} &\in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X_1)], \quad i = 1, \dots, l_1+1, \end{aligned}$$

где X_1 и X_2 – базисы свободных групп F_1 и F_2 соответственно. Тогда

$$\mu_{l_1+2}\colon w \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha = q_{12}s_{2,l_1+2} - s_{1,l_1+1}q_{l_1+1,l_1+2} + p_{12}t_{2,l_1+2} - t_{1,l_1+1}p_{l_1+1,l_1+2}.$$

Значит, ввиду (1.3.1) $w \in \gamma_{l_1+2}(F)$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$. Так как $q_{12}s_{2,l_1+2} - t_{1,l_1+1}p_{l_1+1,l_1+2}$ не зависит от переменных $\lambda_{12}(X_1)$, $\lambda_{l_1+1,l_1+2}(X_2)$, то, учитывая (1.3.24), получаем, что $0 \neq p_{12} \in \mathbb{Z}[\lambda_{12}(X_1)]$, $0 \neq q_{l_1+1,l_1+2} \in \mathbb{Z}[\lambda_{l_1+1,l_1+2}]$, откуда следует, что $\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда

$$q_{12}s_{2,l_1+2} - t_{1,l_1+1}p_{l_1+1,l_1+2} = 0, \tag{1.3.25}$$

$$p_{12}t_{2,l_1+2} - s_{1,l_1+1}q_{l_1+1,l_1+2} = 0. \tag{1.3.26}$$

Так как $q_{12}, t_{1,l_1+1} \in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X_2)]$, $s_{2,l_1+2}, p_{l_1+1,l_1+2} \in \mathbb{Z}[\lambda_{i,i+1}(X_1)]$, то из (1.3.25) следует, что $C_1q_{12} = C_2t_{1,l_1+1}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{Z}$. По замечанию 1.3.1 имеем $C_1q_{23} = C_2t_{2,l_1+2}$. Тогда из (1.3.26) следует, что существуют $C_3, C_4 \in \mathbb{Z}$ такие, что $C_3q_{23} = C_4q_{l_1+1,l_1+2}$. Это возможно лишь в случае $l_1 = 1$. Получаем

$$r_1^{C_1} \equiv f_2^{C_2} \bmod \gamma_2(F), \qquad r_2^{C_1} \equiv f_1^{C_2} \bmod \gamma_2(F).$$

Так как свободная абелева группа не содержит кручения, можем предположить, что C_1 и C_2 взаимно просты. Тогда получаем

$$w^{C_2} \equiv [r_1, f_1^{C_2}][r_2, f_2^{C_2}] \equiv [r_1, r_2^{C_1}][r_2, r_1^{C_1}] \equiv 1 \bmod [R, F, F].$$

Из взаимной простоты C_1 и C_2 следует, что $w \in \gamma_j(F) \setminus (\gamma_j(F) \cap [R, F, F])$ для некоторого $j \geqslant 3$ тогда и только тогда, когда $w^{C_1} \in \gamma_j(F) \setminus (\gamma_j(F) \cap [R, F, F])$. Значит,

$$e := [f_1^{C_1}, f_2][f_2^{C_1}, f_1] \in \gamma_j(F).$$

Имеем

$$e \equiv [f_1, f_2, f_1]^k [f_2, f_1, f_2]^k \bmod \gamma_4(F)$$

для некоторого $k \neq 0$. Тогда

$$e \equiv [[f_1, f_2], f_1^k f_2^{-k}] \bmod \gamma_4(F). \tag{1.3.27}$$

Так как $f_1 \in F_2$, $f_1 \in F_1$, имеем $[f_1, f_2] \notin \gamma_3(F)$. Поэтому предложение 1.3.1 (случай (i)) дает $f_1^k f_2^{-k} \in \gamma_2(F)$. Но это возможно лишь в случае $f_i \in \gamma_2(F)$. Таким образом, в случае $r_i \notin \gamma_2(F)$, $i = 1, 2$ определение (1.3.23) влечет $m \leqslant 3$. Случай $n = 2$ доказан. Таким образом, получаем утверждение: для любых $r_1 \in F_1$, $r_2 \in F_2$ существует m, зависящее от r_i и r_2, такое, что из $[r_1, f_1][r_2, f_2] \in \gamma_m(F)$ для некоторых $f_1, f_2 \in F$ следует $[r_1, f_1][r_2, f_2] \in [R, F, F]$.

Пусть теперь $n \geqslant 3$. Будем доказывать индукцией по n, считая что для $n-1$ утверждение доказано. Предположим, что для данного m существуют $f_1, \ldots, f_n$, удовлетворяющие (1.3.22). Можем считать, что $f_j \notin \gamma_2(F)$. Тогда для $f_1 \notin \langle F_j \rangle^F$ и для почти всех $j = 1, \ldots, n$, кроме, быть может, одного из них, т.е. для любых $j_1 \neq j_2$

$$f_1 \notin \langle F_{j_1} \rangle^F \cap \langle F_{j_2} \rangle^F.$$

Это следует из того, что $\langle F_{j_1} \rangle^F \cap \langle F_{j_2} \rangle^F \subseteq \gamma_2(F)$. Тогда существует $j \neq 1$ такое, что $f_i \notin \langle F_j \rangle^F$. Рассматривая проекцию

$$\widehat{d_j} : F \to F_1 * \cdots * F_{j-1} * F_{j+1} * \cdots * F_n,$$

получаем, что $\widehat{d_j}([r_1, f_1] \cdots [r_n, f_n])$ представляет собой элемент из $\widehat{d_j}(R)$, где $\widehat{d_j}(R)$ – нормальное замыкание элементов $r_1, \ldots, r_{j-1}, r_{j+1}, r_n$ в $\widehat{d_j}(F)$. Легко видеть, что из (1.3.22) следует

$$d_j([r_1, f_1] \cdots [r_n, f_n]) \in \gamma_m(\widehat{d_j}(F)) \setminus (\gamma_m(\widehat{d_j}(F)) \cap [\widehat{d_j}(R), \widehat{d_j}(F), \widehat{d_j}(F)]). \tag{1.3.28}$$

Это сводит задачу к случаю $n-1$, который доказан по индуктивному предположению, т.е. существует m, зависящее от $r_1, \ldots, r_n$, такое, что (1.3.28) невозможно. Индукция завершена, утверждение доказано.

Теперь можем сформулировать утверждение, обобщающее теорему 1.3.3.

Следствие 1.3.1. *Пусть G – свободное произведение групп с одним определяющим соотношением и*

$$1 \to N \to \widetilde{G} \to G \to 1$$

– некоторое k-центральное расширение, $k = 1, 2$. Тогда G нильпотентно аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\widetilde{G}$ нильпотентно аппроксимируема.

Доказательство. Случай одного свободного сомножителя представляет собой в точности теорему 1.3.3. Пусть теперь G является свободным произведением n групп с одним определяющим соотношением и $n \geqslant 1$. Если G нильпотентно аппроксимируема, то требуемое утверждение, т.е. нильпотентная аппроксимируемость $\widetilde{G}$, следует из теоремы 1.3.4 и теоремы 1.1.2. Пусть теперь $\widetilde{G}$ нильпотентно аппроксимируема, а $xN \in \gamma_\omega(G)$, $x \in \widetilde{G}$. Тогда x лежит в k-м центре $\widetilde{G}$, т.е. $[\langle x \rangle,_k \widetilde{G}] = 1$. Отсюда следует $[xN,_k G, G] = 1$. Но нетривиальное свободное произведение имеет тривиальный центр, откуда следует, что $x \in N$ в случае $n \geqslant 2$. Утверждение доказано.

В заключение отметим, что естественно встает вопрос обобщения приведенных результатов об обобщенной фильтрации Дваера групп с одним определяющим соотношением и следствия о нильпотентной аппроксимируемости их k-центральных расширений для $k \geqslant 3$. В этом случае ($k \geqslant 3$) исследование обобщенного вложения Магнуса сильно усложняется и вопрос естественного обобщения приведенных результатов остается открытым.

Классы $\mathcal{J}$ и $\widetilde{\mathcal{J}}_1$. Пусть G – некоторая нильпотентно аппроксимируемая группа, т.е. пересечение нижнего центрального ряда $\gamma_i(G)$, $i \geqslant 1$, тривиально и

$$1 \to R \to F \to G \to 1 \tag{1.3.29}$$

– свободное копредставление G. Следуя [32], будем считать, что группа G принадлежит классу $\mathcal{J}$, если ее свободное центральное расширение $F/[F,R]$ также является нильпотентно аппроксимируемой группой. Это определение не зависит от выбора свободного копредставления F/R, так как несложно показать, что существует изоморфизм абелевых групп [32]

$$\gamma_\omega(F/[F,R]) \simeq \bigcap_i \phi_i(G), \tag{1.3.30}$$

где $\bigcap_i(G)$ – i-й член фильтрации Дваера во вторых гомологиях группы G, которая определяется как

$$\phi_i^{(1)}(G) := \ker\{H_2(G) \to H_2(G/\gamma_{i-1}(G))\}, \qquad i \geqslant 2.$$

Таким образом, получаем гомологическую характеризацию класса $\mathcal{J}$: группа G принадлежит классу $\mathcal{J}$ тогда и только тогда, когда $\bigcap_i \phi_i^{(1)}(G) = 0$.

Очевидно, имеем включение $\widetilde{\mathcal{J}}_1 \subseteq \mathcal{J}$. Ниже мы покажем, что это включение является собственным.

Для дальнейших построений и, в частности, для построения примера группы, лежащей в классе $\mathcal{J}$, но не лежащей в $\widetilde{\mathcal{J}}_1$, нам понадобятся результаты о представлении Гупты свободных центральных расширений групп.

Для любого $c \geqslant 2$ и произвольной нормальной подгруппы N свободной группы F существует канонический гомоморфизм

$$\eta_c\colon F/[\gamma_c(N), F] \to M_{c+1,\mathbb{Z}}(F/N),$$

называемый *представлением Гупты*, где $M_{c+1,\mathbb{Z}}(F/N)$ обозначает группу $(c+1)\times(c+1)$ матриц над некоторым кольцом (точное описание данного кольца мы не приводим здесь, все необходимые определения см. в [33]).

Для группы G обозначим через $\Delta^\omega(G)$ пересечение степеней аугментационного идеала $\bigcap_n \Delta^n(G)$. Следующий результат непосредственно вытекает из результатов Гупты, Пасси, Штера и Хартли.

Предложение 1.3.2. *Пусть p – некоторое простое число. Предположим, что группа F/N не содержит p-кручения, $\Delta^\omega(F/N) = 0$ и $H_4(F/N, \mathbb{Z}_p) = 0$. Тогда $\Delta^\omega(F/[\gamma_p(N), F]) = 0$. В частности, $F/\gamma_p(N) \in \mathcal{J}$.*

Доказательство. Пасси и Гупта показали, что условие $\Delta^\omega(G) = 0$ влечет выполнение $\Delta^\omega(M_{n,\mathbb{Z}}(G)) = 0$ для любого n (см. [34]). Таким образом, для рассматриваемой пары $N \subset F$ имеем

$$\Delta^\omega(F/[\gamma_p(N), F]) \subseteq \Delta(\ker(\eta_p))\mathbb{Z}[F/[\gamma_p(N), F]]. \tag{1.3.31}$$

Штер показал (см. [35]), что для любой нормальной подгруппы N в F ядро представления Гупты $\mathrm{Ker}(\eta_p)$ состоит из элементов конечного порядка в $F/[\gamma_p(N), F]$.

Элементы конечного порядка в $F/[\gamma_p(N), F]$ лежат в $\gamma_p(N)/[\gamma_p(N), F]$. В случае когда F/N не имеет p-кручения (например, в случае доказываемой теоремы) Хартли и Штер дали описание искомых элементов [36]:

$$\mathrm{Tor}(\gamma_p(N)/[\gamma_p(N), F]) \simeq H_4(F/N, \mathbb{Z}_p),$$

где $\mathbb{Z}_p$ рассматривается как тривиальный F/N-модуль. Но по условию $H_4(F/N, \mathbb{Z}_p) = 0$. Следовательно, $F/[\gamma_p(N), F]$ не имеет кручения и $\mathrm{Ker}(\eta_p) = 0$. Требуемое утверждение вытекает из (1.3.31).

Теорема 1.3.5. *Включение $\widetilde{\mathcal{J}}_1 \subset \mathcal{J}$ является собственным.*

Доказательство. В качестве примера рассмотрим группу

$$G = \langle a, b \mid [b^3, a] = [a, b, a] = 1\rangle.$$

В [37] показано, что G является нильпотентно аппроксимируемой, и для нее существует центральное расширение

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \widetilde{G} \to G \to 1,$$

где

$$\widetilde{G} = \langle a, b \mid [b^3, a] = [a, b, a]^2 = [a, b, a, a] = [a, b, a, b] = 1\rangle$$

не является нильпотентно аппроксимируемой. Таким образом, $G \notin \widetilde{\mathcal{J}}$.

Отметим, что G является свободным абелевым расширением циклической группы порядка 3:

$$1 \to N/[N, N] \to F/[N, N]\ (\simeq G) \to \mathbb{Z}_3 \to 1,$$

где $F = \langle a, b\rangle, N = \langle b^3, a, a^b, a^{b^2}\rangle$. Имеем

$$\Delta^\omega(F/N) = \Delta^\omega(\mathbb{Z}_3) = 0, \qquad H_4(F/N, \mathbb{Z}_2) = H_4(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2) = 0.$$

Следовательно, $F/[[N, N], F]$ нильпотентно аппроксимируема ввиду предложения 1.3.2. По определению получаем, что группа G принадлежит классу $\mathcal{J}$.

1.4. Разрешимая аппроксимируемость

Точные действия групп и разрешимая аппроксимируемость. Вопросы, аналогичные рассмотренным выше, встают при изучении производного ряда в группах. Однако теория, аналогичная теории класса $\mathcal{J}$, не является содержательной. Из работы Шмелькина [38] непосредственно следует, что для любой свободной группы F и ее нормальной подгруппы R из разрешимой аппроксимируемости группы F/R вытекает разрешимая аппроксимируемость свободного абелева расширения[1] $F/[R, R]$. Но при этом подобное утверждение не остается верным для произвольного абелева расширения. По аналогии с классом $\widetilde{\mathcal{J}}$ определим следующий класс: класс $\widetilde{\mathcal{K}}$ состоит из разрешимо аппроксимируемых групп G таких, что для любого расширения

$$1 \to A \to \widetilde{G} \to G \to 1$$

с абелевой группой A группа G является разрешимо аппроксимируемой.

Для построения примеров разрешимо аппроксимируемых групп, не принадлежащих классу $\widetilde{\mathcal{K}}$, удобно использовать методы теории модулей над групповыми кольцами. Приведем необходимые для дальнейшего определения.

[1]Некоторые приложения трансфинитных свойств свободных абелевых расширений в изучении аугментационных степеней над рациональными числами приведены в [39].

Напомним, что действие группы G на левом G-модуле M называется *точным*, если из того, что $M \circ (1-g) = 0$, $g \in G$, следует $g = 1$, и левый G-модуль M называется *точным*, если из того, что $M \circ \alpha = 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}[G]$, следует, что $\alpha = 0$, где $\mathbb{Z}[G]$ – целочисленное групповое кольцо группы G.

Пусть F – свободная группа и N_1, N_2 – нормальные подгруппы в F. Тогда абелева группа

$$\frac{N_1 \cap N_2}{[N_1, N_2]}$$

имеет структуру $\mathbb{Z}[F/N_1N_2]$-модуля, где действие индуцировано сопряжением в F. В работах [28] и [32] приведены различные приложения точности данного действия к доказательству нильпотентной и разрешимой аппроксимируемостей некоторых групп, а также к теории асферичных двумерных CW-комплексов. В основе этих приложений точности действий лежат следующие элементарные вложения:

$$\frac{N_1 \cap N_2}{[N_1, N_2]} \circ \Delta^\omega(F/N_1N_2) \subseteq \gamma_\omega(F/[N_1, N_2]), \tag{1.4.1}$$

где $\Delta^\omega(G)$ – пересечение степеней $\bigcap_n \Delta^n(G)$ аугментационного идеала $\Delta(G)$, а также

$$\frac{N_1 \cap N_2}{[N_1, N_2]} \circ \bigcap_n \Delta(\delta_n(F/N_1N_2))\mathbb{Z}[F/N_1N_2] \subseteq \delta_\omega(F/[N_1, N_2]), \tag{1.4.2}$$

где для данной группы G, подмножества K в $\mathbb{Z}[G]$ и $\mathbb{Z}[G]$-модуля M под $M \circ K$ подразумевается $\{m \circ \alpha \mid m \in M,\ \alpha \in K\}$, а для подгруппы H группы G, через $\Delta(H)\mathbb{Z}[G]$ обозначается идеал в $\mathbb{Z}[G]$, порожденный элементами $h - 1$, $h \in H$.

Для группы G обозначим через $\delta^+(G)$ подгруппу, порожденную элементами конечного порядка $g \in G$, которые имеют лишь конечное число сопряженных элементов в G. Подгруппа $\delta^+(G)$ является локально конечной подгруппой в G. Несложно показать, что $\delta^+(G) = 1$ тогда и только тогда, когда G не содержит нетривиальных нормальных конечных подгрупп.

Пусть I – идеал групповой алгебры $k[G]$, где k – некоторое поле. Идеал I называется *контролируемым* нормальной подгруппой H в G, если

$$I = (k[H] \cap I)k[G]. \tag{1.4.3}$$

Аннуляторный идеал I в групповой алгебре $k[G]$ – идеал, для которого существует подмножество $X \subseteq k[G]$ такое, что

$$I = \mathrm{Ann}(X) := \{\alpha \in k[G] \mid X.\alpha = 0\}.$$

Напомним, что в случае, когда $k[G]$-модуль M вложим в свободный $k[G]$-модуль, $\mathrm{Ann}(M)$ является аннуляторным идеалом в $k[G]$. В случае $\mathrm{char}(k) = 0$ аннуляторные идеалы в $k[G]$ контролируются нормальной подгруппой $\delta^+(G)$ [40].

Теорема 1.4.1. *Пусть F – нециклическая свободная группа и $\{1\} \neq N_1 \subseteq N_2$ – нормальные подгруппы в F. Если $\mathbb{Z}[F/N_2]$-модуль $N_1/[N_1, N_2]$ не является точным, то группа F/N_2 содержит нетривиальную конечную нормальную подгруппу.*

Доказательство. Так как свободные группы являются нильпотентно аппроксимируемыми, а N_2 свободна, то существует такое $n \geqslant 1$, что выполняется

$$N_1 \subseteq \gamma_n(N_2), \qquad N_1 \nsubseteq \gamma_{n+1}(N_2). \tag{1.4.4}$$

Для такого n получаем $[N_1, N_2] \subseteq \gamma_{n+1}(N_2)$, откуда следует, что существует естественный эпиморфизм F/N_2-модулей

$$\phi_1 \colon N_1/[N_1, N_2] \to \frac{N_1\gamma_{n+1}(N_2)}{\gamma_{n+1}(N_2)}, \tag{1.4.5}$$

который нетривиален ввиду (1.4.4). Используя снова соотношение (1.4.4), получаем, что существует вложение эпиморфного образа из (1.4.5) в высший модуль соотношений

$$\phi_2\colon \frac{N_1\gamma_{n+1}(N_2)}{\gamma_{n+1}(N_2)} \to \frac{\gamma_n(N_2)}{\gamma_{n+1}(N_2)}\,, \tag{1.4.6}$$

где, естественно, данное вложение сохраняет действие группы F/N_2 посредством сопряжений. Высший модуль соотношений в свою очередь вкладывается в свободный модуль

$$\phi_3\colon \gamma_n(N_2)/\gamma_{n+1}(N_2) \to \frac{\Delta^n(N_2)\mathbb{Z}[F]}{\Delta^{n+1}(N_2)\mathbb{Z}[F]}\,.$$

(Данный свободный модуль является членом резольвенты Грюнберга, построенной по копредставлению группы F/N_2. Описание базиса этого свободного $\mathbb{Z}[F/N_2]$-модуля см. в [41].)

Предположим, что модуль $\frac{N_1}{[N_1,N_2]}$ является точным $\mathbb{Z}[F/N_2]$-модулем. Тогда ввиду соотношения (1.4.1)

$$\frac{N_1}{[N_1,N_2]}\circ\alpha \subseteq \gamma_\omega(F/[N_1,N_2]), \qquad \alpha\in\Delta^\omega(F/N_2),$$

что ввиду условий теоремы противоречит точности. Получаем, что рассматриваемый модуль не является точным, т.е. существует такое $\alpha\in\mathbb{Z}[F/N_2]$, что

$$\frac{N_1}{[N_1,N_2]}\circ\alpha = 0.$$

Следовательно, α аннулирует также и эпиморфный образ $\mathrm{im}(\phi_1)$, который вложим посредством композиции ϕ_2 и ϕ_3 в свободный $\mathbb{Z}[F/N_2]$-модуль. Образ $\overline{\alpha}$ элемента α в групповой алгебре $\mathbb{Q}[F/N_2]$ аннулирует модуль $\mathrm{im}(\phi_1)\otimes\mathbb{Q}$, следовательно, $\overline{\alpha}$ принадлежит нетривиальному аннуляторному идеалу. Но если F/N_2 не содержит нетривиальных конечных нормальных подгрупп, то $(F/N_2)^+ = 1$ и из (1.4.3) следует, что $\overline{\alpha}\in\mathbb{Q}$. Но подмодуль свободного модуля не имеет кручения как абелева группа, поэтому $\overline{\alpha}=0$. Таким образом, $(F/N_2)^+\neq 1$ и F/N_2 содержит нетривиальную конечную нормальную подгруппу.

Следствие 1.4.1. *Пусть F – свободная группа и $\{1\}\neq N_1\subseteq N_2$ – нормальные подгруппы в F. Если*

$$\Delta^\omega(F/N_2)\neq\{0\}, \qquad \gamma_\omega(F/[N_1,N_2])=\{1\}, \tag{1.4.7}$$

то группа F/N_2 содержит нетривиальную конечную нормальную подгруппу.

Доказательство следует из (1.4.1) и теоремы 1.4.1.

Изучение длины трансфинитного разрешимого ряда было начато в работе Мальцева [42]. Построенные в [42] примеры групп с $\delta_\omega\neq\delta_{\omega+1}$ (а следовательно, и примеры разрешимо аппроксимируемых групп, не лежащих в классе $\widetilde{\mathcal{K}}$) являются бесконечно порожденными. Подобные примеры могут быть интересны в рамках конструкций, где применяется совершенный радикал, например в алгебраической K-теории. Также подобные построения могут представлять некоторый интерес с точки зрения некоммутативной теории узлов Кохрана. Здесь мы приведем несложный метод построения таких групп на основе соотношения (1.4.2).

Теорема 1.4.2. *Пусть F – свободная группа и $\{1\}\neq N_1\subseteq N_2$ – нормальные подгруппы в F. Если F/N_1 аппроксимируется разрешимыми группами, F/N_2 не содержит нетривиальных конечных нормальных подгрупп и не аппроксимируется разрешимыми группами, то*

$$\delta_\omega(F/[N_1,N_2])\neq\delta_{\omega+1}(F/[N_1,N_2]). \tag{1.4.8}$$

Доказательство. По теореме 1.4.1 получаем, что $\mathbb{Z}[F/N_2]$-модуль $N_1/[N_1,N_2]$ является точным.

Рассмотрим теперь короткую точную последовательность групп

$$1 \to \frac{N_1}{[N_1,N_2]} \to F/[N_1,N_2] \to F/N_1 \to 1.$$

По условию $\delta_\omega(F/N_1)=\{1\}$, поэтому $\delta_\omega(F/[N_1,N_2]) \subseteq \frac{N_1}{[N_1,N_2]}$. Но подгруппа $\frac{N_1}{[N_1,N_2]}$ абелева, откуда получаем, что $\delta_{\omega+1}(F/[N_1,N_2])=\{1\}$. Предположим, что

$$\delta_\omega(F/[N_1,N_2]) = \delta_{\omega+1}(F/[N_1,N_2]) = \{1\},$$

тогда ввиду соотношения (1.4.2) получаем, что для любого $g \in \delta_\omega(F/N_2) \neq \{1\}$ элемент $(1-g)$ аннулирует весь модуль $\frac{N_1}{[N_1,N_2]}$, что противоречит доказанной точности данного действия. Получаем, что группа $F/[N_1,N_2]$ не является аппроксимируемой разрешимыми группами.

Примеры групп, удовлетворяющих условиям теоремы 1.4.2, придумать несложно.

Пример 1.4.1. Пусть F – свободная группа ранга 3 с базисом $\{a,b,c\}$. Обозначим через N_1 нормальное замыкание элемента a в F, через N_2 – нормальное замыкание слов a, $b[cbc^{-1},b]$ в F. Тогда группа F/N_1 является свободной группой ранга 2, следовательно, аппроксимируется разрешимыми группами. Группа F/N_2 задается копредставлением

$$\langle b,c \mid b[cbc^{-1},b]=1\rangle.$$

Из простейших общих свойств групп с одним определяющим соотношением заключаем, что F/N_2 без кручения и элемент b нетривиален в F/N_2. Но легко видеть, что b лежит в пересечении производного ряда группы F/N_2, поэтому группа F/N_2 не аппроксимируется разрешимыми группами и условия теоремы 1.4.2 выполнены. Получаем, что

$$\delta_\omega(F/[N_1,N_2]) \neq \delta_{\omega+1}(F/[N_1,N_2]) = \{1\}.$$

Замечание 1.4.1. Используя результаты из [28] и доказательство теоремы 1.4.2, легко видеть, что при условиях теоремы 1.4.2 выполняется более сильное соотношение, нежели (1.4.8), а именно

$$\bigcap_n [\delta_\omega(F/[N_1,N_2]), \delta_n(F/[N_1,N_2])] \neq \delta_{\omega+1}(F/[N_1,N_2]).$$

По аналогии с построением последнего примера несложно построить пример конечно-представленной разрешимо аппроксимируемой группы, не лежащей в классе $\widetilde{\mathcal{K}}$.

Пример 1.4.2. Пусть F – свободная группа с образующими a, x_i, $i=1,\dots,4$. Обозначим через N_1 нормальное замыкание элемента a в F и через N_2 – нормальное замыкание элементов a, $x_1[x_4,x_1]$, $x_2[x_1,x_2]$, $x_3[x_2,x_3]$, $x_4[x_3,x_4]$. Тогда F/N_2 представляет собой группу Хигмана, которая не содержит кручения и ациклична (следовательно, совершенна и не является разрешимо аппроксимируемой). Группа F/N_1 является свободной группой ранга 4, поэтому применима теорема 1.4.2. Получаем

$$\delta_\omega(F/[N_1,N_2]) \neq \delta_{\omega+1}(F/[N_1,N_2]) = \{1\}.$$

Ввиду соотношения (1.4.2) имеем

$$\langle [x_i,a^f],[a,a^f]\rangle [N_1,N_2] \subseteq \delta_\omega(F/[N_1,N_2]), \qquad f \in F.$$

С другой стороны, рассмотрим группу

$$G = F/\langle [x_i, a]\rangle [N_1, N_2] = \langle a, x_i \mid [a, x_i] = 1\rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{*4}.$$

Аппроксимационные свойства сохраняются при прямых суммах, откуда получаем, что G является нильпотентно аппроксимируемой. Отсюда следует, что

$$\delta_\omega(F/[N_1, N_2]) = \langle [x_i, a^f], [a, a^f]\rangle [N_1, N_2]$$

и

$$G = \frac{F/[N_1, N_2]}{\delta_\omega(F/[N_1, N_2])} \notin \widetilde{\mathcal{K}}.$$

Приложение трансфинитных факторов производного ряда. Возникает естественный вопрос о мотивации изучения групп с $\delta_\omega \neq \delta_{\omega+1}$. Здесь мы приведем один результат, показывающий существенность рассмотрения трансфинитного производного ряда. Этот результат в целом следует из схемы, изложенной в [28], где показано, что при условии верности гипотезы Андрюса–Кертиса препятствия к конечной гипотезе асферичности Уайтхеда лежат в факторах $\delta_\omega/\delta_{\omega+1}$ некоторых групп.

Напомним, что гипотеза асферичности Уайтхеда утверждает, что подкомплекс асферического двумерного CW-комплекса асферичен. Эта гипотеза имеет множество переформулировок, в том числе и на чисто теоретико-групповом языке. Отметим также, что в случае конечного стягиваемого комплекса асферичность произвольного его подкомплекса эквивалентна нильпотентной аппроксимируемости соответствующего скрещенного модуля (см. [19]).

Для CW-комплекса L через $L^{(1)}$ будем обозначать 1-мерный остов L.

Теорема 1.4.3. *Пусть L – стягиваемый двумерный* CW-*комплекс и K_1, K_2 – подкомплексы в L такие, что $K_1 \cap K_2 \subseteq L^{(1)}$, и $\pi_1(K_i)$ – разрешимо аппроксимируемы*, $i = 1, 2$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) $\pi_2(K_1 \cup K_2) = 0$;

(ii) $\delta_\omega(F/[N_1, N_2]) = 1$, *где* $F = \pi_1(L^{(1)})$, $N_i = \ker\{\pi_1(L^{(1)}) \to \pi_1(L^{(1)} \cup K_i)\}$, $i = 1, 2$.

Перед тем как перейти к доказательству теоремы 1.4.3 заметим, что существует следующая короткая точная последовательность групп:

$$1 \to \frac{N_1 \cap N_2}{[N_1, N_2]} \to F/[N_1, N_2] \to F/N_1 \cap N_2 \to 1. \tag{1.4.9}$$

Группа $F/N_1 \cap N_2$ является подгруппой прямого произведения $F/N_1 \times F/N_2$. Далее, $F/N_i \simeq \pi_1(K_i) * E$ для некоторой свободной группы E. Свободное произведение разрешимо аппроксимируемых групп также разрешимо аппроксимируемо (см. [43]). Таким образом, группы F/N_i, $i = 1, 2$, разрешимо аппроксимируемы ввиду условия теоремы 1.4.3 и, следовательно, разрешимо аппроксимируема группа $F/N_1 \cap N_2$. Так как группа $\frac{N_1 \cap N_2}{[N_1, N_2]}$ абелева, имеем $\delta_{\omega+1}(F/[N_1, N_2]) = 1$, и условие (ii) в теореме 1.4.3 эквивалентно условию

$$\delta_\omega(F/[N_1, N_2]) = \delta_{\omega+1}(F/[N_1, N_2]).$$

Теперь перейдем к доказательству теоремы 1.4.3.

Доказательство. Обозначим $K = K_1 \cup K_2$. Тогда имеет место точная последовательность Гутиерреза–Ратклиффа (подробнее см. [44], [32], [28])

$$\pi_2(K_1 \cup L^{(1)}) \oplus \pi_2(K_2 \cup L^{(1)}) \to \pi_2(K \cup L^{(1)}) \to \frac{N_1 \cap N_2}{[N_1, N_2]} \to 0, \tag{1.4.10}$$

где первое отображение индуцировано вложением комплексов и эпиморфизм является эпиморфизмом $\mathbb{Z}[\pi_1(K \cup L^{(1)})]$-модулей (т.е. $\mathbb{Z}[F/N_1N_2]$-модулей). Из разрешимой аппроксимируемости групп $\pi_1(K_i)$ следует асферичность комплексов K_i [45]. Следовательно, комплексы $K_i \cup L^{(1)}$ также асферичны и последовательность (1.4.10) влечет изоморфизм

$$\pi_2(K \cup L^{(1)}) \simeq \frac{N_1 \cap N_2}{[N_1, N_2]}\,.$$

Далее, условие (i) влечет $\pi_2(K \cup L^{(1)}) = 0$ и, следовательно, $F/[N_1, N_2] \simeq F/N_1 \cap N_2$ разрешимо аппроксимируема и мы имеем условие (ii).

Предположим теперь, что (ii) выполнено. Пусть $\pi_2(K) \neq 0$. В [32], [19] показано, что стандартное действие $\pi_1(K')$ на $\pi_2(K)$ является точным для любого неасферичного 2-комплекса K'. В нашем случае ввиду последовательности (1.4.10) это действие есть просто действие группы F/N_1N_2 на $\frac{N_1 \cap N_2}{[N_1, N_2]}$ посредством сопряжений. Из точности данного действия, условия (ii) и соотношения (1.4.2) имеем $\delta(F/[N_1, N_2]) = 1$. Снова применяя результат Адамса [45], получаем, что $K \cup L^{(1)}$ асферичен, а следовательно, K также асферичен.

Глава 2. Асферичность и аппроксимационные свойства скрещенных модулей

Построение алгебраических моделей гомотопических типов клеточных пространств – одна из основных задач алгебраической топологии. При этом определение "алгебраичности" данной категории также оказывается нетривиальной проблемой. Этой проблеме посвящена интересная работа [46], рассматривающая различные подходы к понятию "алгебраическая модель" категорий гомотопических типов.

Некоторые гомотопические категории имеют естественные алгебраические модели. Гомотопическая категория $\mathcal{H}o_1$ связных CW-комплексов K, для которых гомотопические группы $\pi_i(K)$ тривиальны при $i \geqslant 2$, естественным образом эквивалентна категории групп $\mathcal{G}r$. Эквивалентность данных категорий устанавливается с помощью взятия функторов фундаментальной группы и классифицирующего пространства. В случае гомотопической категории $\mathcal{H}o_n$ n-типов, состоящей из связных комплексов K, у которых $\pi_i(K) = 0$, $i \geqslant n+1$, существует также несколько алгебраических моделей [47]. Неформально говоря, задача построения алгебраических моделей категорий $\mathcal{H}o_n$, $n \geqslant 1$, есть задача "алгебраизации" систем Постникова, или задача нахождения "алгебраической гомотопической аппроксимации" данного гомотопического типа. Здесь мы будем рассматривать алгебраические модели категории $\mathcal{H}o_2$, введенные Уайтхедом и Лодэем [47]. При этом некоторые результаты данной работы могут быть обобщены на алгебраические модели категорий $\mathcal{H}o_n$, $n > 2$.

Для категории $\mathcal{H}o_2$ существует несколько удобных алгебраических моделей. В частности, хорошо известно, что следующие категории эквивалентны (см., например, [47]):

- категория $\mathcal{H}o_2$ 2-типов;
- категория $\mathcal{CM}$ скрещенных модулей;
- категория $\mathcal{C}at^1$ cat^1-групп;
- категория $\mathcal{SG}_1$ симплициальных групп с комплексом Мура длины $\leqslant 1$;
- категория $\mathcal{C}at(\mathcal{G}r)$ категорных объектов в $\mathcal{G}r$.

Данная работа посвящена изучению объектов из категорий $\mathcal{CM}$ и $\mathcal{C}at^1$, поэтому приведем определения скрещенных модулей и cat^1-групп и опустим описание категорий $\mathcal{SG}_1$ и $\mathcal{C}at(\mathcal{G}r)$. *Скрещенный модуль* есть тройка (M, ∂, G), состоящая из групп G и M таких, что G действует на M (действие мы будем обозначать через $g \circ m$ для $g \in G$, $m \in M$), $\partial \colon M \to G$ – гомоморфизм групп такой, что выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} CM1\colon &\qquad \partial(g \circ m) = g\partial(m)g^{-1}, \quad g \in G, \quad m \in M; \\ CM2\colon &\qquad mnm^{-1} = \partial(m) \circ n, \quad m, n \in M. \end{aligned}$$

Иногда скрещенный модуль (M, ∂, G) называется *G-скрещенным модулем.* Скрещенный модуль (M, ∂, G) называется *асферичным*, если ядро $\ker(\partial)$ тривиально.

Пусть G – группа и $s, t \in \mathrm{End}(G)$. Тогда тройка (G, s, t) называется cat^1-*группой*, если выполнены следующие условия:

1) $st = t$, $ts = s$ (под произведением эндоморфизмов подразумевается композиция);
2) $[\ker(s), \ker(t)] = 1$.

Функтор $S\colon \mathcal{CM} \to \mathcal{C}at^1$, задающий эквивалентность категорий $\mathcal{CM}$ и $\mathcal{C}at^1$, может быть задан как

$$S\colon (M, \partial, G) \mapsto (M \rtimes G,\ s\colon (m, g) \mapsto g,\ t\colon (m, g) \mapsto \partial(m)g).$$

Для любого комплекса K можно определить *фундаментальный скрещенный модуль* и *фундаментальную* cat^1*-группу* как

$$\mathcal{L}_1\colon K \mapsto (\pi_2(K, K^{(1)}), \partial, \pi_1(K^{(1)})), \qquad \mathcal{L}^1\colon K \mapsto \pi_2(K, K^{(1)}) \rtimes \pi_1(K^{(1)}),$$

где $K^{(1)}$ – одномерный остов K, $\partial\colon \pi_2(K, K^{(1)}) \to \pi_1(K^{(1)})$ – гомоморфизм границы. Эндоморфизмы фундаментальной cat^1-группы $\mathcal{L}^1(K)$ естественным образом определяются через гомоморфизм ∂.

Кондуше нашел интересную связь между аппроксимационными свойствами некоторых скрещенных модулей и асферичностью гомотопического типа, который они определяют [48]. В частности, он показал, что для подкомплексов асферичных двумерных комплексов второй гомотопический модуль может быть выражен как пересечение нижнего центрального ряда соответствующего скрещенного модуля. Тем самым, была дана неожиданная переформулировка гипотезы асферичности Уайтхеда, утверждающей асферичность подкомплекса асферического двумерного связного комплекса [48].

2.1. Скрещенные модули

Гомологии скрещенных модулей. Классифицирующий функтор

$$B\colon \mathcal{CM} \to \mathcal{T}op$$

определен Лодэем [47]. Для данного скрещенного модуля (M, ∂, G) пространство $B(M, \partial, G)$ имеет следующие гомотопические группы:

$$\pi_1 B(M, \partial, G) = \mathrm{coker}(\partial), \qquad \pi_2 B(M, \partial, G) = \ker(\partial), \qquad \pi_i B(M, \partial, G) = 0, \quad i \geqslant 3,$$

и обладает свойством, что $\mathcal{L}_1 B(M, \partial, G)$ слабо эквивалентно (M, ∂, G) в $\mathcal{CM}$. В работе [47] показано, что этот функтор может быть построен как геометрическая реализация диагонали бинерва $\mathcal{NN}L(M, \partial, G)$, являющегося бисимплициальным множеством.

Существуют различные пути введения гомологий в рассматриваемых категориях. Например, Эллис определяет гомологии скрещенного модуля (M, ∂, G) как гомологии его классифицирующего пространства $H_* B(M, \partial, G)$ [49]. Это определение удобно с точки зрения вычислений, так как расслоение

$$K(\ker(\partial), 2) \to B(M, \partial, G) \to K(\mathrm{coker}(\partial), 1)$$

приводит к спектральной последовательности

$$E^2_{p,q} = H_p(\mathrm{coker}(\partial), H_q K(\ker(\partial), 2)) \quad \Longrightarrow \quad H_{p+q} B(M, \partial, G).$$

В работе [50] авторы показали, что $\mathcal{CM}$ является триадной категорией над множествами, и определили гомологии скрещенных модулей[1] в смысле Барра и Бека [51]. Гомологии, определенные в [50], есть функторы $H_*\colon \mathcal{CM} \to \mathcal{A}b(\mathcal{CM})$ из категории $\mathcal{CM}$ в категорию $\mathcal{A}b(\mathcal{CM})$ абелевых скрещенных модулей. Напомним, что скрещенный модуль (A, ∂, B) называется *абелевым*, если группы A, B абелевы и действие B на A тривиально. Категория абелевых скрещенных модулей оказывается естественным образом эквивалентной категории правых модулей над кольцом нижнетреугольных целочисленных матриц

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

[1] Категории скрещенных модулей являются алгебраическими категориями в смысле Квиллена, поэтому гомологии в этих категориях естественно могут быть определены как пучковые гомологии на подходящем сайте Гротендика (см. [5; 5.6]). Это же относится и к гомологиям в категориях n-типов (см. [52]).

Таким образом, для любого скрещенного модуля (M, ∂, G) имеем

$$H_*(M, \partial, G) = (\xi H_*(M, \partial, G), h_*, kH_*(M, \partial, G)),$$

где $\xi H_*(M, \partial, G)$, $kH_*(M, \partial, G)$ – абелевы группы с тривиальным действием $kH_*(M, \partial, G)$ на $\xi H_*(M, \partial, G)$.

Мы будем использовать следующие свойства гомологий скрещенных модулей.

Свойство 2.1.1 [53]. Для любого скрещенного модуля (M, ∂, G) существует естественная длинная точная последовательность абелевых групп

$$\cdots \to H_{n+1}B(M, \partial, G) \to \xi H_n(M, \partial, G) \to H_n(G) \to H_nB(M, \partial, G) \to \cdots . \tag{2.1.1}$$

Свойство 2.1.2 (5-членная последовательность для скрещенных модулей) [50]. Пусть

$$(N, \mu, R) \to (Q, \mu, F) \to (T, \partial, G)$$

– короткая точная последовательность скрещенных модулей. Тогда существует длинная точная последовательность абелевых скрещенных модулей

$$H_2(Q, \mu, F) \to H_2(T, \partial, G) \to (\frac{N}{[F, N][R, Q]}, \mu, R/[F, R]) \to H_1(Q, \mu, F) \to H_1(T, \partial, G) \to 0. \tag{2.1.2}$$

Инварианты Бэра и нильпотентная аппроксимируемость скрещенных модулей. Определим *нижний центральный ряд* $\{\gamma_i(G, M)\}_{i\geqslant 1}$ для скрещенного модуля $\partial\colon M \to G$ по индукции: $\gamma_1(G, M) := M$ и $\gamma_{i+1}(G, M)$ – подгруппа в M, порожденная элементами

$$[g, m] := (g \circ m)m^{-1}, \qquad m \in \gamma_i(G, M), \quad g \in G. \tag{2.1.3}$$

Обозначим пересечение подгрупп $\gamma_i(G, M)$, $i \geqslant 1$, как $\gamma_\omega(G, M)$. Скрещенный модуль (M, ∂, G) назовем *нильпотентно апроксимируемым*, если $\gamma_\omega(G, M) = \{1\}$. Также будем использовать стандартные обозначения $\gamma_i(G)$, $1 \leqslant i \leqslant \omega$, для нижнего центрального ряда группы G и $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$.

Определим *инварианты Бэра* скрещенного модуля (M, ∂, G) как

$$B^{(k)}(M, \partial, G) = \ker\{\partial_*\colon M/\gamma_{k+1}(G, M) \to G/\gamma_{k+1}(G)\}.$$

В случае асферичного скрещенного модуля (R, ∂, F) и свободной группы F инварианты Бэра (R, ∂, F) есть классические инварианты Бэра группы $\mathrm{coker}(\partial)$, определяемые как

$$B^{(k)}(F/R) := \frac{R \cap \gamma_k(F)}{[R,_k F]}, \qquad k \geqslant 2,$$

где $[R,_1 F] = [R, F]$, $[R,_{k+1} F] = [[R,_k F], F]$. Хорошо известно, что в случае группы $G = F/R$ абелева группа $B^{(k)}(G)$ не зависит от выбора F и R.

Инварианты Бэра в категории скрещенных модулей, а также в более общих категориях интенсивно изучались (см., например, [54], [55]). Обычно инварианты Бэра определяются как производные функторы факторов по аналогам нижнего центрального ряда в данной категории. Наше же определение инвариантов Бэра скрещенных модулей является в некотором смысле примитивным, направленным на прямое обобщение классических инвариантов Бэра для групп.

Для любого скрещенного модуля (M, ∂, G) существует следующая точная последовательность:

$$H_2(G) \to H_2(B(M, \partial, G)) \to M/\gamma_2(G, M) \to G/\gamma_2(G) \to H_1(\mathrm{Coker}(\partial)) \to 0.$$

В частности, если $H_2(G) = 0$ (например, когда G свободная), то выполнено $B^{(1)}(M, \partial, G) = H_2B(M, \partial, G)$.

Теорема 2.1.1. *Пусть* (M, ∂, F) *– скрещенный модуль, для которого группа* F *свободная,* $H_1(\mathrm{Coker}(\partial))$ *свободная абелева и* $H_2B(M, \partial, F) = 0$. *Тогда для всех* $n \geqslant 1$

$$B^{(n)}(M, \partial, F) = 0.$$

Доказательство. Будем доказывать индукцией по k. По условию $B^{(1)}(M, \partial, F) = 0$. Пусть $B^{(k)}(M, \partial, F) = 0$ для некоторого k. Докажем то же самое для $k+1$. Рассмотрим короткую точную последовательность скрещенных модулей

$$(\gamma_k(F, M), \partial_k, \gamma_k(F)) \to (M, \partial, F) \to (M/\gamma_k(F, M), \partial_k^*, F/\gamma_k(F)),$$

где $\partial_k^* \colon M/\gamma_k(F, M) \to F/\gamma_k(F)$ – гомоморфизм, индуцированный гомоморфизмом $\partial \colon M \to F$. Данная последовательность индуцирует следующий эпиморфизм, следующий из пятичленной последовательности для скрещенных модулей (2.1.2):

$$H_2(M/\gamma_k(F, M), \partial_k^*, F/\gamma_k(F)) \to (\gamma_k(F, M)/\gamma_{k+1}(F, M), \partial_k^*, \gamma_n(F)/\gamma_{n+1}(F)).$$

То есть мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(h_2) \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "q"] & \xi H_2(M/\gamma_k(F, M), \partial_k^*, F/\gamma_k(F)) \arrow[r] \arrow[d, "s"] & H_2(F/\gamma_k(F)) \\
0 \arrow[r] & \ker(\partial_k^*) \arrow[r] & \gamma_k(F, M)/\gamma_{k+1}(F, M) \arrow[r] & \gamma_k(F)/\gamma_{k+1}(F)
\end{tikzcd} \tag{2.1.4}$$

где s – эпиморфизм. Таким образом, q также является эпиморфизмом.

Ввиду точности последовательности

$$0 \to \ker(\partial_k^*) \to B^{(k+1)}(M, \partial, F) \to B^{(k)}(M, \partial, F)$$

и диаграммы (2.1.4) достаточно показать, что $\ker(h_2) = 0$. Но благодаря длинной точной последовательности (2.1.1) $\ker(h_2)$ можно представить как

$$\ker(h_2) = \mathrm{coker}\{H_3(F/\gamma_n(F)) \to H_3(B(M/\gamma_k(F, M), \partial_k, F/\gamma_k(F)))\}.$$

Отметим, что $\ker(\partial_k) = B^{(k)}(M, \partial, F) = 0$ по предположению индукции, таким образом,

$$B(M/\gamma_k(F, M), \partial_k, F/\gamma_k(F)) = K(\mathrm{coker}(\partial)/\gamma_k(\mathrm{coker}(\partial)), 1)$$

и

$$\ker(h_2) = \mathrm{coker}\{H_3(F/\gamma_k(F)) \to H_3(\mathrm{coker}(\partial)/\gamma_k(\mathrm{coker}(\partial)))\}. \tag{2.1.5}$$

Так как $H_1(\mathrm{coker}(\partial))$ свободная абелева, существует подгруппа H в F такая, что ограничение гомоморфизма ∂

$$\partial|_H \colon H \to \mathrm{coker}(\partial)$$

индуцирует изоморфизм абеленизаций

$$H/\gamma_2(H) \simeq \mathrm{coker}(\partial)/\gamma_2(\mathrm{coker}(\partial)).$$

Отметим, что выполнено $H_2(\mathrm{coker}(\partial)) = 0$, так как $H_2(B(M, \partial, F)$ отображается эпиморфно на $H_2(\mathrm{coker}(\partial))$. Следовательно, $\partial|_H$ индуцирует изоморфизм факторов

$$H/\gamma_n(H) \simeq \mathrm{coker}(\partial)/\gamma_n(\mathrm{coker}(\partial))$$

для всех $n \geqslant 1$. Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} H_*(H/\gamma_n(H)) & \longrightarrow & H_*(\mathrm{coker}(\partial)/\gamma_n(\partial)) \\ \downarrow & & \uparrow \\ H_*(H/H\cap\gamma_n(F)) & \longrightarrow & H_*(F/\gamma_n(F)) \end{array} \tag{2.1.6}$$

в которой верхний горизонтальный гомоморфизм – изоморфизм. Из диаграммы (2.1.6) следует эпиморфность естественного гомоморфизма $H_*(F/\gamma_n(F)) \to H_*(G/\gamma_n(G))$ для всех $n \geqslant 1$, и, следовательно, $\ker(h_2) = 0$ ввиду (2.1.5).

Следствие 2.1.1. *Пусть* (M, ∂, F) *– скрещенный модуль, для которого группа* F *свободная,* $H_1(\mathrm{coker}(\partial))$ *свободная абелева и* $H_2B(M, \partial, F) = 0$. *Тогда* $\ker(\partial) = \gamma_\omega(F, M)$.

Доказательство. Очевидно, имеем

$$\frac{\ker(\partial)}{\ker(\partial)\cap\gamma_n(F,M)} \subseteq \ker\{M/\gamma_n(F,M) \to F/\gamma_n(F)\}, \qquad n \geqslant 1. \tag{2.1.7}$$

Из теоремы 2.1.1 следует, что выполнено $B^{(n)}(M, \partial, F) = 0$, т.е. ядро (2.1.7) тривиально и $\ker(\partial) \in \gamma_n(F, M)$ для всех $n \geqslant 1$. С другой стороны, $\partial(\gamma_n(F, M)) \subseteq \gamma_n(F)$. Следовательно, $\partial(\gamma_\omega(F, M)) \subseteq \gamma_\omega(F) = 1$. Получаем $\gamma_\omega(F, M) \subseteq \ker(\partial)$.

Аналогично теореме 2.1.1 доказывается следующая

Теорема 2.1.2. *Пусть* (M, ∂, F) *– скрещенный модуль, для которого группа* F *свободна и* $H_2B(M, \partial, F) \otimes \mathbb{Q} = 0$. *Тогда для всех* $n \geqslant 1$

$$B^{(n)}(M, \partial, F) \otimes \mathbb{Q} = 0.$$

Доказательство. Доказываем индукцией по k. Предположим, что $B^{(k)}(M, \partial, F) \otimes \mathbb{Q} = 0$ для некоторого $k \geqslant 1$. Используя диаграмму (2.1.4) и аргументы, использованные в доказательстве теоремы 2.1.1, легко показать, что для завершения индуктивного шага достаточно показать, что группа

$$\ker(h_2) = \mathrm{coker}\{H_3(F/\gamma_n(F)) \to H_3B(M/\gamma_k(F, M), \partial_k^*, F/\gamma_k(F))\}$$

состоит из элементов конечного порядка.

Расслоение

$$K(B^{(k)}(M, \partial, F), 2) \to B(M/\gamma_k(F, M), \partial_k^*, F/\gamma_k(F)) \to K(\mathrm{coker}(\partial)/\gamma_k(\mathrm{coker}(\partial)), 1)$$

задает гомологическую спектральную последовательность

$$\begin{aligned} E^2_{p,q} = H_p(\mathrm{Coker}(\partial)/\gamma_k(\mathrm{Coker}(\partial)), H_qK(B^{(k)}(M, \partial, F), 2)) \\ \Longrightarrow \quad H_{p+q}B(M/\gamma_k(F, M), \partial_k^*, F/\gamma_k(F)) \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Хорошо известно, что для любой абелевой группы A

$$H_1K(A, 2) = 0, \qquad H_2K(A, 2) = A, \qquad H_3K(A, 2) = 0,$$

следовательно, спектральная последовательность (2.1.8) приводит к точной последовательности

$$H_1(\mathrm{coker}(\partial)/\gamma_k(\mathrm{coker}(\partial)), B^{(k)}(M, \partial, F)) \to H_3B(M/\gamma_k(F, M), \partial_k^*, F/\gamma_k(F))$$

$$\to H_3(\mathrm{coker}(\partial)/\gamma_k(\mathrm{coker}(\partial))) \to H_0(\mathrm{coker}(\partial)/\gamma_k(\mathrm{coker}(\partial)), B^{(k)}(M, \partial, F)) \qquad (2.1.9)$$

По предположению индукции имеем $B^{(k)}(M, \partial, F) \otimes \mathbb{Q} = 0$. Следовательно, после тензорного умножения последовательности (2.1.9) на $\mathbb{Q}$ получаем естественный изоморфизм

$$H_3B(M/\gamma_k(F, M), \partial_k^*, F/\gamma_k(F)) \otimes \mathbb{Q} \simeq H_3(\mathrm{coker}(\partial)/\gamma_k(\mathrm{coker}(\partial))) \otimes \mathbb{Q}.$$

Таким образом, имеем

$$\ker(h_2) \otimes \mathbb{Q} = \ker\{H_3(F/\gamma_3(F)) \to H_3(\mathrm{coker}(\partial)/\gamma_k(\mathrm{coker}(\partial)))\}.$$

Далее действуем, как в доказательстве теоремы 2.1.1: выбираем подгруппу H в F такую, что имеет место изоморфизм $\mathbb{Q}$-модулей

$$f|_H \colon H \otimes \mathbb{Q} \to \mathrm{coker}(\partial) \otimes \mathbb{Q}.$$

Применяя теперь $\mathbb{Q}$-версию теоремы Столлингса, получаем, что $f|_H$ индуцирует изоморфизмы $\mathbb{Q}$-локализаций

$$H/\gamma_k(H) \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathrm{coker}(\partial)/\gamma_k(\mathrm{coker}(\partial)) \otimes \mathbb{Q}.$$

Теперь тот же аргумент, что и в доказательстве теоремы 2.1.1 приводит к $\ker(h_2) \otimes \mathbb{Q} = 0$.

Теоретико-групповые приложения. Рассматривая асферичные скрещенные модули, получаем следующие утверждения об инвариантах Бэра групп.

Следствие 2.1.2. *Пусть G – группа такая, что G_{ab} свободная абелева и $H_2(G) = 0$. Тогда $B^{(k)}(G) = 0$, $k \geqslant 2$.*

Следствие 2.1.3. *Пусть G – группа такая, что $H_2(G) \otimes \mathbb{Q} = 0$. Тогда $B^{(k)}(G) \otimes \mathbb{Q} = 0$, $k \geqslant 2$.*

Следствие 2.1.3 доказано в работе [23] с помощью симплициальных методов. Отметим, что можно ввести естественный аналог обобщенной фильтрации Дваера для скрещенных модулей. Покажем, как это можно сделать в случае $k = 1$, т.е. как обобщить классическую фильтрацию Дваера на случай скрещенных модулей.

Для двух скрещенных G-модулей $\partial_1 \colon M \to G$, $\partial_2 \colon N \to G$ строится скрещенный модуль $\partial_1\partial_2 \colon M \circ N \to G$, представляющий собой коамальгаму в категории G-скрещенных модулей [56], [57]. При этом имеет место следующая точная последовательность абелевых групп:

$$\ker(\partial_1) \oplus \ker(\partial_2) \to \ker(\partial_1\partial_2) \to \frac{R \cap S}{[R, S]} \to 0, \qquad (2.1.10)$$

где $R = \mathrm{im}(\partial_1)$, $S = \mathrm{im}(\partial_2)$.

Пусть $\mathcal{M} = (M, \partial, G)$ – скрещенный модуль. Введем следующие обозначения скрещенных модулей:

$$\mathcal{M}_2 := (\gamma_2(G, M), \partial_2, \gamma_2(G)), \qquad \mathcal{G}_k := (\gamma_k(G), f_k, G),$$

где f_k – естественное вложение $\gamma_k(G) \to G$.

Определим убывающую фильтрацию

$$H_2B\mathcal{M} = \phi_2 H_2B\mathcal{M} \supseteq \phi_3 H_2B\mathcal{M} \supseteq \cdots$$

как

$$\phi_k H_2B\mathcal{M} := \mathrm{coker}\{\pi_2 B(\mathcal{G}_k \circ \mathcal{M}_2) \to \pi_2 B(\mathcal{G}_k \circ \mathcal{M})\}.$$

Тогда из последовательности (2.1.10) непосредственно следует

Предложение 2.1.1. *Пусть $\mathcal{M} = (M, \partial, G)$ – скрещенный модуль и G – свободная группа. Тогда для каждого $k \geqslant 2$ имеет место следующая точная последовательность:*

$$\pi_2 B\mathcal{M} \to \phi_k H_2 B\mathcal{M} \to \phi_k(\mathrm{coker}(\partial)) \to 1,$$

где

$$\phi_k(\mathrm{coker}(\partial)) = \ker\{H_2(\mathrm{coker}(\partial) \to H_2(\mathrm{coker}(\partial)/\gamma_{k-1}(\mathrm{coker}(\partial))\}$$

– фильтрация Дваера. В частности, если скрещенный модуль $\mathcal{M}$ коккрофтов, т.е. гомоморфизм Гуревича $\pi_2 B\mathcal{M} \to H_2 B\mathcal{M}$ тривиален, то для любого $k \geqslant 2$ имеет место изоморфизм

$$\phi_k H_2 B\mathcal{M} = \phi_k(\mathrm{coker}(\partial)).$$

Трансфинитные обобщения. Нижний центральный ряд $\{\gamma_n(G, M)\}_{n\geqslant 1}$ для скрещенного модуля (M, ∂, G) можно естественным образом продолжить на трансфинитные ординалы, определив $\gamma_{\tau+1}(G, M)$ как подгруппу в M, порожденную элементами $[g, m]$, $m \in \gamma_\tau(G, M)$, $g \in G$. В случае предельного ординала, как обычно, определяем соответствующий член ряда как пересечение предыдущих.

Последовательности (2.1.1) и (2.1.2) непосредственно приводят к следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
H_3B(M,\partial,G) \arrow[r] \arrow[d] & \xi H_2(M,\partial,G) \arrow[r] \arrow[d] & H_2(G) \arrow[d] \\
H_3B\left(\frac{M}{\gamma_\omega(G,M)}, \overline{\partial}, G/\gamma_\omega(G)\right) \arrow[r] \arrow[d] & \xi H_2\left(\frac{M}{\gamma_\omega(G,M)}, \overline{\partial}, G/\gamma_\omega(G)\right) \arrow[r] \arrow[d] & H_2(G/\gamma_\omega(G)) \arrow[d] \\
\ker(\partial_\omega) \arrow[r] & \gamma_\omega(G,M)/\gamma_{\omega+1}(G,M) \arrow[r, "\partial_\omega"] \arrow[d] & \gamma_\omega(G)/\gamma_{\omega+1}(G) \arrow[d] \\
 & 0 & 0
\end{tikzcd} \qquad (2.1.11)$$

где гомоморфизм $\overline{\partial}\colon M/\gamma_\omega(G, M) \to G/\gamma_\omega(G)$ индуцирован гомоморфизмом ∂. В случае свободной группы $G = F$ получаем следующую точную последовательность:

$$H_3B(M, \partial, F) \to H_3B(M/\gamma_\omega(F, M), \overline{\partial}, F) \to \gamma_\omega(F, M)/\gamma_{\omega+1}(F, M) \to 0. \qquad (2.1.12)$$

В категории $\mathcal{C}M$ естественным образом определяются проективные объекты (см., например, [57]). При этом имеется теоретико-групповая характеристика проективных скрещенных модулей. В [58] показано, что скрещенный модуль (M, ∂, G) является проективным тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(1) M_{ab} является проективным $\mathbb{Z}[\mathrm{Coker}(\partial)]$-модулем;

(2) гомоморфизм $H_2(M) \to H_2(G)$ тривиален.

Из точной последовательности (2.1.12) вытекает следующее

Предложение 2.1.2. *Пусть (M, ∂, F) – проективный скрещенный модуль, F свободна. Тогда имеет место следующий изоморфизм:*

$$H_3B(M/\gamma_\omega(F, M), \overline{\partial}, F) \simeq \gamma_\omega(F, M)/\gamma_{\omega+1}(F, M). \qquad (2.1.13)$$

В частности, если к тому же $H_2B(M, \partial, F) = 0$ и $H_1(\mathrm{coker}(\partial))$ свободная абелева, то имеем

$$H_3(\mathrm{coker}(\partial)) \simeq \gamma_\omega(F, M)/\gamma_{\omega+1}(F, M). \qquad (2.1.14)$$

Доказательство. В работе [59] показано, что в случае проективного скрещенного модуля (M, ∂, F) и свободной F имеем $H_3 B(M, \partial, F) = 0$. Изоморфизм (2.1.13) следует из точности последовательности (2.1.12). Пусть теперь $H_2 B(M, \partial, F) = 0$ и $H_1(\mathrm{coker}(\partial))$ свободная абелева. Тогда по теореме 2.1.1 получаем, что скрещенный модуль $(M/\gamma_\omega(F, M), \overline{\partial}, F)$ асферичен и $\mathrm{coker}(\partial) = \mathrm{coker}(\overline{\partial})$, откуда следует, что $B(M/\gamma_\omega(F, M), \overline{\partial}, F)$ есть просто $K(\mathrm{coker}(\partial), 1)$ и требуемый изоморфизм следует из (2.1.13). Естественно, (2.1.14) можно непосредственно получить из теоремы 2.1.1 и последовательности Хопфа (последовательности, получаемой из абеленизации скрещенного модуля с последующим применением функтора $H_0(\mathrm{coker}(\partial), \cdot))$.

2.2. Точность действия и аппроксимационные свойства cat^1-групп

Пусть G – группа, M – правый $\mathbb{Z}[G]$-модуль. Напомним, что модуль M называется *точным*, если

$$\mathrm{Ann}(M) := \{\alpha \in \mathbb{Z}[G] \mid M.\alpha = 0\} = 0,$$

и мы говорим, что G *действует точно на* M (или действие G на M является точным), если $G \cap (1 + \mathrm{Ann}(M)) = 1$.

Теорема 2.2.1. *Пусть $\partial \colon M \to F$ – неасферичный скрещенный проективный модуль, F – свободная группа. Тогда стандартное действие* $\mathrm{coker}(\partial)$ *на* $\ker(\partial)$ *является точным.*

Доказательство. Рассмотрим абеленизацию центрального расширения, определенного скрещенным модулем (M, ∂, F):

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\partial) \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & M \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & \mathrm{im}(\partial) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 0 \arrow[r] & \frac{\mathrm{Ker}(\partial)}{\mathrm{Ker}(\partial)\cap\gamma_2(M)} \arrow[r] & M_{ab} \arrow[r, "\partial'"] & \mathrm{im}(\partial)_{ab} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

Предположим, что $\mathrm{Ker}(\partial) \subseteq \gamma_2(M)$. Тогда, используя тот факт, что $\mathrm{Ker}(\partial)$ центральна в M, ввиду пятичленной последовательности Столлингса–Штаммбаха получаем следующую точную последовательность абелевых групп:

$$H_2(M) \to H_2(\mathrm{im}(\partial)) \to \mathrm{Ker}(\partial) \to 0. \tag{2.2.2}$$

Группа $\mathrm{im}(\partial)$ свободна, поэтому $\mathrm{Ker}(\partial) = 0$, и мы получаем противоречие с неасферичностью рассматриваемого скрещенного модуля.

Докажем теперь, что действие $\mathrm{Coker}(\partial)$ на $\mathrm{Ker}(\partial)$ является точным. Предположим, что $g \in \mathrm{Coker}(\partial)$ – такой элемент, что $g \circ x = x$ для всех $x \in \mathrm{Ker}(\partial)$. Тогда элемент $g - 1$ также аннулирует $\mathbb{Z}[\mathrm{Coker}(\partial)]$-модуль $\frac{\mathrm{Ker}(\partial)}{\mathrm{Ker}(\partial)\cap\gamma_2(M)}$. Обозначим через E циклическую подгруппу в $\mathrm{Coker}(\partial)$, порожденную g.

В силу условия скрещенный модуль (M, ∂, F) является проективным, поэтому M_{ab} является проективным $\mathbb{Z}[\mathrm{Coker}(\partial)]$-модулем, т.е. существует такой $\mathbb{Z}[\mathrm{Coker}(\partial)]$-модуль N, что $M_{ab} \oplus N$ – свободный $\mathbb{Z}[\mathrm{Coker}(\partial)]$-модуль. Так как $\frac{\mathrm{Ker}(\partial)}{\mathrm{Ker}(\partial)\cap\gamma_2(M)}$ вкладывается в свободный $\mathbb{Z}[\mathrm{Coker}(\partial)]$-модуль $M_{ab} \oplus N$, мы заключаем, что $g - 1$ имеет нетривиальный аннулятор в $\mathbb{Z}[\mathrm{Coker}(\partial)]$ и поэтому g имеет конечный порядок в $\mathrm{Coker}(\partial)$.

Применяя функтор гомологий $H_*(E, \cdot)$ к нижней последовательности в (2.2.1), рассматриваемой как короткая точная последовательность $\mathbb{Z}[\mathrm{Coker}(\partial)]$-модулей, и используя тот факт, что

$$H_i(E, M_{ab}) \subseteq H_i(E, M_{ab} \oplus N) = 0, \qquad i \geqslant 1,$$

получаем

$$H_i\left(E, \frac{\operatorname{Ker}(\partial)}{\operatorname{Ker}(\partial)\cap\gamma_2(M)}\right) \simeq H_{i+1}(E, \operatorname{im}(\partial)_{ab}), \qquad i \geqslant 1. \tag{2.2.3}$$

По предположению $\frac{\operatorname{Ker}(\partial)}{\operatorname{Ker}(\partial)\cap\gamma_2(M)}$ является тривиальным $\mathbb{Z}[E]$-модулем. Поэтому

$$H_{2i}(E, \operatorname{Ker}(\partial')) = 0, \qquad i \geqslant 1, \tag{2.2.4}$$

ввиду того, что $\operatorname{Ker}(\partial')$ – свободная абелева группа (она является подгруппой в $M_{ab} \oplus N$).

Заметим, что $\mathbb{Z}[\operatorname{Coker}(\partial)]$-модуль $\operatorname{im}(\partial)_{ab}$ совпадает с модулем соотношений, построенным по копредставлению

$$1 \to \operatorname{im}(\partial) \to F \to \operatorname{Coker}(\partial) \to 1.$$

Рассмотрим следующую точную последовательность $\mathbb{Z}[\operatorname{Coker}(\partial)]$-модулей:

$$0 \to \operatorname{im}(\partial)_{ab} \xrightarrow{\mu} W \to \mathbb{Z}[\operatorname{Coker}(\partial)] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0, \tag{2.2.5}$$

где W – свободный $\mathbb{Z}[\operatorname{Coker}(\partial)]$-модуль, μ – вложение Магнуса, ϵ – аугментационное отображение. Применяя функтор $H_*(E, -)$ к последовательность (2.2.5), мы заключаем, что

$$H_{2i+1}(E, \mathbb{Z}) \simeq H_{2i-1}(E, \operatorname{im}(\partial)_{ab}), \qquad i \geqslant 1.$$

Теперь (2.2.3) и (2.2.4) влекут то, что E – тривиальная группа. Поэтому $g = 1$ в $\operatorname{Coker}(\partial)$ и действие группы $\operatorname{Coker}(\partial)$ на $\frac{\operatorname{Ker}(\partial)}{\operatorname{Ker}(\partial)\cap\gamma_2(M)}$, а следовательно, и на $\operatorname{Ker}(\partial)$ является точным.

Известная теорема Уайтхеда, по сути явившаяся отправной точкой в теории скрещенных модулей, утверждает, что для любого двумерного CW-комплекса K, его фундаментальный скрещенный модуль

$$\partial\colon \pi_2(K, K^{(1)}) \to \pi_1(K^{(1)}) \tag{2.2.6}$$

($K^{(1)}$ – одномерный остов K) является свободным, а следовательно, проективным скрещенным модулем. Поэтому из теоремы 2.2.1 следует, что для любого неасферичного двумерного комплекса K стандартное действие $\pi_1(K)$ на $\pi_2(K)$ является точным. В случае когда комплекс X является доминируемым двумерным комплексом, фундаментальный скрещенный модуль (2.2.6) также является проективным [58]. Поэтому точность действия $\pi_1(K)$ на $\pi_2(K)$ имеет место и в случае 2-доминируемости комплекса K. При этом сам модуль $\pi_2(K)$, естественно, не обязан быть $\mathbb{Z}[\pi_1(K)]$-точным. Например, в случае проективной плоскости $K = P^2$ элемент $1 + g$ аннулирует весь модуль $\pi_2(K) \simeq \mathbb{Z}$ (g – нетривиальный элемент в $\pi_1(K)$).

Напомним, что тройка $\mathcal{M} = (M, \partial, G)$ называется *прескрещенным модулем*, если выполнено лишь условие $CM1$. Скрещенный модуль $\mathcal{M}^{cr}$ может быть получен из $\mathcal{M}$ факторизацией по скобкам Пайффера $\langle c, b\rangle = cbc^{-1}\partial(c) \circ b^{-1}$, $c, b \in M$. В [48] сформулированы следующие гипотезы (см. гипотезы 4.17 и 4.18).

Сильная гипотеза: пусть $\mathcal{M}$ – прескрещенный модуль, у которого $H_1(\operatorname{coker}(\partial))$ свободная абелева и $H_2(\operatorname{coker}(\partial)) = 0$; тогда скрещенный модуль $\mathcal{M}^{cr}$ нильпотентно аппроксимируем.

Слабая гипотеза формулируется аналогично с дополнительным условием $H_n(\operatorname{coker}(\partial))$, $n \geqslant 2$.

Из результатов [48] следует, что как слабая, так и сильная гипотезы влекут гипотезу асферичности Уайтхеда. Но теорема 2.2.1 позволяет получить простые контрпримеры к этим гипотезам. Пусть G – группа с одним соотношением, не являющаяся нильпотентно аппроксимируемой, у которой $H_1(G)$ свободная абелева, $H_n(G) = 0$, $n \geqslant 2$. К примеру, можно взять группу трилистника. Пусть K – некоторый двумерный неасферичный комплекс с фундаментальной группой G. Тогда фундаментальный скрещенный модуль $\partial\colon \pi_2(K, K^{(1)}) \to \pi_1(K^{(1)})$ не является нильпотентно аппроксимируемым. Чтобы увидеть это, достаточно заметить, что

$$(g-1)\circ m \in \gamma_k(G, M), \qquad m \in \ker(\partial), \quad g \in \gamma_k(\operatorname{coker}(\partial)), \quad k \geqslant 2,$$

для любого скрещенного модуля (M, ∂, G). Детальное доказательство этого факта изложено в [60], хотя надо отметить, что доказательство в [60] не является оптимальным и простейшим. Далее берем любой элемент $g \in \gamma_\omega(G)$ и при предположении нильпотентной аппроксимируемости фундаментального скрещенного модуля K получаем, что $g-1$ аннулирует модуль $\ker(\partial) = \pi_2(K)$. Но это противоречит утверждению теоремы 2.2.1. Отсюда следует, что фундаментальный скрещенный модуль комплекса K не является нильпотентно аппроксимируемым, что дает контрпримеры к упомянутым гипотезам.

Ниже мы будем использовать аналогичный аргумент, но для производного ряда в группах и cat^1-группах. Через $\mathcal{P}(G)$ будем обозначать совершенный радикал группы G, т.е. наибольшую максимальную подгруппу в G, равную своему коммутанту. Ниже мы также будем использовать термин “разрешимая аппроксимируемость” и в отношении cat^1-групп. При этом будем говорить, что cat^1-группа (G, s, t) *разрешимо аппроксимируема*, если разрешимо аппроксимируема группа G.

Для данного комплекса K через K^+ обозначается плюс-конструкция K. Напомним, что комплекс K^+ получается из комплекса K приклеиванием двумерных и трехмерных клеток и универсален относительно свойства тривиальности совершенного радикала $\mathcal{P}(\pi_1(K^+))$ фундаментальной группы $\pi_1(K^+)$. При этом фундаментальная группа K^+ оказывается изоморфной фактору $\pi_1(K)/\mathcal{P}(\pi_1(K))$.

Теорема 2.2.2. *Пусть K – двумерный комплекс, для которого K^+ асферичен. Тогда следующие условия эквивалентны*:
(i) $\mathfrak{L}^1(K)$ *разрешимо аппроксимируема*;
(ii) K *асферичен*.

Доказательство. Тот факт, что (ii) влечет (i), очевиден. Действительно, если комплекс K асферичен, имеем точную последовательность групп

$$1 \to \pi_2(K, K^{(1)}) \to \pi_1(K^{(1)}) \to \pi_1(K) \to 1,$$

т.е. группа $\pi_2(K, K^{(1)})$ является подгруппой свободной группы $\pi_1(K^{(1)})$. Обозначим $R = \pi_2(K, K^{(1)})$, $F = \pi_1(K^{(1)})$. Тогда, очевидно,

$$\gamma_\omega(\mathcal{L}^1(K)) = \gamma_\omega(R \rtimes F) = \bigcap_{k \geqslant 2} [R,_k F] = 1,$$

т.е. группа $R \rtimes F$ нильпотентно аппроксимируема. Поэтому (ii) влечет (i). Условие (i), очевидно, выполняется для любого асферичного комплекса K.

Теперь предположим, что группа $\mathcal{L}^1(K)$ разрешимо аппроксимируема, а комплекс K не является асферичным. Из того, что плюс-конструкция K^+ асферична, следует, что $\pi_1(K)$ имеет нетривиальный совершенный радикал $\mathcal{P}(\pi_1(K))$. Таким образом, мы можем найти нетривиальный элемент $x \in \delta_n(\pi_1(K))$ для всех $n \geqslant 1$.

Заметим, что для любого скрещенного модуля $\partial \colon M \to P$ имеет место включение

$$(p-1) \circ m \in \delta_n(M \rtimes P), \qquad p \in \delta_n(P), \quad m \in M,$$

ввиду того, что $(x-1) \circ m = [m, x]$. Следовательно,

$$(x-1) \circ m \in \delta_n(\pi_2(K, K^{(1)}) \rtimes \pi_1(K^{(1)})), \qquad m \in \pi_2(K), \quad n \geqslant 1.$$

Разрешимая аппроксимируемость группы $\mathcal{L}^1(K)$ влечет то, что элемент $x-1$ аннулирует весь модуль $\pi_2(K)$, но это противоречит точности действия $\pi_1(K)$ на $\pi_2(K)$ (теорема 2.2.1). Поэтому $\pi_2(K) = 0$ и условие (i) влечет условие (ii).

Условие асферичности плюс-конструкции возникает достаточно естественно в ряде случаев. В работе [61] показано, что для данного двумерного комплекса K следующие условия эквивалентны:

(i) K^+ асферичен;
(ii) накрывающее пространство $K_{\mathcal{P}(\pi_1(K))}$ комплекса K с $\pi_1(K_{\mathcal{P}(\pi_1(K))}) = \mathcal{P}(\pi_1(K))$ ациклично;
(iii) $H_2(\mathcal{P}(\pi_1(K))) = 0$ и K является $\mathcal{P}(\pi_1(K))$-коккрофтовым комплексом[2].

В частности, для любого подкомплекса K асферичного двумерного комплекса L плюс-конструкция K^+ асферична [12]. Отсюда следует, что гипотеза асферичности Уайтхеда, утверждающая, что любой подкомплекс связного асферичного двумерного комплекса асферичен, может быть переформулирована в теоретико-групповых терминах.

Следствие 2.2.1. *Пусть L – асферичный двумерный комплекс, K – подкомплекс L. Тогда следующие условия эквивалентны*:
(i) *комплекс K асферичен*;
(ii) *фундаментальная* cat^1*-группа* $\mathcal{L}^1(K)$ *разрешимо аппроксимируема.*

Следуя методам работ [40] и [62], можно получить гомологические условия, обеспечивающие эквивалентность асферичности и разрешимой аппроксимируемости фундаментальной cat^1-группы.

Следствие 2.2.2. *Пусть K – двумерный комплекс, у которого $H_1(K)$ без кручения и $H_2(K) = 0$. Тогда следующие условия эквивалентны*:
(i) $\mathfrak{L}^1(K)$ *разрешимо аппроксимируема*;
(ii) K *асферичен.*

Доказательство следует схеме доказательства теоремы 4.3 из [62].

Группа G называется *E-группой* (см. [40]), если:
1) абеленизация G_{ab} не содержит кручения;
2) существует $\mathbb{Z}[G]$-резольвента над $\mathbb{Z}$

$$P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

такая, что гомоморфизм

$$1 \otimes \partial_2 \colon \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} P_2 \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} P_1$$

является мономорфизмом.

В [40] показано, что совершенный радикал $\mathcal{P}(G)$ E-группы G также является E-группой. Более того, в качестве $\mathbb{Z}[\mathcal{P}(G)]$-резольвенты можно взять $\mathbb{Z}[G]$-резольвенту такую, что $1 \otimes \partial_2$ – мономорфизм, при этом $1 \otimes_{\mathbb{Z}[\mathcal{P}(G)]} \partial_2$ также будет мономорфизмом.

В [62] показано (лемма 4.1, случай двумерного комплекса): пусть K – двумерный комплекс, N – подгруппа в $\pi_1(K)$; тогда следующие условия эквивалентны:
(i) $1 \otimes_N \partial_2 \colon \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[N]} C_2\widetilde{K} \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[N]} C_1\widetilde{K}$ является мономорфизмом, где $C_*\widetilde{K}$ – цепной комплекс универсального накрытия $\widetilde{K}$ над K;
(ii) K является N-коккрофтовым и $H_2(N) = 0$.

Таким образом, для двумерного комплекса K, у которого $H_1(K)$ без кручения и $H_2(K) = 0$, получаем, что $\pi_1(K)$ является E-группой. Поэтому $\mathcal{P}(\pi_1(K))$ также является E-группой и, более того, гомоморфизм

$$1 \otimes_{\mathcal{P}(\pi_1(K))} \partial_2 \colon \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathcal{P}(\pi_1(K))]} C_2\widetilde{K} \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathcal{P}(\pi_1(K))]} C_1\widetilde{K}$$

[2]Напомним, что для группы G, нормальной подгруппы H в G и G-модуля M, вложимого в свободный G-модуль $f \colon M \to \mathbb{Z}[G]^{\oplus\alpha}$, говорят, что M является *H-коккрофтовым*, если композиция $M \to \mathbb{Z}[G]^{\oplus\alpha} \to \mathbb{Z}[G/H]^{\oplus\alpha}$ тривиальна, где последнее отображение индуцировано эпиморфизмом $G \to G/H$. В случае когда $M = \pi_2(K)$ – второй гомотопический модуль двумерного комплекса K и $G = \pi_1(K)$, H-коккрофтовость эквивалентна тривиальности гомоморфизма Гуревича H-накрытия K_H комплекса K.

является мономорфизмом. Снова применяя лемму 4.1 из [62], получаем, что K является $\mathcal{P}(\pi_1(K))$-коккрофтовым. Отсюда следует по упомянутым условиям асферичности плюс-конструкции, что K^+ асферичен. Теперь следствие 2.2.2 следует из теоремы 2.2.2.

Отметим, что для любого скрещенного модуля $\partial\colon M \to P$ со свободной группой P группа M нильпотентно аппроксимируема. Это следует из того, что группа M является центральным расширением свободной группы. Так как группа P нильпотентно аппроксимируема, получаем, что 2ω-член трансфинитного производного ряда $\delta_{2\omega}$ полупрямого произведения $M \rtimes P$ тривиален. Таким образом, стабилизация трансфинитного производного ряда группы $M \rtimes P$: $\delta_\omega(M \rtimes P) = \delta_{\omega+1}(M \rtimes P)$ влечет разрешимую аппроксимируемость группы $M \rtimes P$. Получаем следующее

Замечание 2.2.1. В формулировке теоремы 2.2.2 условие (i) эквивалентно стабилизации трансфинитного производного ряда фундаментальной cat^1-группы $\mathcal{L}^1(K)$:

$$\delta_\omega(\mathcal{L}^1(K)) = \delta_{\omega+1}(\mathcal{L}^1(K)).$$

В заключение отметим, что методы, использующие точность действия, как правило, не позволяют описать второй гомотопический модуль, как это сделано, например, в следствии 2.1.1.

Часть II

Размерные подгруппы

Глава 3. Гомологии и обобщенные размерные подгруппы

3.1. Мультипликатор Шура и его фильтрации

Здесь мы рассмотрим различные подгруппы мультипликатора Шура, с помощью которых будут разработаны гомологические методы для описания подгрупп в группах, определенных двусторонними идеалами в групповых кольцах.

Обобщенные полиномиальные 2-коциклы. Пусть $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ – некоторый двусторонний идеал в целочисленном групповом кольце $\mathbb{Z}[G]$ и M – тривиальный G-модуль. Рассмотрим следующие классы отображений на $G \times G$. Нормализованный 2-коцикл $f\colon G \times G \to M$ называется *левым* (*соответственно правым*) $\mathfrak{a}$-*2-коциклом*, если линейное расширение на $\mathbb{Z}[G]$ отображения $l_y\colon G \to M$, $y \in G$ (соответственно $r_x\colon G \to M$, $x \in G$), определенного как $l_y(x) = f(x, y)$, $x \in G$ (соответственно $r_x(y) = f(x, y)$, $y \in G$), оказывается нулевым при ограничении на $\mathfrak{a}$. Обозначим через $P_{\mathfrak{a}}(G, M)_l$ (соответственно $P_{\mathfrak{a}}(G, M)_r$) подгруппу в $H^2(G, M)$, т.е. в группе вторых когомологий группы G с коэффициентами в M, состоящую из когомологических классов, представляемых левыми (соответственно правыми) $\mathfrak{a}$-2-коциклами. Далее, обозначим через $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}(G, M)$ подгруппу, состоящую из когомологических классов, представляемых 2-коциклами, являющимися как левыми, так и правыми $\mathfrak{a}$-2-коциклами.

Если $\mathfrak{a}$ пробегает степени аугментационного идеала $\mathfrak{g}^\alpha$ (α – любой ординал), то получаем возрастающую фильтрацию в $H^2(G, M)$

$$0 = P_0(G, M) \subseteq P_1(G, M) \subseteq \dots P_\alpha(G, M) \subseteq \dots \subseteq H^2(G, M),$$

где $P_{\alpha-1}(G, M) = P_{\mathfrak{g}^\alpha}(G, M)_l$. Данная фильтрация изучалась в [63] в случае конечных ординалов.

Начнем с делимой абелевой группы M. В этом случае две подгруппы $P_{\mathfrak{a}}(G, M)_l$ и $P_{\mathfrak{a}}(G, M)_r$ в $H^2(G, M)$ совпадают. Доказательство этого факта практически совпадает с доказательством из [63], где показано, что для всех целых чисел $n \geqslant 1$ $P_{n-1}(G, \mathbb{T})$ совпадает с образом гомоморфизма

$$\mathrm{Ext}^1_G(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^n, \mathbb{T}) \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathfrak{g}, M) \ (= H^2(G, \mathbb{T})),$$

индуцируемого естественной проекцией $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^n$), где $\mathbb{T}$ обозначает аддитивную группу рациональных чисел по модулю 1. Более точно, выполнена

Теорема 3.1.1. *Пусть G – группа, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ – двусторонний идеал в $\mathbb{Z}[G]$ и M – делимая абелева группа, рассматриваемая как тривиальный G-модуль. Пусть*

$$\delta\colon \mathrm{Ext}^1_G(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}, M) \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathfrak{g}, M)$$

– отображение, индуцируемое естественной проекцией $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Тогда

$$P_{\mathfrak{a}}(G, M)_l = P_{\mathfrak{a}}(G, M)_r = \mathrm{Im}(\delta).$$

Доказательство. Короткие точные последовательности

$$0 \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \to 0, \qquad 0 \to \mathfrak{g} \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$$

приводят к следующей диаграмме с точными строками и столбцами:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[G] \otimes \mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[G] \otimes \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[G] \otimes \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

где все тензорные произведения рассмотрены над $\mathbb{Z}$ и действие G диагонально. Применяя функтор $\mathrm{Hom}_G(\,\cdot\,, M)$ к этой диаграмме, получаем следующую коммутативную диаграмму, также состоящую из точных строк и столбцов:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G] \otimes \mathfrak{g}/\mathfrak{a}, M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_G(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}/\mathfrak{a}, M) \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d] & S \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G] \otimes \mathfrak{g}, M) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_1"'] & \mathrm{Hom}_G(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, M) \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d] & H^2(G, M) \arrow[d, "\alpha"'] \\
\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G] \otimes \mathfrak{a}, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{a}, M) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_G(\mathfrak{a}, M)
\end{tikzcd}$$

где $S = \mathrm{Im}\{\mathrm{Hom}_G(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}/\mathfrak{a}, M) \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}, M)\}$. Стандартный аргумент, использующий спектральную последовательность (см. [63]), влечет $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbb{Z}[G] \otimes \mathfrak{g}/\mathfrak{a}, M) = 0$. Следовательно, отображение γ_3 является эпиморфизмом. Отображение γ_2 также является эпиморфизмом ввиду пошаговой резольвенты, как отмечено в [63], а отображение γ_1 является эпиморфизмом по построению. Получаем, что

$$P_{\mathfrak{a}}(G, M)_r = \ker(\alpha) = \mathrm{Im}(\delta).$$

Ввиду изоморфизма $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{g}$ получаем, что $P_{\mathfrak{a}}(G, M)_l$ также равно $\mathrm{Im}(\delta)$, откуда следует требуемое утверждение.

Ввиду предыдущей теоремы будем опускать суффикс и писать просто $P_{\mathfrak{a}}(G, M)$ вместо $P_{\mathfrak{a}}(G, M)_l$ или $P_{\mathfrak{a}}(G, M)_r$.

Пусть $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ – двусторонний идеал в $\mathbb{Z}[G]$. Обозначим через $D_{\mathfrak{a}}(G)$ нормальную подгруппу в G, определяемую $\mathfrak{a}$:

$$D_{\mathfrak{a}}(G) = G \cap (1 + \mathfrak{a}).$$

Если $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}^{\alpha}$, то пишем $D_{\alpha}(G)$ для $D_{\mathfrak{g}^{\alpha}}$. Для тривиального G-модуля M пусть $\psi_{\mathfrak{a}}(G, M)$ обозначает образ гомоморфизма инфляции

$$\mathrm{inf}\colon H^2(G/D_{\mathfrak{a}}(G),\, M) \to H^2(G, M).$$

Легко заметить, что $\psi_{\mathfrak{a}}(G, M) = P_{\Delta(D_{\mathfrak{a}}(G))\mathbb{Z}[G]}(G, M) \supseteq P_{\mathfrak{a}}(G, M)$.

Теорема 3.1.2. *Пусть $\mathfrak{a}$ – идеал в $\mathbb{Z}[G]$, содержащийся в $\mathfrak{g}$, и $\overline{\mathfrak{a}}$ – его образ относительно естественного отображения $\mathfrak{g} \to \Delta(G/D_{\mathfrak{a}}(G))$. Тогда*:

(a) $P_{\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G),\mathbb{T}) = H^2(G/D_{\mathfrak{a}}(G),\mathbb{T})$ *влечет*

$$D_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}}(G).D_{\mathfrak{g}\mathfrak{a}}(G) \subseteq [D_{\mathfrak{a}}(G),G];$$

(b) $P_{\overline{\mathfrak{a}},\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G),\mathbb{T}) = H^2(G/D_{\mathfrak{a}}(G),\mathbb{T})$ *влечет*

$$D_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}+\mathfrak{g}\mathfrak{a}}(G) = [D_{\mathfrak{a}}(G),G].$$

Доказательство. Очевидно, имеем $[D_{\mathfrak{a}}(G),G] \subseteq D_{\mathfrak{g}\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\mathfrak{g}}(G)$. Предположим, что

$$[D_{\mathfrak{a}}(G),G] = 1;$$

понятно, что достаточно рассмотреть лишь этот случай. Пусть $a \in D_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}}(G)$ в случае (a) (соответственно $a \in D_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}+\mathfrak{g}\mathfrak{a}}(G)$ в случае (b)), $a \neq 1$. Тогда $a \in D_{\mathfrak{a}}(G)$, и мы можем найти гомоморфизм

$$\alpha\colon D_{\mathfrak{a}}(G) \to \mathbb{T}, \qquad \alpha(a) \neq 0.$$

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму, индуцированную α, в которой строки являются центральными расширениями групп:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & D_{\mathfrak{a}}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & G \arrow[r] \arrow[d] & G/D_{\mathfrak{a}}(G) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{T} \arrow[r] & E \arrow[r] & G/D_{\mathfrak{a}}(G) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Выберем сечения $w(g) \in G$ для элементов $g \in G/D_{\mathfrak{a}}(G)$ и рассмотрим

$$W\colon G/D_{\mathfrak{a}}(G) \times G/D_{\mathfrak{a}}(G) \to D_{\mathfrak{a}}(G)$$

и соответствующий 2-коцикл

$$W(g_1,g_2) = w(g_1g_2)^{-1}w(g_1)w(g_2), \qquad g_1,g_2 \in G/D_{\mathfrak{a}}(G).$$

По предположению 2-коцикл $\alpha(W(g_1,g_2))\colon G/D_{\mathfrak{a}}(G)\times G/D_{\mathfrak{a}}(G) \to \mathbb{T}$ когомологичен нормализованному 2-коциклу $f\colon G/D_{\mathfrak{a}}(G)\times G/D_{\mathfrak{a}}(G) \to \mathbb{T}$, чье линейное расширение на $\mathbb{Z}[G/D_{\mathfrak{a}}(G)]\times \mathbb{Z}[G/D_{\mathfrak{a}}(G)]$ обнуляется при ограничении на $\overline{\mathfrak{a}} \times \mathbb{Z}[G/D_{\mathfrak{a}}(G)]$ в случае (a) (соответственно на $(\overline{\mathfrak{a}} \times \mathbb{Z}[G/D_{\mathfrak{a}}(G)]) \cup (\mathbb{Z}[G/D_{\mathfrak{a}}(G)] \times \overline{\mathfrak{a}})$ в случае (b)). Следовательно, можно расширить гомоморфизм α до отображения $\varphi\colon G \to \mathbb{T}$, чье линейное расширение на $\mathbb{Z}[G]$ обнуляется на $\mathfrak{a}\mathfrak{g}$ в случае (a) (соответственно на $\mathfrak{a}\mathfrak{g}+\mathfrak{g}\mathfrak{a}$ в случае (b)). Действительно, если $\chi\colon G/D_{\mathfrak{a}}(G) \to \mathbb{T}$ – корректирующая нормализованная кограница, т.е. $\chi(1) = 0$ и

$$\alpha(W(g_1,g_2)) = f(g_1,g_2) + \chi(g_1-1)(g_2-1), \qquad g_1,g_2 \in G/D_{\mathfrak{a}}(G),$$

то определим

$$\varphi(zw(g)) = \alpha(z) - \chi(g), \qquad g \in G/D_{\mathfrak{a}}(G), \quad z \in D_{\mathfrak{a}}(G).$$

Однако для такого φ имеем $\varphi(a) = 0$ и также $\varphi(a) = \alpha(a) \neq 0$, что представляет противоречие. Следовательно, $D_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}}(G) = 1$ в случае (a) (соответственно $D_{\mathfrak{a}\mathfrak{g}+\mathfrak{g}\mathfrak{a}}(G) = 1$ в случае (b)).

Так как $P_{\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G),\mathbb{T})_l = P_{\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G),\mathbb{T})_r$ (по теореме 3.1.1), то в случае (a) аналогичным образом получаем, что $D_{\mathfrak{g}\mathfrak{a}}(G) = 1$.

Для произвольного ординала α, полагая $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}^{\alpha}$ в теореме 3.1.2, (b), получаем следующее

Следствие 3.1.1. *Если* $P_{\Delta^{\alpha}(G/D_{\alpha}(G)),\Delta^{\alpha}(G/D_{\alpha}(G))}(G/D_{\alpha}(G),\mathbb{T}) = H^2(G/D_{\alpha}(G),\mathbb{T})$, *то*

$$D_{\alpha+1}(G) = [D_{\alpha}(G),G].$$

Аналогично, работая с $\mathbb{T}_p$ – группой p-кручения в $\mathbb{T}$ – вместо $\mathbb{T}$, получаем следующее

Следствие 3.1.2. *Если G – p-группа и*

$$P_{\Delta^\alpha(G/D_\alpha(G)),\Delta^\alpha(G/D_\alpha(G))}(G/D_\alpha(G),\mathbb{T}_p)=H^2(G/D_\alpha(G),\mathbb{T}_p),$$

то

$$D_{\alpha+1}(G)=[D_\alpha(G),G].$$

3.2. Когомологически согласованные идеалы

Назовем идеал $\mathfrak{a}$ в $\mathbb{Z}[G]$ *когомологически согласованным* (КС-*идеалом*) по отношению к абелевой группе M (рассматриваемой как тривиальный G-модуль), если

$$P_{\mathfrak{a}}(G,M)=\psi_{\mathfrak{a}}(G,M).$$

Предыдущие результаты представляют мотивацию для введения данного понятия. Если N – нормальная подгруппа в группе G, то двусторонний идеал $\mathfrak{n}\mathbb{Z}[G]$ является КС-идеалом по отношению к любой абелевой группе M. Отметим, что $\mathfrak{g}^2$ является КС-идеалом по отношению к $\mathbb{T}$ для любой группы G [64; с. 66]. Однако существуют группы G, для которых идеал $\mathfrak{g}^3$ не является КС-идеалом по отношению к $\mathbb{T}$.

Пример 3.2.1. Пусть Π – группа со следующими свойствами: Π нильпотентная класса 3 и $D_4(\Pi)\neq 1$, т.е. Π – нильпотентная группа класса 3 без размерного свойства. Пусть $G=\Pi/\gamma_3(\Pi)$. Тогда $D_3(G)=\gamma_3(G)=1$ и, следовательно, $\psi_{\mathfrak{g}^3}(G,\mathbb{T})=H^2(G,\mathbb{T})$, в то время как $P_{\mathfrak{g}^3}(G,\mathbb{T})\neq H^2(G,\mathbb{T})$ по теореме 3.1.2, примененной к Π с $\mathfrak{a}=\Delta^3(\Pi)$.

Следующий простой результат связывает КС-свойство для идеала $\mathfrak{a}$ в $\mathbb{Z}[G]$ по отношению к абелевой группе M с КС-свойством его образа в $\mathbb{Z}[G/D_{\mathfrak{a}}(G)]$.

Предложение 3.2.1. *Пусть $\mathfrak{a}$ – двусторонний идеал в $\mathfrak{g}$ и $\overline{\mathfrak{a}}$ – его образ в $\Delta(G/D_{\mathfrak{a}}(G))$. Тогда естественное отображение*

$$\psi_{\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G),M)/P_{\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G),M)\to\psi_{\mathfrak{a}}(G,M)/P_{\mathfrak{a}}(G,M)$$

является эпиморфизмом для любой абелевой группы M, рассмотренной как тривиальный G-модуль.

Доказательство. Из определений немедленно следует, что

$$H^2(G/D_{\mathfrak{a}}(G),M)=\psi_{\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G),M).$$

Требуемое утверждение следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
H^2(G/D_{\mathfrak{a}}(G),M) \arrow[r] \arrow[d] & \psi_{\mathfrak{a}}(G,M) \arrow[d] \\
\psi_{\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G),M)/P_{\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G),\,M) \arrow[r] & \psi_{\mathfrak{a}}(G,M)/P_{\mathfrak{a}}(G,M)
\end{tikzcd}$$

Отсюда получаем

Следствие 3.2.1. *Если $\overline{\mathfrak{a}}$ – КС-идеал в $\mathbb{Z}[G/D_{\mathfrak{a}}(G)]$ по отношению к абелевой группе M, то $\mathfrak{a}$ – КС-идеал в $\mathbb{Z}[G]$ по отношению к M.*

Пусть G – группа, $\mathfrak{a}$ – двусторонний идеал в $\mathbb{Z}[G]$ и M – абелева группа. Следующий результат позволяет охарактеризовать элементы группы $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}(G,M)$ в случае, когда M делима.

Предложение 3.2.2. *Пусть M делима. Когомологический класс, представляющий центральное расширение*

$$1 \to M \to \Pi \xrightarrow{p} G \to 1,$$

лежит в $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}(G, M)$ тогда и только тогда, когда

$$M \cap (1 + \widetilde{\mathfrak{a}}\Delta(\Pi) + \Delta(\Pi)\widetilde{\mathfrak{a}} + \mathfrak{m}\Delta(\Pi)) = 1,$$

где $\widetilde{\mathfrak{a}}$ – прообраз $\mathfrak{a}$ в $\Delta(\Pi)$ при гомоморфизме $\mathbb{Z}[\Pi] \to \mathbb{Z}[G]$, индуцированном p.

Доказательство. Пусть $w(g) \in \Pi$ – множество представителей в Π элементов $g \in G$ таких, что $p(w(g)) = g$, и пусть $W(g_1, g_2)\colon G \times G \to M$ – соответствующий 2-коцикл

$$w(g_1)w(g_2) = w(g_1g_2)W(g_1, g_2), qquadg_1, g_2 \in G.$$

Предположим, что

$$M \cap (1 + \widetilde{\mathfrak{a}}\Delta(\Pi) + \Delta(\Pi)\widetilde{\mathfrak{a}} + \mathfrak{m}\Delta(\Pi)) = 1.$$

Тогда ввиду делимости M существует отображение $\varphi\colon \Pi \to M$, чье линейное расширение на $\mathbb{Z}[\Pi]$ обнуляется на $\widetilde{\mathfrak{a}}\Delta(\Pi) + \Delta(\Pi)\widetilde{\mathfrak{a}} + \mathfrak{m}\Delta(\Pi)$, и $\varphi|_M$ – тождественное отображение. Пусть $\chi\colon G \to M$ отображение, определенное как $\chi(g) = \varphi(w(g))$, $g \in G$, и расширенное на $\mathbb{Z}[G]$ по линейности. Пусть $f\colon G \times G \to M$ 2-коцикл, заданный как

$$f(g_1, g_2) = W(g_1, g_2) + \chi((g_1 - 1)(g_2 - 1)), \qquad g_1, g_2 \in G.$$

Простые вычисления показывают, что $\varphi((x_1 - 1)(x_2 - 1)) = f(g_1, g_2)$ для $x_i \in \Pi$, $p(x_i) = g_i$, $i = 1, 2$. Понятно, что 2-коцикл f обнуляется на $(\mathbb{Z}[\Pi] \times \widetilde{\mathfrak{a}}) \cup (\widetilde{\mathfrak{a}} \times \mathbb{Z}[\Pi])$ и, следовательно, когомологический класс, определенный 2-коциклом W, лежит в $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}(G, M)$.

Обратно, предположим, что 2-коцикл $W\colon G \times G \to M$ представляет когомологический класс из $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}(G, M)$. Тогда существует отображение $\chi\colon G \to M$ такое, что 2-коцикл

$$f(g_1, g_2) = W(g_1, g_2) + \chi((g_1 - 1)(g_2 - 1)), \qquad g_1, g_2 \in G,$$

обнуляется на $(\mathbb{Z}[G] \times \mathfrak{a}) \cup (\mathfrak{a} \times \mathbb{Z}[G])$. Определим $\varphi\colon \Pi \to M$ посредством $\varphi(w(g)m) = m + \chi(g)$, $g \in G$, $m \in M$. Легко видеть, что линейное расширение φ на $\mathbb{Z}[\Pi]$ обнуляется на $\widetilde{\mathfrak{a}}\Delta(\Pi) + \Delta(\Pi)\widetilde{\mathfrak{a}} + \mathfrak{m}\Delta(\Pi)$ и $\varphi|_M$ – тождественное отображение. Следовательно, получаем, что

$$M \cap (1 + \widetilde{\mathfrak{a}}\Delta(\Pi) + \Delta(\Pi)\widetilde{\mathfrak{a}} + \mathfrak{m}\Delta(\Pi)) = 1.$$

Для любого двустороннего идеала $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ и произвольной абелевой группы M гомоморфизм инфляции $\inf\colon H^2(G/D_{\mathfrak{a}^{(1)}}(G), M) \to H^2(G, M)$ переводит $P_{\overline{\mathfrak{a}},\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}^{(1)}}(G), M)$ в подгруппу $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}(G, M)$, где $\overline{\mathfrak{a}}$ – образ $\mathfrak{a}$ при гомоморфизме, индуцированном естественной проекцией $p\colon G \to G/D_{\mathfrak{a}^{(1)}}(G)$. Получаем следующее

Предложение 3.2.3. *Отображение $p_{\mathfrak{a}}\colon P_{\overline{\mathfrak{a}},\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}^{(1)}}(G), M) \to P_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}(G, M)$, индуцированное инфляцией, является мономорфизмом.*

Доказательство. Предположим, что имеется следующая коммутативная диаграмма центральных расширений:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & N \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & M \arrow[r] & \Pi \arrow[r] & \overline{G} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

где $\overline{G} = G/D_{\mathfrak{a}^{(1)}}(G)$ и p – естественная проекция. Когомологический класс нижнего расширения лежит в $P_{\overline{\mathfrak{a}},\overline{\mathfrak{a}}}(\overline{G}, M)$, а верхнее центральное расширение расщепляется. Мы должны показать, что эти условия влекут расщепимость и нижнего расширения.

Пусть $f\colon \overline{G} \times \overline{G} \to M$ – нормализованный 2-коцикл, представляющий собой нижнее центральное расширение, чье линейное расширение на $\mathbb{Z}[\overline{G}] \times \mathbb{Z}[\overline{G}]$ обнуляется на $(\overline{\mathfrak{a}} \times \mathbb{Z}[\overline{G}]) \cup (\mathbb{Z}[\overline{G}] \times \overline{\mathfrak{a}})$. Так как верхнее центральное расширение расщепляется, то существует отображение $\chi\colon G \to M$ такое, что

$$f(p(x), p(y)) = \chi((x-1)(y-1)), \qquad x, y \in G.$$

Определим $\eta\colon \overline{G} \to M$ посредством $\eta(\overline{g}) = \chi(g)$, где $p(g) = \overline{g}$. Отметим, что η корректно определено; если $g' = gd$, $d \in D_{\mathfrak{a}^{(1)}}(G)$, то

$$\chi(g' - g) = \chi(d - 1 + (g-1)(d-1)).$$

Так как $d - 1 \in \mathfrak{a}^{(1)}$, $f(p(x), p(y)) = \chi((x-1)(y-1))$ и f обнуляется на $(\mathbb{Z}[\overline{G}] \times \overline{\mathfrak{a}}) \cup (\overline{\mathfrak{a}} \times \mathbb{Z}[\overline{G}])$, то получаем, что $\chi(g' - g) = 0$. Теперь понятно, что 2-коцикл f равен когранице η, поэтому нижнее центральное расширение также расщепляется.

Далее рассмотрим гомоморфизм инфляции $H^2(G/D_{\mathfrak{a}}(G), M) \to H^2(G, M)$.

Теорема 3.2.1. *Для любого двустороннего идеала $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ и делимой абелевой группы M существует точная последовательность*

$$0 \to \operatorname{Hom}((D_{\mathfrak{a}}(G) \cap G')/D_{\mathfrak{a}^{(1)}}(G), M) \xrightarrow{i} P_{\overline{\mathfrak{a}},\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G), M) \xrightarrow{j_{\mathfrak{a}}} P_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}(G, M),$$

где $\overline{\mathfrak{a}}$ – образ идеала $\mathfrak{a}$ в $\Delta(G/D_{\mathfrak{a}}(G))$ при гомоморфизме, индуцированном естественной проекцией $j\colon G \to G/D_{\mathfrak{a}}(G)$.

Доказательство. Понятно, что гомоморфизм инфляции

$$\inf\colon H^2(G/D_{\mathfrak{a}}(G),\, M) \to H^2(G, M)$$

отображает $P_{\overline{\mathfrak{a}},\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G), M)$ в $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}(G, M)$. Пусть $j_{\mathfrak{a}}$ будет его ограничением на подгруппу $P_{\overline{\mathfrak{a}},\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G), M)$. Пусть

$$\beta\colon \operatorname{Hom}(D_{\mathfrak{a}}(G)/D_{\mathfrak{a}^{(1)}}(G), M) \to H^2(G/D_{\mathfrak{a}}(G), M)$$

– ограничение трансгрессии

$$\operatorname{trans}\colon \operatorname{Hom}(D_{\mathfrak{a}}(G)/[D_{\mathfrak{a}}(G), G], M) \to H^2(G/D_{\mathfrak{a}}(G), M).$$

Мы утверждаем, что β принимает значения в $P_{\overline{\mathfrak{a}},\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G), M)$. Действительно, предположим, что имеется следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & D_{\mathfrak{a}}(G)/D_{\mathfrak{a}^{(1)}}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \overline{G} \arrow[r] \arrow[d] & G/D_{\mathfrak{a}}(G) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & M \arrow[r] & \Pi \arrow[r] & G/D_{\mathfrak{a}}(G) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

где $\overline{G} = G/D_{\mathfrak{a}^{(1)}}(G)$, в которой нижняя строка представляет собой центральное расширение, индуцированное α. Отметим, что имеется мономорфизм

$$D_{\mathfrak{a}}(G)/D_{\mathfrak{a}^{(1)}}(G) \to \mathbb{Z}[\overline{G}]/\widetilde{\mathfrak{a}}^{(1)};$$

здесь $xD_{\mathfrak{a}^{(1)}}(G) \mapsto x - 1 + \mathfrak{a}^{(1)}$, $x \in D_{\mathfrak{a}}(G)$), где $\widetilde{\mathfrak{a}}$ – образ идеала $\mathfrak{a}$ при естественной проекции $\mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G/D_{\mathfrak{a}^{(1)}}(G)]$. Следовательно, α расширяется до отображения $\varphi\colon \overline{G} \to M$, чье линейное расширение на $\mathbb{Z}[\overline{G}]$ обнуляется на $\widetilde{\mathfrak{a}}^{(1)}$. Несложно показать, что нижнее центральное расширение задает элемент из $P_{\overline{\mathfrak{a}},\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G), M)$. Поэтому получаем гомоморфизм

$$\beta\colon \operatorname{Hom}(D_{\mathfrak{a}}(G)/D_{\mathfrak{a}^{(1)}}(G), M) \to P_{\overline{\mathfrak{a}},\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G), M).$$

Так как $\inf \circ \operatorname{trans} = 0$, то имеем $j_{\mathfrak{a}} \circ \beta = 0$. Мы утверждаем, что $\ker(j_{\mathfrak{a}}) = \operatorname{Im}(\beta)$.

Пусть $1 \to M \to \Pi \to G/D_{\mathfrak{a}}(G) \to 1$ – расширение, чей когомологический класс, скажем, ξ, лежит в $\ker(j_{\mathfrak{a}})$. Так как $\ker(inf) = \operatorname{Im}(\operatorname{trans})$, получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & D_{\mathfrak{a}}(G)/[D_{\mathfrak{a}}(G),G] \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & G/[D_{\mathfrak{a}}(G),G] \arrow[r] \arrow[d] & G/D_{\mathfrak{a}}(G) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & M \arrow[r] & \Pi \arrow[r] & G/D_{\mathfrak{a}}(G) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Так как ξ лежит в $P_{\overline{\mathfrak{a}},\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G), M)$, то гомоморфизм γ должен обнуляться на подгруппе $D_{\mathfrak{a}^{(1)}}(G)/[D_{\mathfrak{a}}(G), G]$, что можно проверить с помощью предложения 3.2.2. Поэтому имеем точную последовательность

$$\operatorname{Hom}(D_{\mathfrak{a}}(G)/D_{\mathfrak{a}^{(1)}}(G), M) \xrightarrow{\beta} P_{\overline{\mathfrak{a}},\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G), M) \xrightarrow{j_{\mathfrak{a}}} P_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}(G, M).$$

Заметим, что ядро β представляет собой подгруппу $\operatorname{Hom}(D_{\mathfrak{a}}(G)/(D_{\mathfrak{a}}(G) \cap G'), M)$, где G' – производная подгруппа G. Следовательно, имеем точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}((D_{\mathfrak{a}}(G) \cap G')/D_{\mathfrak{a}^{(1)}}(G), M) \xrightarrow{i} P_{\overline{\mathfrak{a}},\overline{\mathfrak{a}}}(G/D_{\mathfrak{a}}(G), M) \xrightarrow{j_{\mathfrak{a}}} P_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}(G, M),$$

где i – гомоморфизм, индуцированный β.

Для ординала τ обозначим через $\mathfrak{P}_\tau$ класс гомоморфизмов $f\colon G \to H$, индуцирующих изоморфизм на первых гомологиях $H_1(G) \to H_1(H)$ и мономорфизм $f_{\Delta^\tau(G)}\colon P_{\Delta^\tau(H)}(H, \mathbb{T}) \to P_{\Delta^\tau(G)}(G, \mathbb{T})$. Вышеприведенные рассуждения, примененные к аугментационным степеням, приводят к следующему.

Теорема 3.2.2. *Пусть n – натуральное число и $f\colon G \to H$ – $\mathfrak{P}_n$-гомоморфизм. Тогда индуцированный гомоморфизм $G/D_{n+1}(G) \to H/D_{n+1}(H)$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Будем доказывать индукцией по n. Так как $D_2(\Pi) = \gamma_2(\Pi)$ для любой группы Π, требуемое утверждение следует для $n = 1$. Предположим, что $n > 1$, утверждение верно для $n - 1$ и

$$j_n\colon P_{\Delta^n(H)}(H,\, \mathbb{T}) \to P_{\Delta^n(G)}(G,\, \mathbb{T})$$

является мономорфизмом; в данном случае отмечаем, что

$$j_{n-1}\colon P_{\Delta^{n-1}(H)}(H, \mathbb{T}) \to P_{\Delta^{n-1}(G)}(G, \mathbb{T})$$

также является мономорфизмом, поэтому индуктивная гипотеза влечет, что f индуцирует изоморфизм $G/D_n(G) \simeq H/D_n(H)$. Теорема 3.2.1, примененная к $\mathfrak{a} = \Delta^n(G)$ и $\Delta^n(H)$, влечет следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(D_n(G)/D_{n+1}(G), \mathbb{T}) \arrow[r] & P_{\Delta^n(G/D_n(G))}(G/D_n(G), \mathbb{T}) \arrow[r, "\inf_1"] & P_{\Delta^n(G)}(G, \mathbb{T}) \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(D_n(H)/D_{n+1}(H), \mathbb{T}) \arrow[r] \arrow[u, "f_1^*"] & P_{\Delta^n(H/D_n(H))}(H/D_n(H), \mathbb{T}) \arrow[r, "\inf_2"] \arrow[u, "f_2^*"] & P_{\Delta^n(H)}(H, \mathbb{T}) \arrow[u, "f_3^*"]
\end{tikzcd}$$

где вертикальные отображения индуцированы f и f_2^* является изоморфизмом. Так как f_3^* является мономорфизмом, то $\mathrm{Im}(inf_2) \to \mathrm{Im}(inf_1)$ – также мономорфизм и f_1^* – эпиморфизм. Следовательно, f_1^* является изоморфизмом, поэтому f индуцирует изоморфизм

$$D_n(G)/D_{n+1}(G) \simeq D_n(H)/D_{n+1}(H).$$

Получаем, что f индуцирует изоморфизм $G/D_{n+1}(G) \simeq H/D_{n+1}(H)$ и доказательство завершено.

Предложение 3.2.4. *Для каждого натурального n класс $\mathrm{loc}(\mathfrak{P}_n)$ представляет собой квазимногообразие, состоящее из групп G с $D_{n+1}(G) = 1$.*

Доказательство. Пусть G – группа с $D_{n+1}(G) = 1$ и $f\colon X \to Y$ – некоторый $\mathfrak{P}_n$-гомоморфизм. Рассмотрим произвольный гомоморфизм $h\colon X \to G$. По теореме 3.2.2 f индуцирует изоморфизм $\overline{f}\colon X/D_{n+1}(X) \to Y/D_{n+1}(Y)$. Так как $D_{n+1}(G) = 1$, то h индуцирует гомоморфизм $\overline{h}\colon X/D_{n+1}(X) \to G$. Легко видеть, что соответствие $h \mapsto \overline{h} \circ \overline{f} \circ p$, где p – естественная проекция $Y \to Y/D_{n+1}(Y)$, является биекцией, поэтому G является $\mathfrak{P}_n$-локальной группой.

Обратно, пусть G – некоторая $\mathfrak{P}_n$-локальная группа. По теореме 3.2.2 естественная проекция $p_n\colon G \to G/D_{n+1}(G)$ является $\mathfrak{P}_n$-гомоморфизмом. Следовательно, тождественный гомоморфизм $\mathrm{id}_G\colon G \to G$ должен пропускаться через проекцию p_n, поэтому $D_{n+1}(G) = 1$.

Следствие 3.2.2. *Для любых группы G и натурального числа $n \geqslant 1$ гомоморфизм $G \to G/D_{n+1}(G)$ является с точностью до изоморфизма единственной $\mathfrak{P}_n$-локализацией группы G.*

Теперь мы применим разработанный метод для отождествления некоторых подгрупп, определенных с помощью двусторонних идеалов в групповых кольцах, и для изучения трансфинитных размерных подгрупп. Как мы уже отмечали, до сих пор не известно, верно ли, что для любой нильпотентной группы G выполнено $D_\omega(G) = 1$. Хартли показал [65], что $D_\omega(G) = D_\omega(T)$, где T – подгруппа кручения в G. Мы покажем, что $D_{\omega+1}(T) = 1$ для любого нильпотентного кручения T (этот результат, естественно, можно получить и без разработанных когомологических методов). Данный результат является следствием следующего.

Теорема 3.2.3. *Если G – нильпотентная p-группа с $D_\omega(G) = 1$, то*

$$P_{\Delta^\omega(G),\Delta^\omega(G)}(G, \mathbb{T}_p) = H^2(G, \mathbb{T}_p).$$

Доказательство. По теореме Хартли [65]

$$\Delta^\omega(G) = \Delta(G(p))\mathfrak{g},$$

где $G(p)$ – подгруппа, состоящая из элементов бесконечной p-высоты в G. Так как $G(p)$ содержится в центре G, нам надо показать, что для центрального расширения

$$1 \to \mathbb{T}_p \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} G \to 1$$

существует выбор представителей G в M такой, что соответствующий 2-коцикл $f\colon G \times G \to \mathbb{T}_p$ при расширении на $\mathbb{Z}[G] \times \mathbb{Z}[G]$ по линейности обнуляется на $\Delta(G(p))\mathfrak{g} \times \mathbb{Z}[G]$.

Пусть $N = j^{-1}(G(p))$; отметим, что N лежит в центре E. Следовательно, расширение

$$1 \to \mathbb{T}_p \xrightarrow{i} N \xrightarrow{j} G(p) \to 1$$

абелевых групп расщепляется (мы используем тот факт, что $\mathbb{T}_p$ делима). Значит, существует выбор представителей $u(z) \in E$ для элементов $z \in G(p)$ такой, что $u(z) \mapsto z$ задает гомоморфизм. Запишем $H = G/G(p)$ и выберем множество представителей $\{w(h)\}_{h \in H}$ в G для элементов из H. Тогда каждый элемент $g \in G$ единственным образом представим как $g = w(h)z$,

$h \in H$, $z \in G(p)$. Теперь выберем представителей $\varphi(g)$, $g \in G$, для элементов G произвольно $\varphi(w(h))$, $h \in H$, и для $g = w(h)z$ выберем $\varphi(g) = \varphi(w(h))u(z)$. Напрямую можно проверить, что полученный 2-коцикл $f\colon G \times G \to \mathbb{T}_p$ удовлетворяет свойству $f(x, g) = 0$ для $x \in G(p)$, $g \in G$, поэтому удовлетворяет и требуемому свойству.

Следствие 3.2.3. *Пусть T – нильпотентная группа, состоящая из элементов конечного порядка. Тогда $D_{\omega+1}(T) = 1$.*

Доказательство. Отметим, что достаточно доказать данное утверждение лишь для нильпотентных p-групп. Пусть T – нильпотентная p-группа. Ввиду следствия 3.1.2 и теоремы 3.2.3 получаем $D_{\omega+1}(T) = [D_\omega(T), T] = 1$.

Глава 4. Комбинаторика размерных подгрупп

Когда я взглянул на пятую размерную подгруппу,
я увидел там бездну.

Илья Рипс

4.1. Группы без размерного свойства

Для группы G факторгруппа $D_n(G)/\gamma_n(G)$, $n \geqslant 1$, называется *n-м размерным фактором* группы G. В случае когда все размерные факторы тривиальны, говорим, что группа G обладает *размерным свойством*. Начнем с примеров групп, не обладающих размерным свойством.

Пример 4.1.1 [3]. Первый пример группы, не обладающей размерным свойством, был дан Рипсом. Будем использовать обозначения из его работы [3]. Рассмотрим группу G, заданную порождающими

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\quad b_1,\ b_2,\ b_3,\quad c$$

и определяющими соотношениями

$$\begin{gathered}
b_1^{64} = b_2^{16} = b_3^{4} = c^{256} = 1,\\
[b_2, b_1] = [b_3, b_1] = [b_3, b_2] = [c, b_1] = [c, b_2] = [c, b_3] = 1,\\
a_0^{64} = b_1^{32}, \qquad a_1^{64} = b_2^{-4} b_3^{-2}, \qquad a_2^{16} = b_1^{4} b_3^{-1}, \qquad a_3^{4} = b_1^{2} b_2,\\
[a_1, a_0] = b_1 c^2, \qquad [a_2, a_0] = b_2 c^8, \qquad [a_3, a_0] = b_3 c^{32},\\
[a_2, a_1] = c, \qquad [a_3, a_1] = c^2, \qquad [a_3, a_2] = c^4,\\
[b_1, a_1] = c^4, \qquad [b_2, a_2] = c^{16}, \qquad [b_3, a_3] = c^{64},\\
[b_i, a_j] = 1, \quad \text{если} \quad i \neq j, \qquad [c, a_i] = 1 \quad \text{для} \quad i = 0, 1, 2, 3.
\end{gathered}$$

Тогда $\gamma_4(G) = 1$, в то время как элемент

$$[a_1, a_2]^{128} [a_1, a_3]^{64} [a_2, a_3]^{32} = c^{128}$$

является нетривиальным элементом в $D_4(G)$.

Этот пример был обобщен Тахарой следующим образом.

Пример 4.1.2 [66]. Пусть $G_{k,l}$, $k \geqslant 2$, $l \geqslant 0$, – группа, заданная порождающими

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$$

и определяющими соотношениями

$$\begin{aligned}
x_1^{2^{k+l+4}} &= [x_2, x_3]^{-2^{k+l+4}} [x_2, x_1]^{-2^{k+l+3}},\\
x_2^{2^{k+4}} &= [x_1, x_3]^{2^k} [x_1, x_4]^{-2^{k-1}} [x_2, x_3]^{3\cdot 2^{k+3}},\\
x_3^{2^{k+2}} &= [x_1, x_2]^{2^k} [x_1, x_4]^{2^{k-2}} [x_3, x_2]^{5\cdot 2^{k+1}},\\
x_4^{2^k} &= [x_1, x_2]^{2^{k-1}} [x_2, x_3]^{2^k} [x_1, x_3]^{2^{k-2}},
\end{aligned}$$

$$[x_3,x_2]^4=[x_1,x_2,x_2],\qquad [x_2,x_3]^{16}=[x_1,x_3,x_3],\qquad [x_3,x_2]^{64}=[x_1,x_4,x_4],$$
$$[x_2,x_3,x_1]=[x_2,x_3,x_2]=[x_2,x_3,x_3]=[x_2,x_3,x_4]=1,$$
$$[x_1,x_2,x_1]=[x_1,x_2,x_3]=[x_1,x_2,x_4]=1,$$
$$[x_1,x_3,x_1]=[x_1,x_3,x_2]=[x_1,x_3,x_4]=1,$$
$$[x_1,x_4,x_1]=[x_1,x_4,x_2]=[x_1,x_4,x_3]=1.$$

Тогда
$$w=[x_2,x_3]^{2^{k+5}}\in D_4(G_{k,l})\setminus\gamma_4(G_{k,l}).$$
В случае $k=2$, $l=0$ мы получаем пример Рипса.

Построим теперь пример группы G с четырьмя порождающими и тремя соотношениями, для которой $D_4(G)\neq\gamma_4(G)$, и для каждого $n\geqslant 5$ построим группу G с пятью порождающими и пятью соотношениями с $D_n(G)\neq\gamma_n(G)$.

Пример 4.1.3. Пусть G – группа, заданная копредставлением
$$\langle x_1,x_2,x_3,x_4\mid x_1^4[x_4,x_3]^2[x_4,x_2]=1,\ x_2^{16}[x_4,x_3]^4[x_4,x_1]^{-1}=1,\ x_3^{64}[x_4,x_2]^{-4}[x_4,x_1]^{-2}=1\rangle. \tag{4.1.1}$$
Тогда
$$w=[x_1,x_2^{32}][x_1,x_3^{64}][x_2,x_3^{128}]\in D_4(G)\setminus\gamma_4(G).$$

Для доказательства нужного свойства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.1.1. *Пусть Π – группа. Если $x_1,x_2,x_3\in\Pi$ и существуют элементы $\xi_j\in\gamma_2(\Pi)$, $j=1,\dots,6$, и $\eta_i\in\gamma_3(\Pi)$ такие, что*
$$x_1^4=\xi_1,\qquad x_2^{16}=\xi_2,\qquad x_2^{32}x_3^{64}=\xi_4^4\eta_1,\qquad x_1^{-32}x_3^{128}=\xi_5^{16}\eta_2,\qquad x_1^{-64}x_2^{-128}=\xi_6^{64}\eta_3,$$
то
$$w=[x_1,x_2^{32}][x_1,x_3^{64}][x_2,x_3^{128}]\in D_4(\Pi).$$

Доказательство. Так как $\gamma_2(\Pi)\subseteq 1+\Delta^2(\Pi)$, получаем
$$1-w\equiv\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \bmod \Delta^4(\Pi),$$
где
$$\alpha_1=(1-[x_1,x_2^{32}]),\qquad \alpha_2=(1-[x_1,x_3^{64}]),\qquad \alpha_3=(1-[x_2,x_3^{128}]).$$
Теперь, работая по модулю идеала $\Delta^4(\Pi)$, получаем
$$\begin{aligned}\alpha_1&\equiv(1-x_2^{32})(1-x_1)-(1-x_1)(1-x_2^{32})\\&\equiv(1-x_2^{32})(1-x_1)-32(1-x_1)(1-x_2)+\binom{32}{2}(1-x_1)(1-x_2)^2\\&\equiv(1-x_2^{32})(1-x_1)-(1-x_1^{32})(1-x_2),\end{aligned}$$
так как $x_1^4\in\gamma_2(\Pi)$). Аналогично получаем
$$\alpha_2\equiv(1-x_3^{64})(1-x_1)-(1-x_1^{64})(1-x_3),$$
$$\alpha_3\equiv(1-x_3^{128})(1-x_2)-(1-x_2^{128})(1-x_3).$$

Следовательно,
$$\begin{aligned}&\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\&\quad\equiv(2-x_2^{32}-x_3^{64})(1-x_1)+(x_1^{32}-x_3^{128})(1-x_2)+(x_1^{64}+x_2^{128}-2)(1-x_3)\end{aligned}$$

$$\equiv (1-\xi_4^4\eta_1)(1-x_1)+(1-\xi_5^{16}\eta_2)(1-x_2)+(1-\xi_6^{64}\eta_2)(1-x_3)$$
$$\equiv (1-\eta_1)(1-x_1)+(1-\eta_2)(1-x_2)+(1-\eta_3)(1-x_3)$$
$$+(1-\xi_4)(1-\xi_1)+(1-\xi_5)(1-\xi_2)+(1-\xi_6)(1-\xi_2^{-2}\xi_4^4)\equiv 0,$$

поэтому имеем требуемое $w \in D_4(\Pi)$.

Доказательство примера 4.1.3. По модулю $\gamma_4(G)$ получаем

$$x_2^{32}x_3^{64}=[x_4,x_1]^2[x_3,x_4]^8[x_4,x_1]^2[x_4,x_2]^4=[x_3,x_4]^8[x_4,x_1]^4[x_4,x_2]^4=\xi_4^4\eta_1,$$

где $\xi_4=[x_3,x_4]^2[x_4,x_2]\in\gamma_2(G)$, $\eta_1=[x_4,x_1]^4\in\gamma_3(G)$;

$$x_1^{-32}x_3^{128}=[x_4,x_3]^{16}[x_4,x_2]^8[x_4,x_1]^4[x_4,x_2]^8=[x_4,x_3]^{16}[x_4,x_2]^{16}[x_4,x_1]^4=\xi_5^{16}\eta_2,$$

где $\xi_5=[x_4,x_3]\in\gamma_2(G)$, $\eta_2=[x_4,x_2]^{16}[x_4,x_1]^4\in\gamma_3(G)$;

$$x_1^{-64}x_2^{-128}=[x_4,x_2]^{16}[x_4,x_3]^{32}[x_4,x_1]^{-8}[x_4,x_3]^{32}=[x_4,x_2]^{16}[x_4,x_3]^{64}[x_4,x_1]^{-8}=\eta_3\in\gamma_3(G).$$

По лемме 4.1.1 $w\in D_4(G)$. Остается показать, что $w\notin\gamma_4(G)$. Мы построим нильпотентную группу H ступени нильпотентности 3, являющуюся эпиморфным образом группы G с нетривиальным образом w.

Конструкция группы H является аналогом конструкции Гупты и Пасси (см. [13; пример 2.1]). Пусть F – свободная группа с порождающими x_1, x_2, x_3, x_4. Определим R_1 как четвертый член нижнего центрального ряда F, т.е. $R_1=\gamma_4(F)$. Определим

$$R_2=\langle R_1,\ [x_i,x_j,x_k]\notin\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle R_1 \text{ для всех } i,j,k,\ \alpha^4\beta^{-1},\ \beta^4\gamma^{-1},\ \gamma^4\rangle,$$

где $\alpha=[x_4,x_3,x_3]$, $\beta=[x_4,x_2,x_2]$, $\gamma=[x_4,x_1,x_1]$;

$$R_3=\langle R_2,\ [x_4,x_3]^{64}\alpha^{32},\ [x_4,x_2]^{16}\beta^8,\ [x_4,x_1]^4\gamma^2,\ [x_3,x_2]^{16}\beta^{-1},\ [x_3,x_1]^4\alpha^{-2},\ [x_2,x_1]^4\beta^{-1}\rangle,$$

и

$$R_4=\langle R_3,c_1,c_2,c_3\rangle,$$

где

$$c_1=x_1^4[x_4,x_3]^2[x_4,x_2],\qquad c_2=x_2^{16}[x_4,x_3]^4[x_4,x_1]^{-1},\qquad c_3=x_3^{64}[x_4,x_2]^{-4}[x_4,x_1]^{-2}.$$

Положим $H=F/R_4$.

Очевидно, что группа H является естественным эпиморфным образом группы G. Следовательно, остается показать, что элемент

$$w_0=[x_1,x_2^{32}][x_1,x_3^{64}][x_2,x_3^{128}]$$

нетривиален в H.

Мы утверждаем, что $[R_{i+1},F]\subseteq R_i$, $i=1,2,3$. Это очевидно для $i=1,2$. Покажем это для $i=3$. Работая по модулю R_3, имеем

$$[c_1,x_1]=1,$$
$$[c_1,x_2]=[x_1,x_2]^4[x_4,x_2,x_2]=[x_1,x_2]^4\beta=1,$$
$$[c_1,x_3]=[x_1,x_3]^4[x_4,x_3,x_3]^2=[x_1,x_3]^4\alpha^2=1,$$
$$[c_1,x_4]=[x_1,x_4]^4[x_1,x_4,x_1]^2=[x_1,x_4]^4\gamma^{-2}=1,$$
$$[c_2,x_1]=[x_2,x_1]^{16}[x_4,x_1,x_1]^{-1}=\beta^4\gamma^{-1}=1,$$
$$[c_2,x_2]=1,$$

$$[c_2, x_3] = [x_2, x_3]^{16}[x_4, x_3, x_3]^4 = \beta^{-1}\alpha^4 = 1,$$
$$[c_2, x_4] = [x_2, x_4]^{16}[x_2, x_4, x_2]^8 = [x_2, x_4]^{16}\beta^{-8} = 1,$$
$$[c_3, x_1] = [x_3, x_1]^{64}[x_4, x_1, x_1]^{-2} = \alpha^{32}\gamma^{-2} = 1,$$
$$[c_3, x_2] = [x_3, x_2]^{64}[x_4, x_2, x_2]^{-4} = [x_3, x_2]^{64}\beta^{-4} = 1,$$
$$[c_3, x_3] = 1,$$
$$[c_3, x_4] = [x_3, x_4]^{64}[x_3, x_4, x_3]^{32} = [x_3, x_4]^{64}\alpha^{-32} = 1.$$

Естественно, факторгруппа R_2/R_1 является циклической порядка 64, порожденной элементом α. Мы утверждаем, что элемент α имеет в точности порядок 64 в H. Предположим, что $\alpha^s \in R_4$, $s > 0$ и s не делится на 64. Тогда R_4/R_2 имеет кручение α^s, так как $\alpha^{64} \in R_2$. Получаем расширение групп

$$1 \to R_3/R_2 \to R_4/R_2 \to R_4/R_3 \to 1.$$

Следовательно, как минимум одна из групп, R_3/R_2 или R_4/R_3, имеет кручение. Так как $[R_4, F] \subseteq R_3$, каждый элемент в R_4/R_3 может быть записан как $c_1^{h_1}c_2^{h_2}c_3^{h_3}$ для некоторых целых h_1, h_2, h_3. Естественно, это свободная абелева группа ранга 3, так как $R_4/R_4 \cap \gamma_2(F)$ – свободная абелева группа, которая при этом является эпиморфным образом R_4/R_3. Аналогичные аргументы применимы к факторгруппе R_3/R_2, так как все коммутаторы, которые мы добавили в R_2 для получения R_3, имеют форму $[x_i, x_j]^{h_{ij}}q_{ij}$, $q_{ij} \in \gamma_3(F)$, $h_{ij} \in \mathbb{Z}$, но коммутаторы вида $[x_i, x_j]$ являются базисными коммутаторами в F, т.е. они оказываются линейно независимыми по модулю $\gamma_3(F)$. Следовательно, обе факторгруппы, R_4/R_3 и R_3/R_2, являются свободными абелевыми и элемент α имеет порядок в точности 64 в H.

В заключение отметим, что $w_0 = \alpha^{32}$ нетривиален в H, поэтому элемент w не лежит в $\gamma_4(G)$.

Пример 4.1.4. Пусть G – группа, заданная представлением

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1^4 = \xi_1,\ x_2^{16} = \xi_2,\ x_2^{32}x_3^{64} = \xi_4^4,\ x_1^{-32}x_3^{128} = \xi_5^{16}, \xi_1^{16}\xi_2^8 = 1\rangle,$$

где

$$\xi_1 = [x_2, x_4][x_3, x_4]^2, \qquad \xi_2 = [x_4, x_1][x_3, x_4]^4, \qquad \xi_4 = [x_3, x_4]^2[x_4, x_2][x_4, x_1], \qquad \xi_5 = [x_4, x_3].$$

Тогда

$$w = [x_1, x_2^{32}][x_1, x_3^{64}][x_2, x_3^{128}] \in D_4(G) \setminus \gamma_4(G).$$

Доказательство. По лемме 4.1.1 $w \in D_4(G)$. Отметим, что группа H, участвующая в доказательстве примера 4.1.3, является естественным эпиморфным образом группы G. Действительно, первые два соотношения в G являются также соотношениями в H (благодаря соотношениям c_1, c_2) и поэтому нам надо проверить лишь оставшиеся три соотношения. В H имеем

$$\begin{aligned}
x_2^{32}x_3^{64} &= [x_4, x_1]^2[x_3, x_4]^8[x_4, x_1]^2[x_4, x_2]^4 = [x_3, x_4]^8[x_4, x_1]^4[x_4, x_2]^4 = \xi_4^4,\\
x_1^{-32}x_3^{128} &= [x_4, x_3]^{16}[x_4, x_2]^8[x_4, x_1]^4[x_4, x_2]^8\\
&= [x_4, x_3]^{16}[x_4, x_2, x_2]^{-8}[x_4, x_1, x_1]^{-2} = [x_4, x_3]^{16}[x_4, x_1, x_1]^{-4} = [x_4, x_3]^{16} = \xi_5^{16},\\
\xi_1^{16}\xi_2^8 &= [x_2, x_4]^{16}[x_3, x_4]^{32}[x_4, x_1]^8[x_3, x_4]^{32}\\
&= [x_4, x_2, x_2]^8[x_4, x_1, x_1]^4[x_4, x_3, x_3]^{32} = [x_4, x_3, x_3]^{64} = 1.
\end{aligned}$$

Получаем эпиморфизм $\theta\colon G \to H$, $x_i \mapsto x_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$. Как показано в доказательстве примера 4.1.3, элемент $w_0 = \theta(w)$ нетривиален в группе H, которая является нильпотентной класса 3. Следовательно, получаем $w \notin \gamma_4(G)$.

Пример 4.1.5. Пусть

$$\Pi = \Big\langle x_1, x_2, x_3, y_1, \ldots, y_{26} \\ \Big| \; x_1^4 = \prod_{i=0}^{2}[y_{2i+1}, y_{2i+2}],\; x_2^{16} = \prod_{i=3}^{7}[y_{2i+1}, y_{2i+2}], x_2^{32}x_3^{64} = \Big(\prod_{i=8}^{11}[y_{2i+1}, y_{2i+2}]\Big)^4, \\ x_1^{-32}x_3^{128} = [y_{25}, y_{26}]^{16},\; x_1^{-64}x_2^{-128} = 1\Big\rangle. \tag{4.1.2}$$

Тогда

$$w = [x_1, x_2^{32}][x_1, x_3^{64}][x_2, x_3^{128}] \in D_4(\Pi) \setminus \gamma_4(\Pi).$$

Доказательство. По лемме 4.1.1 $w \in D_4(\Pi)$. Рассмотрим группу $\Pi' = \Pi * Z$, где Z является бесконечной циклической группой с порождающим x. Легко увидеть, что существует эпиморфизм $\theta\colon \Pi' \to G$, где G – группа, рассмотренная в лемме 4.1.4, и θ отображает $x_i \mapsto x_i$, $i = 1, 2, 3$, $x \mapsto x_4$. Естественно, для такого эпиморфизма получаем $\theta(w) \notin \gamma_4(G)$ по лемме 4.1.4, и поэтому $w \notin \gamma_4(\Pi)$.

Пример 4.1.6. Для $n \geqslant 5$ пусть

$$G(n) = \langle x_1, x_2, x_3, y_1, \ldots, y_{10n} \mid x_1^4 = \xi_{1,(n)},\; x_2^{16} = \xi_{2,(n)}, \\ x_2^{32}x_3^{64} = \xi_{3,(n)}^4,\; x_1^{-32}x_3^{128} = \xi_{4,(n)}^{16},\; x_1^{-64}x_2^{-128} = \xi_{5,(n)}^{64}\rangle, \tag{4.1.3}$$

где

$$\xi_{i,(n)} = [y_{(2i-2)n+1}, y_{(2i-2)n+2}] \cdots [y_{2in-1}, y_{2in}], \qquad 1 \leqslant i \leqslant 5.$$

Тогда

$$w = [x_1, x_2^{32}][x_1, x_3^{64}][x_2, x_3^{128}] \in D_4(G(n)) \setminus \gamma_4(G(n)).$$

Доказательство. Заметим, что существует эпиморфизм $G(n) \to \Pi$, где Π – группа, рассмотренная в примере 4.1.5, который отображает $x_i \mapsto x_i$, $i = 1, 2, 3$. Требуемое утверждение теперь следует из леммы 4.1.1.

По этому же принципу можно построить и другие примеры групп без размерного свойства. Следующий пример нам нужен как основание для доказательства теоремы 4.1.1.

Пример 4.1.7. Пусть $k \geqslant 9$ и G – группа, заданная следующим копредставлением:

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_1^8[x_4, x_3]^4[x_4, x_2],\; x_2^{64}[x_4, x_3]^{-16}[x_4, x_1]^{-1},\; x_3^{2^k}[x_4, x_2]^{16}[x_4, x_1]^{-4}\rangle. \tag{4.1.4}$$

Тогда

$$[x_1, x_2^{256}][x_1, x_3^{2^k}][x_2, x_3^{2^{k+1}}] \in D_4(G) \setminus \gamma_4(G).$$

Пример 4.1.8. Пусть

$$r \geqslant t \geqslant 2, \qquad k \geqslant q + r, \qquad s \geqslant l + 3, \qquad q \geqslant s + r + 2$$

и G – группа с порождающими x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и соотношениями

$$\begin{aligned} x_1^{2^l} &= [x_4, x_2]^{-2^{l-r-2}}[x_4, x_3]^{2^{l-1}}[x_4, x_5]^{-2^{l-t}}, \\ x_2^{2^s} &= [x_4, x_1]^{2^{l-r-2}}[x_4, x_3]^{-2^{s-3}}[x_4, x_5]^{2^{s-t-1}}, \\ x_3^{2^k} &= [x_4, x_1]^{-2^{l-1}}[x_4, x_2]^{2^{s-3}}[x_4, x_5]^{2^{q-5}}, \\ x_5^{2^q} &= [x_4, x_1]^{2^{l-t}}[x_4, x_2]^{-2^{s-t-1}}[x_4, x_3]^{-2^{q-5}}. \end{aligned}$$

Тогда для

$$w = [x_1, x_2^{2^{s+r}}][x_1, x_3^{2^k}][x_1, x_5^{2^{q+t-2}}][x_2, x_3^{2^{k+1}}][x_2, x_5^{2^{q+t}}][x_5, x_3^{2^{k+3}}]$$

имеем

$$w \in D_4(G) \setminus \gamma_4(G).$$

Доказательство. Так как $x_1^{2^l}, x_2^{2^s}, x_3^{2^k}, x_5^{2^q} \in \gamma_3(G)$, получаем

$$1 - w \equiv \sum_{i=1}^{6}(1-\alpha_i) \operatorname{mod} \mathfrak{g}^6,$$

где

$$\alpha_1 = [x_1, x_2^{2^{s+r}}], \qquad \alpha_2 = [x_1, x_3^{2^k}], \qquad \alpha_3 = [x_1, x_5^{2^{q+t-2}}],$$
$$\alpha_4 = [x_2, x_3^{2^{k+1}}], \qquad \alpha_5 = [x_2, x_5^{2^{q+t}}], \qquad \alpha_6 = [x_5, x_3^{2^{k+3}}].$$

Естественно, имеем следующие сравнения:

$$\begin{aligned}
1-\alpha_1 &\equiv (1-x_2^{2^{s+r}})(1-x_1) - (1-x_1)(1-x_2^{s+r}) \\
&\equiv (1-x_2^{2^{s+r}})(1-x_1) - 2^{s+r}(1-x_1)(1-x_2) + \binom{2^{s+r}}{2}(1-x_1)(1-x_2)^2 \\
&\equiv (1-x_2^{2^{s+r}})(1-x_1) - (1-x_1^{2^{s+r}})(1-x_2) \operatorname{mod} \mathfrak{g}^4, \\
1-\alpha_2 &\equiv (1-x_3^{2^k})(1-x_1) - (1-x_1^{2^k})(1-x_3) \operatorname{mod} \mathfrak{g}^4, \\
1-\alpha_3 &\equiv (1-x_5^{2^{q+t-2}})(1-x_1) - (1-x_1^{2^{q+t-2}})(1-x_5) \operatorname{mod} \mathfrak{g}^4, \\
1-\alpha_4 &\equiv (1-x_3^{2^{k+1}})(1-x_2) - (1-x_2^{2^{k+1}})(1-x_3) \operatorname{mod} \mathfrak{g}^4, \\
1-\alpha_5 &\equiv (1-x_5^{2^{q+t}})(1-x_2) - (1-x_2^{2^{q+t}})(1-x_5) \operatorname{mod} \mathfrak{g}^4, \\
1-\alpha_6 &\equiv (1-x_3^{2^{k+3}})(1-x_5) - (1-x_5^{2^{k+3}})(1-x_3) \operatorname{mod} \mathfrak{g}^4.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
1 - w \equiv{}& (1-x_2^{2^{s+r}}x_3^{2^k}x_5^{2^{q+t-2}})(1-x_1) + (1-x_1^{-2^{s+r}}x_3^{2^{k+1}}x_5^{2^{q+t}})(1-x_2) \\
&+ (1-x_1^{-2^k}x_2^{-2^{k+1}}x_5^{-2^{k+3}})(1-x_3) + (1-x_1^{-2^{q+t-2}}x_2^{-2^{q+t}}x_3^{2^{k+3}})(1-x_5) \operatorname{mod} \mathfrak{g}^4.
\end{aligned}$$

В группе G имеем

$$\begin{aligned}
&x_2^{2^{s+r}}x_3^{2^k}x_5^{2^{q+t-2}} \\
&\quad= [x_4,x_1]^{2^{l-2}}[x_4,x_3]^{-2^{s+r-3}}[x_4,x_5]^{2^{s-t-1+r}}[x_4,x_1]^{-2^{l-1}} \\
&\qquad\times [x_4,x_2]^{2^{s-3}}[x_4,x_5]^{2^{q-5}}[x_4,x_1]^{2^{l-2}}[x_4,x_2]^{-2^{s-3}}[x_4,x_3]^{-2^{q+t-7}} \\
&\quad= [x_4,x_2]^{2^{s-t-1+r}}[x_4,x_2]^{-2^{s-3}}[x_4,x_3]^{-2^{s+r-3}}[x_4,x_3]^{-2^{q+t-7}}[x_4,x_5]^{2^{q-5}}[x_4,x_5]^{2^{s-t-1+r}}, \\
&x_1^{-2^{s+r}}x_3^{2^{k+1}}x_5^{2^{q+t}} \\
&\quad= [x_4,x_2]^{2^{s-2}}[x_4,x_3]^{-2^{s+r-1}}[x_4,x_5]^{2^{s+r-t}}[x_4,x_1]^{-2^l} \\
&\qquad\times [x_4,x_2]^{2^{s-2}}[x_4,x_5]^{2^{q-4}}[x_4,x_1]^{2^l}[x_4,x_2]^{-2^{s-1}}[x_4,x_3]^{-2^{q-5+t}} \\
&\quad= [x_4,x_3]^{-2^{s+r-1}}[x_4,x_3]^{-2^{q+t-5}}[x_4,x_5]^{2^{s+r-t}}[x_4,x_5]^{2^{q-4}}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&x_1^{-2^k} x_2^{-2^{k+1}} x_5^{-2^{k+3}} \\
&\quad = [x_4,x_2]^{2^{k-r-2}} [x_4,x_3]^{-2^{k-1}} [x_4,x_5]^{2^{k-t}} [x_4,x_1]^{-2^{l-r-1+k-s}} \\
&\qquad \times [x_4,x_3]^{2^{k-2}} [x_4,x_5]^{-2^{k-t}} [x_4,x_1]^{-2^{l-t+k-q+3}} [x_4,x_2]^{2^{s-t+k-q+2}} [x_4,x_3]^{2^{k-2}} \\
&\quad = [x_4,x_1]^{-2^{l-r+k-s}} [x_4,x_1]^{-2^{l-t+k-q+3}} [x_4,x_2]^{2^{k-r-2}} [x_4,x_2]^{2^{s-t+k-q+2}}, \\
&x_1^{-2^{q+t-2}} x_2^{-2^{q+t}} x_3^{2^{k+3}} \\
&\quad = [x_4,x_2]^{2^{q+t-r-4}} [x_4,x_3]^{-2^{q+t-3}} [x_4,x_5]^{2^{q-2}} [x_4,x_1]^{-2^{l-r-2+q+t-s}} \\
&\qquad \times [x_4,x_3]^{2^{q+t-3}} [x_4,x_5]^{-2^{q-1}} [x_4,x_1]^{2^{l+2}} [x_4,x_2]^{2^s} [x_4,x_5]^{2^{q-2}} \\
&\quad = [x_4,x_2]^{2^{q+t-r-4}} [x_4,x_2]^{2^s} [x_4,x_1]^{q+l+t-s-r-2} [x_4,x_1]^{2^{l+2}}.
\end{aligned}
$$

Поэтому

$$1 - w \equiv (1-\eta_1^{2^l})(1-x_1) + (1-\eta_2^{2^s})(1-x_2) + (1-\eta_3)(1-x_3) + (1-\eta_5)(1-x_5) \bmod \mathfrak{g}^4,$$

где

$$
\begin{aligned}
\eta_1 &= [x_4,x_2]^{2^{s-t-1+r-l}} [x_4,x_2]^{-2^{s-3-l}} [x_4,x_3]^{-2^{s+r-l-3}} [x_4,x_3]^{-2^{q+t-l-7}} [x_4,x_5]^{2^{q-l-5}} [x_4,x_5]^{2^{s-t-1+r-l}}, \\
\eta_2 &= [x_4,x_3]^{-2^{r-1}} [x_4,x_3]^{-2^{q+t-s-5}} [x_4,x_5]^{2^{r-t}} [x_4,x_5]^{2^{q-s-4}}, \\
\eta_3 &= [x_4,x_1]^{-2^{l-r+k-s}} [x_4,x_1]^{-2^{l-t+k-q+3}} [x_4,x_2]^{2^{k-r-2}} [x_4,x_2]^{2^{s-t+k-q+2}} \in \gamma_3(G), \\
\eta_4 &= [x_4,x_2]^{2^{q+t-r-4}} [x_4,x_2]^{2^s} [x_4,x_1]^{q+l+t-s-r-2} [x_4,x_1]^{2^{l+2}} \in \gamma_3(G).
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$1 - w \equiv (1-\eta_1)(1-x_1^{2^l}) + (1-\eta_2)(1-x_2^{2^s}) \equiv 0 \bmod \mathfrak{g}^4.$$

Доказательство того, что $w \notin \gamma_4(G)$, проводится по тому же принципу, что и доказательство примера 4.1.3.

Пусть F – свободная группа с порождающими x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Определим R_1 как четвертый член нижнего центрального ряда группы F, т.е. $R_1 = \gamma_4(F)$. Далее определим

$$R_2 = \langle R_1,\ [x_i,x_j,x_k] \notin \langle\alpha,\beta,\gamma,\delta\rangle R_1 \text{ для всех } i,j,k,\ \alpha^{2^{k-q}}\beta^{-1},\ \beta^{2^{q-s}}\gamma^{-1},\ \gamma^{2^{s-l}}\delta^{-1},\ \delta^{2^l}\rangle,$$

где $\alpha = [x_4,x_3,x_3]$, $\beta = [x_4,x_5,x_5]$, $\gamma = [x_4,x_2,x_2]$, $\delta = [x_4,x_1,x_1]$,

$$
\begin{aligned}
R_3 = \Big\langle R_2,\ & [x_4,x_3]^{2^k}\alpha^{2^{k-1}},\ [x_4,x_5]^{2^q}\beta^{2^q},\ [x_4,x_2]^{2^s}\gamma^{2^{s-1}},\ [x_4,x_1]^{2^l}\delta^{2^{l-1}},\ [x_3,x_5]^{-2^q}\alpha^{2^{q-5}}, \\
& [x_3,x_2]^{-2^s}\alpha^{2^{s-3}},\ [x_3,x_1]^{2^l}\alpha^{2^{l-1}},\ [x_5,x_2]^{2^s}\beta^{2^{s-t-1}},\ [x_5,x_1]^{-2^l}\beta^{-2^{l-t}},\ [x_2,x_1]^{-2^l}\gamma^{2^{l-r-2}}\Big\rangle
\end{aligned}
$$

и

$$R_4 = \langle R_3, c_1, c_2, c_3, c_4\rangle,$$

где

$$
\begin{aligned}
c_1 &= x_1^{-2^l}[x_4,x_2]^{-2^{l-r-2}}[x_4,x_3]^{2^{l-1}}[x_4,x_5]^{-2^{l-t}}, \\
c_2 &= x_2^{-2^s}[x_4,x_1]^{2^{l-r-2}}[x_4,x_3]^{-2^{s-3}}[x_4,x_5]^{2^{s-t-1}}, \\
c_3 &= x_3^{-2^k}[x_4,x_1]^{-2^{l-1}}[x_4,x_2]^{2^{s-3}}[x_4,x_5]^{2^{q-5}}, \\
c_4 &= x_5^{-2^q}[x_4,x_1]^{2^{l-t}}[x_4,x_2]^{-2^{s-t-1}}[x_4,x_3]^{-2^{q-5}}.
\end{aligned}
$$

Положим теперь $H = F/R_4$.

Очевидно, группа H является естественным эпиморфным образом группы G. Поэтому достаточно показать, что элемент

$$w_0 = [x_1, x_2^{2^{s+r}}][x_1, x_3^{2^k}][x_1, x_5^{2^{q+t-2}}][x_2, x_3^{2^{k+1}}][x_2, x_5^{2^{q+t}}][x_5, x_3^{2^{k+3}}]$$

нетривиален в H. Мы утверждаем, что $[R_{i+1}, F] \subseteq R_i$, $i = 1, 2, 3$. Доказательство проводим по аналогии с примером 4.1.3: мы можем показать, что $\gamma_3(G)$ циклична порядка 2^k с порождающим α, но $w_0 = \alpha^{2^{k-1}}$. Следовательно, $w_0 \neq 1$ и $w \notin \gamma_4(G)$.

Далее рассмотрим примеры групп без размерного свойства в высших размерностях. Первые примеры таких групп были даны Гуптой в [67].

Пример 4.1.9 [67], [68]. Пусть $n \geqslant 4$ – фиксированное число и F – свободная группа ранга 4 с базисом $\{r, a, b, c\}$. Положим $x_0 = y_0 = z_0 = r$ и определим коммутаторы $x_i = [x_{i-1}, a]$, $y_i = [y_{i-1}, b]$, $z_i = [z_{i-1}, c]$, $i = 1, 2, \dots$. Пусть $\mathfrak{G}_n$ – факторгруппа группы F по следующим соотношениям:

$$r^{2^{2n-1}} = 1, \qquad a^{2^{n+2}} = y_{n-3}^4 z_{n-3}^2, \qquad b^{2^n} = x_{n-3}^{-4} z_{n-3}, \qquad c^{2^{n-2}} = x_{n-3}^{-2} y_{n-3}^{-1},$$
$$z_{n-2} = y_{n-2}^4, \qquad y_{n-2} = x_{n-2}^4,$$
$$x_{n-1} = 1, \qquad y_{n-1} = 1, \qquad z_{n-1} = 1,$$
$$[a, b, g] = 1, \quad [b, c, g] = 1, \quad [a, c, g] = 1 \qquad \text{для всех} \quad g \in F,$$
$$[x_i, b] = 1, \quad [x_i, c] = 1, \quad [y_i, a] = 1, \quad [y_i, c] = 1, \quad [z_i, a] = 1, \quad [z_i, b] = 1, \qquad i \geqslant 1,$$
$$[x_i, x_j] = 1, \quad [x_i, y_j] = 1, \quad [x_i, z_j] = 1, \quad [y_i, y_j] = 1, \quad [y_i, z_j] = 1, \quad [z_i, z_j] = 1, \qquad i, j \geqslant 0.$$

Пусть

$$g = [a, b]^{2^{2n-1}} [a, c]^{2^{2n-2}} [b, c]^{2^{2n-3}}.$$

Тогда $g \in D_n(\mathfrak{G}_n) \setminus \gamma_n(\mathfrak{G}_n)$.

Пример 4.1.10. Для каждого целого числа $n \geqslant 0$ существует целое число $k > l$ такое, что для группы $\mathfrak{G}_n$, заданной копредставлением

$$\Big\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid x_1^4 \xi_1 = 1,\ x_2^{2^l} \xi_2 = 1,\ x_3^{2^k} \xi_3 = 1,$$
$$[[x_5, {}_n x_4], x_1]^4 [[x_5, {}_n x_4], x_3, x_3]^{2^{k-1}} = 1,\ \xi_1^{2^{k-2}} \xi_2^{2^{k-l+1}} = 1 \Big\rangle,$$

где

$$\xi_1 = [[x_5, {}_n x_4], x_3]^2 [[x_5, {}_n x_4], x_2][x_5, {}_{n+1} x_4]^2,$$
$$\xi_2 = [[x_5, {}_n x_4], x_3]^{2^{l-2}} [[x_5, {}_n x_4], x_1]^{-1} [x_5, {}_{n+1} x_4]^2,$$
$$\xi_3 = [[x_5, {}_n x_4], x_2]^{-2^{l-2}} [[x_5, {}_n x_4], x_1]^{-2},$$

имеет место

$$w_n = [x_1, x_2^{2^{l+1}}][x_1, x_3^{2^k}][x_2, x_3^{2^{k+1}}] \in D_{4+n}(\mathfrak{G}_n) \setminus \gamma_{4+n}(\mathfrak{G}_n).$$

Для доказательства этого примера нам потребуются технические леммы. Следующая лемма является обобщением леммы 4.1.1.

Лемма 4.1.2. *Пусть* Π *– группа и* $n \geqslant 4$ *– целое число. Если* $x_1, x_2, x_3 \in \Pi$ *– такие элементы, что существуют* $\xi_i \in \gamma_{n-2}(\Pi)$, $i = 1, \dots, 4$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$x_1^4 = \xi_1, \quad x_2^{2^l} = \xi_2, \quad x_2^{2^{l+1}} x_3^{2^k} = \xi_3^4, \quad x_1^{-2^{l+1}} x_3^{2^{k+1}} = \xi_4^{2^l}, \quad x_1^{2^k} x_2^{2^{k+1}} = 1,$$

то

$$w = [x_1, x_2^{2^{l+1}}][x_1, x_3^{2^k}][x_2, x_3^{2^{k+1}}] \in D_n(\Pi)$$

при условии, что k, l *достаточно велики.*

Доказательство. Так как $1-x\in\Delta^{n-2}(\Pi)$ для $x\in\gamma_{n-2}(\Pi)$, мы получаем

$$1-w\equiv\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \mod \Delta^n(\Pi),$$

где

$$\alpha_1=(1-[x_1,x_2^{2^{l+1}}]),\qquad \alpha_2=(1-[x_1,x_3^{2^k}]),\qquad \alpha_3=(1-[x_2,x_3^{2^{k+1}}]).$$

Теперь, работая по модулю $\Delta^n(\Pi)$, получаем

$$\begin{aligned}\alpha_1&\equiv(1-x_2^{2^{l+1}})(1-x_1)-(1-x_1)(1-x_2^{2^{l+1}})\\&\equiv(1-x_2^{2^{l+1}})(1-x_1)-2^{l+1}(1-x_1)(1-x_2)+\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i\binom{2^{l+1}}{i}(1-x_1)(1-x_2)^i.\end{aligned}$$

Отметим, что для достаточно большого l и $i\leqslant n$ число $\binom{2^{l+1}}{i}$ делится на 4^n. Следовательно, для такого числа l получаем

$$\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i\binom{2^{l+1}}{i}(1-x_1)(1-x_2)^i\in\Delta^n(\Pi)$$

и

$$2^{l+1}(1-x_1)(1-x_2)\equiv(1-x_1^{2^{l+1}})(1-x_2) \mod \Delta^n(\Pi).$$

Поэтому

$$\alpha_1\equiv(1-x_2^{2^{l+1}})(1-x_1)-(1-x_1^{2^{l+1}})(1-x_2) \mod \Delta^n(\Pi).$$

Предполагая, что число k достаточно велико, а именно такое, что $\binom{2^{k+1}}{i}$ делится на 2^{ln} для $i\leqslant n$, получаем

$$\begin{aligned}\alpha_2&\equiv(1-x_3^{2^k})(1-x_1)-(1-x_1^{2^k})(1-x_3),\\\alpha_3&\equiv(1-x_3^{2^{k+1}})(1-x_2)-(1-x_2^{2^{k+1}})(1-x_3).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3&\equiv(2-x_2^{2^{l+1}}-x_3^{2^k})(1-x_1)+(x_1^{2^{l+1}}-x_3^{2^{k+1}})(1-x_2)+(x_1^{2^k}+x_2^{2^{k+1}}-2)(1-x_3)\\&\equiv(1-\xi_3^4)(1-x_1)+(1-\xi_4^{2^l})(1-x_2)+(1-x_1^{2^k}x_2^{2^{k+1}})(1-x_3)\\&\equiv(1-\xi_3)(1-\xi_1)+(1-\xi_4)(1-\xi_2)\equiv 0 \mod \Delta^n(\Pi),\end{aligned}$$

и поэтому $w\in D_n(\Pi)$.

Лемма 4.1.3. *Пусть $k\geqslant l+2$, $l\geqslant 4$ – целые числа и G – группа, заданная копредставлением*

$$\begin{aligned}\bigl\langle x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\mid x_1^4\xi_1=1,\ x_2^{2^l}\xi_2=1,\ x_3^{2^k}\xi_3=1,\ [x_4,x_1]^4[x_4,x_3,x_3]^{2^{k-1}}=1,\\ \xi_1^{2^{k-2}}\xi_2^{2^{k-l+1}}=1,\ [x_4,x_i,x_4]=1,\ i=1,\dots,4\bigr\rangle,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\xi_1&=[x_4,x_3]^2[x_4,x_2][x_4,x_5]^2,\\\xi_2&=[x_4,x_3]^{2^{l-2}}[x_4,x_1]^{-1}[x_4,x_5]^2,\\\xi_3&=[x_4,x_2]^{-2^{l-2}}[x_4,x_1]^{-2}.\end{aligned}$$

Тогда элемент

$$w=[x_1,x_2^{2^{l+1}}][x_1,x_3^{2^k}][x_2,x_3^{2^{k+1}}]$$

не лежит в $\gamma_4(G)$.

Доказательство. Мы построим нильпотентную группу ступени нильпотентности 3, являющуюся эпиморфным образом данной группы G и такую, что образ элемента w при этом эпиморфизме нетривиален.

Пусть F – свободная группа с базисом $\{x_1, \ldots, x_5\}$. Рассмотрим следующие четыре типа соотношений:

$$R_1 = \gamma_4(F),$$
$$R_2 = \langle R_1 \cup \{[x_i, x_j, x_k] : (i,j,k) \neq (4,1,1), (4,2,2), (4,3,3)\},\ \alpha^{2^{k-l}}\beta^{-1},\ \beta^{2^{l-2}}\gamma^{-1},\ \gamma^4\rangle,$$

где

$$\alpha = [x_4, x_3, x_3], \qquad \beta = [x_4, x_2, x_2], \qquad \gamma = [x_4, x_1, x_1].$$

Теперь определим R_3 как произведение R_2 и нормального замыкания в F следующих слов:

$$[x_4, x_3]^{2^k}\alpha^{2^{k-1}}, \qquad [x_4, x_2]^{2^l}\beta^{2^{l-1}}, \qquad [x_4, x_1]^4\gamma^2, \qquad [x_3, x_2]^{2^l}\alpha^{-2^{l-2}}, \qquad [x_3, x_1]^4\alpha^{-2},$$
$$[x_2, x_1]^4\beta^{-1}, \qquad [x_4, x_5]^{2^{k-l+2}}\alpha^{-2^{k-1}}, \qquad [x_5, x_i], \quad i \neq 1.$$

Пусть R_4 – это произведение R_3 и нормального замыкания в F следующих слов:

$$c_1 = x_1^4[x_4, x_3]^2[x_4, x_2][x_4, x_5]^2,$$
$$c_2 = x_2^{2^l}[x_4, x_3]^{2^{l-2}}[x_4, x_1]^{-1}[x_4, x_5]^2,$$
$$c_3 = x_3^{2^k}[x_4, x_2]^{-2^{l-2}}[x_4, x_1]^{-2}.$$

Мы утверждаем, что

$$[R_{i+1}, F] \subseteq R_i \qquad \text{для} \quad i = 1, 2, 3.$$

Это очевидно для $i = 1, 2$. Остается показать это для $i = 3$.

Заметим, что по модулю R_3 имеем

$$[c_1, x_1] = 1,$$
$$[c_1, x_2] = [x_1, x_2]^4[x_4, x_3, x_3] = [x_1, x_2]^4\beta = 1,$$
$$[c_1, x_3] = [x_1, x_3]^4[x_4, x_3, x_3]^2 = [x_1, x_3]^4\alpha^2 = 1,$$
$$[c_1, x_4] = [x_1, x_4]^4[x_1, x_4, x_1]^2 = [x_1, x_4]^4\gamma^2 = 1,$$
$$[c_1, x_5] = 1,$$
$$[c_2, x_1] = [x_2, x_1]^{2^l}[x_4, x_1, x_1]^{-1} = \beta^{2^{l-2}}\gamma^{-1} = 1,$$
$$[c_2, x_2] = 1,$$
$$[c_2, x_3] = [x_2, x_3]^{2^l}[x_4, x_3, x_3]^{2^{l-2}} = [x_2, x_3]^{2^l}\alpha^{2^{l-2}} = 1,$$
$$[c_2, x_4] = [x_2, x_4]^{2^l}[x_2, x_4, x_2]^{2^{l-1}} = [x_2, x_4]^{2^l}\beta^{-2^{l-1}} = 1,$$
$$[c_2, x_5] = 1,$$
$$[c_3, x_1] = [x_3, x_1]^{2^k}[x_4, x_1, x_1]^{-2} = \alpha^{2^{k-1}}\gamma^{-2} = 1,$$
$$[c_3, x_2] = [x_3, x_2]^{2^k}[x_4, x_2, x_2]^{-2^{l-2}} = \alpha^{2^{k-2}}\beta^{-2^{l-2}} = 1,$$
$$[c_3, x_3] = 1,$$
$$[c_3, x_4] = [x_3, x_4]^{2^k}[x_3, x_4, x_3]^{2^{k-1}} = [x_3, x_4]^{2^k}\alpha^{2^{k-1}} = 1,$$
$$[c_3, x_5] = 1.$$

Естественно, группа $\gamma_3(F)/R_2$ цикличная порядка 2^k и порождается элементом α. Чтобы увидеть, что элемент α имеет порядок в точности 2^k в группе F/R_4, как и в случае доказательства теоремы 4.1.4, заметим, что группы R_3/R_2 и R_4/R_3 свободные абелевы. Следовательно, соотношение $\alpha^s \in R_4$, $s > 0$ влечет, что s делится на 2^k. Как следствие получаем, что α имеет порядок в точности 2^k в F/R_4. По модулю R_4

$$w = [x_1, x_2^{2^{l+1}}][x_1, x_3^{2^k}][x_2, x_3^{2^{k+1}}] \equiv \alpha^{2^{k-1}} \equiv \beta^8 \equiv \gamma^2 \not\equiv 1.$$

Мы утверждаем, что F/R_4 является естественным эпиморфным образом группы G. Первые три соотношения группы G выполняются в F/R_4 по построению. Соотношение $[x_4, x_1]^4[x_4, x_3, x_3]^{2^{k-1}} = [x_4, x_1]^4\gamma^2$ выполнено по модулю R_3. Теперь по модулю R_4 имеем

$$\begin{aligned}
\xi_1^{2^{k-2}}\xi_2^{2^{k-l+1}} &= [x_4, x_3]^{2^{k-1}}[x_4, x_2]^{2^{k-2}}[x_4, x_5]^{2^{k-1}}[x_4, x_3]^{2^{k-1}}[x_4, x_1]^{-2^{k-l+1}}[x_4, x_5]^{2^{k-l+2}} \\
&= [x_4, x_3]^{2^k}\alpha^{2^{k-1}}\alpha^{2^{k+l-4}}[x_4, x_1]^{-2^{k-l+1}}[x_4, x_2]^{2^{k-2}} \\
&= \alpha^{2^{k+l-4}}\beta^{-2^{k-3}}\gamma^{2^{k-l-2}} = 1.
\end{aligned}$$

Соотношения $[x_4, x_i, x_4]$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, лежат в R_2. Поэтому F/R_4 является естественным эпиморфным образом группы G и образ элемента w нетривиален в F/R_4. Следовательно, $w \notin \gamma_4(G)$.

Доказательство примера 4.1.10. Случай $n = 0$ представляет собой лемму 4.1.3. Предположим, что результат следует для некоторого $n \geqslant 0$, т.е. $w_n \notin \gamma_{4+n}(\mathfrak{G}_n)$. Мы докажем это же для $n + 1$, т.е. докажем, что $w_{n+1} \notin \gamma_{5+n}(\mathfrak{G}_{n+1})$.

Рассмотрим факторы $\mathfrak{G}'_n = \mathfrak{G}_n/\gamma_{4+n}(\mathfrak{G}_n)N_n$, где N_n – нормальная подгруппа в $\mathfrak{G}_n$, порожденная всеми левонормированными коммутаторами $[y_1, \ldots, y_s]$, $s \geqslant 3$, такими, что существуют как минимум два вхождения символа $y_i = x_4$. Автоморфизм свободной группы ранга 5, заданный как

$$x_1 \mapsto x_1, \qquad x_2 \mapsto x_2, \qquad x_3 \mapsto x_3, \qquad x_4 \mapsto x_4, \qquad x_5 \mapsto x_5x_4,$$

может быть расширен до автоморфизма группы $\mathfrak{G}'_n$; это следует из того факта, что этот автоморфизм сохраняет все соотношения. Этот автоморфизм задает полупрямое произведение $H_n = \mathfrak{G}'_n \rtimes \langle x\rangle$, где x действует как описанный автоморфизм. Естественно, имеем $[x, x_i] = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, $[x_5, x] = x_4$ в H_n и группа H_n нильпотентна: $\gamma_{5+n}(H_n) = 1$. Естественное отображение $f\colon \mathfrak{G}'_n \to H_n$ является мономорфизмом. Несложно видеть, что группа H_n является эпиморфным образом группы $\mathfrak{G}_{n+1}$ и при этом эпиморфизме элемент w_{n+1} переходит в $f(w_n)$. Следовательно, w_{n+1} не лежит в $\gamma_{5+n}(\mathfrak{G}_{n+1})$.

Далее приведем некоторые более сложные конструкции, работая по тем же принципам, что и раньше. Мы покажем, что существует нильпотентная группа ступени 4 с нетривиальной шестой размерной подгруппой.

Теорема 4.1.1. *Существует нильпотентная группа G ступени нильпотентности 3 с*

$$G \cap (1 + \Delta(\gamma_2(G))^2\mathbb{Z}[G] + \mathfrak{g}^5) \neq 1.$$

Доказательство. Пусть F – свободная группа с базисом $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Пусть $R_1 := \gamma_4(F)$. Определим

$$R_2 = \langle R_1,\ [x_i, x_j, x_k] \notin \langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle R_1 \text{ для всех } i, j, k,\ \delta^{16}\beta,\ \alpha^{2^{k-10}}\delta,\ \beta^8\gamma^{-1},\ \gamma^8\rangle,$$

где

$$\delta = [x_4, x_5, x_5], \qquad \alpha = [x_4, x_3, x_3], \qquad \beta = [x_4, x_2, x_2], \qquad \gamma = [x_4, x_1, x_1].$$

Пусть R_3 – это R_2 вместе с подгруппой, порожденной следующим множеством слов:

$$[x_1, x_2]^8[x_4, x_2, x_2],$$

$$[x_1, x_3]^8 [x_4, x_3, x_3]^4,$$
$$[x_2, x_3]^{64} [x_4, x_3, x_3]^{-16},$$
$$[x_1, x_4]^8 [x_4, x_1, x_1]^4,$$
$$[x_2, x_4]^{64} [x_4, x_2, x_2]^{32},$$
$$[x_3, x_4]^{2^k} [x_4, x_3, x_3]^{2^{k-1}},$$
$$[x_2, x_5]^{64} [x_4, x_5, x_5]^{16},$$
$$[x_5, x_4]^{1024} [x_4, x_5, x_5]^{512},$$
$$[x_1, x_5]^8, \qquad [x_3, x_5]^{1024}.$$

Пусть R_4 – это R_3 вместе с подгруппой, порожденной следующим множеством слов:

$$\begin{aligned}
c_1 &= x_1^8 [x_4, x_3]^4 [x_4, x_2],\\
c_2 &= x_2^{64} [x_4, x_3]^{-16} [x_4, x_1]^{-1} [x_4, x_5]^{16},\\
c_3 &= x_3^{2^k} [x_4, x_2]^{16} [x_4, x_1]^{-4},\\
c_4 &= x_5^{1024} [x_4, x_2]^{16}.
\end{aligned}$$

Для всех $i = 1, 2, 3$ имеем $[F, R_{i+1}] \subseteq R_i$ в предположении $k \geqslant 12$. Случай $i = 1$ очевиден. Случай $i = 2$ можно легко проверить. Мы рассмотрим наиболее сложный случай $i = 3$. Работая по модулю R_3, покажем, что $[c_i, x_j] = 1$ для всех i, j:

$$\begin{aligned}
&[c_1, x_1] = 1,\\
&[c_1, x_2] = [x_1, x_2]^8 [x_4, x_2, x_2] = 1,\\
&[c_1, x_3] = [x_1, x_3]^8 [x_4, x_3, x_3]^4 = 1,\\
&[c_1, x_4] = [x_1, x_4]^8 [x_4, x_1, x_1]^4 = 1, \qquad \text{так как} \quad \gamma^8 \in R_3,\\
&[c_1, x_5] = [x_1, x_5]^8 = 1,\\
&[c_2, x_1] = [x_2, x_1]^{64} [x_4, x_1, x_1]^{-1} = [x_4, x_2, x_2]^8 [x_4, x_1, x_1]^{-1} = 1,\\
&[c_2, x_2] = 1,\\
&[c_2, x_3] = [x_2, x_3]^{64} [x_4, x_3, x_3]^{-16},\\
&[c_2, x_4] = [x_2, x_4]^{64} [x_4, x_2, x_2]^{32} = 1,\\
&[c_2, x_5] = [x_2, x_5]^{64} [x_4, x_5, x_5]^{16} = 1,\\
&[c_3, x_1] = [x_3, x_1]^{2^k} [x_4, x_1, x_1]^{-4} = [x_4, x_3, x_3]^{2^{k-1}} [x_4, x_1, x_1]^{-1} = 1,\\
&[c_3, x_2] = [x_3, x_2]^{2^k} [x_4, x_2, x_2]^{16} = [x_4, x_3, x_3]^{-2^{k-2}} [x_4, x_2, x_2]^{16} = 1,\\
&[c_3, x_3] = 1,\\
&[c_3, x_4] = [x_3, x_4]^{2^k} [x_4, x_3, x_3]^{2^{k-1}} = 1,\\
&[c_3, x_5] = [x_3, x_5]^{2^k} = 1, \qquad \text{так как} \quad k > 10,\\
&[c_4, x_1] = [x_5, x_1]^{1024} = 1,\\
&[c_4, x_2] = [x_5, x_2]^{1024} [x_4, x_2, x_2]^{16} = [x_4, x_5, x_5]^{256} [x_4, x_2, x_2]^{16} = 1,
\end{aligned}$$

$$[c_4, x_3] = [x_5, x_3]^{1024} = 1,$$

$$\begin{aligned}
&[c_4, x_4] = [x_5, x_4]^{1024} [x_4, x_5, x_5]^{512} = 1,\\
&[c_4, x_5] = 1.
\end{aligned}$$

Естественно, $\gamma_3(F/R_2)$ является циклической группой порядка 2^k, порожденной элементом α. Чтобы увидеть, что элемент α имеет порядок в точности 2^k в группе F/R_4, как и в доказательстве теоремы 4.1.3, заметим, что группы R_3/R_2 и R_4/R_3 свободные абелевы. Следовательно, включение $\alpha^s \in R_4$, $s > 0$, влечет, что s делит 2^k. Как следствие получаем, что α имеет порядок в точности 2^k в группе F/R_4. Поэтому наш элемент

$$w = [x_1, x_2^{256}][x_1, x_3^{2^k}][x_2, x_3^{2^{k+1}}]$$

равен $\alpha^{2^{k-1}} = \delta^{512} = \beta^{32} = \gamma^4 \neq 1$.

Так как $x_1^8, x_2^{64}, x_3^{2^k} \in \gamma_2(G)$ по модулю $\mathfrak{g}^6$, имеем

$$1 - w \equiv (1 - [x_1, x_2^{256}]) + (1 - [x_1, x_3^{2^k}]) + (1 - [x_2, x_3^{2^{k+1}}]).$$

Так как

$$64(1-x_1)^2, 2^k(1-x_1)^2, 2^{k+1}(1-x_2)^2 \in \mathfrak{g}^4, 64(1-x_2) \in \mathfrak{g}^2$$

по модулю $\mathfrak{g}^5$, получаем

$$\begin{aligned}
1 - [x_1, x_2^{256}] &\equiv (1 - x_2^{256})(1 - x_1) - (1 - x_1)(1 - x_2^{256}) \\
&\equiv (1 - x_2^{256})(1 - x_1) - (1 - x_1^{256})(1 - x_2) + \binom{256}{2}(1 - x_1)(1 - x_2)^2 \\
&\equiv (1 - x_2^{256})(1 - x_1) - (1 - x_1^{256})(1 - x_2) + (1 - x_1^{128})(1 - x_2)^2.
\end{aligned}$$

Заметим, что по модулю $\mathfrak{g}^5$ имеем

$$\begin{aligned}
(1 - x_1^{128})(1 - x_2)^2 &\equiv (1 - [x_4, x_3]^{-64}[x_4, x_2]^{-16})(1 - x_2)^2 \equiv (1 - x_2) + (1 - x_5^{1024})(1 - x_2)^2 \\
&\equiv 1024(1 - x_5)(1 - x_2)^2 \equiv (1 - x_5)(1 - x_2)(1 - x_2^{1024}) \\
&\equiv (1 - x_5)(1 - x_2)(1 - [x_4, x_3]^{256}[x_4, x_1]^{16}[x_4, x_5]^{-256}) \equiv 0,
\end{aligned}$$

следовательно, по модулю $\mathfrak{g}^5$ имеем

$$1 - [x_1, x_2^{256}] \equiv (1 - x_2^{256})(1 - x_1) - (1 - x_1^{256})(1 - x_2). \tag{4.1.5}$$

Аналогично легко показать, что по модулю $\mathfrak{g}^5$ выполняется

$$1 - [x_1, x_3^{2^k}] \equiv (1 - x_3^{2^k})(1 - x_1) - (1 - x_1^{2^k})(1 - x_3) + (1 - x_1^{2^{k-1}})(1 - x_3)^2, \tag{4.1.6}$$

$$1 - [x_2, x_3^{2^{k+1}}] \equiv (1 - x_3^{2^{k+1}})(1 - x_2) - (1 - x_2^{2^{k+1}})(1 - x_3) + (1 - x_2^{2^k})(1 - x_3)^2. \tag{4.1.7}$$

Заметим также, что

$$\begin{aligned}
x_1^{2^{k-1}} x_2^{2^k} &= [x_4, x_3]^{-2^{k-2}}[x_4, x_2]^{-2^{k-4}}[x_4, x_3]^{2^{k-2}}[x_4, x_1]^{2^{k-6}}[x_4, x_5]^{-2^{k-2}} \\
&= [x_4, x_2]^{-2^{k-4}}[x_4, x_1]^{2^{k-6}}[x_4, x_5]^{-2^{k-2}}.
\end{aligned}$$

Поэтому для $k \geqslant 13$ получаем $x_1^{2^{k-1}} x_2^{2^k} = 1$; и по модулю $\mathfrak{g}^5$ имеем

$$\begin{aligned}
&(1 - x_1^{2^k})(1 - x_3) + (1 - x_1^{2^{k-1}})(1 - x_3)^2 + (1 - x_2^{2^{k+1}})(1 - x_3) + (1 - x_2^{2^k})(1 - x_3)^2 \\
&\equiv (1 - x_1^{2^k} x_2^{2^{k+1}})(1 - x_3) + (1 - x_1^{2^{k-1}} x_2^{2^k})(1 - x_3)^2 \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Эквивалентности (4.1.5)–(4.1.8) влекут, что по модулю $\mathfrak{g}^5$ имеем

$$\begin{aligned}
1 - w &\equiv (1 - x_2^{256})(1 - x_1) - (1 - x_1^{256})(1 - x_2) + (1 - x_3^{2^{k+1}})(1 - x_2) + (1 - x_3^{2^k})(1 - x_1) \\
&\equiv (1 - x_2^{256} x_3^{2^k})(1 - x_1) + (1 - x_1^{-256} x_3^{2^{k+1}})(1 - x_2) \\
&\equiv (1 - \zeta_1^{16})(1 - x_1) + (1 - \zeta_2^{128})(1 - x_2),
\end{aligned}$$

где

$$\zeta_1 = [x_4, x_3]^4[x_4, x_5]^{-4}[x_4, x_2]^{-1}[x_4, x_2, x_2]^2,$$
$$\zeta_2 = [x_4, x_3][x_4, x_5, x_5]^{-4}.$$

Следовательно, по модулю $\mathfrak{g}^5$

$$\begin{aligned}1 - w &\equiv 16(1-\zeta_1)(1-x_1) + 128(1-\zeta_2)(1-x_2)\\ &\equiv (1-\zeta_1)(1-x_1^{16}) - 8(1-\zeta_1)(1-x_1)^2 + (1-\zeta_2)(1-x_2^{128}) - 64(1-\zeta_2)(1-x_2)^2\\ &\equiv (1-\zeta_1)(1-x_1^{16}) + (1-\zeta_2)(1-x_2^{128}).\end{aligned}$$

Так как $x_1^8, x_2^{64} \in \gamma_2(G)$, мы заключаем, что

$$1 - w \in \Delta(\gamma_2(G))^2\mathbb{Z}[G] + \mathfrak{g}^5.$$

Более того, детальный анализ приведенной конструкции показывает, что

$$1 - w \in \Delta([\langle x_4\rangle^G, G])^2\mathbb{Z}[G] + \Delta([\langle x_4\rangle^G, {}_4G])\mathbb{Z}[G], \tag{4.1.9}$$

так как во всех коммутаторах, использованных в словах c_i, $i = 1, \ldots, 4$, имеется нетривиальное вхождение порождающего x_4.

Теорема 4.1.2. *Существует нильпотентная группа* Π *ступени* 4 *с* $D_6(\Pi) \neq 1$.

Доказательство. Рассмотрим 5-порожденную группу G из теоремы 4.1.1, которая нильпотентная ступени 3. Пусть $G_1 = G{*}\langle t\rangle/\gamma_4(G{*}\langle t\rangle)$ – факторгруппа свободного произведения G с бесконечной циклической группой, порожденной элементом t, по модулю четвертого члена нижнего центрального ряда. Естественно, (4.1.9) влечет, что для образа элемента w в G_1 (мы оставляем обозначения элементов из группы G, когда их естественно рассматривать, как элементы из G_1) имеем

$$1 - w \in \Delta([\langle x_4\rangle^{G_1}, G_1])^2\mathbb{Z}[G_1] + \Delta([\langle x_4\rangle^{G_1}, {}_4G_1])\mathbb{Z}[G_1]. \tag{4.1.10}$$

Естественно $w \notin \langle t\rangle^{G_1}$. Определим факторгруппу $G_2 = G_1/\langle [x_4, t, x_4]\rangle^{G_1}$. Пусть f – автоморфизм свободной группы с базисом $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t\}$, определенный как

$$x_i \mapsto x_i, \quad i = 1, \ldots, 5, \qquad t \mapsto tx_4.$$

Легко видеть, что f может быть расширен до автоморфизма группы G_2. Следовательно, мы можем рассмотреть полупрямое произведение $\Pi = G_2 \rtimes \langle x\rangle$. Получаем следующие соотношения в группе Π:

$$[x_i, x] = 1, \quad i = 1, \ldots, 5, \qquad [t, x] = x_4.$$

Так как в группе G_2 имеются соотношения $[x_4, x_i, x_4] = [x_4, t, x_4] = 1$ для всех i, группа Π является нильпотентной ступени 4. Естественное отображение $G_2 \to \Pi$ является мономорфизмом, поэтому образ элемента

$$w = [x_1, x_2^{256}][x_1, x_3^{2^k}][x_2, x_3^{2^{k+1}}]$$

нетривиален в Π. Однако (4.1.10) влечет, что

$$1 - w \in \Delta([\langle [t, x]\rangle^\Pi, \Pi])^2\mathbb{Z}[\Pi] + \Delta([\langle [t, x]\rangle^\Pi, {}_4\Pi])\mathbb{Z}[\Pi] \subseteq \Delta^6(\Pi).$$

Следовательно, $1 \neq w \in D_6(\Pi)$.

Пример 4.1.11. Несложно проверить, что конструкции, представленные в доказательствах теорем 4.1.1 и 4.1.2, обеспечивают для группы $\mathit{\Gamma}$, заданной представлением

$$\begin{aligned}\Big\langle & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \\ & \mid x_1^8[x_4,x_6,x_3]^4[x_4,x_6,x_2],\ x_2^{64}[x_4,x_6,x_3]^{-16}[x_4,x_6,x_1]^{-1}[x_4,x_6,x_5]^{16}, \\ & x_3^{2^k}[x_4,x_7,x_2]^{16}[x_4,x_6,x_1]^{-4},\ x_5^{1024}[x_4,x_6,x_2]^{16},\ [x_4,x_6,x_5]^{2048}, \\ & [x_4,x_6,x_1]^{16},\ [x_4,x_6,x_2]^{128},\ [x_4,x_6,x_1,x_1][x_4,x_6,x_2,x_2]^{-8}, \\ & [x_4,x_6,x_2,x_2]^{-8}[x_4,x_6,x_3,x_3]^{2^{k-3}}\Big\rangle,\end{aligned}$$

для $k \geqslant 13$ свойство

$$D_6(\mathit{\Gamma}) \nsubseteq \gamma_5(\mathit{\Gamma}).$$

Аргументы, приведенные в доказательстве теоремы 4.1.1 указывают, что соотношений группы $\mathit{\Gamma}$ достаточно, чтобы элемент

$$w = [x_1, x_2^{256}][x_1, x_3^{2^k}][x_2, x_3^{2^{k+1}}]$$

лежал в $D_6(\mathit{\Gamma})$. Однако группа Π, построенная в теореме 4.1.2, является естественным эпиморфным образом группы $\mathit{\Gamma}$ и поэтому $w \notin \gamma_5(\mathit{\Gamma})$.

4.2. Четвертая размерная подгруппа

Полное описание четвертой размерной подгруппы известно.

Теорема 4.2.1 (см. [13], [66]). *Пусть G – нильпотентная группа ступени нильпотентности* 3, *заданная преабелевым копредставлением*

$$\langle x_1, \dots, x_m \mid x_1^{d(1)}\xi_1, \dots, x_k^{d(k)}\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \gamma_4(\langle x_1, \dots, x_m\rangle)\rangle$$

с $k \leqslant m$, $d(i) > 0$, $d(k) \mid \cdots \mid d(2) \mid d(1)$ *и* $\xi_i \in \gamma_2(\langle x_1, \dots, x_m\rangle)$. *Тогда группа* $D_4(G)$ *состоит из элементов*

$$w = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} [x_i^{d(i)}, x_j]^{a_{ij}}, \qquad a_{ij} \in \mathbb{Z}, \tag{4.2.1}$$

таких, что

$$d(j) \mid \binom{d(i)}{2} a_{ij}, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant m, \tag{4.2.2}$$

и

$$y_l = \prod_{1 \leqslant i < l} x_i^{-d(i)a_{il}} \prod_{l < j \leqslant k} x_j^{d(l)a_{lj}} \in \gamma_2(G)^{d(l)}\gamma_3(G) \qquad \text{для} \quad 1 \leqslant l \leqslant k. \tag{4.2.3}$$

Отметим, что для любой 3-порожденной группы G имеет место свойство $D_4(G) = \gamma_4(G)$ (см. [13]). В примере 4.1.3 у нас появляется 4-порожденная группа G с тремя соотношениями такая, что $D_4(G) \neq \gamma_4(G)$. Покажем теперь, что для любой группы G, заданной копредставлением с двумя соотношениями, также выполняется свойство $D_4(G) = \gamma_4(G)$. Таким образом, в некотором смысле пример 4.1.3 является минимальным примером группы G с $D_4(G) \neq \gamma_4(G)$.

Теорема 4.2.2. *Пусть $G = \langle X \mid r_1, r_2\rangle$ – группа с двумя соотношениями. Тогда $D_4(G) = \gamma_4(G)$.*

Доказательство. Рассмотрим преабелево копредставление группы G

$$G = \langle x_1, \dots, x_n, \dots \mid x_1^{d(1)}\xi_1,\, x_2^{d(2)}\xi_2,\, \xi_3, \dots \rangle$$

с $\xi_i \in \gamma_2\langle x_1, \dots \rangle$ и $d(2) \mid d(1)$. Тогда по модулю $\gamma_4(G)$ группа $D_4(G)$ состоит из элементов

$$w = [x_1^{d(1)}, x_2]^{a_{12}}$$

таких, что

$$d(2) | \binom{d(1)}{2} a_{12}$$

и

$$y_2 = x_1^{-d(1)a_{12}} \in \gamma_2(G)^{d(2)}\gamma_3(G).$$

Следовательно, по модулю $\gamma_4(G)$ для некоторого $z \in \gamma_2(G)$, получаем

$$w = [x_1^{d(1)a_{12}}, x_2] = [y_2, x_2] = [z^{d(2)}, x_2] = [z, x_2^{d(2)}] = 1.$$

4.3. Пятая размерная подгруппа

Структура пятой размерной подгруппы была приведена в работе Тахары [69]. Там же было показано, что $D_5^6(G) \subseteq \gamma_5(G)$. Мы приведем доказательство теоремы Тахары, значительно более короткое, нежели оригинальное.

Теорема 4.3.1 [69]. *Для каждой группы G выполнено $D_5(G)^6 \subseteq \gamma_5(G)$.*

Анализ описания Тахары приводит к следующему несложному результату.

Теорема 4.3.2. *Для каждой группы G выполнено $D_5(G)^2 \subseteq \delta_2(G)\gamma_5(G)$.*

Пусть G – конечная группа класса нильпотентности 4. Выберем элементы

$$\begin{aligned}
&\{x_{1i} \in G \setminus \gamma_2(G)\}_{i=1,\dots,s},\\
&\{x_{2i} \in \gamma_2(G) \setminus \gamma_3(G)\}_{i=1,\dots,t},\\
&\{x_{3i} \in \gamma_3(G) \setminus \gamma_4(G)\}_{i=1,\dots,u},\\
&\{x_{4i} \in \gamma_4(G)\}_{i=1,\dots,v}
\end{aligned}$$

так, что $\{x_{li}\gamma_{l+1}(G)\}$ образуют базис $\gamma_l(G)/\gamma_{l+1}(G)$. Пусть $d(i)$ – порядок элемента $x_{1i}\gamma_2(G)$ в $G/\gamma_2(G)$, $e(i)$ – порядок элемента $x_{2i}\gamma_3(G)$ в $\gamma_2(G)/\gamma_3(G)$, $f(i)$ – порядок $x_{3i}\gamma_4(G)$ в $\gamma_3(G)/\gamma_4(G)$. Тогда получаем

$$\begin{aligned}
x_{1i}^{d(i)} &= \prod_{1\leqslant j\leqslant t} x_{2j}^{b_{ij}} \prod_{1\leqslant j\leqslant u} x_{3j}^{c_{ij}} y_{4i}, && y_{4i} \in \gamma_4(G), \quad 1 \leqslant i \leqslant s,\\
x_{2i}^{e(i)} &= \prod_{1\leqslant j\leqslant t} x_{3i}^{d_{ij}} y'_{4i}, && y'_{4i} \in \gamma_4(G), \quad 1 \leqslant i \leqslant t,\\
x_{3i}^{f(i)} &= \prod_{1\leqslant j\leqslant v} x_{4j}^{f_{ij}}, && \quad 1 \leqslant i \leqslant u,\\
[x_{1i}^{d(i)}, x_{1j}] &= \prod_{1\leqslant k\leqslant u} x_{3k}^{\alpha_k^{(ij)}} y''_{ij}, && y''_{ij} \in \gamma_4(G), \quad 1 \leqslant i < j \leqslant s.
\end{aligned}$$

Выбираем элемент x_{ij} таким образом, что $d(i) \mid d(i+1)$, $e(i) \mid e(i+1)$, $f(i) \mid f(i+1)$.

Теорема 4.3.3 [69]. *В приведенных выше обозначениях подгруппа $D_5(G)$ равна подгруппе, порожденной элементами*

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant s}[x_{1i}^{u_{ij}d(j)},x_{1j}]\prod_{1\leqslant i\leqslant s,\,1\leqslant k\leqslant t}\prod_{k<l}[x_{2l},x_{2k}]^{b_{il}v_{ik}}\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant s}[x_{1i}^{d(i)},x_{1j},x_{1k}]^{w_{ijk}}, \tag{4.3.1}$$

где

$$\begin{aligned} &u_{ij}, && 1\leqslant i<j\leqslant s,\\ &v_{ik}, && 1\leqslant i\leqslant s,\quad 1\leqslant k\leqslant t,\\ &v'_{ik}, && 1\leqslant i\leqslant s,\quad 1\leqslant k\leqslant t,\\ &w_{ijk}, && 1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant s,\\ &w'_{ijk}, && 1\leqslant i<j\leqslant k\leqslant s,\\ &w''_{ijk}, && 1\leqslant i\leqslant j<k\leqslant s,\end{aligned}$$

– целые числа, удовлетворяющие следующим условиям:

$$w_{iii}=0,\qquad 1\leqslant i\leqslant s, \tag{4.3.2}$$

$$u_{ij}\frac{d(j)}{d(i)}\binom{d(i)}{2}+w_{iij}d(i)+w''_{iij}d(j)=0,\qquad 1\leqslant i<j\leqslant s, \tag{4.3.3}$$

$$-u_{ij}\binom{d(j)}{2}+w_{ijj}d(i)+w'_{ijj}d(j)=0,\qquad 1\leqslant i<j\leqslant s, \tag{4.3.4}$$

$$w_{ijk}d(i)+w'_{ijk}d(j)+w''_{ijk}d(k)=0,\qquad 1\leqslant i<j<k\leqslant s, \tag{4.3.5}$$

$$\sum_{i<h}u_{ih}b_{hk}-\sum_{h<i}u_{hi}\frac{d(i)}{d(h)}b_{hk}+v_{ik}d(i)+v'_{ik}e(k)=0,\qquad 1\leqslant i\leqslant s,\quad 1\leqslant k\leqslant t, \tag{4.3.6}$$

и

$$u_{ij}\frac{d(j)}{d(i)}\binom{d(i)}{3}+w_{iij}\binom{d(i)}{2}\equiv 0\bmod d(i),\qquad 1\leqslant i<j\leqslant s, \tag{4.3.7}$$

$$w_{iij}\binom{d(i)}{2}+w''_{iij}\binom{d(j)}{2}\equiv 0\bmod d(i),\qquad 1\leqslant i<j\leqslant s, \tag{4.3.8}$$

$$-u_{ij}\binom{d(j)}{3}+w'_{ijj}\binom{d(j)}{2}\equiv 0\bmod d(i),\qquad 1\leqslant i<j\leqslant s, \tag{4.3.9}$$

$$w_{ijk}\binom{d(i)}{2},w'_{ijk}\binom{d(j)}{2},w''_{ijk}\binom{d(k)}{2}\equiv 0\bmod d(i),\qquad 1\leqslant i<j<k\leqslant t, \tag{4.3.10}$$

а также

$$v_{ik}\binom{d(i)}{2}-\sum_{h\leqslant i}w_{hii}b_{hk}-\sum_{i<h}w''_{iih}b_{hk}\equiv 0\bmod(d(i),e(k)),\qquad 1\leqslant i\leqslant s,\quad 1\leqslant k\leqslant t, \tag{4.3.11}$$

$$\sum_{h\leqslant i}w_{hij}b_{hk}+\sum_{i<h\leqslant j}w'_{ihj}b_{hk}+\sum_{j<h}w''_{ijh}b_{hk}\equiv 0\bmod(d(i),e(k)),\qquad 1\leqslant i<j\leqslant s,\quad 1\leqslant k\leqslant t, \tag{4.3.12}$$

$$\begin{aligned}-\sum_{h<i}u_{hi}\frac{d(i)}{d(h)}\alpha_l^{(hi)}+\sum_{i<h}u_{ih}c_{hl}-\sum_{h<i}u_{hi}\frac{d(i)}{d(h)}c_{hl}-\sum_{k}v'_{ik}d_{kl}-\sum_{g\leqslant i\leqslant h}w_{gih}\alpha_l^{(gh)}\\ -\sum_{g\leqslant h\leqslant i}w_{ghi}\alpha_l^{(gh)}-\sum_{i<g\leqslant h}w'_{igh}\alpha_l^{(gh)}\equiv 0\bmod(d(i),f(l)),\qquad 1\leqslant i\leqslant s,\quad 1\leqslant l\leqslant s,\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

и

$$\sum_i v_{ik} b_{ik} \equiv 0 \bmod e(k), \qquad 1 \leqslant k \leqslant t, \tag{4.3.14}$$

$$\sum_i v_{ik} b_{il} + \sum_i v_{il} b_{ik} \equiv 0 \bmod e(k), \qquad 1 \leqslant k < l \leqslant t. \tag{4.3.15}$$

Доказательство теоремы 4.3.2. Стандартные рассуждения сводят доказательство к рассмотрению конечных групп. Коммутаторные тождества и условие (4.3.9) влекут

$$\begin{aligned}
[x_{1i}^{u_{ij}d(j)}, x_{1j}] &= [x_{1i}, x_{1j}^{u_{ij}d(j)}][x_{1i}, x_{1j}, x_{1j}]^{-u_{ij}\binom{d(j)}{2}}[x_{1j}, x_{1i}, x_{1i}]^{-u_{ij}\binom{d(j)}{2}} \\
&\quad \times [x_{1i}, x_{1j}, x_{1j}, x_{1j}]^{-u_{ij}\binom{d(j)}{3}}[x_{1j}, x_{1i}, x_{1i}, x_{1i}]^{-u_{ij}\binom{d(j)}{3}} \\
&= [x_{1i}, x_{1j}^{u_{ij}d(j)}][x_{1i}, x_{1j}, x_{1j}]^{-u_{ij}\binom{d(j)}{2}}[x_{1j}, x_{1i}, x_{1i}]^{-u_{ij}\binom{d(j)}{2}} \\
&\quad \times [x_{1i}, x_{1j}, x_{1j}, x_{1j}]^{-w'_{ijj}\binom{d(j)}{2}}[x_{1j}, x_{1i}, x_{1i}, x_{1i}]^{-w'_{ijj}\binom{d(j)}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned}
&[x_{1j}, x_{1i}, x_{1i}, x_{1i}]^{-2w'_{ijj}\binom{d(j)}{2}} = 1, \\
&[x_{1j}, x_{1i}, x_{1i}, x_{1i}]^{-3w'_{ijj}\binom{d(j)}{2}} = [x_{1j}, x_{1i}, x_{1i}, x_{1i}]^{-3u_{ij}\binom{d(j)}{3}} \\
&\qquad\qquad = [x_{1j}, x_{1i}, x_{1i}, x_{1i}]^{-u_{ij}d(j)\frac{(d(j)-1)(d(j)-2)}{2}} = 1.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$[x_{1j}, x_{1i}, x_{1i}, x_{1i}]^{w'_{ijj}\binom{d(j)}{2}} = 1.$$

Аналогично получаем

$$[x_{1i}, x_{1j}, x_{1j}, x_{1j}]^{w'_{ijj}\binom{d(j)}{2}} = 1$$

и

$$\begin{aligned}
\prod_{i<j}[x_{1i}^{u_{ij}d(j)}, x_{1j}]^2 &= \prod_j\Bigl(\prod_{i<j}[x_{1i}^{u_{ij}d(j)}, x_{1j}]\prod_{j<k}[x_{1j}^{u_{jk}d(k)}, x_{1k}]\Bigr) \\
&= \prod_j\Bigl(\Bigl[\prod_{i<j}x_{1i}^{u_{ij}d(j)}\prod_{j<k}x_{1k}^{-u_{jk}d(k)}, x_{1j}\Bigr]\Bigr)\cdot B,
\end{aligned} \tag{4.3.17}$$

где

$$B := \prod_{j<k}([x_{1j}, x_{1k}, x_{1k}]^{-u_{jk}\binom{d(k)}{2}}[x_{1k}, x_{1j}, x_{1j}]^{-u_{jk}\binom{d(k)}{2}}).$$

Также мы имеем

$$\begin{aligned}
&\Bigl[\prod_{i<j}x_{1i}^{u_{ij}d(j)}\prod_{j<k}x_{1k}^{-u_{jk}d(k)}, x_{1j}\Bigr] \\
&\quad = \Bigl[\prod_l x_{2l}^{\sum_{i<j}u_{ij}\frac{d(j)}{d(i)}b_{il}-\sum_{j<k}u_{jk}b_{kl}}\prod_q x_{3q}^{\sum_{i<j}u_{ij}\frac{d(j)}{d(i)}c_{iq}-\sum_{j<k}u_{jk}c_{kq}}, x_{1j}\Bigr] \\
&\quad = \Bigl[\prod_l x_{2l}^{v_{jl}d(j)+v'_{jl}e(l)}, x_{1j}\Bigr]\Bigl[\prod_q x_{3q}^{A_{qj}}, x_{1j}\Bigr] \\
&\quad = \prod_l[x_{2l}, x_{1j}, x_{1j}]^{-v_{jl}\binom{d(j)}{2}}\Bigl[\prod_l x_{2l}^{v_{jl}}, x_{1j}^{d(j)}\Bigr]\Bigl[\prod_l x_{2l}^{v'_{jl}e(l)}, x_{1j}\Bigr]\Bigl[\prod_q x_{3q}^{A_{qj}}, x_{1j}\Bigr],
\end{aligned} \tag{4.3.18}$$

где $A_{qj} = \sum_{i<j} u_{ij}\frac{d(j)}{d(i)}c_{iq} - \sum_{j<k} u_{jk}c_{kq}$.

Условие (4.3.11) влечет, что

$$\prod_l [x_{2l}, x_{1j}, x_{1j}]^{-v_{jl}\binom{d(j)}{2}} = \prod_l [x_{2l}, x_{1j}, x_{1j}]^{-\sum_{i\leqslant j} w_{ijj} b_{il} - \sum_{j\leqslant k} w''_{jjk} b_{kl}}$$
$$= \prod_{i\leqslant j} [x_{1i}, x_{1j}, x_{1j}]^{-w_{ijj} d(i)} [x_{1j}, x_{1i}, x_{1i}]^{-w''_{iij} d(j)}. \tag{4.3.19}$$

Условие (4.3.15) влечет, что

$$C := \prod_j \Big[\prod_l x_{2l}^{v_{jl}}, x_{1j}^{d(j)}\Big] = \prod_j \Big(\prod_{l'>l} [x_{2l}, x_{2l'}]^{v_{jl} b_{jl'}} \prod_{l'<l} [x_{2l}, x_{2l'}]^{v_{jl} b_{jl'}}\Big)$$
$$= \prod_{l'>l} [x_{2l}, x_{2l'}]^{\sum_j v_{jl} b_{jl'}} \prod_{l>l'} [x_{2l}, x_{2l'}]^{\sum_j v_{jl} b_{jl'}} \prod_{l'>l} [x_{2l}, x_{2l'}]^{\sum_j v_{jl} b_{jl'}} \prod_{l>l'} [x_{2l}, x_{2l'}]^{-\sum_j v_{jl'} b_{jk}}$$
$$= \prod_{l'>l} [x_{2l}, x_{2l'}]^{2\sum_j v_{jl} b_{jl'}}. \tag{4.3.20}$$

Условие (4.3.13) влечет, что

$$D := \prod_j \Big[\prod_l x_{2l}^{v'_{jl} e(l)}, x_{1j}\Big] \Big[\prod_q x_{3q}^{A_{qj}}, x_{1j}\Big] = \prod_{1\leqslant q\leqslant u, 1\leqslant j\leqslant s} [x_{3q}, x_{1j}]^{\sum_l v'_{jl} d_{lq} + A_{qj}}$$
$$= \prod_{1\leqslant j\leqslant s,\, 1\leqslant q\leqslant u} [x_{3q}, x_{1j}]^{-\sum_{h<j} u_{hj} \frac{d(j)}{d(h)} \alpha_q^{(hj)} - \sum_{g\leqslant j\leqslant h} w_{gjh} \alpha_q^{(gh)} - \sum_{g\leqslant h\leqslant j} w_{ghj} \alpha_q^{(gh)} - \sum_{j<g\leqslant h} w'_{jgh} \alpha_q^{(gh)}}$$
$$= \prod_{h<j} [x_{1h}^{d(j)}, x_{1j}, x_{1j}]^{-u_{hj}} \prod_{g\leqslant j\leqslant h} [x_{1g}^{d(g)}, x_{1h}, x_{1j}]^{-w_{gjh}}$$
$$\times \prod_{g<h\leqslant j} [x_{1g}^{d(g)}, x_{1h}, x_{1j}]^{-w_{ghj}} \prod_{j<g\leqslant h} [x_{1g}^{d(g)}, x_{1h}, x_{1j}]^{-w'_{jgh}}. \tag{4.3.21}$$

Так как

$$[x_{1i}^{d(i)}, x_{1k}, x_{1j}][x_{1k}, x_{1j}, x_{1i}^{d(i)}][x_{1j}, x_{1i}^{d(i)}, x_{1k}] = 1,$$

получаем

$$\prod_{i\leqslant j\leqslant k} [x_{1i}^{d(i)}, x_{1k}, x_{1j}]^{-w_{ijk}} = \prod_{i\leqslant j\leqslant k} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1i}^{d(i)}]^{w_{ijk}} \prod_{i\leqslant j\leqslant k} [x_{1i}^{d(i)}, x_{1j}, x_{1k}]^{-w_{ijk}}.$$

Заменим индексы g, h в (4.3.21) более подходящими индексами i, j, k. Условия (4.3.4) и (4.3.10) теперь влекут

$$D = \prod_{i<j} [x_{1i}, x_{1j}, x_{1j}]^{-u_{ij} d(j)} \prod_{i\leqslant j\leqslant k} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1i}^{d(i)}]^{w_{ijk}}$$
$$\times \prod_{i\leqslant j\leqslant k} [x_{1i}^{d(i)}, x_{1j}, x_{1k}]^{-2w_{ijk}} \prod_{j<i\leqslant k} [x_{1i}^{d(i)}, x_{1k}, x_{1j}]^{-w'_{jik}}$$
$$= \prod_{i<j} [x_{1i}, x_{1j}, x_{1j}^{d(j)}]^{-u_{ij}} \prod_{i\leqslant j\leqslant k} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1i}^{d(i)}]^{w_{ijk}} \tag{4.3.22}$$
$$\times \prod_{i\leqslant j\leqslant k} [x_{1i}^{d(i)}, x_{1j}, x_{1k}]^{-2w_{ijk}} \prod_{j<i\leqslant k} [x_{1k}, x_{1i}, x_{1j}^{d(i)}]^{w'_{jik}}.$$

Поэтому

$$g^2 = B \cdot C \cdot D \cdot \prod_{i\leqslant j} [x_{1i}, x_{1j}, x_{1j}]^{-w_{ijj} d(i)} [x_{1j}, x_{1i}, x_{1i}]^{-w''_{iij} d(j)} \prod_{1\leqslant i\leqslant s,\, 1\leqslant k\leqslant t}$$
$$\times \prod_{k<l} [x_{2l}, x_{2k}]^{2b_{il} v_{ik}} \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant s} [x_{1i}^{d(i)}, x_{1j}, x_{1k}]^{2w_{ijk}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{j<k} \left([x_{1j}, x_{1k}, x_{1k}]^{-u_{jk}\binom{d(k)}{2}} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1j}]^{-u_{jk}\binom{d(k)}{2}} \right) \\
&\qquad \times \prod_{i\leqslant j} [x_{1i}, x_{1j}, x_{1j}]^{-w_{ijj}d(i)} [x_{1j}, x_{1i}, x_{1i}]^{-w''_{iij}d(j)} \\
&\qquad \times \prod_{i<j} [x_{1i}, x_{1j}, x_{1j}^{d(j)}]^{-u_{ij}} \prod_{i\leqslant j\leqslant k} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1i}^{d(i)}]^{w_{ijk}} \prod_{i<j\leqslant k} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1i}^{d(j)}]^{w'_{ijk}} \\
&= \prod_{j<k} \left([x_{1j}, x_{1k}, x_{1k}]^{w'_{jkk}d(k)} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1j}]^{w_{jjk}d(j)} \right) \\
&\qquad \times \prod_{i\leqslant j\leqslant k} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1i}^{d(i)}]^{w_{ijk}} \prod_{i<j\leqslant k} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1i}^{d(j)}]^{w'_{ijk}} \\
&= \prod_{j<k} \left([x_{1j}, x_{1k}, x_{1k}^{d(k)}]^{w'_{jkk}} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1j}^{d(j)}]^{w_{jjk}} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1j}, x_{1j}]^{-w_{jjk}\binom{d(j)}{2}} \right) \\
&\qquad \times \prod_{i\leqslant j\leqslant k} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1i}^{d(i)}]^{w_{ijk}} \prod_{i<j\leqslant k} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1i}^{d(j)}]^{w'_{ijk}} \\
&= \prod_{j<k} \left([x_{1j}, x_{1k}, x_{1k}^{d(k)}]^{w'_{jkk}} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1j}^{d(j)}]^{w_{jjk}} \right) \prod_{i\leqslant j\leqslant k} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1i}^{d(i)}]^{w_{ijk}} \prod_{i<j\leqslant k} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1i}^{d(j)}]^{w'_{ijk}},
\end{aligned}
\tag{4.3.23}
$$

так как $[x_{1k}, x_{1j}, x_{1j}, x_{1j}]^{2w_{jjk}\binom{d(j)}{2}} = 1$, и

$$
[x_{1k}, x_{1j}, x_{1j}, x_{1j}]^{3w_{jjk}\binom{d(j)}{2}} = [x_{1k}, x_{1j}, x_{1j}, x_{1j}]^{-3u_{jk}\frac{d(k)}{d(j)}\binom{d(j)}{3}} = 1
$$

по (4.3.7). Следовательно, $g^2 \in \delta_2(G)$ и доказательство завершено.

Доказательство теоремы 4.3.1. Умножая $[x_{1i}, x_{1j}, x_{2k}]$ на левую часть (4.3.12) и рассматривая произведение по всем $i<j$ и k, мы получаем следующее:

$$
\begin{aligned}
1 &= \prod_{i\leqslant j<k} [x_{1j}, x_{1k}, x_{1i}^{d(i)}]^{w_{ijk}} \prod_{i<j\leqslant k} [x_{1i}, x_{1k}, x_{1j}^{d(j)}]^{w'_{ijk}} \prod_{i<j<k} [x_{1i}, x_{1j}, x_{1k}^{d(k)}]^{w''_{ijk}} \\
&= \left(\prod_{i<j} [x_{1i}, x_{1j}, x_{1i}]^{w_{iij}d(i)} [x_{1i}, x_{1j}, x_{1j}]^{w'_{ijj}d(j)} \right) \\
&\qquad \times \prod_{i<j<k} [x_{1j}, x_{1k}, x_{1i}]^{w_{ijk}d(i)} \prod_{i<j<k} [x_{1i}, x_{1k}, x_{1j}^{d(j)}]^{w'_{ijk}} \prod_{i<j<k} [x_{1j}, x_{1i}, x_{1k}]^{w'_{ijk}d(j)+w_{ijk}d(i)} \\
&= \left(\prod_{i<j} [x_{1i}, x_{1j}, x_{1i}]^{w_{iij}d(i)} [x_{1i}, x_{1j}, x_{1j}]^{w'_{ijj}d(j)} \right) \prod_{i<j<k} [x_{1j}, x_{1k}, x_{1i}]^{w_{ijk}d(i)} \\
&\qquad \times \prod_{i<j<k} [x_{1j}, x_{1i}, x_{1k}]^{w_{ijk}d(i)} \prod_{i<j<k} [x_{1j}, x_{1k}, x_{1i}]^{w'_{ijk}d(j)}.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
\prod_{i<j<k} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1i}]^{w'_{ijk}d(j)} &= \left(\prod_{i<j} [x_{1i}, x_{1j}, x_{1i}]^{w_{iij}d(i)} [x_{1i}, x_{1j}, x_{1j}]^{w'_{ijj}d(j)} \right) \\
&\qquad \times \prod_{i<j<k} [x_{1j}, x_{1k}, x_{1i}]^{w_{ijk}d(i)} \prod_{i<j<k} [x_{1j}, x_{1i}, x_{1k}]^{w_{ijk}d(i)}.
\end{aligned}
$$

Теперь рассмотрим элемент g^2, данный в (4.3.23):

$$
g^2 = \prod_{j<k} \left([x_{1j}, x_{1k}, x_{1k}^{d(k)}]^{w'_{jkk}} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1j}^{d(j)}]^{w_{jjk}} \right) \prod_{i\leqslant j\leqslant k} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1i}^{d(i)}]^{w_{ijk}} \prod_{i<j\leqslant k} [x_{1k}, x_{1j}, x_{1i}^{d(j)}]^{w'_{ijk}}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{j<k}([x_{1j},x_{1k},x_{1k}^{d(k)}]^{w'_{jkk}}[x_{1k},x_{1j},x_{1j}^{d(j)}]^{w_{jjk}}) \prod_{i\leqslant j\leqslant k}[x_{1k},x_{1j},x_{1i}^{d(i)}]^{w_{ijk}}\\
&\quad\times\left(\prod_{i<j}[x_{1i},x_{1j},x_{1i}]^{w_{iij}d(i)}[x_{1i},x_{1j},x_{1j}]^{w'_{ijj}d(j)}\right)\\
&\quad\times\prod_{i<j<k}[x_{1j},x_{1k},x_{1i}]^{w_{ijk}d(i)}\prod_{i<j<k}[x_{1j},x_{1i},x_{1k}]^{w_{ijk}d(i)}\\
&=\left(\prod_{i<j}[x_{1j},x_{1i},x_{1i}]^{w_{iij}d(i)}[x_{1i},x_{1j},x_{1j}]^{2w'_{ijj}d(j)}\right)\prod_{i<j<k}[x_{1j},x_{1i},x_{1k}]^{w_{ijk}d(i)}. \qquad (4.3.24)
\end{aligned}
$$

Аналогично, умножая $[x_{2k},x_{1j},x_{1i}]$ на левую часть (4.3.12) и рассматривая произведение по всем $i<j$ и k, мы получаем следующее:

$$
\begin{aligned}
1 &= \prod_{i\leqslant j<k}[x_{1i}^{d(i)},x_{1k},x_{1j}]^{w_{ijk}}\prod_{i<j<k}[x_{1j}^{d(j)},x_{1k},x_{1i}]^{w'_{ijk}}\prod_{i<j<k}[x_{1k}^{d(k)},x_{1j},x_{1i}]^{w''_{ijk}}\\
&= \prod_{i\leqslant j<k}[x_{1i}^{d(i)},x_{1k},x_{1j}]^{w_{ijk}}\prod_{i<j<k}[x_{1j},x_{1k},x_{1i}]^{w'_{ijk}d(j)}\prod_{i<j<k}[x_{1j},x_{1k},x_{1i}]^{w_{ijk}d(i)+w'_{ijk}d(j)}\\
&= \prod_{i<j}[x_{1i}^{d(i)},x_{1j},x_{1i}]^{w_{iij}}\prod_{i<j<k}[x_{1i},x_{1k},x_{1j}]^{w_{ijk}d(i)}\\
&\quad\times\prod_{i<j<k}[x_{1j},x_{1k},x_{1i}]^{w_{ijk}d(i)}\prod_{i<j<k}[x_{1j},x_{1k},x_{1i}]^{2w'_{ijk}d(j)}.
\end{aligned}
$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i<j<k}[x_{1k},x_{1j},x_{1i}]^{2w'_{ijk}d(j)}\\
&\qquad=\prod_{i<j}[x_{1i}^{d(i)},x_{1j},x_{1i}]^{w_{iij}}\prod_{i<j<k}[x_{1i},x_{1k},x_{1j}]^{w_{ijk}d(i)}\prod_{i<j<k}[x_{1j},x_{1k},x_{1i}]^{w_{ijk}d(i)}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим теперь элемент g^4, получаемый возведением в квадрат элемента (4.3.23):

$$
\begin{aligned}
g^4 &= \prod_{j<k}([x_{1j},x_{1k},x_{1k}^{d(k)}]^{2w'_{jkk}}[x_{1k},x_{1j},x_{1j}^{d(j)}]^{2w_{jjk}})\\
&\quad\times\prod_{i\leqslant j\leqslant k}[x_{1k},x_{1j},x_{1i}^{d(i)}]^{2w_{ijk}}\prod_{i<j<k}[x_{1k},x_{1j},x_{1i}^{d(j)}]^{2w'_{ijk}}\\
&= \prod_{j<k}([x_{1j},x_{1k},x_{1k}^{d(k)}]^{2w'_{jkk}}[x_{1k},x_{1j},x_{1j}^{d(j)}]^{4w_{jjk}})\prod_{i<j<k}[x_{1k},x_{1j},x_{1i}^{d(i)}]^{2w_{ijk}}\\
&\quad\times\prod_{i<j}[x_{1i}^{d(i)},x_{1j},x_{1i}]^{w_{iij}}\prod_{i<j<k}[x_{1i},x_{1k},x_{1j}]^{w_{ijk}d(i)}\prod_{i<j<k}[x_{1j},x_{1k},x_{1i}]^{w_{ijk}d(i)}\\
&= \prod_{i<j}([x_{1i},x_{1j},x_{1j}^{d(j)}]^{2w'_{ijj}}[x_{1j},x_{1i},x_{1i}^{d(i)}]^{3w_{iij}})\prod_{i<j<k}[x_{1i},x_{1j},x_{1k}]^{w_{ijk}d(i)}. \qquad (4.3.25)
\end{aligned}
$$

Перемножая (4.3.24) и (4.3.25), мы получаем

$$
g^6=\prod_{i<j}([x_{1i},x_{1j},x_{1j}^{d(j)}]^{4w'_{ijj}}[x_{1j},x_{1i},x_{1i}^{d(i)}]^{4w_{iij}}).
$$

Условие (4.3.11) влечет, что

$$
\prod_{i<j}[x_{1i}^{d(i)},x_{1j},x_{1j}]^{w_{ijj}}[x_{1j}^{d(j)},x_{1i},x_{1i}]^{w''_{iij}}=\prod_{i,k}v_{ik}\binom{d(i)}{2}[x_{2k},x_{1i},x_{1i}].
$$

Условия (4.3.3), (4.3.4), (4.3.6) влекут

$$
\begin{aligned}
1 &= \prod_{i<j}[x_{1i},x_{1j},x_{1j}]^{2w_{ijj}d(i)}[x_{1j},x_{1i},x_{1i}]^{2w''_{iij}d(j)}\\
&= \prod_{i<j}[x_{1i},x_{1j},x_{1j}]^{-2w'_{ijj}d(j)-u_{ij}d(j)}[x_{1j},x_{1i},x_{1i}]^{-2w_{iij}d(i)+u_{ij}d(j)}\\
&= \left(\prod_{i<j}[x_{1i},x_{1j},x_{1j}]^{-2w'_{ijj}d(j)}[x_{1j},x_{1i},x_{1i}]^{-2w_{iij}d(i)}\right)\prod_{i<j}[x_{1i},x_{1j},x_{1j}]^{-u_{ij}d(j)}[x_{1i},x_{1j},x_{1i}]^{-u_{ij}d(j)}\\
&= \prod_{i<j}[x_{1i},x_{1j},x_{1j}]^{-2w'_{ijj}d(j)}[x_{1j},x_{1i},x_{1i}]^{-2w_{iij}d(i)}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $g^6=1$.

Приведем одно приложение теоремы Тахары. Напомним конструкцию Гупты–Пасси [13; с. 76]. Пусть F – свободная группа с базисом x_1, x_2, x_3, x_4 и R – нормальная подгруппа в F, порожденная элементами

$$
\begin{gathered}
r_1=x_4^{64}[x_4,x_3]^{32},\qquad r_2=x_3^{64}[x_4,x_2]^{-4}[x_4,x_1]^{-2},\qquad r_3=x_2^{16}[x_4,x_3]^4[x_4,x_1]^{-1},\\
r_4=x_1^4[x_4,x_3]^2[x_4,x_2],\qquad r_5=[x_4,x_3]^{64}[x_4,x_3,x_3]^{32},\\
r_6=[x_4,x_2]^{16}[x_4,x_2,x_2]^8,\qquad r_7=[x_4,x_1]^4[x_4,x_1,x_1]^2,\\
r_8=[x_3,x_2]^{16}[x_4,x_2,x_2]^{-1},\qquad r_9=[x_3,x_1]^4[x_4,x_3,x_3]^{-2},\\
r_{10}=[x_2,x_1]^4[x_4,x_2,x_2]^{-1},\qquad r_{11}=[x_4,x_3,x_3]^4[x_4,x_2,x_2]^{-1},\\
r_{12}=[x_4,x_2,x_2]^4[x_4,x_1,x_1]^{-1},\qquad r_{13}=[x_4,x_1,x_1]^4,
\end{gathered}
$$

$\gamma_4(F)$ и всеми коммутаторами $[x_i,x_j,x_k]$, $1\leqslant i,j,k\leqslant 4$, которые не лежат в

$$\langle[x_4,x_1,x_1],[x_4,x_2,x_2],[x_4,x_3,x_3]\rangle\gamma_4(F).$$

Тогда группа

$$G:=F/R \tag{4.3.26}$$

является конечной 2-группой ступени нильпотентности 3 с нетривиальным элементом

$$w_0=[x_3^{64},x_2]^2[x_3^{64},x_1][x_2^{16},x_1]^2R$$

в $D_4(G)$.

Используя обозначения теоремы 4.3.3, выбираем

$$
\begin{gathered}
x_{11}=x_1,\qquad x_{12}=x_2,\qquad x_{13}=x_3,\qquad x_{14}=x_4,\\
x_{21}=[x_1,x_2],\qquad x_{22}=[x_1,x_3],\qquad x_{23}=[x_1,x_4],\\
x_{24}=[x_2,x_3],\qquad x_{25}=[x_2,x_4],\qquad x_{26}=[x_3,x_4],\\
x_{31}=[x_4,x_3,x_3].
\end{gathered}
$$

Для этой группы имеем следующие константы:

$$
\begin{gathered}
d(1)=4,\qquad d(2)=16,\qquad d(3)=64,\qquad d(4)=64,\\
e(1)=4,\qquad e(2)=4,\qquad e(3)=4,\qquad e(4)=16,\qquad e(5)=16,\qquad e(6)=64,\\
b_{15}=1,\qquad b_{16}=2,\qquad b_{23}=-1,\qquad b_{26}=4,\\
b_{33}=2,\qquad b_{35}=-4,\qquad b_{46}=32,\qquad \text{все остальные } b_{ij} \text{ – нули},
\end{gathered}
$$

$$d_{11}=-4,\qquad d_{21}=-2,\qquad d_{31}=32,\qquad d_{41}=-4,$$
$$d_{51}=32,\qquad d_{61}=32,\qquad \text{все остальные } d_{ij} \text{ – нули},$$
$$\alpha_1^{(12)}=-4,\qquad \alpha_1^{(23)}=-4,\qquad \alpha_1^{(13)}=-2,\qquad \text{все остальные } \alpha_1^{(ij)} \text{ – нули},$$
$$f(1)=64.$$

Теорема 4.3.4. *Для группы G, заданной копредставлением* (4.3.26),

$$D_5(G)=1.$$

Доказательство. Зафиксируем константы $d(i)$, $e(i)$, $f(i)$, d_{ij}, описанные выше. Пусть

$$u_{ij},\ v_{ik},\ v'_{ik},\ w_{ijk},\ w'_{ijk},\ w''_{ijk}$$

– константы, удовлетворяющие условиям (4.3.2)–(4.3.15), и пусть g – соответствующий элемент, описанный в (4.3.1). Так как группа G нильпотентная ступени 3, элемент g может быть записан как

$$g=\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant s}[x_{1i}^{u_{ij}d(j)},x_{1j}]$$

по теореме 4.3.3, а пятая размерная подгруппа $D_5(G)$ порождается такими элементами. Из определяющих соотношений группы G получаем, что $[x_i^{d(i)},x_4]=1$, $i=1,2,3$. Следовательно,

$$g=[x_1,x_2]^{16u_{12}}[x_1,x_3]^{64u_{13}}[x_2,x_3]^{64u_{23}}.$$

Рассмотрим условие (4.3.6) для случая $i=1$, $k=6$:

$$u_{12}b_{26}+u_{14}b_{46}+v_{16}d(1)+v'_{16}e(6)=4u_{12}+32u_{14}+4v_{16}+64v'_{16}=0.$$

Получаем

$$u_{12}+v_{16}\equiv 0 \bmod 4. \tag{4.3.27}$$

Рассмотрев условие (4.3.14) для случая $k=6$, получаем

$$2v_{16}+4v_{26}+32v_{46}\equiv 0 \bmod 64$$

и также

$$v_{16}+2v_{26}\equiv 0 \bmod 16. \tag{4.3.28}$$

Из условия (4.3.15) для случая $k=3$, $l=6$ получаем

$$2v_{13}+4v_{23}+32v_{43}-v_{26}+2v_{36}\equiv 0 \bmod 4,$$

и поэтому заключаем, что

$$v_{26}\equiv 0 \bmod 2. \tag{4.3.29}$$

Условия (4.3.27)–(4.3.29) теперь влекут, что

$$u_{12}\equiv 0 \bmod 4. \tag{4.3.30}$$

Из строения определяющих соотношений группы G ясно, что

$$[x_1,x_2]^{64}=[x_4,x_3,x_3]^{64}=1.$$

Следовательно,

$$g=[x_1,x_3]^{64u_{13}}[x_2,x_3]^{64u_{23}}=[x_1^{64u_{13}}x_2^{64u_{23}},x_3]=[x_4,x_3,x_3]^{-32u_{13}-16u_{23}}=x_{31}^{-32u_{13}-16u_{23}}.$$

Теперь рассмотрим условие (4.3.6) для случая $i=3$, $k=6$. Мы получаем

$$32u_{34}-32u_{13}-16u_{23}+64v_{36}+64v'_{36}=0.$$

Поэтому имеем

$$32u_{34}-32u_{13}-16u_{23}\equiv 0 \bmod 64. \tag{4.3.31}$$

Отметим, что условие (4.3.4) для случая $i=3$, $j=4$ влечет, что

$$u_{34}\binom{64}{2}\equiv 0 \bmod 64$$

и поэтому

$$u_{34}\equiv 0 \bmod 2. \tag{4.3.32}$$

Сравнения (4.3.31) и (4.3.32) влекут, что

$$32u_{13}+16u_{23}\equiv 0 \bmod 64.$$

Следовательно, имеем

$$g=[x_4,x_3,x_3]^{-32u_{13}-16u_{23}}=1.$$

4.4. Квазимногообразия групп

Напомним, что многообразие групп $\mathcal{V}$ – это класс групп, заданных некоторыми тождествами. Обозначим через $\mathcal{D}_n$, $n\geqslant 2$, класс групп с тривиальной n-й размерной подгруппой. Существование групп без размерного свойства показывает, что $\mathcal{D}_n$ не является многообразием групп для $n\geqslant 4$, так как многообразие групп всегда замкнуто относительно взятия эпиморфных образов. Классы $\mathcal{D}_n$, однако, являются квазимногообразиями (см. теорему 4.4.1). Напомним основные понятия теории квазимногообразий.

Пусть F_∞ – свободная группа счетного ранга с базисом $x_1,x_2,\ldots$ и $w_1,\ldots,w_k,v$ – некоторые слова в F_∞. *Квазитождество* – это формальная импликация

$$(w_1=1\,\&\cdots\&\,w_n=1)\quad\Longrightarrow\quad(v=1). \tag{4.4.1}$$

Квазитождество (4.4.1) выполняется в заданной группе G, если оно оказывается верным при любых подстановках $x_i=g_i$, $g_i\in G$.

Квазимногообразие $\mathcal{V}_S$ – это класс групп, заданных некоторым множеством S квазитождеств, т.е. $\mathcal{V}_S$ – это класс групп, в которых выполняется каждое квазитождество из S.

Пример 4.4.1. Класс $\mathcal{T}_0$ всех групп без кручения является квазимногообразием; оно задается бесконечной системой квазитождеств

$$x^p=1\quad\Longrightarrow\quad x=1,$$

где p пробегает множество всех простых чисел. Естественно, $\mathcal{T}_0$ не является многообразием групп.

Для $n=2,3$ класс $\mathcal{D}_n$ совпадает с многообразием $\mathfrak{N}_n$ нильпотентных групп ступени нильпотентности $\leqslant n$. С другой стороны, для всех $n\geqslant 4$, как уже отмечалось, существование групп без размерного свойства влечет тот факт, что класс $\mathcal{D}_n$ не является многообразием групп. Однако оказывается верным следующее.

Теорема 4.4.1 [70]. *Для всех $n\geqslant 1$ класс $\mathcal{D}_n$ является квазимногообразием.*

Ввиду теоремы 4.2.1 квазимногообразие $\mathcal{D}_4$ задается следующими импликациями. Для целых чисел k, c_i, d_{ij}, $1 \leqslant i,\ j \leqslant k$, и элементов $g_1, \dots, g_k$ группы G, если выполняются следующие соотношения:

1) $2^{c_i} d_{ij} + 2^{c_j} d_{ji} = 0$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant k$;
2) если $c_i = c_j$, то d_{ij} четное;
3) $g_i^{2^{c_i}} \in \gamma_2(G)$, $1 \leqslant i \leqslant k$;
4) $\prod_{i=1}^{k} g_i^{2^{c_i}} d_{ij} \in \gamma_2(G)^{2^{c_j}} \gamma_3(G)$, $1 \leqslant j \leqslant k$,

то

$$\prod_{i=1}^{k} \prod_{j=i+1}^{k} [g_i, g_j]^{2^{c_i} d_{ij}} = 1.$$

Естественно, этот набор импликаций эквивалентен некоторому подходящему набору квазитождеств.

Квазимногообразие $\mathcal{Q}$ называется *конечно базируемым*, если оно может быть задано конечным множеством квазитождеств.

Пусть $\mathcal{Q}$ – квазимногообразие групп. Тогда ранг $\mathrm{rk}(\mathcal{Q})$ квазимногообразия $\mathcal{Q}$ – это наименьшее число n (которое может быть и бесконечностью) такое, что существует система квазитождеств

$$(w_1^i = 1 \,\&\, \cdots \,\&\, w_{n_i}^i = 1) \quad \Longrightarrow \quad (v_i = 1), \qquad i = 1, 2, \dots, \tag{4.4.2}$$

такая, что все слова w_i^j, v_i принадлежат свободной группе F_n ранга n.

Пример 4.4.2. (i) Для квазимногообразия $\mathcal{T}_0$ групп без кручения $\mathrm{rk}(\mathcal{T}_0) = 1$.

(ii) Квазимногообразие групп, заданных квазитождеством

$$([x, y]^2 = 1) \quad \Longrightarrow \quad ([x, y] = 1),$$

очевидно, имеет ранг 2.

Предложение 4.4.1. *Пусть $\mathcal{Q}$ – квазимногообразие групп и G – группа. Тогда $G \in \mathcal{Q}$ тогда и только тогда, когда все $\mathrm{rk}(\mathcal{Q})$-порожденные подгруппы в G лежат в $\mathcal{Q}$.*

Доказательство. Утверждение очевидно в одну сторону, так как квазимногообразия замкнуты относительно взятия подгрупп.

Пусть G – группа, у которой все ее $\mathrm{rk}(\mathcal{Q})$-порожденные подгруппы лежат в $\mathcal{Q}$. Рассмотрим систему квазитождеств (4.4.2), которая определяет $\mathcal{Q}$, в которой общее число переменных $\mathrm{rk}(\mathcal{Q})$, т.е. все слова w_i^j, v_i в (4.4.2), оказываются из свободной группы ранга $\mathrm{rk}(\mathcal{Q})$. Тогда (4.4.2) выполняются для любого выбора элементов $g_1, \dots, g_{\mathrm{rk}(\mathcal{Q})}$ из G, так как они выполняются для любого выбора элементом из подгрупп в G, порожденных $g_1, \dots, g_{\mathrm{rk}(\mathcal{Q})}$ (которые $\mathrm{rk}(\mathcal{Q})$-порождены). Следовательно, (4.4.2) выполняется для всех возможных подстановок элементов из G и $G \in \mathcal{Q}$ по определению.

Имеем следующее простое замечание.

Предложение 4.4.2. *Если $\mathcal{Q}$ конечно базируемо, то $\mathrm{rk}(\mathcal{Q})$ конечен.*

Следующее замечание предъявляет метод доказательства того, что квазимногообразие не является конечно базируемым.

Предложение 4.4.3. *Пусть $\mathcal{Q}$ – квазимногообразие такое, что существует последовательность конечно порожденных групп G_i, $i = 1, 2, \dots$, такая, что выполнены следующие условия:*

(i) $G_i \notin \mathcal{Q}$;
(ii) *для любого i существует число $f(i)$ такое, что все $f(i)$-порожденные подгруппы в G_i лежат в $\mathcal{Q}$;*

(iii) *функция* $f(i)$ *не ограничена, т.е.* $f(i) \to \infty$ *для* $i \to \infty$.

Тогда $\mathrm{rk}(\mathcal{Q}) = \infty$ *и поэтому квазимногообразие* $\mathcal{Q}$ *не является конечно базируемым.*

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{rk}(\mathcal{Q}) < \infty$. Тогда ввиду (iii) существует целое i такое, что $f(i) > \mathrm{rk}(\mathcal{Q})$. Так как каждая $f(i)$-порожденная подгруппа G_i лежит в $\mathcal{Q}$, каждая $\mathrm{rk}(\mathcal{Q})$-подгруппа также лежит в $\mathcal{Q}$. Поэтому $G_i \in \mathcal{Q}$ ввиду предложения 4.4.1; но это противоречит условию (i). Поэтому $\mathrm{rk}(\mathcal{Q}) = \infty$ и $\mathcal{Q}$ не является конечно базируемым.

Напомним, что структура четвертой размерной подгруппы для конечных групп ступени нильпотентности 3 дана в теореме 4.2.1. Нам понадобится некоторые технические результаты о конечных группах.

Лемма 4.4.1. *Пусть* n, s *– натуральные числа,*

$$G = \langle x_1, \ldots, x_{2n} \mid x_i^s = 1,\ 1 \leqslant i \leqslant 2n \rangle$$

и $\Pi = G/\gamma_3(G)$. *Если*

$$[x_1, x_2]^k \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]^k = [h_1, h_2] \cdots [h_{2l-1}, h_{2l}] \tag{4.4.3}$$

с $0 < k < s$, $h_1, \ldots, h_{2l} \in \Pi$, *то* $l \geqslant n$.

В частности, если H *–* m*-порожденная подгруппа в* Π *и*

$$[x_1, x_2]^k \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]^k \in \gamma_2(H),$$

то $\binom{m}{2} \geqslant n$.

Доказательство. Предположим, что

$$h_i \equiv x_1^{a_{i,1}} \cdots x_{2n}^{a_{i,2n}} \bmod \gamma_2(\Pi),$$

где $0 \leqslant a_{i,j} < s$, $1 \leqslant i \leqslant 2l$, $1 \leqslant j \leqslant 2n$. Подставляя в уравнение (4.4.3), получаем следующее уравнение в Π:

$$[x_1, x_2]^k \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]^k = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2n} [x_i, x_j]^{b_{ij}}, \tag{4.4.4}$$

где

$$b_{ij} = \sum_{r=1}^{l} (a_{2r-1,i} a_{2r,j} - a_{2r-1,j} a_{2r,i}).$$

Отметим, что $\gamma_2(\Pi) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2n} \langle [x_i, x_j] \rangle$ и $\langle [x_i, x_j] \rangle$ является циклической группой порядка s. Следовательно, из уравнения (4.4.4), сравнивая степени порождающих $[x_i, x_j]$, $1 \leqslant i < j \leqslant 2n$, перемножаемых членов, получаем

$$b_{2t-1,2t} \equiv k \bmod s, \qquad 1 \leqslant t \leqslant n, \tag{4.4.5}$$

$$b_{i,j} \equiv 0 \bmod s, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant 2n, \quad (i,j) \neq (2t-1, 2t). \tag{4.4.6}$$

Пусть $M_{p,q}(\mathbb{Z}_s)$ обозначает множество матриц размера $p \times q$ над кольцом $\mathbb{Z}_s$ целых чисел по модулю s. Пусть $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant 2l,\, 1 \leqslant j \leqslant 2n} \in M_{2l,2n}(\mathbb{Z}_s)$. Определим матрицу $D \in M_{2n,2l}(\mathbb{Z}_s)$ следующим образом:

$$D = (D_{p,q})_{1 \leqslant p \leqslant n,\, 1 \leqslant q \leqslant l},$$

где

$$D_{p,q} = \begin{pmatrix} a_{2q,2p} & -a_{2q-1,2p} \\ -a_{2q,2p-1} & a_{2q-1,2p-1} \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{Z}_s).$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$DA = kI_{2n,2n},$$

где $I_{2n,2n} \in M_{2n,2n}(\mathbb{Z}_s)$ – единичная матрица, и из этого следует, что $l \geqslant n$.

Далее, пусть H – некоторая m-порожденная подгруппа в Π. Легко видеть, что каждый элемент из $\gamma_2(H)$ может быть записан как произведение не более чем $\binom{m}{2}$ коммутаторов элементов из H, так как H нильпотентна ступени 2. Второе предложение леммы, таким образом, следует из предыдущего результата.

Теорема 4.4.2. *Квазимногообразие $\mathcal{D}_4$ не является конечно базируемым.*

Доказательство. Для $n \geqslant 5$ пусть $\Pi = G(n)/\gamma_4(G(n))$ – нижний центральный фактор-группы, рассмотренной в примере 4.1.6. Мы утверждаем, что для каждой m-порожденной подгруппы H в Π с $\binom{m}{2} < n$ выполняется условие $D_4(H) = 1$. Естественно, это влечет, что $\mathrm{rk}(\mathcal{D}_4) = \infty$ (по предложению 4.4.3), и утверждение теоремы 4.4.2 следует. Далее будем обозначать через x_i, y_i порождающие группы Π.

Пусть H – некоторая m-порожденная подгруппа группы Π и $h_1, \dots, h_m$ – множество порождающих H. Предположим, что по модулю $\gamma_2(H)$ порождающие $h_1, \dots, h_k$, $k \leqslant m$, имеют конечный порядок, а $h_{k+1}, \dots, h_m$ – бесконечный порядок.

Для $g \in \Pi$ пусть $\overline{g}$ обозначает образ элемента g в $\Pi/\gamma_2(\Pi)$ относительно естественного эпиморфизма. Заметим, что из структуры группы Π следует, что подгруппа кручения в $\Pi/\gamma_2(\Pi)$ – это

$$\langle \overline{x}_1 \rangle \oplus \langle \overline{x}_2 \rangle \oplus \langle \overline{x}_3 \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_{64}.$$

Переставляя $h_1, \dots, h_k$ удобным образом, если необходимо, можем считать, что

$$h_1 = x_1^{l_{1,1}} x_2^{l_{1,2}} x_3^{l_{1,3}} \lambda_1, \qquad h_2 = x_1^{l_{2,1}} x_2^{l_{2,2}} \lambda_2, \qquad h_3 = x_1^{l_{3,1}} \lambda_3,$$
$$h_j = \lambda_j, \qquad 4 \leqslant j \leqslant k,$$

где $l_{i,j} \in \mathbb{Z}$, $\lambda_i \in H \cap \gamma_2(\Pi)$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Пусть $d(i)$ – порядок h_i по модулю $\gamma_2(H)$. Тогда, в частности,

$$l_{3,1} d(3) \equiv 0 \bmod 4, \tag{4.4.7}$$
$$l_{2,2} d(2) \equiv 0 \bmod 16. \tag{4.4.8}$$

Можем предположить, что

$$d(k) \mid d(k-1) \mid \cdots \mid d(2) \mid d(1).$$

Следовательно, по теореме 4.2.1 группа $D_4(H)$ состоит из следующих элементов:

$$w = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} [h_i^{d(i)}, h_j]^{a_{ij}},$$

где целые числа a_{ij} удовлетворяют соотношениям (4.2.2) и (4.2.3).

Для $j \geqslant 4$ имеем $[h_i^{d(i)}, h_j] = [h_i^{d(i)}, \lambda_j] = 1$, следовательно,

$$w = [h_1^{d(1)}, h_2]^{a_{12}} [h_1^{d(1)}, h_3]^{a_{13}} [h_2^{d(2)}, h_3]^{a_{23}} = [h_1, h_2^{d(1)a_{12}} h_3^{d(1)a_{13}}][h_2^{d(2)}, h_3]^{a_{23}}.$$

Так как

$$y_1 = \prod_{1 < j \leqslant k} h_j^{d(1)a_{1j}} \in \gamma_2(\Pi)^{d(1)} \gamma_3(\Pi)$$

по (4.2.3), получаем

$$w = [h_1, y_1][h_2^{d(2)}, h_3]^{a_{23}} = [h_2^{d(2)}, h_3]^{a_{23}}.$$

Мы утверждаем, что $[h_2^{d(2)}, h_3]^{a_{23}} = 1$.

Рассмотрим элемент $h_3 = x_1^{l_{3,1}}\lambda_3$. Имеем

$$x_1^{l_{3,1}d(3)}\lambda_3^{d(3)} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}[h_i,h_j]^{u_{ij}}\gamma \tag{4.4.9}$$

для некоторых $\gamma \in \gamma_3(\Pi)$ и $u_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Пусть E – нормальная подгруппа в Π, порожденная

$$x_2,\ x_3,\ Y_2,\ Y_3, \qquad [x_1,Y_j], \quad j\in\{1,4,5\}, \qquad [Y_i,Y_j], \quad i,j\in\{1,4,5\}, \quad i\neq j, \qquad \gamma_3(\Pi),$$

где

$$Y_i = \{y_{(2i-2)n+1},\dots,y_{2in}\}, \qquad i=1,\dots,5.$$

Пусть

$$S = \big\langle x_1,Y_1,Y_4,Y_5 \mid x_1^4 = \xi_{1,(n)},\ x_1^{-32} = \xi_{4,(n)}^{16},\ x_1^{-64} = \xi_{5,(n)}^{64},$$
$$[x_1,Y_i]=1,\ i\in\{1,4,5\},\ [Y_i,Y_j]=1,\ i,j\in\{1,4,5\},\ i\neq j\big\rangle. \tag{4.4.10}$$

Отметим, что

$$\Pi/E \simeq S/\gamma_3(S).$$

Пусть $p\colon \Pi \to S/\gamma_3(S)$ – композиция эпиморфизмом $\Pi\to\Pi/E$ и $\Pi/E\to S/\gamma_3(S)$. Применяя эпиморфизм p к (4.4.9) в Π, получаем следующее уравнение в $S/\gamma_3(S)$:

$$x_1^{l_{3,1}d(3)}p(\lambda_1)^{d(3)} = \prod_{i<j}[p_1(h_i),p_1(h_j)]^{u_{ij}}. \tag{4.4.11}$$

Отметим, что

$$S/\gamma_3(S) = (\langle x_1\rangle \oplus \mathcal{Y}_1/\gamma_3(\mathcal{Y}_1)\oplus \mathcal{Y}_4/\gamma_3(\mathcal{Y}_4)\oplus \mathcal{Y}_5/\gamma_3(\mathcal{Y}_3))/N,$$

где $\mathcal{Y}_i$, $1\leqslant i\leqslant 5$, – свободная группа с базисом Y_i,

$$N = \langle x_{1,(n)}^4\xi_{1,(n)}^{-1},\xi_{1,(n)}^{8}\xi_{4,(n)}^{16},\xi_{1,(n)}^{16}\xi_{5,(n)}^{64}\rangle.$$

Следовательно, (4.4.11) влечет, что в прямом произведении

$$\mathcal{Y} := \mathcal{Y}_1/\gamma_3(\mathcal{Y}_1)\oplus\mathcal{Y}_4/\gamma_3(\mathcal{Y}_3)\oplus\mathcal{Y}_5/\gamma_3(\mathcal{Y}_3)$$

имеем

$$l_{3,1}d(3)\equiv 0 \bmod 4 \tag{4.4.12}$$

и

$$\xi_{1,(n)}^{\frac{l_{3,1}d(3)}{4}}\mu_1^{d(3)}(\xi_{1,(n)}^{8}\xi_{4,(n)}^{16})^{k_1}(\xi_{1,(n)}^{16}\xi_{5,(n)}^{64})^{k_2} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}[z_i,z_j]^{u_{ij}} \tag{4.4.13}$$

для некоторых целых k_1, k_2 и элементов $\mu_1\in\gamma_2(\mathcal{Y})$, $z_i\in\mathcal{Y}$, $1\leqslant i\leqslant m$. Проецируя (4.4.13) на каждый из сомножителей $\mathcal{Y}$, получаем следующие три уравнения:

$$\xi_{1,(n)}^{d_1}\mu_{1,1}^{d(3)} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}[z_{i,1},z_{j,1}]^{u_{ij}} \quad \text{в} \quad \mathcal{Y}_1/\gamma_3(\mathcal{Y}_1), \qquad d_1 = \frac{l_{3,1}d(3)}{4}+8k_1+16k_2, \tag{4.4.14}$$

$$\xi_{4,(n)}^{d_4}\mu_{1,4}^{d(3)} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}[z_{i,4},z_{j,4}]^{u_{ij}}, \quad \text{в} \quad \mathcal{Y}_4/\gamma_3(\mathcal{Y}_4), \qquad d_4 = 16k_1, \tag{4.4.15}$$

$$\xi_{5,(n)}^{d_5}\mu_{1,5}^{d(3)} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}[z_{i,5},z_{j,5}]^{u_{ij}}, \quad \text{в} \quad \mathcal{Y}_5/\gamma_3(\mathcal{Y}_5), \qquad d_5 = 64k_2, \tag{4.4.16}$$

для некоторых

$$\mu_{1,i} \in \gamma_2(\mathcal{Y}_i)/\gamma_3(\mathcal{Y}_i), \quad z_{i,l} \in \mathcal{Y}_l/\gamma_3(\mathcal{Y}_l), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad l \in \{1,4,5\}.$$

Случай (a): $l_{3,1}$ нечетно. Ввиду (4.4.12) имеем $d(3) = 4s$ для некоторого целого s. Пусть

$$Z_i = \langle Y_i \mid y_i^{4s} = 1,\, y_i \in Y_i, \gamma_3(\mathcal{Y}_1)\rangle$$

и $p_i\colon \mathcal{Y}_i/\gamma_3(\mathcal{Y}_i) \to Z_i$ – естественная проекция, $i \in \{1,4,5\}$.

Проецируя уравнения (4.4.14), (4.4.15) и (4.4.16) на Z_1, Z_4 и Z_5 соответственно, получаем по лемме 4.4.1, что

$$d_i \equiv 0 \bmod 4s, \qquad i \in \{1,4,5\}.$$

Из (4.4.14) и (4.4.15) получаем

$$l_{3,1}s + 8k_1 + 16k_2 \equiv 0 \bmod 4s, \tag{4.4.17}$$

$$16k_1 \equiv 0 \bmod 4s. \tag{4.4.18}$$

Таким образом, получаем $s \equiv 0 \bmod 16$ и поэтому

$$d(3) \equiv 0 \bmod 64.$$

Пусть $d(3) = 64f$, $f \in \mathbb{Z}$, и предположим, что $d(2) = d(3)c$, $c \in \mathbb{Z}$ (напомним, что $d(3) \mid d(2)$). Тогда имеем

$$w = [h_2^{d(2)}, h_3]^{a_{23}} = [h_2, h_3^{d(3)}]^{ca_{23}} = [h_2, x_1^{64l_{3,1}f}\lambda_3^{64f}]^{ca_{23}} = [h_2^{16}, x_1^{4l_{3,1}f}\lambda_3^{4f}]^{ca_{23}}.$$

Так как $h_2^{16} \in \gamma_2(\Pi)$, получаем $w = 1$.

Случай (b): $l_{3,1} = 2l$ и l нечетное. В этом случае получаем

$$d(3) \equiv 0 \bmod 16. \tag{4.4.19}$$

Так как $x_1^{2ld(3)} \in \gamma_2(\Pi)$, имеем $d(3) = 2r$ для некоторого $r > 0$. Проецируя квадрат уравнения (4.4.14) на Z_1 относительно отображения p_1, по лемме 4.4.1 получаем, что

$$2d_1 \equiv 0 \bmod 4r.$$

Следовательно, имеем

$$2d_1 = 2lr + 16k_1 + 32k_2 \equiv 0 \bmod 4r,$$

что влечет $r \equiv 0 \bmod 8$, поэтому имеем (4.4.19).

Теперь рассмотрим элемент $h_2 = x_1^{l_{2,1}}x_2^{l_{2,2}}\lambda_2$. Имеем

$$h_2^{d(2)} = (x_1^{l_{2,1}}x_2^{l_{2,2}})^{d(2)}\lambda_2^{d(2)} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}[h_i,h_j]^{v_{ij}}\gamma \tag{4.4.20}$$

для некоторых $\gamma \in \gamma_3(\Pi)$ и $v_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Пусть I – нормальная подгруппа в Π, порожденная

$$x_1,\ x_3,\ Y_1,\ Y_4, \qquad [x_2, Y_j], \quad j \in \{2,3,5\}, \qquad [Y_i, Y_j], \quad i,j \in \{2,3,5\}, \quad i \neq j, \qquad \gamma_3(\Pi).$$

Пусть

$$Q = \langle x_2, Y_2, Y_3, Y_5 \mid x_2^{16} = \xi_{2,(n)},\, \xi_{2,(n)}^2 = \xi_{3,(n)}^4,\, \xi_{2,(n)}^8 = \xi_{5,(n)}^{64}\rangle.$$

Отметим, что $\Pi/I \simeq Q/\gamma_3(Q)$ и

$$Q/\gamma_3(Q) \simeq (\langle x_2\rangle \oplus \mathcal{Y}_2/\gamma_3(\mathcal{Y}_2) \oplus \mathcal{Y}_3/\gamma_3(\mathcal{Y}_3) \oplus \mathcal{Y}_5/\gamma_3(\mathcal{Y}_5))/M,$$

где $M = \langle x_2^{16}\xi_{2,(n)}^{-1}, \xi_{2,(n)}^{2}\xi_{3,(n)}^{-4}, \xi_{2,(n)}^{8}\xi_{5,(n)}^{64}\rangle$. Пусть $q\colon \Pi \to Q$ – естественная проекция. Применяя q к уравнению (4.4.20), получаем уравнение

$$q(x_2)^{l_{2,2}d(2)}q(\lambda_2)^{d(2)} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}[q(h_i), q(h_j)]^{v_{ij}} \tag{4.4.21}$$

в группе $Q/\gamma_3(Q)$. Это уравнение влечет, что в прямом произведении

$$\mathcal{V} := \mathcal{Y}_2/\gamma_3(\mathcal{Y}_2) \oplus \mathcal{Y}_3/\gamma_3(\mathcal{Y}_3) \oplus \mathcal{Y}_5/\gamma_3(\mathcal{Y}_5)$$

имеем (ввиду (4.4.8))

$$\xi_{2,(n)}^{\frac{l_{2,2}d(2)}{16}}\mu_2^{d(2)}(\xi_{2,(n)}^{2}\xi_{3,(n)}^{-4})^{m_1}(\xi_{2,(n)}^{8}\xi_{5,(n)}^{64})^{m_2} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}[v_i, v_j]^{v_{ij}} \tag{4.4.22}$$

для некоторых целых m_1, m_2 и элементов $\mu_2 \in \gamma_2(\mathcal{V})$, $v_i \in \mathcal{V}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Проецируя (4.4.22) на первый сомножитель в $\mathcal{V}$, получаем следующее уравнение:

$$\xi_{2,(n)}^{e_1}\mu_{2,1}^{d(2)} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}[v_{i,1}, v_{j,1}],$$

где

$$e_1 = \frac{l_{2,2}d(2)}{16} + 2m_1 + 8m_2$$

и $\mu_{2,1} \in \gamma_2(\mathcal{Y}_2)/\gamma_3(\mathcal{Y}_2)$, $v_{i,1} \in \mathcal{Y}_2/\gamma_3(\mathcal{Y}_2)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Так как $d(3) \mid d(2)$, получаем $d(2) = 16t$ для некоторого t. Как приложение леммы 4.4.1 получаем $e_1 \equiv 0 \bmod 16t$; поэтому $l_{2,2}t$ четно и $l_{2,2}d(2) = 32f$ для некоторого f. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} w &= [h_2^{d(2)}, h_3]^{a_{23}} = [(x_1^{l_{2,1}}x_2^{l_{2,2}}\lambda_2)^{d(2)}, x_1^{2l}]^{a_{23}} = [x_1^{l_{2,1}}x_2^{l_{2,2}}\lambda_2, x_1^{l_{3,1}d(2)}]^{a_{23}} = [x_2^{l_{2,2}}, x_1^{l_{3,1}d(2)}]^{a_{23}} \\ &= [x_2, x_1^{l_{3,1}l_{2,2}d(2)}]^{a_{23}} = [x_2, x_1^{64lf}]^{a_{23}} = [x_2, \xi_{1,(n)}^{16lf}]^{a_{23}} = [x_2^{16}, \xi_{1,(n)}^{lf}]^{a_{23}} = 1. \end{aligned}$$

Случай (c): $l_{3,1} \equiv 0 \bmod 4$. В этом случае $h_3 \in \gamma_2(\Pi)$, так как $x_1^4 \in \gamma_2(\Pi)$; поэтому $w = 1$.

Таким образом, во всех случаях имеем $w = 1$ и поэтому $D_4(H) = 1$. Это завершает доказательство.

4.5. Лиевы размерные подгруппы

Для данной мультипликативной группы G и коммутативного кольца R с единицей определим идеалы $\Delta_R^{(n)}(G)$, $n \geqslant 1$, индуктивно: $\Delta_R^{(1)}(G) = \Delta_R(G)$ – фундаментальный идеал группового кольца $R[G]$ и

$$\Delta_R^{(n)}(G) = [\Delta_R^{(n-1)}(G), \Delta_R(G)]R[G], \qquad n > 1, \tag{4.5.1}$$

– двусторонний идеал в $R[G]$, порожденный элементами

$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha, \qquad \alpha \in \Delta_R^{(n-1)}(G), \quad \beta \in \Delta_R(G).$$

Получаем цепочку убывающих двусторонних идеалов в $R[G]$

$$\Delta_R(G) = \Delta_R^{(1)}(G) \supseteq \Delta_R^{(2)}(G) \supseteq \cdots \supseteq \Delta_R^{(n)}(G) \supseteq \cdots.$$

Эта цепочка обладает следующим свойством:

$$\Delta_R^{(m)}(G).\Delta_R^{(n)}(G) \subseteq \Delta_R^{(n+m-1)}(G) \tag{4.5.2}$$

для всех $m, n \geqslant 1$ (см. [64; утверждение 1.7, (iii)]). Пусть

$$D_{(n),R}(G) = G \cap (1 + \Delta_R^{(n)}(G)), \qquad n \geqslant 1.$$

Называем $D_{(n),R}(G)$ *n-й верхней лиевой размерной подгруппой* в G над R. Ввиду (4.5.2) $\{D_{(n),R}(G)\}_{n\geqslant 1}$ образуют центральный ряд в G. Когда $R = \mathbb{Z}$, мы опускаем суффикс и просто пишем $D_{(n)}(G)$ вместо $D_{(n),\mathbb{Z}}(G)$.

Пусть L – кольцо Ли. Для подмножеств H, K в L определим $[H, K]$ – аддитивную подгруппу в L, порожденную коммутаторами

$$[h, k] = hk - kh, \qquad h \in H, \quad k \in K.$$

Напомним, что *нижний центральный ряд* $\{L_n\}_{n\geqslant 1}$ кольца Ли L определяется индуктивно: $L_1 = L$ и $L_{n+1} = [L, L_n]$ для $n \geqslant 1$. Кольцо Ли L называется *нильпотентным*, если $L_n = 0$ для некоторого $n \geqslant 1$.

Пусть A – ассоциативное кольцо. Мы можем рассмотреть A как кольцо Ли с операцией

$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha, \qquad \alpha, \beta \in A.$$

Определим ряд двусторонних идеалов $\{A^{[n]}\}_{n\geqslant 1}$ в A идуктивно: $A^{[1]} = A$ и $A^{[n]}$, $n > 1$, – двусторонний идеал в A, порожденный n-м членом A_n нижнего центрального ряда A, рассматриваемого как кольцо Ли.

Теорема 4.5.1 [71]. *Пусть A – ассоциативное кольцо с единицей. Тогда*

$$A^{[m]}.A^{[n]} \subseteq A^{[m+n-2]} \qquad \textit{для всех} \quad m, n \geqslant 2.$$

Пусть G – группа и R – коммутативное кольцо с единицей. Рассмотрим ряд $\{\Delta_R^{[n]}(G)\}_{n\geqslant 1}$ двусторонних идеалов групповом кольце $R[G]$. Естественно,

$$\Delta_R^{[n]}(G) \subseteq \Delta^{(n)}(G) \qquad \text{для всех} \quad n \geqslant 1,$$

и по теореме 4.5.1 получаем, что

$$\Delta^{[n]}(G)\Delta^{[m]}(G) \subseteq \Delta^{[n+m-2]}(G)\mathbb{Z}[G] \tag{4.5.3}$$

для любой группы G. Фильтрация $\{\Delta_R^{[n]}(G)\}_{n\geqslant 1}$ фундаментального идеала $\Delta_R(G)$ определяет ряд нормальных подгрупп $\{D_{[n],R}(G)\}_{n\geqslant 1}$ в G:

$$D_{[n],R}(G) = G \cap (1 + \Delta_R^{[n]}(G)). \tag{4.5.4}$$

Называем подгруппу $D_{[n],R}(G)$, $n \geqslant 1$, *n-й нижней лиевой размерной подгруппой* группы G над R. Как обычно, в случае $R = \mathbb{Z}$ мы опускаем в обозначениях R и пишем $D_{[n]}(G)$ вместо $D_{[n],\mathbb{Z}}(G)$.

Из определений и теоремы 4.5.1 следует, что для любой группы G и целого $n \geqslant 1$ имеются следующие включения:

$$\gamma_n(G) \subseteq D_{[n]}(G) \subseteq D_{(n)}(G) \subseteq D_n(G). \tag{4.5.5}$$

Вообще говоря, не только включение $\gamma_n(G) \subseteq D_n(G)$ может быть строгим, но и включение $\gamma_n(G) \subseteq D_{[n]}(G)$. Здесь мы приведем соответствующую конструкцию.

Теорема 4.5.2. *Пусть s – произвольное натуральное число. Тогда существуют число n и нильпотентная группа G класса n такие, что $D_{[n+s]}(G) \neq 1$.*

Докажем сначала две леммы.

Лемма 4.5.1. *Пусть Π – группа, $k \gg l \gg 4$. Если $x_1, x_2, x_3 \in \gamma_m(\Pi)$ и существуют $\xi_i \in \gamma_n(\Pi)$, $i = 1, \ldots, 5$, $n \geqslant 2m$, $m \geqslant 3$, такие, что*

$$x_1^4 = \xi_1, \qquad x_2^{2^l} = \xi_2, \qquad x_2^{2^{l+1}} x_3^{2^k} = \xi_3^4, \qquad x_1^{-2^{l+1}} x_3^{2^{k+1}} = \xi_4^{2^l}, \qquad x_1^{2^k} x_2^{2^{k+1}} = \xi_5^{2^k},$$

то

$$w = [x_1, x_2^{2^{l+1}}][x_1, x_3^{2^k}][x_2, x_3^{2^{k+1}}] \in D_{[n+2m-6]}(\Pi).$$

Доказательство. Так как $1 - x \in \Delta^{[n]}(\Pi)\mathbb{Z}[\Pi]$ для $x \in \gamma_n(\Pi)$, имеем

$$1 - w \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \bmod \Delta^{[2n]}(\Pi)\mathbb{Z}[\Pi],$$

где

$$\alpha_1 = (1 - [x_1, x_2^{2^{l+1}}]), \qquad \alpha_2 = (1 - [x_1, x_3^{2^k}]), \qquad \alpha_3 = (1 - [x_2, x_3^{2^{k+1}}]).$$

Теперь, работая по модулю $\Delta^{[n+2m-6]}(\Pi)\mathbb{Z}[\Pi]$, получаем

$$\begin{aligned}\alpha_1 &\equiv (1 + (x_1^{-1} x_2^{-2^{l+1}} - 1))((1 - x_2^{2^{l+1}})(1 - x_1) - (1 - x_1)(1 - x_2^{2^{l+1}}))\\ &\equiv (1 - x_2^{2^{l+1}})(1 - x_1) - (1 - x_1)(1 - x_2^{2^{l+1}}),\end{aligned}$$

так как $x_1^{-1} x_2^{-2^{l+1}} \in \gamma_m(\Pi)$ и

$$(x_1^{-1} x_2^{-2^{l+1}} - 1)((1 - x_2^{2^{l+1}})(1 - x_1) - (1 - x_1)(1 - x_2^{2^{l+1}})) \in \Delta^{[n+2m-6]}(\Pi)\mathbb{Z}[\Pi]$$

по (4.5.3). По модулю $\Delta^{[n+2m-6]}(\Pi)\mathbb{Z}[\Pi]$ имеем

$$\alpha_1 \equiv (1 - x_2^{2^{l+1}})(1 - x_1) - 2^{l+1}(1 - x_1)(1 - x_2) + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i \binom{2^{l+1}}{i} (1 - x_1)(1 - x_2)^i.$$

Отметим, что $\binom{2^{l+1}}{i}$ делится на 4^n для достаточно большого l и $i \leqslant n$. Поэтому для такого большого l имеем

$$\sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i \binom{2^{l+1}}{i} (1 - x_1)(1 - x_2)^i \in \Delta^{[n+2m-6]}(\Pi)\mathbb{Z}[\Pi].$$

По такому же принципу получаем

$$2^{l+1}(1 - x_1)(1 - x_2) \equiv (1 - x_1^{2^{l+1}})(1 - x_2) \bmod \Delta^{[n+2m-6]}(\Pi)\mathbb{Z}[\Pi].$$

Следовательно,

$$\alpha_1 \equiv (1 - x_2^{2^{l+1}})(1 - x_1) - (1 - x_1^{2^{l+1}})(1 - x_2) \bmod \Delta^{[n+2m-6]}(\Pi)\mathbb{Z}[\Pi].$$

Выбирая k таким, что $\binom{2^{k+1}}{i}$ делится на 2^{ln} для любого $i \leqslant n$, получаем

$$\begin{aligned}\alpha_2 &\equiv (1 - x_3^{2^k})(1 - x_1) - (1 - x_1^{2^k})(1 - x_3) \bmod \Delta^{[n+2m-6]}(\Pi)\mathbb{Z}[\Pi],\\ \alpha_3 &\equiv (1 - x_3^{2^{k+1}})(1 - x_2) - (1 - x_2^{2^{k+1}})(1 - x_3) \bmod \Delta^{[n+2m-6]}(\Pi)\mathbb{Z}[\Pi].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &\equiv (2-x_2^{2^{l+1}}-x_3^{2^k})(1-x_1)+(x_1^{2^{l+1}}-x_3^{2^{k+1}})(1-x_2)+(x_1^{2^k}+x_2^{2^{k+1}}-2)(1-x_3)\\ &\equiv (1-\xi_3^4)(1-x_1)+(1-\xi_4^{2^l})(1-x_2)+(1-\xi_5^{2^k})(1-x_3)\\ &\equiv (1-\xi_3)(1-\xi_1)+(1-\xi_4)(1-\xi_2)+(1-\xi_5)(1-\xi_3)\equiv 0 \operatorname{mod} \Delta^{[n+2m-6]}(\Pi)\mathbb{Z}[\Pi],\end{aligned}$$

и поэтому $w \in D_{[n+2m-6]}(\Pi)$.

Лемма 4.5.2. *Пусть $W_{m,n}$ – группа, заданная следующим копредставлением:*

$$\begin{aligned}\langle x_1,\dots,x_{14} \mid [x_1,{}_m x_{11}]^4\xi_1,\ [x_2,{}_m x_{12}]^{2^l}\xi_2,\ [x_3,{}_m x_{13}]^{2^k}\xi_3,&\\ [x_4,{}_n x_{14},x_{10}]^4[x_4,{}_n x_{14},x_3,{}_m x_{13},x_7]^{2^{k-1}},\ \xi_1^{2^{k-2}}\xi_2^{2^{k-l+1}}\rangle,&\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\xi_1 &= [x_4,{}_n x_{14},x_7]^2[x_4,{}_n x_{14},x_6][x_4,{}_n x_{14},x_5]^2,\\ \xi_2 &= [x_4,{}_n x_{14},x_7]^{2^{l-2}}[x_4,{}_n x_{14},x_{10}]^{-1}[x_4,{}_n x_{14},x_5]^2,\\ \xi_3 &= [x_4,{}_n x_{14},x_6]^{-2^{l-2}}[x_4,{}_n x_{14},x_{10}]^{-2}.\end{aligned}$$

Тогда элемент

$$w_{n,m}=[x_1,{}_m x_{11},[x_2,{}_m x_{12}]^{2^{l+1}}][x_1,{}_m x_{11},[x_3,{}_m x_{13}]^{2^k}][x_2,{}_m x_{12},[x_3,{}_m x_{13}]^{2^{k+1}}]$$

не лежит в $\gamma_{n+m+4}(W_{n,m})$, $n \geqslant m \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть F – свободная группа с базисом $x_1,\dots,x_{10}$. Рассмотрим четыре типа соотношений:

$$R_1=\gamma_4(F),$$

$$R_2=\langle R_1,\ [x_i,x_j,x_k]\notin\langle\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon,\theta\rangle R_1 \text{ для всех } i,j,k,\ \alpha^{2^{k-l}}\beta^{-1},\beta^{2^{l-2}}\gamma^{-1},\gamma^4,\beta\epsilon,\alpha\delta,\theta\gamma\rangle,$$

где

$$\alpha=[x_4,x_3,x_7],\qquad \beta=[x_4,x_2,x_6],\qquad \gamma=[x_4,x_{10},x_1],\qquad \delta=[x_4,x_7,x_3],$$
$$\epsilon=[x_4,x_6,x_2],\qquad \theta=[x_4,x_1,x_{10}].$$

Теперь определим R_3 как подгруппу, порожденную R_2 вместе с нормальным замыканием следующих слов:

$$\begin{gathered}[x_3,x_4]^{2^k},\qquad [x_2,x_4]^{2^l},\\ [x_4,x_1]^4,\qquad [x_2,x_3]^{2^l}\alpha^{-2^{l-2}},\\ [x_3,x_1]^4\alpha^{-2},\qquad [x_2,x_1]^4\beta^{-1},\\ [x_4,x_5]^{2^{k-l+2}}\alpha^{-2^{k-1}},\qquad [x_4,x_7]^{2^k}\gamma^2,\\ [x_4,x_6]^{2^{k-2}},\qquad [x_4,x_{10}]^4\gamma^2,\\ [x_5,x_i],\quad i\neq 1,\qquad [x_1,x_i],\quad [x_2,x_i],\quad [x_3,x_i],\quad i>4.\end{gathered}$$

Пусть R_4 – подгруппа, порожденная R_3 и нормальным замыканием слов

$$c_1=x_1^4[x_4,x_7]^2[x_4,x_6][x_4,x_5]^2,$$

$$c_2 = x_2^{2^l}[x_4, x_7]^{2^{l-2}}[x_4, x_{10}]^{-1}[x_4, x_5]^2,$$
$$c_3 = x_3^{2^k}[x_4, x_6]^{-2^{l-2}}[x_4, x_{10}]^{-2}.$$

Обозначим $H = F/R_4$. Мы утверждаем, что $[R_{i+1}, F] \subseteq R_i$, $i = 1, 2, 3$. Это очевидно для $i = 1, 2$. Мы покажем это для $i = 3$. Работая по модулю R_3, получаем

$$\begin{aligned}
&[c_1, x_1] = 1,\\
&[c_1, x_2] = [x_1, x_2]^4[x_4, x_6, x_2] = [x_1, x_2]^4\beta = 1,\\
&[c_1, x_3] = [x_1, x_3]^4[x_4, x_7, x_3]^2 = [x_1, x_3]^4\alpha^2 = 1,\\
&[c_1, x_4] = [x_1, x_4]^4 = 1,\\
&[c_2, x_1] = [x_2, x_1]^{2^l}[x_4, x_{10}, x_1]^{-1} = \beta^{2^{l-2}}\gamma^{-1} = 1,\\
&[c_2, x_2] = 1,\\
&[c_2, x_3] = [x_2, x_3]^{2^l}[x_4, x_7, x_3]^{2^{l-2}} = [x_2, x_3]^{2^l}\alpha^{-2^{l-2}} = 1,\\
&[c_2, x_4] = [x_2, x_4]^{2^l} = 1,\\
&[c_3, x_1] = [x_3, x_1]^{2^k}[x_4, x_{10}, x_1]^{-2} = \alpha^{2^{k-1}}\gamma^{-2} = 1,\\
&[c_3, x_2] = [x_3, x_2]^{2^k}[x_4, x_6, x_2]^{-2^{l-2}} = \alpha^{2^{k-2}}\beta^{-2^{l-2}} = 1,\\
&[c_3, x_3] = 1,\\
&[c_3, x_4] = [x_3, x_4]^{2^k} = 1.
\end{aligned}$$

Используя стандартные аргументы, можно показать, что элемент

$$w = [x_1, x_2^{2^{l+1}}][x_1, x_3^{2^k}][x_2, x_3^{2^{k+1}}]$$

нетривиален в H. Отметим, что все скобки $[x_j, x_i, x_j]$ тривиальны в H.

Пусть W – группа, заданная следующим копредставлением:

$$\langle x_1, \dots, x_{10} \mid x_1^4\xi_1, x_2^{2^l}\xi_2, x_3^{2^k}\xi_3, [x_4, x_{10}]^4[x_4, x_3, x_7]^{2^{k-1}}, \xi_1^{2^{k-2}}\xi_2^{2^{k-l+1}}\rangle,$$

где

$$\xi_1 = [x_4, x_7]^2[x_4, x_6][x_4, x_5]^2,$$
$$\xi_2 = [x_4, x_7]^{2^{l-2}}[x_4, x_{10}]^{-1}[x_4, x_5]^2,$$
$$\xi_3 = [x_4, x_6]^{-2^{l-2}}[x_4, x_{10}]^{-2}.$$

Легко видеть, что группа $W_{0,0}$ является свободным произведением W со свободной группой ранга 5. Группа W естественным образом отображается на H и $W_{0,0}$ отображается на G_2. Образ $w_{0,0}$ – в точности элемент w, который нетривиален, поэтому $w_{0,0} \notin \gamma_4(W_{0,0})$.

Мы докажем сначала, что $w_{m,m} \notin \gamma_{2m+4}(W_{m,m})$, т.е. рассмотрим случай $n = m$. Для каждого m рассмотрим фактор

$$W'_{m,m} = W_{m,m}/\gamma_{2m+4}(W_{m,m})N_m,$$

где N_m – нормальное замыкание в $W_{m,m}$ скобок $[y_1, \dots, y_t]$, $t \geqslant 3$, таких, что существуют как минимум два вхождения $y_i = x_1$ или $y_i = x_2$, или $y_i = x_3$, или $y_i = x_4$ в эти скобки, или как минимум три вхождения элементов из $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ одновременно. Мы видим, что все такие скобки тривиальны в H, поэтому $w_{0,0}$ нетривиален в $W'_{0,0}$.

Предположим, что элемент $w_{m,m}$ нетривиален в $W'_{m,m}$ для данного m, и докажем это же для $m + 1$.

Рассмотрим следующий автоморфизм f свободной группы ранга 14:

$$x_i \mapsto x_i, \qquad i \neq 11, 12, 13, 14,$$
$$x_{11} \mapsto x_{11}x_1, \qquad x_{12} \mapsto x_{12}x_2, \qquad x_{13} \mapsto x_{13}x_3, \qquad x_{14} \mapsto x_{14}x_4.$$

Естественно, этот автоморфизм может быть продолжен до автоморфизма f' группы $W'_{m,m}$. Этот автоморфизм определяет полупрямое произведение

$$W''_{m,m} = W'_{m,m} \rtimes \langle x \rangle,$$

где x действует как f'. Естественно, имеем в $W''_{m,m}$

$$[x, x_i] = 1, \qquad i \neq 11, 12, 13, 14,$$
$$[x_{11}, x] = x_1, \qquad [x_{12}, x] = x_2, \qquad [x_{13}, x] = x_3, \qquad [x_{14}, x] = x_4.$$

Легко видеть, что группа $W''_{m,m}$ нильпотентна с $\gamma_{2m+6}(W''_{m,m}) = 1$. Отметим, что $W''_{m,m}$ является эпиморфным образом группы $W_{m+1,m+1}$, поэтому образ элемента $w_{m+1,m+1}$ нетривиален в $W''_{m,m}$, так как это элемент $w_{m,m}$ в $W''_{m,m}$. Таким образом, мы доказали, что $w_{m+1,m+1} \notin \gamma_{2m+6}(W'_{m+1,m+1})$. Индукция завершена, и мы имеем

$$w_{m,m} \notin \gamma_{2m+4}(W'_{m,m})$$

для любого $m \geqslant 0$.

Теперь докажем требуемое утверждение для общего случая $n \geqslant m \geqslant 0$. Фиксируем m и проводим индукцию по $t = n - m$. Для случая $t = 0$ требуемый результат уже был доказан. Рассмотрим факторгруппу $W'_{n,m} = W_{n,m}/\gamma_{n+m+4}(W_{n,m})N_m$. Рассмотрим следующий автоморфизм f' свободной группы с порождающими x_i:

$$x_i \mapsto x_i, \qquad i \neq 14,$$
$$x_{14} \mapsto x_{14}x_4.$$

Естественно, он продолжается до автоморфизма группы $W'_{n,m}$. Тогда соответствующее полупрямое произведение $W''_{n,m} = W_{n,m} \rtimes x$ нильпотентно с $\gamma_{n+m+5}(W''_{n,m}) = 1$. Заметим, что $W'_{n+1,m}$ естественным образом отображается на $W''_{n,m}$, отображая нетривиально элемент $w_{n+1,m}$. Поэтому $w_{n+1,m} \notin \gamma_{n+m+5}(W'_{n+1,m})$, что и завершает индукцию.

Доказательство теоремы 4.5.2. По лемме 4.5.1 для $k \gg l \gg 4$ имеем

$$w_{n,m} \in D_{[n+2m-2]}(W_{n,m}) \setminus \gamma_{n+m+4}(W_{n,m}).$$

Так как разность $(n + 2m - 2) - (n + m + 4) = m - 6$ может быть сколь угодно большой, то получаем утверждение теоремы 4.5.2.

Глава 5. Симплициальные аспекты теории размерных подгрупп

5.1. Полиномиальные функторы

Напомним, что отображение $f\colon G \to A$ из мультипликативной группы G в абелеву группу A называется *полиномиальным степени* $\leqslant n$, если его продолжение на групповое кольцо $\mathbb{Z}[G]$ группы G обнуляется на $\mathfrak{g}^{n+1}$, где $\mathfrak{g}$ – как обычно, фундаментальный идеал группового кольца $\mathbb{Z}[G]$ [64].

Пусть Ab – категория абелевых групп. Пусть $F\colon \mathsf{Ab} \to \mathsf{Ab}$ – функтор с $F(0) = 0$. Если M, N – абелевы группы, то по определению F задает отображение

$$F_{MN}\colon\ \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(F(M), F(N)).$$

Будем считать, что $U := \mathrm{Hom}(M, N)$ мультипликативно, а $V := \mathrm{Hom}(F(M), F(N))$ аддитивно. Тогда $F_{MN}\colon U \to V$ – отображение, удовлетворяющее условию $F_{MN}(e) = 0$, где e – единичный элемент U. Функтор F называется *полиномиальным степени* $\leqslant n$, если F_{MN} – полиномиальное отображение степени $\leqslant n$ для всех абелевых групп M, N. Это переформулировка понятия функтора конечной степени в смысле Эйленберга–Маклейна [72], приведенная в [64].

Квадратичные функторы. Функтор $F\colon \mathsf{Ab} \to \mathsf{Ab}$ *квадратичен*, т.е. имеет степень $\leqslant 2$, если $F(0) = 0$ и если его скрещенный эффект

$$F(A|B) = \ker(F(A \oplus B) \to F(A) \oplus F(B))$$

биаддитивен. Это приводит в естественному изоморфизму

$$F(A \oplus B) = F(A) \oplus F(B) \oplus F(A|B),$$

задаваемому как $(F_{i_1}; F_{i_2}; i_{12})$, где $i_1\colon A \subset A \oplus B$, $i_2\colon A \subset A \oplus B$ и i_{12} $F(A|B) \subset F(A \oplus B)$ – включения. Более того, для каждого $A \in \mathsf{Ab}$ получается диаграмма [73]

$$F\{A\} := (F(A) \xrightarrow{H} F(A|A) \xrightarrow{P} F(A)). \tag{5.1.1}$$

Здесь

$$P = F(p_1 + p_2)i_{12}\colon F(A|A) \subset F(A \oplus A) \to F(A)$$

задается как кодиагональ $p_1 + p_2\colon A \oplus A \to A$, где p_1 и p_2 – проекции. Также H определяется уравнением

$$i_{12}H = F(i_1 + i_2) - F(i_1) - F(i_2),$$

где $i_1 + i_2\colon A \to A \oplus A$ – диагональ.

Приведем определения некоторых квадратичных функторов из [72], которые будем далее использовать.

Функтор $\mathrm{Tor}(A, C)$. Для абелевых групп A и C абелева группа $\mathrm{Tor}(A, C)$ [72; § 11, с. 85] имеет порождающие

$$(a, m, c), \qquad a \in A, \quad c \in C, \quad 0 < m \in \mathbb{Z}, \quad ma = mc = 0,$$

и соотношения

$$(a_1 + a_2, m, c) = (a_1, m, c) + (a_2, m, c), \qquad ma_1 = ma_2 = mc = 0,$$

$$
\begin{aligned}
(a,m,c_1+c_2)&=(a,m,c_1)+(a,m,c_2), && ma=mc_1=mc_2=0,\\
(a,mn,c)&=(na,m,c), && mna=mc=0,\\
(a,mn,c)&=(a,m,nc), && ma=mnc=0.
\end{aligned}
$$

В частности, мы получаем функтор $A\mapsto \operatorname{Tor}(A,A))$ в категории Ab. Обозначим класс (a,m,c) через $\tau_m(a,c)$.

Функтор $\Omega(A)$. Пусть A – абелева группа. Тогда группа $\Omega(A)$, определенная Эйленбергом и Маклейном [72; с. 93], – абелева группа, порожденная символами

$$
w_n(x), \qquad 0<n\in\mathbb{Z}, \quad x\in A, \quad nx=0,
$$

с определяющими соотношениями

$$
\begin{aligned}
w_{nk}(x)&=kw_n(x), && nx=0,\\
kw_{nk}(x)&=w_n(kx), && nkx=0,\\
w_n(kx+y)-w_n(kx)-w_n(y)&=w_{nk}(x+y)-w_{nk}(x)-w_{nk}(y), && nkx=ny=0,
\end{aligned}
$$
$$
w_n(x+y+z)-w_n(x+y)-w_n(x+z)-w_n(y+z)+w_n(x)+w_n(y)+w_n(z)=0,
$$
$$
nx=ny=nz=0.
$$

Будем обозначать класс элемента $w_n(x)$ в $\Omega(A)$ также $w_n(x)$.

Эйленберг и Маклейн [72; с. 94] строят отображение

$$
E\colon\ \operatorname{Tor}(A,A)\to\Omega(A)
$$

как

$$
w_n(a,c)\mapsto w_n(a+c)-w_n(a)-w_n(c).
$$

Естественное отображение

$$
T\colon \Omega(A)\to\operatorname{Tor}(A,A) \tag{5.1.2}
$$

может быть определено как

$$
w_n(x)\mapsto w_n(x,x), \qquad x\in A, \quad nx=0.
$$

Естественно, композиция

$$
E\circ T\colon \Omega(A)\to\Omega(A)
$$

представляет собой умножение на 2; как следствие определяющих соотношений элементы $w_n(x)$ удовлетворяют

$$
w_n(mx)=m^2w_n(x), \qquad m\in\mathbb{Z}, \quad 0<n\in\mathbb{Z}, \quad x\in A.
$$

Функтор Уайтхеда $\Gamma(A)$. Для $A\in\mathsf{Ab}$ определим коммутативное кольцо $\Gamma(A)$, порожденное элементами $\gamma_t(x)$ для каждого $x\in A$ и каждого неотрицательного целого числа t степени $2t$, используя соотношения

$$
\gamma_0(x)=1, \tag{5.1.3}
$$
$$
\gamma_t(rx)=r^t\gamma_t(x), \tag{5.1.4}
$$
$$
\gamma_t(x+y)=\sum_{i+j=t}\gamma_i(x)\gamma_j(y), \tag{5.1.5}
$$
$$
\gamma_s(x)\gamma_t(x)=\binom{s+t}{s}\gamma_{s+t}(x). \tag{5.1.6}
$$

Однородная компонента $\Gamma_4(A)$ функтора $\Gamma(A)$ степени 4 – функтор Уайтхеда [72; с. 92, 110]

$$\Gamma\colon \mathsf{Ab} \to \mathsf{Ab}, \qquad A \mapsto \Gamma(A),$$

где группа $\Gamma(A)$ определена для $A \in \mathsf{Ab}$ как абелева группа, порождающаяся элементами $\gamma(a)$ для $x \in A$ со следующими соотношениями:

$$\gamma(-x) = \gamma(x), \tag{5.1.7}$$

$$\gamma(x+y+z) - \gamma(x+y) - \gamma(x+z) - \gamma(y+z) + \gamma(x) + \gamma(y) + \gamma(z) = 0 \tag{5.1.8}$$

для всех $x, y, z \in A$.

Функтор $R(A)$. Для $A \in \mathsf{Ab}$ пусть ${}_2A$ обозначает подгруппу, состоящую из элементов x таких, что $2x = 0$. Определим $R(A)$ [72; с. 120] как факторгруппу $\operatorname{Tor}(A, A) \oplus \mathit{\Gamma}({}_2A)$ по соотношениям

$$\tau_m(x, x) = 0, \qquad mx = 0, \tag{5.1.9}$$

$$\gamma_2(s+t) - \gamma_2(s) - \gamma_2(t) = \tau_2(s, t), \qquad s, t \in_2 A. \tag{5.1.10}$$

Функторы $A \mapsto \Gamma(A)$, $\operatorname{Tor}(A, A)$, $\Omega(A)$, $R(A)$ – квадратичные функторы в категории абелевых групп, т.е. все эти функторы имеют степень $\leqslant 2$. Более того, имеют место канонические изоморфизмы

$$R(A) = H_5K(A; 2), \qquad \Omega(A) = H_7K(A; 3)/(Z/3Z \otimes A), \qquad R(A|B) = \Omega(A|B) = \operatorname{Tor}(A, B), \tag{5.1.11}$$

$$R(\mathbb{Z}) = \Omega(\mathbb{Z}) = 0, \qquad R(\mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/(2, n), \qquad \Omega(\mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n. \tag{5.1.12}$$

Функтор квадрата. Пусть Ab_g – категория градуированных абелевых групп. Для $A, B \in \mathsf{Ab}$, будем также использовать обозначение $A*B := \operatorname{Tor}(A, B)$. Определение тензорного произведение естественным образом распространяется на категорию градуированных абелевых групп: для $A, B \in \mathsf{Ab}_g$

$$(A \otimes B)_n = \bigoplus_{i+j=n} A_i \otimes B_j.$$

Нам также понадобится *упорядоченное тензоное произведение* $A \overset{>}{\otimes} B$ градуированных абелевых групп, определяемое как

$$(A \overset{>}{\otimes} B)_n = \bigoplus_{i+j=n,\, i>j} A_i \otimes B_j$$

для $A, B \in \mathsf{Ab}_g$. Аналогично для $A, B \in \mathsf{Ab}_g$ определим *произведение кручения* $A * B$ и *упорядоченное произведение кручения* $A \overset{>}{*} B$ как

$$A * B = \bigoplus_{i+j=n} A_i * B_j, \qquad (A \overset{>}{*} B)_n = \bigoplus_{i+j=n,\, i>j} A_i * B_j.$$

Тензорное произведение, произведение кручения, упорядоченные тензорные произведения и произведения кручения, очевидно, являются бифункторами в категории Ab_g.

Пусть $\wedge^2$ – функтор внешнего квадрата в категории Ab. Определим *слабый функтор квадрата*

$$sq^{\otimes}\colon \mathsf{Ab}_g \to \mathsf{Ab}_g$$

как

$$sq^{\otimes}(A)_n = \begin{cases} \Gamma(A_m), & \text{если } n = 2m,\ m \text{ нечетно}, \\ \wedge^2(A_m), & \text{если } n = 2m,\ m \text{ четно}, \\ 0 & \text{иначе}. \end{cases}$$

Пусть $(\mathbb{Z}_2)_{\mathrm{odd}}$ – градуированная абелева группа, компоненты которой равны $\mathbb{Z}_2$ в нечетных степенях $\geqslant 1$ и тривиальны в остальных степенях, т.е. $(\mathbb{Z}_2)_{\mathrm{odd}}$ – редуцированные гомологии классифицирующего пространства $\mathbb{R}P_\infty = K(\mathbb{Z}_2, 1)$. Тогда *функтор квадрата* $Sq^{\otimes}\colon \mathsf{Ab}_g \to \mathsf{Ab}_g$ определяется как

$$Sq^{\otimes}(A) = A \overset{>}{\otimes} (A \oplus (\mathbb{Z}_2)_{\mathrm{odd}}) \oplus sq^{\otimes}(A).$$

Естественно, функтор квадрата является квадратичным функтором, и его скрещенный эффект [72; с. 77] равен

$$Sq^{\otimes}(A|B) = A \otimes B.$$

Определим, далее, *функтор крученого квадрата*

$$Sq^{\star}(A)\colon \mathsf{Ab}_g \to \mathsf{Ab}_g$$

как

$$Sq^{\star}(A) = (A \overset{>}{*} (A \oplus (\mathbb{Z}_2)_{\mathrm{odd}})) \oplus sq^{\star}(A),$$

где

$$sq^{\star}(A)_n = \begin{cases} \Omega(A_m), & \text{если } n = 2m+1,\ m \text{ четно},\\ R(A_m), & \text{если } n = 2m+1,\ m \text{ нечетно},\\ 0 & \text{иначе}. \end{cases}$$

5.2. Две спектральные последовательности

Пусть Gr обозначает категорию групп. Используя симплициальную теорию гомотопий для каждого функтора $T\colon \mathsf{Gr} \to \mathsf{Gr}$, мы можем построить его производные функторы $\mathcal{L}_q T\colon \mathsf{Gr} \to \mathsf{Gr}$. Если $\mathfrak{F} \to G$ – свободная симплициальная резольвента G, то $\mathcal{L}_q T(G) = \pi_q(T(\mathfrak{F}))$ – q-я гомотопическая группа симплициальной группы $T(\mathfrak{F})$.

Рассмотрим функторы

$$\mathit{\Gamma}_n\colon \mathsf{Gr} \to \mathsf{Gr}, \qquad L_n\colon \mathsf{Gr} \to \mathsf{Gr}, \quad n \geqslant 1,$$

заданные как

$$\mathit{\Gamma}_n(G) = G/\gamma_n(G), \qquad L_n(G) = \gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G),$$

которые оказываются естественными функторами в категории sGr симплициальных групп. В силу естественной точной последовательности

$$1 \to L_n(G) \to \mathit{\Gamma}_{n+1}(G) \to \mathit{\Gamma}_n(G) \to 1, \qquad n \geqslant 1, \quad G \in \mathsf{Gr},$$

имеем гомотопическую точную пару, ассоциированную с точными последовательностями

$$1 \to L_n(\mathfrak{F}) \to \mathit{\Gamma}_{n+1}(\mathfrak{F}) \to \mathit{\Gamma}_n(\mathfrak{F}) \to 1, \qquad n \geqslant 1,$$

симплициальных групп. Получаем спектральную последовательность $E(G) := \{E^r_{p,q}(G)\}$ с

$$E^1_{p,q}(G) = \mathcal{L}_q L_p(G)$$

и дифференциалом d^r степени $(r, -1)$.

Пусть $P_n\colon \mathsf{Gr} \to \mathsf{Gr}$ и $Q_n\colon \mathsf{Gr} \to \mathsf{Gr}$ – функторы, определенные как

$$P_n(G) = \mathbb{Z}[G]/\mathfrak{g}^n, \quad Q_n(G) = \mathfrak{g}^n/\mathfrak{g}^{n+1}, \qquad n \geqslant 1.$$

Получаем естественные точные последовательности

$$0 \to Q_n(G) \to P_{n+1}(G) \to P_n(G) \to 0, \qquad n \geqslant 1.$$

Гомотопическая точная пара, ассоциированная с индуцированными точными последовательностями

$$0 \to Q_n(\mathfrak{F}) \to P_{n+1}(\mathfrak{F}) \to P_n(\mathfrak{F}) \to 0, \qquad n \geqslant 1,$$

приводит к другой спектральной последовательности $\overline{E}(G) := \overline{E}^{\,r}_{p,q}(G)$ с

$$\overline{E}^{\,1}_{p,q}(G) = \mathcal{L}_q Q_p(G)$$

и диффернциалом $\overline{d}^{\,r}$, также имеющим степень $(r,-1)$. Существует естественный гомоморфизм

$$\kappa\colon E(G) \to \overline{E}(G),$$

индуцированный каноническим вложением $\kappa\colon G \to \mathbb{Z}[G]$, $g \mapsto g-1$, $g \in G$. Известно (см. [74]), что

$$E^{\infty}_{n,0}(G) = \gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G), \quad \overline{E}^{\,\infty}_{n,0}(G) = \mathfrak{g}^n/\mathfrak{g}^{n+1}, \qquad n \geqslant 1.$$

Некоторые детали, касающиеся этих спектральных последовательностей, можно найти в [74].

Получаем (см. [75]), что

$$E^1_{1,q}(G) = \overline{E}^{\,1}_{1,q}(G) = H_{q+1}(G), \qquad q \geqslant 0.$$

Приведенные спектральные последовательности задают фильтрации в гомологиях групп

$$H_{m+1}(G) = E^1_{1,m}(G) \supseteq E^2_{1,m}(G) \supseteq E^3_{1,m} \supseteq \cdots,$$
$$H_{m+1}(G) = \overline{E}^{\,1}_{1,m}(G) \supseteq \overline{E}^{\,2}_{1,m}(G) \supseteq \overline{E}^{\,3}_{1,m} \supseteq \cdots.$$

Можно заметить, что для $m = 1$ эти фильтрации оказываются в точности фильтрациями Дваера и Пасси–Штаммбаха соответственно, рассмотренными ранее.

Начальные члены. Пусть $1 \to R \to F \to G \to 1$ – некоторая короткая точная последовательность, где F – свободная группа и $\mathfrak{F} \to G$ – свободная симплициальная резольвента G с $F_0 = F$.

Будем использовать следующие стандартные обозначения:

$$R(0) = R, \qquad R(k+1) = [R(k), F], \quad k \geqslant 0,$$
$$\mathbf{r}(0) = (R-1)\mathbb{Z}[F], \qquad \mathbf{r}(k+1) = \mathfrak{f}\mathbf{r}(k) + \mathbf{r}(k)\mathfrak{f}, \quad k \geqslant 0.$$

Заметим, что для каждого $k \geqslant 1$ и $x \in R(k)$ имеем $1 - x \in \mathbf{r}(k)$. Так как лиевы функторы и универсальные обертывающие функторы сохраняют коэквалайзеры, прямые вычисления показывают, что

$$E^1_{n,0}(G) = \gamma_n(F)/R(n-1)\gamma_{n+1}(F), \qquad n \geqslant 1,$$
$$\overline{E}^{\,1}_{n,0}(G) = \mathfrak{f}^n/(\mathbf{r}(n-1) + \mathfrak{f}^{n+1}), \qquad n \geqslant 1,$$

и что гомоморфизм κ является мономорфизмом на нижнем уровне [74]:

$$\kappa^1_{n,0}\colon E^1_{n,0}(G) \hookrightarrow \overline{E}^{\,1}_{n,0}(G), \qquad n \geqslant 1. \tag{5.2.1}$$

Это влечет следующий результат Шогрена [76].

Теорема 5.2.1. *Для всех* $n \geqslant 1$

$$F \cap (\mathbf{r}(n-1) + \mathfrak{f}^n) = R(n-1)\gamma_n(F), \qquad n \geqslant 1.$$

Начальные члены спектральной последовательности $\overline{E}(G)$ могут быть описаны с использованием стандартных симплициальных аргументов: формулы Кюннета и эквивалентности Эйленберга–Зильбера. В частности, существует следующая точная последовательность:

$$0 \to (H_1(G) \otimes H_2(G))^{\oplus 2} \to \overline{E}^1_{2,1}(G) \to \mathrm{Tor}(H_1(G), H_1(G)) \to 0 \tag{5.2.2}$$

и, в общем,

$$0 \to T_n(G) \to \overline{E}^1_{n,1}(G) \to \mathrm{Tor}_1(\underbrace{H_1(G), \dots, H_1(G)}_{n \text{ членов}}) \to 0, \tag{5.2.3}$$

где

$$T_1(G) = H_2(G), \qquad T_{k+1}(G) = H_1(G) \otimes T_k(G) \oplus T_k(G) \otimes H_1(G), \quad k \geqslant 1,$$

и для абелевых групп $B_1, \dots, B_n$ группа $\mathrm{Tor}_i(B_1, \dots, B_n)$ обозначает i-е гомологии комплекса $P_1 \otimes \dots \otimes P_n$, где P_j – $\mathbb{Z}$-плоская резольвента B_j для $j = 1, \dots, n$. Естественно, имеем

$$\mathrm{Tor}_0(B_1, \dots, B_n) = B_0 \otimes \dots \otimes B_n, \qquad \mathrm{Tor}_i(B_1, \dots, B_n) = 0, \quad i \geqslant n.$$

Для описания начальных членов спектральной последовательности $E(G)$ необходима более сложная теория производных функторов от полиномиальных функторов. В квадратичном случае такая теория была построена Бауэсом и Пирашвили [73]; используя их методы, мы можем дать полное описание членов $E^1_{2,m}$, $m \geqslant 0$. Пусть X – симплициальная группа, свободная абелева в каждой размерности. Тогда существует [73; (4.1)] естественная точная последовательность градуированных абелевых групп

$$0 \to Sq^{\otimes}(\pi_*(X)) \to \pi_*(\wedge^2 X) \to Sq^{\star}(\pi_*(X))[-1] \to 0, \tag{5.2.4}$$

где $\pi_*(X)$ и $\pi_*(\wedge^2 X)$ – градуированные гомотопические группы X и $\wedge^2 X$ соответственно. Последовательность (5.2.4) представляет следующее функториальное описание члена $E^1_{2,1}$: существует короткая точная последовательность

$$0 \to H_1(G) \otimes H_2(G) \to E^1_{2,1}(G) \to \Omega(H_1(G)) \to 0. \tag{5.2.5}$$

Размерные факторы. Естественно, для каждого $n \geqslant 3$ и $1 \leqslant k \leqslant n-1$ имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
E^k_{n-k,1}(G) \arrow[r, "d^k_{n-k,1}"] \arrow[d, "\kappa^k_{n-k,1}"'] & E^k_{n,0}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa^k_{n,0}"'] & E^{k+1}_{n,0}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa^{k+1}_{n,0}"'] & 0 \\
\overline{E}^k_{n-k,1}(G) \arrow[r, "\overline{d}^k_{n-k,1}"] & \overline{E}^k_{n,0}(G) \arrow[r] & \overline{E}^{k+1}_{n,0}(G) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

которая принимает форму

$$\begin{tikzcd}
E^1_{n-1,1}(G) \arrow[r, "d^1_{n-1,1}"] \arrow[d, "\kappa^1_{n-1,1}"'] & E^1_{n,0}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa^1_{n,0}"'] & E^2_{n,0}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa^2_{n,0}"'] & 0 \\
\overline{E}^1_{n-1,1}(G) \arrow[r, "\overline{d}^1_{n-1,1}"] & \overline{E}^1_{n,0}(G) \arrow[r] & E^2_{n,0} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{5.2.6}$$

для $k = 1$ и

$$\begin{tikzcd}
E^{n-1}_{1,1}(G) \arrow[r, "d^{n-1}_{1,1}"] \arrow[d, "\kappa^{n-1}_{1,1}"'] & E^{n-1}_{n,0}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa^{n-1}_{n,0}"'] & \gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa^n_{n,0}"'] & 0 \\
\overline{E}^{n-1}_{1,1}(G) \arrow[r, "\overline{d}^{n-1}_{1,1}"] & \overline{E}^{n-1}_{n,0}(G) \arrow[r] & \mathfrak{g}^n/\mathfrak{g}^{n+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{5.2.7}$$

для $k = n-1$. Диаграммы (5.2.6) и (5.2.7) вместе с леммой о змее влекут следующие точные последовательности абелевых групп:

$$0 \to \ker(\kappa^2_{n,0}) \to \operatorname{coker}(\operatorname{im}(d^1_{n-1,1}) \to \operatorname{im}(\overline{d}^1_{n-1,1})) \to \operatorname{coker}(\kappa^1_{n,0}) \to \operatorname{coker}(\kappa^2_{n,0}) \to 0 \tag{5.2.8}$$

и

$$\begin{aligned} 0 &\to \ker\{\operatorname{im}(d^{n-1}_{1,1}) \to \operatorname{im}(\overline{d}^{n-1}_{1,1})\} \to \ker(\kappa^{n-1}_{n,0}) \to (\gamma_n(G) \cap D_{n+1}(G))/\gamma_{n+1}(G) \\ &\to \operatorname{coker}\{\operatorname{im}(d^{n-1}_{1,1}) \to \operatorname{im}(\overline{d}^{n-1}_{1,1})\} \to \operatorname{coker}(\kappa^{n-1}_{n,0}) \to \operatorname{coker}(\kappa^n_{n,0}) \to 0. \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Как результат получаем следующую диаграмму, которую будем использовать позже:

$$\begin{tikzcd} \ker(\kappa^2_{n,0}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \ker(\kappa^3_{n,0}) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \ker(\kappa^{n-1}_{n,0}) \arrow[d] \\ \operatorname{coker}(\operatorname{im}(d^1_{n-1,1}) \to \operatorname{im}(\overline{d}^1_{n-1,1})) & & & \frac{\gamma_n(G)\cap D_{n+1}(G)}{\gamma_{n+1}(G)} \end{tikzcd} \tag{5.2.10}$$

Естественно, отображение $\kappa^1_{n-1,1}$ может быть представлено в диаграмме

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_{n-1}(G) \arrow[r] & E^1_{n-1,1} \arrow[r] \arrow[d, "\kappa^1_{n-1,1}"'] & L_1L^n(G_{ab}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & T_{n-1}(G) \arrow[r] & \overline{E}^1_{n-1,1} \arrow[r] & L_1 \otimes^n (G_{ab}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

для некоторого функтора $K_{n-1}\colon \mathsf{Gr} \to \mathsf{Gr}$. Обозначим

$${}^1E^1_{n,0} = \operatorname{coker}(K_{n-1} \xrightarrow{d^1_{n-1,1}} E^1_{n,0}), \qquad {}^1\overline{E}^1_{n,0} = \operatorname{coker}(T_{n-1} \xrightarrow{\overline{d}^1_{n-1,1}} \overline{E}^1_{n,0}).$$

В этих обозначениях получаем следующую естественную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} L_1L^{n-1}(G_{ab}) \arrow[r, "{}^1d^1_{n-1,1}"] \arrow[d] & {}^1E^1_{n,0} \arrow[r] \arrow[d, "{}^1\kappa^1_{n,0}"'] & E^2_{n,0} \arrow[r] \arrow[d, "\kappa^2_{n,0}"'] & 0 \\ L_1 \otimes^{n-1} (G_{ab}) \arrow[r, "{}^1\overline{d}^1_{n-1,1}"] & {}^1\overline{E}^1_{n,0} \arrow[r] & \overline{E}^2_{n,0} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

где отображения ${}^1d^1_{n-1,1}$ и ${}^1\overline{d}^1_{n-1,1}$ индуцированы отображениями $d^1_{n-1,1}$ и $\overline{d}^1_{n-1,1}$ соответственно.

Определим функтор $S_n\colon \mathsf{Ab} \to \mathsf{Ab}$ как

$$S_n(A) = \operatorname{coker}(L^n(A) \to \otimes^n(A)), \qquad A \in \mathsf{Ab}.$$

Естественно, имеем $L_1S_n(A) = \operatorname{coker}(L_1L^n(A) \to L_1\otimes^n(A))$. В этих обозначениях лемма о змее влечет следующий аналог диаграммы (5.2.10):

$$
\begin{tikzcd}
\ker({}^1\kappa^1_{n,0}) \arrow[d] & & & \\
\ker(\kappa^2_{n,0}) \arrow[r] \arrow[dd] & \ker(\kappa^3_{n,0}) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \ker(\kappa^{n-1}_{n,0}) \arrow[d] \\
 & & V_{n-1}(G) \arrow[ull, dashed] \arrow[dl, hook] \arrow[d] & \frac{\gamma_n(G)\cap D_{n+1}(G)}{\gamma_{n+1}(G)} \arrow[dl, two heads] \\
\operatorname{coker}(\xi_{n-1}) \arrow[d] & L_1S_{n-1}(G_{ab}) \arrow[l, two heads] \arrow[dl] & \frac{\gamma_n(G)\cap D_{n+1}(G)}{\gamma_{n+1}(G).\operatorname{im}(\ker({}^1\kappa^1_{n,0}))} & \\
\operatorname{coker}({}^1\kappa^1_{n,0}) & & &
\end{tikzcd}
\tag{5.2.11}
$$

где $\xi_{n-1}\colon \operatorname{im}({}^1d^1_{n-1,1}) \to \operatorname{im}({}^1\overline{d}^1_{n-1,1})$ и $V_{n-1}(G)$ – ядро композиции естественных отображений $L_1S_{n-1}(G_{ab}) \to \operatorname{coker}(\xi) \to \operatorname{coker}({}^1\kappa^1_{n,0})$. Следовательно, для каждой группы G и $n \geqslant 3$ существует естественная подгруппа группы $L_1S_{n-1}(G_{ab})$, а именно $V_{n-1}(G)$, которая отображается канонически на фактор $\frac{\gamma_n(G)\cap D_{n+1}(G)}{\gamma_{n+1}(G).\operatorname{im}(\ker({}^1\kappa_{n,0}))}$. Обозначим это отображение как

$$v_n\colon V_{n-1}(G) \to \frac{\gamma_n(G)\cap D_{n+1}(G)}{\gamma_{n+1}(G).\operatorname{im}(\ker({}^1\kappa^1_{n,0}))}.$$

Замечание 5.2.1. Можно заметить, неформально говоря, что вклад функтора $L_1S_n(G_{ab})$ в структуру $(n+1)$-го размерного фактора уменьшается с ростом n.

Замечание 5.2.2. Отображение $\overline{d}^1_{n-1,1}\colon T_{n-1}(G) \to \overline{E}^1_{n,0}$ может быть описано, и точная последовательность (5.2.3) влечет, что

$$\operatorname{im}(\ker({}^1\kappa^1_{n,0})) = R\gamma_n(F) \cap (1 + (R\cap F' - 1)(n-2) + \mathfrak{f}^{n+1})/R\gamma_{n+1}(F).$$

В частности, $\operatorname{im}(\ker({}^1\kappa^1_{n,0})) = 0$, если $H_2(G) = 0$, по теореме 5.2.1.

Рассмотрим отображение v_n для случая $n = 3$. Отметим, что $L_1S_2(G_{ab}) = G_{ab} \overset{\wedge}{*} G_{ab}$. Нам понадобится следующий технический результат.

Теорема 5.2.2. *Если F – свободная группа и R – нормальная подгруппа в F, то*

$$F \cap (1 + \mathfrak{f}(R\cap F' - 1) + (R\cap F' - 1)\mathfrak{f} + \mathbf{r}(2) + \mathfrak{f}^4) = [R\cap F', F]\gamma_4(F),$$

где F' – производная подгруппа в F.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая

Лемма 5.2.1. *Пусть F – свободная группа с базисом $\{x_1, \ldots, x_m\}$, u – элемент $(F'-1)\mathfrak{f}$ такой, что*

$$w - 1 \equiv u + c.v \mod \mathfrak{f}^4$$

для некоторого $c > 0$ и $w \in \gamma_3(F)$, $v \in \mathfrak{f}^3$. Тогда

$$u \equiv c.v_1 \mod \mathfrak{f}^4,$$

где $v_1 \in (F'-1)\mathfrak{f}$.

Доказательство. Посмотрим на фактор $\mathfrak{f}^3/\mathfrak{f}^4$ как на свободную абелеву группу, изоморфную $F_{ab}^{\otimes 3}$ с базисом $\{x_i \otimes x_j \otimes x_k \mid i,j,k = 1,\dots,m\}$. По модулю $\mathfrak{f}^4$ группа $(F'-1)\mathfrak{f}$ порождается элементами

$$([x_i,x_j]-1)(x_k-1), \qquad i,j,k = 1,\dots,m.$$

Пусть

$$u \equiv \sum_{i,j,k} d_{i,j,k}([x_i,x_j]-1)(x_k-1) \bmod \mathfrak{f}^4.$$

Для данной тройки (i,j,k) сумма всех коэффициентов в u, которые дают вклад в $x_i \otimes x_j \otimes x_k$ (и их S_3-перестановок), должна делиться на c. Получаем в $\mathfrak{f}^3/\mathfrak{f}^4$

$$\begin{aligned}
([x_i,x_j]-1)(x_k-1) &\mapsto x_i \otimes x_j \otimes x_k - x_j \otimes x_i \otimes x_k,\\
([x_k,x_i]-1)(x_j-1) &\mapsto x_k \otimes x_i \otimes x_j - x_i \otimes x_k \otimes x_j,\\
([x_j,x_k]-1)(x_i-1) &\mapsto x_j \otimes x_k \otimes x_i - x_k \otimes x_j \otimes x_i,
\end{aligned}$$

и больше никакие члены не могут дать вклада в $x_i \otimes x_j \otimes x_k$ (и в перестановки). Очевидно, что только произведение коммутаторов вида $[x_i,x_j,x_k]$ и $[x_k,x_i,x_j]$ и различных их степеней могуть дать вклад в элемент w. Получаем

$$\begin{aligned}
1-[x_i,x_j,x_k]^{f_{i,j,k}} &\mapsto f_{i,j,k}(x_i \otimes x_j \otimes x_k - x_j \otimes x_i \otimes x_k + x_k \otimes x_j \otimes x_i - x_k \otimes x_i \otimes x_j),\\
1-[x_k,x_i,x_j]^{f_{k,i,j}} &\mapsto f_{k,i,j}(x_k \otimes x_i \otimes x_j - x_i \otimes x_k \otimes x_j + x_j \otimes x_i \otimes x_k - x_j \otimes x_k \otimes x_i).
\end{aligned}$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned}
d_{i,j,k}&(x_i \otimes x_j \otimes x_k - x_j \otimes x_i \otimes x_k) + d_{k,i,j}(x_k \otimes x_i \otimes x_j - x_i \otimes x_k \otimes x_j)\\
&\quad + d_{j,k,i}(x_j \otimes x_k \otimes x_i - x_k \otimes x_j \otimes x_i)\\
&\quad + f_{i,j,k}(x_i \otimes x_j \otimes x_k - x_j \otimes x_i \otimes x_k + x_k \otimes x_j \otimes x_i - x_k \otimes x_i \otimes x_j)\\
&\quad + f_{k,i,j}(x_k \otimes x_i \otimes x_j - x_i \otimes x_k \otimes x_j + x_j \otimes x_i \otimes x_k - x_j \otimes x_k \otimes x_i)\\
&= x_i \otimes x_j \otimes x_k(d_{i,j,k} + f_{i,j,k}) + x_j \otimes x_i \otimes x_k(-d_{i,j,k} - f_{i,j,k} + f_{k,i,j})\\
&\quad + x_k \otimes x_i \otimes x_j(d_{k,i,j} - f_{i,j,k} + f_{k,i,j}) + x_i \otimes x_k \otimes x_j(-d_{k,i,j} - f_{k,i,j})\\
&\quad + x_j \otimes x_k \otimes x_i(d_{j,k,i} - f_{k,i,j}) + x_k \otimes x_j \otimes x_i(-d_{j,k,i} + f_{i,j,k})\\
&= c.v(x_i,x_j,x_k)
\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

для некоторого элемента $v(x_i,x_j,x_k)$ из $\mathfrak{f}^3/\mathfrak{f}^4$. Сначала предположим, что все i, j, k различны. Тогда (5.2.12) влечет, что

$$\begin{gathered}
d_{i,j,k} + f_{i,j,k}, \qquad -d_{i,j,k} - f_{i,j,k} + f_{k,i,j}, \qquad d_{k,i,j} - f_{i,j,k} + f_{k,i,j},\\
-d_{k,i,j} - f_{k,i,j}, \qquad d_{j,k,i} - f_{k,i,j}, \qquad -d_{j,k,i} + f_{i,j,k}
\end{gathered}$$

должны делиться на c. Следовательно, все $d_{i,j,k}$, $d_{k,i,j}$, $d_{j,k,i}$, $f_{i,j,k}$, $f_{k,i,j}$ должны делиться на c.

Предположим, что $i = j$. Тогда мы все выражение сведем к элементу $d_{i,k,i}([x_i,x_k]-1)(x_i-1)$ и скобке $1-[x_i,x_k,x_i]^{f_{i,k,i}}$. Получаем

$$-f_{i,k,i}x_i \otimes x_i \otimes x_k + (2f_{i,k,i} + d_{i,k,i})x_i \otimes x_k \otimes x_i + (-f_{i,k,i} - d_{i,k,i})x_k \otimes x_i \otimes x_i = c.v(x_i,x_k)$$

и снова заключаем, что $d_{i,k,i}$ и $f_{i,k,i}$ должны делиться на c.

Теперь пусть $w \in \gamma_3(F)$ и
$$w - 1 \equiv u \bmod \mathfrak{f}^4,$$
где
$$u \in (R \cap F' - 1)\mathfrak{f} + \mathfrak{f}(R \cap F' - 1) + \mathfrak{r}(2).$$
Мы утверждаем, что
$$w = w_1 w_2 \bmod [R \cap F', F][R, F, F]\gamma_4(F),$$
так что
$$\begin{aligned} &w_1 - 1 \in (R \cap F' - 1)\mathfrak{f} + \mathfrak{f}(R \cap F' - 1) + \mathfrak{f}^4, \\ &w_2 - 1 \in \mathbf{r}(2) + \mathfrak{f}^4 \end{aligned}$$
и, таким образом, мы можем поделить проблему определения подгруппы
$$F \cap (1 + (R \cap F' - 1)\mathfrak{f} + \mathfrak{f}(R \cap F' - 1) + \mathbf{r}(2) + \mathfrak{f}^4)$$
на две части:

(i) определение подгруппы
$$F \cap (1 + (R \cap F' - 1)\mathfrak{f} + \mathfrak{f}(R \cap F' - 1) + \mathfrak{f}^4);$$

(ii) определение подгруппы
$$F \cap (1 + \mathbf{r}(2) + \mathfrak{f}^4).$$

Пусть $u = u_1 + u_2$, где
$$u_1 \in (R \cap F' - 1)\mathfrak{f} + \mathfrak{f}(R \cap F' - 1), \qquad u_2 \in \mathbf{r}(2).$$
Так как мы можем работать по модулю $[R \cap F', F]$, можно предположить, что
$$u_1 \in (R \cap F' - 1)\mathfrak{f}.$$
Теперь, используя (а по-сути повторяя) аргументы из [13; лемма 1.5, (B)], мы заключаем, что
$$u_2 \equiv e_m.v_2 \bmod \mathfrak{f}^4,$$
где v_2 имеет вхождение элемента x_m. Далее, по лемме 5.2.1 получаем, что $u_1 = e_m.v_3$, где v_3 содержит некоторое нетривиальное вхождение элемента x_m. Следовательно, получаем
$$u = e_m.v \bmod \mathfrak{f}^4,$$
где v – элемент из $(R \cap F' - 1)\mathfrak{f} + \mathfrak{f}(R \cap F' - 1) + \mathbf{r}(2)$. Так как u является лиевым элементом, v также является лиевым элементом, и мы заключаем, что
$$w \equiv w'^{e_m} \bmod [R \cap F', F][R, F, F]\gamma_4(F).$$
Теперь можно убрать все скобки из w' с вхождениями x_m и провести индукцию. Индукционный аргумент теперь влечет следующее: пусть $w \in \gamma_3(F)$ такое, что
$$w - 1 \in (R \cap F' - 1)\mathfrak{f} + \mathfrak{f}(R \cap F' - 1) + \mathbf{r}(2) + \mathfrak{f}^4;$$
тогда
$$w = w_1 w_2 \bmod [R \cap F', F][R, F, F]\gamma_4(F),$$
так что
$$\begin{aligned} &w_1 - 1 \in (R \cap F' - 1)\mathfrak{f} + \mathfrak{f}(R \cap F' - 1) + \mathfrak{f}^4, \\ &w_2 - 1 \in \mathbf{r}(2) + \mathfrak{f}^4 \end{aligned}$$
и теорема 5.2.2 следует.

5.3. Четвертая размерная подгруппа

Так как $D_4(G) \subseteq \gamma_3(G)$, размерный фактор $D_4(G)/\gamma_4(G)$ является в точности ядром отображения

$$\kappa^3_{3,0}\colon E^3_{3,0}(G) \to \overline{E}^3_{3,0}(G). \tag{5.3.1}$$

Для $n=3$ последовательность (5.2.9) приводит к последовательности

$$0 \to \ker(\operatorname{im}(d^2_{1,1}) \to \operatorname{im}(\overline{d}^2_{1,1})) \to \ker(\kappa^2_{3,0}) \to D_4(G)/\gamma_4(G) \to 1$$

для каждой группы G. Последовательность (5.2.8) принимает следующую форму:

$$0 \to \ker(\kappa^2_{3,0}) \to \operatorname{coker}(\eta) \to \operatorname{coker}(\kappa^1_{3,0}) \to \operatorname{coker}(\kappa^2_{3,0}) \to 0,$$

где $\eta\colon\ \operatorname{im}(d^1_{1,1}) \to \operatorname{im}(\overline{d}^1_{1,1})$. Из точных последовательностей (5.2.2) и (5.2.5) получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_1(G)\otimes H_2(G) \arrow[r] \arrow[d] & E^1_{2,1}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa^1_{2,1}"'] & \Omega(H_1(G)) \arrow[r] \arrow[d, "T"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (H_1(G)\otimes H_2(G))^{\oplus 2} \arrow[r] & \overline{E}^1_{2,1}(G) \arrow[r] & \operatorname{Tor}(H_1(G),H_1(G)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{5.3.2}$$

где T такое же, как в (5.1.2).

Каждый элемент $x \in H_2(G) = H_2(F/R)$ может быть представлен в виде

$$x \equiv \prod_{i=1}^{k}[f_1^{(i)}, f_2^{(i)}] \bmod \gamma_3(F)$$

с $\prod_{i=1}^{k}[f_1^{(i)}, f_2^{(i)}] \in R$. Тогда отображение $d^1_{1,1}$, ограниченное на компоненту $H_2(G)\otimes H_1(G)$, задается как

$$x\otimes \overline{g} \mapsto \prod_{i=1}^{k}[f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, g].[R,F,F]\gamma_4(F), \qquad x\in H_2(G), \quad \overline{g}\in G_{ab},$$

где $\overline{f}$ – образ элемента $f\in F$ в G_{ab}. С другой стороны, легко видеть, что отображение $\overline{d}^1_{1,1}$, ограниченное на $(H_2(G)\otimes H_1(G))^{\oplus 2}$, индуцируется отображением

$$(x\otimes\overline{g}_1, x\otimes\overline{g}_2) \mapsto \sum_{i=1}^{k}\overline{f}_1^{(i)}\otimes\overline{f}_2^{(i)}\otimes\overline{g}_1 + \sum_{i=1}^{k}\overline{g}_2\otimes\overline{f}_1^{(i)}\otimes\overline{f}_2^{(i)}, \qquad x\in H_2(G), \quad \overline{g}_1,\overline{g}_2\in G_{ab}.$$

Получаем следующие естественные диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_1(G)\otimes H_2(G) \arrow[r] \arrow[d] & E^1_{1,1} \arrow[r] \arrow[d, "d^1_{1,1}"'] & \Omega(H_1(G)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{[F,R\cap\gamma_2(F)]\gamma_4(F)}{[R,F,F]\gamma_4(F)} \arrow[r] & \frac{\gamma_3(F)}{[R,F,F]\gamma_4(F)} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{\gamma_3(F)}{[F,R\cap\gamma_2(F)]\gamma_4(F)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & E^2_{3,0} \arrow[r, "\simeq"] & E^2_{3,0} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (H_1(G)\otimes H_2(G))^{\oplus 2} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{E}^{\,1}_{1,1} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}^{\,1}_{1,1}"'] & \mathrm{Tor}(H_1(G),H_1(G)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{(R\cap\gamma_2(F)-1)(1)+\mathfrak{r}(2)+\mathfrak{f}^4}{\mathfrak{r}(2)+\mathfrak{f}^4} \arrow[r] & \frac{\mathfrak{f}^3}{\mathfrak{r}(2)+\mathfrak{f}^4} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{\mathfrak{f}^3}{(R\cap\gamma_2(F)-1)(1)+\mathfrak{r}(2)+\mathfrak{f}^4} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \overline{E}^{\,2}_{3,0} \arrow[r, "\simeq"] & \overline{E}^{\,2}_{3,0} &
\end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd}
\Omega(G_{ab}) \arrow[r, "{}^1d^1_{1,1}"] \arrow[d, "T"'] & \frac{\gamma_3(F)}{[R\cap\gamma_2(F),F]\gamma_4(F)} \arrow[r] \arrow[d, "{}^1\kappa^1_{3,0}"'] & E^2_{3,0}(F) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa^2_{3,0}"'] & 0 \\
\mathrm{Tor}(G_{ab},G_{ab}) \arrow[r, "{}^1\overline{d}^{\,1}_{1,1}"] & \frac{\mathfrak{f}^3}{(R\cap F'-1)(1)+\mathfrak{r}(2)+\mathfrak{f}^4} \arrow[r] & \overline{E}^{\,2}_{3,0}(F) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{5.3.3}$$

где ${}^1d^1_{1,1}$ и ${}^1\overline{d}^{\,1}_{1,1}$ индуцированы $d^1_{1,1}$ и $\overline{d}^{\,1}_{1,1}$ соответственно.

Теперь теорема 5.2.2 влечет следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{im}({}^1d^1_{1,1}) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "\eta'"'] & \frac{\gamma_3(F)}{[R\cap\gamma_2(F),F]\gamma_4(F)} \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook, "{}^1\kappa^1_{3,0}"'] & E^2_{3,0}(F) \arrow[d, "\kappa^2_{3,0}"'] \\
 & \mathrm{im}({}^1\overline{d}^{\,1}_{1,1}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \frac{\mathfrak{f}^3}{(R\cap F'-1)(1)+\mathfrak{r}(2)+\mathfrak{f}^4} \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \overline{E}^2_{3,0}(F) \\
\ker(\kappa^2_{3,0}) \arrow[r, hook] & \mathrm{coker}(\eta') \arrow[r] & \mathrm{coker}({}^1\kappa^1_{3,0}) & \\
 & L_1SP^2(G_{ab}) \arrow[u, two heads] \arrow[ur] & & \\
V_2(G) \arrow[uu, two heads] \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd} \tag{5.3.4}$$

где η' – отображение, индуцированное T.

Таким образом, для $n = 3$ диаграмма (5.2.11) имеет простую форму, и мы получаем следующее.

Теорема 5.3.1. *Существует естественная система мономорфизмов и эпиморфизмов*

$$\begin{tikzcd}
\ker(\kappa^2_{3,0}) \arrow[r, two heads] & D_4(G)/\gamma_4(G) \\
V_2(G) \arrow[u, two heads] \arrow[ur, two heads] \arrow[r, hook] & L_1SP^2(G_{ab})
\end{tikzcd}$$

Как немедленное следствие данного результата получаем различные условия, влекущие тривиальность четвертого размерного фактора данной группы G.

Следствие 5.3.1. *Если либо $V_2(G)$, либо $L_1SP^2(G_{ab})$ тривиальны, то $D_4(G) = \gamma_4(G)$.*

5.4. Пятая размерная подгруппа

Для $n=4$ диаграмма (5.2.11) приводит к следующей системе:

$$\begin{tikzcd}
 & \ker({}^1\kappa^1_{4,0}) \arrow[d] & & \\
 & \ker(\kappa^2_{4,0}) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(\kappa^3_{4,0}) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(\eta) \\
L_1S_3(G_{ab}) \arrow[r, two heads] & \operatorname{coker}(\xi_4) & \frac{\gamma_4(G)\cap D_5(G)}{\gamma_5(G)} \arrow[d] & \\
 & & \operatorname{coker}\{\operatorname{im}(d^3_{1,1}) \to \operatorname{im}(\overline{d}^3_{1,1})\} &
\end{tikzcd} \tag{5.4.1}$$

где $\eta\colon\ \operatorname{im}(d^2_{2,1}) \to \operatorname{im}(\overline{d}^2_{2,1})$.

Проверим вклад других производных функторов в размерные факторы. Получаем следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\ker({}^1d^1_{1,1}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Omega(G_{ab}) \arrow[r, "{}^1d^1_{1,1}"] \arrow[d, hook] & {}^1E^1_{3,0} \arrow[d] \\
\ker({}^1\overline{d}^1_{1,1}) \arrow[r] & \operatorname{Tor}(G_{ab}, G_{ab}) \arrow[r, "{}^1\overline{d}^1_{1,1}"] & {}^1\overline{E}^1_{3,0}
\end{tikzcd}$$

и естественные факторы

$$\begin{tikzcd}
H_3(G) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ker({}^1d^1_{1,1}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \overline{\ker({}^1d^1_{1,1})} \arrow[d, hook] \\
H_3(G) \arrow[r] & \ker({}^1\overline{d}^1_{1,1}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \overline{\ker({}^1\overline{d}^1_{1,1})} \arrow[d, two heads] \\
 & \ker({}^1\overline{d}^1_{1,1})/\ker({}^1d^1_{1,1}) \arrow[r, equal] & \overline{\ker({}^1\overline{d}^1_{1,1})}/\overline{\ker({}^1d^1_{1,1})}
\end{tikzcd}$$

Мы получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\ker({}^1d^1_{1,1})} \arrow[r, "d^2_{2,1}"] \arrow[d, hook] & E^2_{4,0} \arrow[d, "\kappa^2_{4,0}"'] \\
\overline{\ker({}^1\overline{d}^1_{1,1})} \arrow[r, "\overline{d}^2_{2,1}"] & \overline{E}^2_{4,0}
\end{tikzcd}$$

Аналогично диаграмме (5.3.3) имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\ker({}^1d^1_{1,1})} \arrow[r, "{}^1d^2_{2,1}"] \arrow[d, "T''"'] & \frac{\gamma_4(F)}{([R\cap\gamma_2(F),F]\cap\gamma_4(F))\gamma_5(F)} \arrow[r] \arrow[d, "{}^1\kappa^2_{4,0}"'] & E^3_{4,0}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa^2_{4,0}"'] & 0 \\
\overline{\ker({}^1\overline{d}^1_{1,1})} \arrow[r, "{}^1\overline{d}^2_{2,1}"] & \frac{\mathfrak{f}^4}{(R\cap F'-1)(1)\cap\mathfrak{f}^4+\mathfrak{r}(2)\cap\mathfrak{f}^4+\mathfrak{f}^5} \arrow[r] & \overline{E}^3_{4,0}(G) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{5.4.2}$$

где отображения ${}^1d^2_{2,1}$, ${}^1\overline{d}^2_{2,1}$, ${}^1\kappa^2_{4,0}$ и T'' индуцированы отображениями $d^2_{2,1}$, $\overline{d}^2_{2,1}$, $\kappa^2_{4,0}$ и T соответственно. Пусть

$$V(F,R) := F\cap(1+(R\cap F'-1)(1)\cap\mathfrak{f}^4+\mathbf{r}(2)\cap\mathfrak{f}^4+\mathfrak{f}^5).$$

Как приложение леммы о змее получаем точную последовательность

$$\frac{V(F,R)}{([R\cap\gamma_2(F),F]\cap\gamma_4(F))\gamma_5(F)} \to \ker(\kappa^3_{4,0}) \to \operatorname{coker}(\operatorname{im}({}^1d^2_{2,1}) \to \operatorname{im}({}^1\overline{d}^2_{2,1}))$$

с естественной системой мономорфизмов и эпиморфизмов:

$$\begin{tikzcd}
\ker({}^1d^1_{1,1})/\ker({}^1\overline{d}^1_{1,1}) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & G_{ab}\hat{*}G_{ab} \\
\overline{\ker({}^1d^1_{1,1})}/\overline{\ker({}^1\overline{d}^1_{1,1})} \arrow[r, two heads] & \operatorname{coker}(\operatorname{im}({}^1d^2_{2,1}) \to \operatorname{im}({}^1\overline{d}^2_{2,1}))
\end{tikzcd} \tag{5.4.3}$$

Мы собираем полученные диаграммы в одну (рис. 5.4.1). Здесь

$$W_1(F,R) = [R\cap F',F]\cap\gamma_4(F)\cap(1+\mathbf{r}(2)\cap\mathfrak{f}^4+\mathfrak{f}^5)\gamma_5(F),$$
$$W_2(F,R) = F\cap(1+(R\cap F'-1)(1)\cap\mathfrak{f}^4+\mathbf{r}(2)\cap\mathfrak{f}^4+\mathfrak{f}^5),$$
$$\eta_1\colon\ \operatorname{im}(d^3_{1,1}) \to \operatorname{im}(\overline{d}^3_{1,1}), \qquad \eta_2\colon\ \operatorname{im}({}^1d^2_{2,1}) \to \operatorname{im}({}^1\overline{d}^2_{2,1})$$

и $W_3(G)$ – ядро композиции естественных отображений

$$\ker({}^1d^1_{1,1})/\ker({}^1\overline{d}^1_{1,1}) \to \operatorname{coker}(\eta_2) \to \operatorname{coker}({}^1\kappa^2_{4,0}).$$

Предположим, что $H_2(G)=0$. Тогда $R\cap F'=[R,F]$, поэтому

$$(R\cap F'-1)(1) \subseteq \mathbf{r}(2),$$
$$W_1(F,R) = [F,R,R]\cap\gamma_4(F)\gamma_5(F)$$

и

$$\ker({}^1\kappa^1_{n,0}) = 0$$

для всех $n\geqslant 3$. Также в этом случае η_1 оказывается изоморфизмом. Следовательно, диаграмма на рис. 5.4.1) влечет следующую диаграмму с точной горизонтальной последовательностью:

$$\begin{tikzcd}
V_3(G) \arrow[d] & L_1SP^2(G_{ab}) & \ker({}^1d^1_{1,1})/\ker({}^1\overline{d}^1_{1,1}) \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
\ker(\kappa^2_{4,0}) \arrow[r] & \ker(\kappa^3_{4,0}) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(\eta_4) \\
 & \frac{\gamma_4(G)\cap D_5(G)}{\gamma_5(G)} &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \frac{W_1(F,R)}{[R,F,F]\cap\gamma_4(F)\gamma_5(F)} \arrow[dr, hook] & \ker({}^1\kappa^1_{4,0}) \arrow[d] & \\
 & & \ker(\kappa^2_{4,0}) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
V_3(G_{ab}) \arrow[urr, dashed] \arrow[dr, hook] & & & \frac{W_2(F,R)}{[R\cap F',F]\cap\gamma_4(F))\gamma_5(F)} \arrow[ddd, hook] \\
 & L_1S_3(G_{ab}) \arrow[r, two heads] \arrow[dr] & \operatorname{coker}(\xi_4) \arrow[d] & \\
 & & \operatorname{coker}({}^1\kappa^1_{4,0}) & \\
 & \operatorname{coker}(\eta_1) & \frac{D_5(G)\cap\gamma_4(G)}{\gamma_5(G)} \arrow[l] & \ker(\kappa^3_{4,0}) \arrow[l] \arrow[dd] \\
 & W_3(G) \arrow[urr, dashed] \arrow[dr, hook] & & \\
 & & \ker({}^1d^1_{1,1})/\ker({}^1\overline{d}^1_{1,1}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] \arrow[dr] & \operatorname{coker}(\eta_2) \arrow[d] \\
 & & L_1SP^2(G_{ab}) & \operatorname{coker}({}^1\kappa^2_{4,0}) \\
 & & \frac{\mathfrak{f}^4}{(R\cap F'-1)(1)\cap\mathfrak{f}^4+\mathfrak{r}(2)\cap\mathfrak{f}^4+\mathfrak{f}^5} \arrow[ur] & \\
 & \frac{\gamma_4(F)}{([R\cap F',F]\cap\gamma_4(F))\gamma_5(F)} \arrow[ur, "{}^1\kappa^2_{4,0}"] & &
\end{tikzcd}
$$

Рис. 5.4.1

Таким образом, в частности, имеем следующее.

Теорема 5.4.1. *Пусть G – группа с $H_2(G) = 0$, $L_1SP^2(G_{ab}) = L_1S_3(G_{ab}) = 0$. Тогда* $D_5(G) = \gamma_5(G)$.

Часть III
Гомотопические аспекты теории групп

Глава 6. Симплициальные методы в теории групп

Пусть $\mathcal{C}$ – некоторая категория. *Симплициальный объект* X_* в $\mathcal{C}$ – это семейство объектов $\{X_i\}_{i\geqslant 0}$, $X_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, вместе с двумя наборами морфизмов

$$d_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_q, X_{q-1}), \quad s_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_q, X_{q+1}), \qquad 0 \leqslant i \leqslant q,$$

называемых *отображениями граней* и *отображениями вырождений* соответственно, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} d_i d_j &= d_{j-1} d_i, && i < j,\\ s_i s_j 7 &= s_{j+1} s_i, && i \leqslant j,\\ d_i s_j &= s_{j-1} d_i, && i < j,\\ d_j s_j &= d_{j+1} s_j = \mathrm{id}, &&\\ d_i s_j &= s_j d_{i-1}, && i > j+1. \end{aligned} \tag{6.0.1}$$

Симплициальный морфизм $f\colon X_* \to Y_*$ представляет собой набор $f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_i)$, $i \geqslant 0$, морфизмов, согласованных с морфизмами граней и вырождения. Категорию симплициальных объектов в $\mathcal{C}$ будем обозначать через $\mathcal{SC}$.

Как основной пример рассмотрим порядковую категорию Δ, которая состоит из объектов

$$\mathrm{Ob}(\Delta) = \{[n] := \{0, 1, \ldots, n\}\}$$

и отображений, сохраняющих порядок $\{f\colon [n] \to [m]\}$, как элементов из $\mathrm{Hom}_\Delta([n],[m])$. В частности, существуют следующие морфизмы в данной категории, называемые *морфизмами граней* и *вырождений*:

$$\begin{aligned} &\delta_i\colon [n-1] \to [n], && 0 \leqslant i \leqslant n,\\ &\sigma_i\colon [n+1] \to [n], && 0 \leqslant i \leqslant n,\\ &\delta_i\colon \{0, 1, \ldots, n-1\} \to \{0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}, &&\\ &\sigma_i\colon \{0, 1, \ldots, n+1\} \to \{0, 1, \ldots, i, i, \ldots, n\}. && \end{aligned}$$

Несложно проверить, что морфизмы δ_i, σ_i удовлетворяют следующим *косимплициальным соотношениям*:

$$\begin{aligned} \delta_j \delta_i &= \delta_i \delta_{j-1}, && i < j,\\ \sigma_j \sigma_i &= \sigma_i \sigma_{j+1}, && i \leqslant j,\\ \sigma_j \delta_i &= \delta_i \sigma_{j-1}, && i < j,\\ \sigma_j \delta_j &= \sigma_j \delta_{j+1} = \mathrm{id}, &&\\ \sigma_j \delta_i &= \delta_{i-1} \sigma_j, && i > j+1. \end{aligned} \tag{6.0.2}$$

Более того, все элементы из $\mathrm{Hom}_\Delta(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ могут быть записаны как композиции этих морфизмов граней и вырождений. Отсюда следует, что симплициальный объект в категории $\mathcal{C}$ – это просто контравариантный функтор из категории Δ в $\mathcal{C}$, т.е.

$$\mathcal{SC} = \{\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\}.$$

Под симплициальной группой (соответственно кольцом, множеством и т.д.) мы понимаем симплициальный объект в категории групп (соответственно колец, множеств и т.д.).

Пусть X – симплициальное множество. Функтор геометрической реализации $|X|$ – это топологическое пространство, полученное из объединения

$$\bigcup_n (X_n \times \Delta_n)$$

(здесь множество X_n рассматривается с дискретной топологией) следующим отождествлением:

$$\begin{aligned} (d_i x, p) &\sim (x, e_i p), \qquad (x,p) \in X_n \times \Delta_{n-1},\\ (s_i x, p) &\sim (x, f_i p), \qquad (x,p) \in X_{n-1} \times \Delta_n. \end{aligned}$$

Данная конструкция задает функтор

$$|\cdot|\colon \mathcal{S}\mathsf{Set} \to \mathsf{Top}$$

из категории симплициальных объектов в категории Set множеств в категорию Top топологических пространств. Этот функтор может быть определен также как коуравниватель (коэквалайзер)

$$\coprod_{\phi\colon [n]\to[m]} (X_m \times \Delta_n) \rightrightarrows \coprod_n (X_n \times \Delta_n) \to |X|.$$

Пусть Δ_k – полная подкатегория категории Δ, состоящая из множеств мощности не больше $k+1$, $k \geqslant 0$. Тогда любой элемент из

$$\mathcal{S}_k\mathcal{C} := \{\Delta_k^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\}$$

называется *k-обрезанным симплициальным объектом в $\mathcal{C}$*. Естественно, для любого $k \geqslant 0$ имеем функтор

$$\mathrm{Tr}^k\colon \mathcal{S}\mathcal{C} \to \mathcal{S}_k\mathcal{C},$$

который “обрезает” сиплициальную группу на уровне k, т.е. забывает все члены симплициального объекта, которые возникают в размерностях, больших k. Известно, что в случае, когда категория $\mathcal{C}$ содержит конечные копределы, функтор Tr^k имеет левый сопряженный функтор sk^k, называемый функтором *k-скелета*. Аналогично, если $\mathcal{C}$ имеет конечные проективные пределы, Tr^k имеет правый сопряженный cosk^k, называемый функтором *k-коскелета*. Тогда функтор k-скелета может быть построен непосредственно с помощью итерационного процесса взятия так называемых симплициальных коядер. Мы остановимся на одном из простейших случаев функтора скелета, который понадобится в дальнейшем изложении.

Пример 6.0.1. Пусть F – свободная группа с порождающими $\{x_i\}_{i\in I}$ и R – ее нормальная подгруппа, порожденная как нормальная подгруппа множеством элементов $\{r_j\}_{j\in J}$. Рассмотрим свободное произведение $F_1 = F * F_R$, где F_R – свободная группа с базисом $\{y_j\}_{j\in J}$. Имеем следующие гомоморфизмы между свободными группами:

$$\begin{aligned} &d_0\colon F_1 \to F, \qquad x_i \mapsto x_i, \quad i \in I, \quad y_j \mapsto 1, \quad j \in J,\\ &d_1\colon F_1 \to F, \qquad x_i \mapsto x_i, \quad i \in I, \quad y_j \mapsto r_j, \quad j \in J,\\ &s_0\colon F \to F_1, \qquad x_i \mapsto x_i, \quad i \in I. \end{aligned}$$

Несложно увидеть, что для этих гомоморфизмов выполняются симплициальные соотношения и мы получаем 1-обрезанную симплициальную группу

$$S(X,\mathcal{R}) = F_1 \overset{d_0}{\underset{s_0}{\overset{\xrightarrow{d_1}}{\longrightarrow}}} F.$$

Опишем 1-скелет этой симплициальной группы. Имеем

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sk}^1 S(X,\mathcal{R})_0 = F = F(x_i,\, i\in I),\\
&\operatorname{sk}^1 S(X,\mathcal{R})_1 = F_1 = F(s_0(x_i), r_j,\, i\in I,\, j\in J),\\
&\operatorname{sk}^1 S(X,\mathcal{R})_2 = F(s_1s_0(x_i), s_0(r_j), s_1(r_j),\, i\in I,\, j\in J),\\
&\operatorname{sk}^1 S(X,\mathcal{R})_3 = F(s_2s_1s_0(x_i), s_1s_0(r_j), s_2s_1(r_j), s_2s_0(r_j),\, i\in I,\, j\in J),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

где для множества X через $F(X)$ обозначается свободная группа, порожденная X. Симплициальные гомоморфизмы в $\operatorname{sk}^1(S(X,\mathcal{R}))$ выписываются естественным образом.

Аналогично можно определить симплициальное кольцо Ли $\operatorname{sk}^1 S(X,\mathcal{R})$ для случая свободного кольца Ли F над $\mathbb{Z}$, порожденного множеством $\{x_i\}_{i\in I}$, и его идеала R, который является идеалом, порожденным множеством элементов $\{r_j\in F\}$, $j\in J$. Получаем, таким образом, 1-обрезанное симплициальное кольцо Ли $S(X,\mathcal{R})$ и его 1-скелет, рассматриваемый как симплициальное кольцо Ли.

Будем работать в основном в следующих категориях:

- Gr – категория групп;
- Lie – категория колец Ли над $\mathbb{Z}$;
- ${}_R\mathsf{Mod}$ – категория R-модулей для некоторого коммутативного кольца R с единицей.

Предположим, что $\mathcal{C}$ – одна из вышеперечисленных категорий. Для данного симплициального объекта $X\in\mathcal{SC}$ определим комплекс $(N_*(X),\overline{d}_*)$, называемый *комплексом Мура* следующим образом:

$$N_n(X) = \bigcap_{0\leqslant i<n} \ker(d_i\colon X_n\to X_{n-1}) \qquad (6.0.3)$$

и гомоморфизм $\overline{d}_n$ – это ограничение $d_n\colon X_n\to X_{n-1}$ на $N_n(X)$.

Гомотопические группы $\pi_i(X)$, $i\geqslant 0$, данного симплициального объекта $X_*\in\mathcal{SC}$ определяются как гомологии комплекса Мура:

$$\pi_i(X) := H_i(N_*(X),\overline{d}_*),\qquad i\geqslant 0. \qquad (6.0.4)$$

Несложно показать, что для $X\in\mathcal{SC}$ группа $\pi_i(X)$ является абелевой для $i\geqslant 1$.

Для данной симплициальной группы G обозначим через $Z_n(G)$ n-ю подгруппу цепей в G_n, т.е.

$$Z_n = \ker(\overline{d}_n) = \bigcap_{0\leqslant i\leqslant n} \ker(d_i),$$

и через $B_n(G)$ – n-ю подгруппу границ в G_n, т.е.

$$B_n = \operatorname{Im}(\overline{d}_{n+1}).$$

По определению получаем

$$\pi_n(G) = Z_n(G)/B_n(G),\qquad n\geqslant 0.$$

Несложно заметить, что для любой симплициальной группы G π_0-функтор совпадает с коуравнивателем:

$$\pi_0(G) = \operatorname{coeq}(G_1 \overset{d_0,d_1}{\rightrightarrows} G_0).$$

Аналогичный факт, естественно, имеет место и для симплициальных колец Ли или R-модулей.

Для данного элемента $f \in G_0$ существует симплициальный автоморфизм $F_f\colon G \to G$, определяемый как

$$F_f\colon x \mapsto (s_0^n f)^{-1} x s_0^n f, \qquad x \in G_n. \tag{6.0.5}$$

Пусть $f \in B_0(G)$ такое, что $f = d_1 f_1$, где $d_0 f_1 = 1$. Тогда

$$s_0^n d_1 f_1 = s_0^{n-1} d_2 s_0 f_1 = \cdots = d_{n+1} s_0^n f_1, \qquad n \geqslant 1,$$

и

$$d_i s_0^n f_1 = s_0 d_{i-1} s_0^{n-1} f_1 = \cdots = s_0^n d_0 f_1 = 1, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n,$$

поэтому

$$s_0^n f = s_0^n d_1 f_1 \in B_n(G).$$

Следовательно, отображение F_f определяет действие группы $\pi_0(G)$ на абелевой группе $\pi_n(G)$, $n \geqslant 1$, т.е. $\pi_n(G)$ может быть рассмотрено как $\mathbb{Z}[\pi_0(G)]$-модуль.

Вычисление $\pi_1(G)$ даже в случае простых симплициальной группы G может оказаться нетривиальным. Рассмотрим следующий пример.

Пример 6.0.2 [77]. Пусть G – симплициальная группа, у которой G_2 порождается вырожденными элементами, т.е.

$$G_2 = \langle s_0(G_1), s_1(G_1) \rangle. \tag{6.0.6}$$

Тогда

$$\operatorname{Im}(\overline{d}_2) = [\ker(d_1), \ker(d_2)]. \tag{6.0.7}$$

Итак, мы имеем

$$\pi_1(G) = \frac{\ker(d_0) \cap \ker(d_1)}{[\ker(d_0), \ker(d_1)]}. \tag{6.0.8}$$

В примере 6.0.1 условия (6.0.6) естественно выполняются для 1-скелета $\operatorname{sk}^1 S(X, \mathcal{R})$. Более того, имеет место выражение (6.0.8). Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} \ker(d_0) &= \langle y_j,\, j \in J \rangle^{F_1}, \\ \ker(d_1) &= \langle y_j r_j^{-1},\, j \in J \rangle^{F_1} \end{aligned}$$

и

$$\pi_1(\operatorname{sk}^1 S(X, \mathcal{R})) = \frac{\langle y_j,\, j \in J \rangle^{F_1} \cap \langle y_j r_j^{-1},\, j \in J \rangle^{F_1}}{[\langle y_j,\, j \in J \rangle^{F_1}, \langle y_j r_j^{-1},\, j \in J \rangle^{F_1}]}. \tag{6.0.9}$$

Действие $\pi_0(G)$ на $\pi_1(\operatorname{sk}^1 S(X, \mathcal{R}))$ задается посредством сопряжения:

$$fR \circ x[\ker(d_0), \ker(d_0)] = f^{-1} x f [\ker(d_0), \ker(d_1)], \qquad x \in \ker(d_0) \cap \ker(d_1), \quad x \in F(X).$$

В случае колец Ли имеет место аналогичный результат. Отметим для начала, что для симплициального кольца Ли G, в котором G_2 порождается вырожденными элементами, соотношение (6.0.7) также выполнено (теперь скобка $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ обозначает произведение в кольце Ли). Следовательно, для свободного кольца Ли F с порождающим множеством $\{x_i\}_{i \in I}$ и подмножеством $\{r_j \in F\}_{j \in J}$ имеем

$$\pi_1(\operatorname{sk}^1 S(X, \mathcal{R})) = \frac{(y_j,\, j \in J)F \cap (y_j - r_j,\, j \in J)F}{[(y_j,\, j \in J)F, (y_j - r_j,\, j \in J)F]}. \tag{6.0.10}$$

6.1. Гомотопические модули

Пусть
$$\mathcal{P} = (X, \varphi, \mathcal{R}) \tag{6.1.1}$$
– некоторое копредставление $F = F(X)$ группы G с базисом X, R – нормальная подгруппа в F, порожденная как нормальная подгруппа множеством $\mathcal{R}$. Тогда имеет место точная последовательность групп
$$1 \to R \to F \xrightarrow{\varphi} G \to 1.$$
Для данного копредставления (6.1.1) можно построить клеточную модель (6.1.1), называемую *стандартным 2-комплексом* $\mathcal{P}$, обозначаемым $K_{\mathcal{P}}$. При этом фундаментальная группа $\pi_1(K)$ оказывается изоморфной группе G и действует стандартным образом на гомотопической группе $\pi_2(K)$. Пусть $G = (X, \varphi, \mathcal{R})$ – некоторое копредставление группы G. Гомоморфизм $\varphi\colon F \to G$ индуцирует кольцевой гомоморфизм $\varphi^*\colon \mathbb{Z}[F] \to \mathbb{Z}[G]$. Переходя от $\mathbb{Z}[F]$ к $\mathbb{Z}[G]$ посредством гомоморфизма $\varphi^*\colon \mathbb{Z}[F] \to \mathbb{Z}[G]$, мы часто будем опускать обозначение φ^*.

Рассмотрим модуль $\mathbb{Z}[G]^{\oplus|X|}$ (соответственно $\mathbb{Z}[G]^{|\oplus\mathcal{R}|}$), а именно прямую сумму $|X|$ (соответственно $|\mathcal{R}|$) копий $\mathbb{Z}[G]$. Напомним, что $\mathbb{Z}[G]^{\oplus|X|} \simeq \mathfrak{f}/\mathfrak{f}\mathfrak{r}$, где $\mathfrak{f}$ – фундаментальный идеал в $\mathbb{Z}[F]$ и $\mathfrak{r}$ – ядро $\varphi^*\colon \mathbb{Z}[F] \to \mathbb{Z}[G]$. Определим
$$\kappa\colon \mathbb{Z}[G]^{\oplus|X|} \to \mathbb{Z}[G]$$
как
$$\kappa\colon (\alpha_x)_{x\in X} \mapsto \sum_{x\in X}(x-1)\alpha_x, \qquad \alpha_x \in \mathbb{Z}[G].$$
Отметим, что существует лишь конечное число ненулевых членов в последовательности $(\alpha_x) \in \mathbb{Z}[G]^{\oplus|X|}$, и, таким образом, сумма $\sum_{x\in X}(x-1)\alpha_x$ корректно определена. Определим
$$\tau\colon \mathbb{Z}[G]^{\oplus|\mathcal{R}|} \to \mathbb{Z}[G]^{\oplus|X|} \tag{6.1.2}$$
как
$$\tau\colon (\beta_r)_{r\in\mathcal{R}} \mapsto \sum_{r\in\mathcal{R}}(J_{rx}\beta_r)_{x\in X}, \qquad \beta_r \in \mathbb{Z}[G],$$
где J_{rx} – образ в $\mathbb{Z}[G]$ правой производной $\frac{\partial r}{\partial x}$, $r \in \mathcal{R}$, $x \in X$.

Второй гомотопический модуль $\pi_2(K)$ может быть рассмотрен как ядро отображения τ. Это впервые было отмечено Рейдемейстером [78]. Более формально, мы имеем следующее.

Теорема 6.1.1. *Существует точная последовательность $\mathbb{Z}[G]$-модулей*
$$0 \to \pi_2(K) \to \mathbb{Z}[G]^{\oplus|\mathcal{R}|} \xrightarrow{\tau} \mathbb{Z}[G]^{\oplus|X|} \xrightarrow{\kappa} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0, \tag{6.1.3}$$
где ε – отображение аугментации.

Пусть $\widetilde{K}$ – универсальное накрытие двумерного клеточного комплекса K. Тогда сингулярный цепной комплекс $\widetilde{K}$ дает следующую точную последовательность $\mathbb{Z}[\pi_1(K)]$-модулей:
$$0 \to H_2(\widetilde{K}) \to C_2(\widetilde{K}) \to C_1(\widetilde{K}) \to C_0(\widetilde{K}) \to \mathbb{Z} \to 0,$$
которая оказывается в точности последовательностью (6.1.3).

Отметим, что $\mathrm{im}(\tau)$ есть в точности модуль соотношений R/R', построенный из копредставления (6.1.1), а ограничение отображения
$$\kappa\colon R/R' \to \mathbb{Z}[G]^{\oplus|X|} \tag{6.1.4}$$

– это вложение Магнуса

$$\kappa\colon rR' \mapsto \sum_{x\in X}(x-1)\frac{\partial r}{\partial x}, \qquad r\in R;$$

таким образом, мы получаем следующую точную последовательность:

$$0 \to R/R' \xrightarrow{\kappa} \mathbb{Z}[G]^{\oplus |X|} \to \Delta(G) \to 0. \tag{6.1.5}$$

Последовательности. Существует наглядная интерпретация элементов второго гомотопического модуля стандартного комплекса в терминах так называемых последовательностей (см., к примеру, [79]). Пусть c_i, $i = 1,\dots,m$, – слова в F, являющиеся сопряженными к элементам из $\mathcal{R}$, т.е.

$$c_i = t_i^{\pm w_i}, \qquad t_i \in \mathcal{R}, \quad w_i \in F.$$

Тогда набор

$$c = (c_1,\dots,c_m) \tag{6.1.6}$$

называется *последовательностью*, если произведение $c_1\cdots c_m$ представляет собой тривиальный элемент в F. Для данной последовательности (6.1.6) определим ее обратную:

$$c^{-1} = (c_m^{-1},\dots,c_1).$$

Для элемента $w\in F$ его сопряженный c^w – это набор

$$c^w = (c_1^w,\dots,c_m^w),$$

который также является последовательностью.

Определим следующие операции в классе последовательностей, называемые *операциями Пейффера*:

(i) заменяем одно из w_i на слово, равное ему в F;

(ii) убераем два последовательных члена в последовательности, если одно из них оказывается обратным для другого;

(iii) вставляем два последовательных члена, если одно из них оказывается обратным другого;

(iv) заменяем два последовательных члена c_i, c_{i+1} членами c_{i+1}, $c_{i+1}^{-1}c_ic_{i+1}$;

(v) заменяем два последовательных члена c_i, c_{i+1} членами $c_ic_{i+1}c_i^{-1}$, c_i.

Две последовательности называются *эквивалентными*, если одна может быть получена из другой конечным числом операций Пейффера. Это определяет отношение эквивалентности на множестве последовательностей. Множество классов эквивалентности последовательностей для данного копредставления группы (6.1.1) обозначим через $E_{\mathcal{P}}$. Тогда $E_{\mathcal{P}}$ может быть рассмотрена как группа, в которой под операцией подразумевается приписывание двух последовательностей: для последовательностей c_1, c_2 и их классов эквивалентности $\langle c_1\rangle, \langle c_2\rangle \in E_{\mathcal{P}}$, $\langle c_1\rangle + \langle c_2\rangle = \langle c_1c_2\rangle$. Обратный элемент класса $\langle c\rangle$ – это $\langle c^{-1}\rangle$; он тривиален в $E_{\mathcal{P}}$, если является пустой последовательностью. Легко заметить, что группа $E_{\mathcal{P}}$ является абелевой. Для двух последовательностей $c = (c_1,\dots,c_m)$ и $d = (d_1,\dots,d_k)$ имеем

$$\langle cd\rangle = \langle (c_1,\dots,c_m,d_1,\dots,d_k)\rangle = \langle (d_1,\dots,d_k,c_1^{d_1\cdots d_m},\dots,c_m^{d_1\cdots d_m})\rangle$$

ввиду соотношения (iv). Так как $d_1\cdots d_m = 1$ в F, получаем

$$\langle cd\rangle = \langle (d_1,\dots,d_k,c_1,\dots,c_m)\rangle = \langle dc\rangle.$$

Более того, $E_{\mathcal{P}}$ – это $[F]$-модуль, в котором действие задано как

$$\langle c\rangle \circ f = \langle c^f\rangle, \qquad f\in F.$$

Легко увидеть, что

$$\langle c\rangle \circ r = \langle c\rangle, \qquad r \in R,$$

т.е. подгруппа R действует тривиально на $E_{\mathcal{P}}$. Чтобы это заметить, рассмотрим

$$r = r_1^{\pm v_1} \cdots r_k^{\pm v_k}, \qquad r_i \in \mathcal{R}, \quad v_i \in F.$$

Тогда для любой последовательности $c = (c_1, \ldots, c_m)$ по (ii), (iii), (iv) получаем

$$\begin{aligned}\langle (c_1, \ldots, c_m)\rangle &= \langle (c_1, \ldots, c_m, r_1^{\pm v_1}, \ldots, r_k^{\pm v_k}, r_k^{\mp v_k}, \ldots, r_1^{\mp v_1})\rangle \\ &= \langle (r_1^{\pm v_1}, \ldots, r_k^{\pm v_k}, c_1^r, \ldots, c_m^r, r_k^{\mp v_k}, \ldots, r_1^{\mp v_1})\rangle = \langle (c_1^r, \ldots, c_m^r)\rangle.\end{aligned}$$

Таким образом, $E_{\mathcal{P}}$ является $\mathbb{Z}[G]$-модулем.

Теперь несложно увидеть, что для данного копредставления $\mathcal{P}$ три следующие $\mathbb{Z}[G]$-модуля:

1) второй гомотопический модуль $\pi_2(K_{\mathcal{P}})$;
2) модуль последовательностей $E_{\mathcal{P}}$;
3) модуль $\pi_1(\operatorname{sk}^1 S(X, \mathcal{R}))$;

естественным образом изоморфны. Изоморфизм строится следующим образом. Пусть

$$\langle c\rangle = \langle (c_1^{\pm w_1}, \ldots, c_m^{\pm w_m})\rangle \in E_{\mathcal{P}}, \qquad c_i \in \mathcal{R}, \quad w_i \in F.$$

Для данных $r_j \in \mathcal{R}$, $j \in J$ пусть $w(c)_j = \pm w_{k_1} \cdots \pm w_{k_l}$, где $(r_j^{\pm w_{k_1}}, \ldots, r_j^{\pm w_{k_l}})$ – подпоследовательность в c с $c_{k_i} = r_j$. Определим

$$\psi_{\mathcal{P}} \colon E_{\mathcal{P}} \to \mathbb{Z}[G]^{\oplus |\mathcal{R}|}$$

как

$$\langle c\rangle \mapsto (\phi^*(w(c)_1), \ldots, \phi^*(w(c)_i), \ldots).$$

Несложно показать, что $\operatorname{im}(\psi) \subseteq \ker(\tau)$, где τ – отображение (6.1.2). Следовательно, ψ может быть рассмотрено как отображение

$$\psi \colon E_{\mathcal{P}} \to \pi_2(K_{\mathcal{P}}).$$

Это отображение задает изоморфизм $\mathbb{Z}[G]$-модулей $E_{\mathcal{P}}$ и $\pi_2(K_{\mathcal{P}})$.

Далее, имеем

$$\pi_1(\operatorname{sk}^1 S(X, \mathcal{R})) = \frac{\langle y_j,\, j \in J\rangle^{F_1} \cap \langle y_j r_j^{-1},\, j \in J\rangle^{F_1}}{[\langle y_j,\, j \in J\rangle^{F_1}, \langle y_j r_j^{-1},\, j \in J\rangle^{F_1}]}, \tag{6.1.7}$$

где $F_1 = F * F(y_j \mid j \in J)$. Пусть $f \in \langle y_j,\, j \in J\rangle^{F_1} \cap \langle y_j r_j^{-1},\, j \in J\rangle^{F_1}$ с естественной проекцией $\partial_0 \colon F_1 \to F$. Тогда f можно записать как

$$f = (y_{k_1} r_{k_1}^{-1})^{\pm u_1} \cdots (y_{k_m} r_{k_m}^{-1})^{\pm u_m}, \qquad u_i \in F_1.$$

Определим отображение

$$\xi \colon \operatorname{sk}^1(S(X, \mathcal{R})) \to E_{\mathcal{P}}$$

как

$$f[\langle y_j,\, j \in J\rangle^{F_1}, \langle y_j r_j^{-1},\, j \in J\rangle^{F_1}] \mapsto (r_{k_1}^{\pm \partial_0(u_1)}, \ldots, r_{k_m}^{\pm \partial_0(u_m)}). \tag{6.1.8}$$

Естественно, набор в (6.1.8) является последовательностью ввиду того, что $f \in \langle y_j \mid j \in J\rangle^{F_1}$. Несложно проверить, что ξ является изоморфизмом $\mathbb{Z}[G]$-модулей.

Замечание 6.1.1. Существуют разные способы определить второй гомотопический модуль для копредставления кольца Ли. Для свободного кольца Ли F над $\mathbb{Z}$ со множеством порождающих $X = \{x_i\}_{i\in I}$ и подмножеством $\mathcal{R} = \{r_j \in F\}_{j\in J}$ рассмотрим двусторонний идеал R, являющийся замыканием $\mathcal{R}$ в F. Второй гомотопический модуль представления $\langle x_i,\, i \in I \mid r_j,\, j \in J\rangle$ кольца Ли $L = F/R$ определяется как

$$\pi_1(\operatorname{sk}^1 S(X,\mathcal{R})) = \frac{(y_j,\, j\in J)F \cap (y_j - r_j,\, j \in J)F}{[(y_j,\, j\in J)F, (y_j - r_j,\, j\in J)F]}\,.$$

Второй гомотопический модуль является $U(L)$-модулем, где $U(L)$ универсальная обертывающая алгебра L.

Есть также иное определение второго гомотопического модуля с помощью производных Фокса. Пусть $A = A(x_i \mid i \in I)$ – свободная ассоциативная алгебра со множеством порождающих $\{x_i\}_{i\in I}$. Тогда A является универсальной обертывающей $U(F)$ для свободного кольца Ли F. Рассмотрим отображение аугментации $\varepsilon\colon A \to k$, определенное посредством $\varepsilon(x_i) = 0$, $i \in I$. Тогда каждый элемент $u \in \ker(\varepsilon)$ может быть единственным образом записан как

$$u = \sum_{i\in I} \frac{\partial u}{\partial x_i} x_i, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in A.$$

По аналогии с теоретико-групповым случаем элементы $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ могут быть названы *производными Фокса*. Расширим отображение $\frac{\partial}{\partial x_i}\colon A \to A$ посредством $\frac{\partial 1}{\partial x_i} = 0$, $i \in I$. По аналогии с отображением τ, определенным в (6.1.2), зададим

$$\tau^{\mathrm{lie}}\colon U(L)^{\oplus|\mathcal{R}|} \to U(L)^{\oplus|X|}$$

как

$$\tau^{\mathrm{lie}}\colon (\beta_j)_{j\in J} \mapsto \sum_{j\in J} (J^{\mathrm{lie}}_{ji}\beta_j)_{i\in I}, \qquad \beta_j \in U(L),$$

где J^{lie}_{ji} – образ в $U(L)$ элемента $\frac{\partial r_j}{\partial x_i} \in A$. Тогда несложно показать, что существует естественный изоморфизм $U(L)$-модулей

$$\ker(\tau^{\mathrm{lie}}) = \pi_1(\operatorname{sk}^1 S(X,\mathcal{R})).$$

6.2. $F[K]$-конструкция Милнора и теория групп

Для данного симплициального множества K с отмеченной точкой $F[K]$-конструкция – это симплициальная группа с $F[K]_n = F(K_n \setminus *)$, где $F(\,\cdot\,)$ – функтор, сопоставляющий множеству свободную группу, порожденную этим множеством. Имеет место следующая слабая гомотопическая эквивалентность:

$$|F[K]| \simeq \Omega\Sigma|K|.$$

К примеру, рассмотрим симплициальную окружность $S^1 = \Delta[1]/\partial\Delta[1]$:

$$S^1_0 = \{*\}, \quad S^1_1 = \{*,\sigma\}, \quad S^1_2 = \{*, s_0\sigma, s_1\sigma\}, \quad \ldots, \quad S^1_n = \{*, x_0, \ldots, x_n\},$$

где $x_i = s_n \cdots \widehat{s}_i \cdots s_0\sigma$. Тогда начальные члены $F[S^1]$-конструкции задаются как

$$\begin{aligned} F[S^1] &= 0,\\ F[S^1]_1 &= F(\sigma) \text{ – свободная абелева группа, порожденная } \sigma,\\ F[S^1]_2 &= F(s_0\sigma, s_1\sigma), \end{aligned}$$

$$F[S^1]_3 = F(s_i s_j \sigma \mid 0 \leqslant j \leqslant i \leqslant 2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Для данной симплициальной группы гомоморфизмы граней и вырождения записываются естественным образом. К примеру, первые нетривиальные гомоморфизмы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\partial_i \colon F[S^1]_2 \to F[S^1]_1, \qquad i = 0,1,2,\\
&\partial_0 \colon s_0\sigma \mapsto \sigma, \quad s_1\sigma \mapsto 1,\\
&\partial_1 \colon s_0\sigma \mapsto \sigma, \quad s_1\sigma \mapsto \sigma,\\
&\partial_2 \colon s_0\sigma \mapsto 1, \quad s_1\sigma \mapsto \sigma.
\end{aligned}$$

Симплициальная группа $F[S^1]$ позволяет задать гомотопические группы 2-мерной сферы $\pi_n(S^2)$ комбинаторно, в терминах свободных групп. Так как геометрическая реализация $F[S^1]$ слабо эквивалентна пространству петель ΩS^2, гомотопические группы $\pi_n(S^2)$ изоморфны гомологиям комплекса Мура симплициальной группы $F[S^1]$:

$$\pi_{n+1}(S^2) \simeq \mathcal{Z}_n(F[S^1])/\mathcal{B}_n(F[S^1]).$$

Здесь $\mathcal{Z}_n$ и $\mathcal{B}_n$ обозначают циклы и границы комплекса Мура.

Структура циклов и границ комплекса Мура симплициальной группы $F[S^1]$ может быть описана в терминах нормальных подгрупп в $F[S^1]$. Это было сделано Джи Ву [80]. Имеет место следующее комбинаторное описание групп 2-мерной сферы:

$$\pi_{n+1}(S^2) \cong \frac{\langle y_{-1}\rangle^F \cap \langle y_0\rangle^F \cap \dots \cap \langle y_{n-1}\rangle^F}{[[y_{-1}, y_0, \dots, y_{n-1}]]},$$

где F – свободная группа с порождающими $y_0, \dots, y_{n-1}$, $y_{-1} = (y_0 \dots y_{n-1})^{-1}$, подгруппа $[[y_{-1}, y_0, \dots, y_{n-1}]]$ – нормальное замыкание в F множества левонормированных коммутаторов

$$[z_1^{\varepsilon_1}, \dots, z_t^{\varepsilon_t}] \tag{6.2.1}$$

со свойством $\varepsilon_i = \pm 1$, $z_i \in \{y_{-1}, \dots, y_{n-1}\}$ и каждый элемент из $\{y_{-1}, \dots, y_{n-1}\}$ входит как минимум один раз в последовательность элементов z_i в (6.2.1).

Для данной свободной группы F и нормальных подгрупп

$$R_1, \dots, R_n \trianglelefteq F, \qquad n \geqslant 2,$$

рассмотрим факторгруппу

$$I_n(F, R_1, \dots, R_n) := \frac{R_1 \cap \dots \cap R_n}{\prod_{I \cup J = \{1,\dots,n\},\, I \cap J = \varnothing} [\bigcap_{i\in I} R_i, \bigcap_{j \in J} R_j]}. \tag{6.2.2}$$

Здесь $\bigcap$ обозначает пересечение подгрупп в свободной группе F, $\prod$ – произведение подгрупп. Заметим, что абелева группа I_n имеет естественную структуру $F/R_1 \cdots R_n$-модуля, где действие определено через сопряжение в F.

Вычисление абелевой группы I_n в целом весьма нетривиально. Заметим, что в специальном случае

$$F = \langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle, \qquad R_i = \langle x_i\rangle^F, \quad i = 1, \dots, n-1, \qquad R_n = \langle x_1 \dots x_{n-1}\rangle^F$$

стандартное коммутаторное исчисление (см. следствие 3.5 в [80]) приводит к

$$[[y_{-1}, y_0, \dots, y_{n-1}]] = \prod_{I \cup J = \{1,\dots,n+1\}} \Big[\bigcap_{i \in I} R_i, \bigcap_{j \in J} R_j\Big],$$

и, следовательно, мы имеем следующий изоморфизм:

$$I_n(F, R_1, \dots, R_n) = \pi_n(S^2).$$

Аналогично вышеприведенной конструкции можно рассмотреть симплициальный букет окружностей $K = S^1 \vee \dots \vee S^1$ и, как результат, получить симплициальную группу $F[K]$, геометрическая реализация которой слабо гомотопически эквивалентна пространству петель $\Omega(S^2 \vee \dots \vee S^2)$. Таким образом, получается комбинаторное описание гомотопических групп букетов 2-мерных сфер, также полученное Джи Ву [80]. Нас будет интересовать случай двух 2-мерных сфер. Пусть $n \geqslant 1$, F_{2n} – свободная группа с базисом $\{x_1, y_1, \dots, x_n, y_n\}$. Рассмотрим следующие нормальные подгруппы в F_{2n}:

$$R_i = \langle x_i, y_i \rangle^{F_{2n}}, \quad i = 1, \dots, n, \qquad R_{n+1} = \langle x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n \rangle^{F_{2n}}.$$

Из [80] следует, что для $n \geqslant 1$ имеет место следующий изоморфизм абелевых групп:

$$\pi_{n+1}(S^2 \vee S^2) \simeq I_{n+1}(F_{2n}, R_1, \dots, R_{n+1}), \tag{6.2.3}$$

где $S^2 \vee S^2$ – букет двух 2-мерных сфер.

6.3. π_3 некоторых двумерных комлексов

Категория $\mathcal{K}_n$. Для $n \geqslant 2$ категорию с объектами $\overline{K} = (K, K_1, \dots, K_n)$ обозначим через $\mathcal{K}_n$. Здесь K – двумерный клеточный комплекс, K_i, $i = 1, \dots, n$, – подкомплексы K такие, что $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$, и $K^1 = K_1 \cap \dots \cap K_n$. Морфизм в $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_n}(\overline{K}, \overline{L})$ для $\overline{K}, \overline{L} \in \mathcal{K}_n$ – это отображение

$$f \colon K^1 \to L^1$$

между 1-остовами K и L такое, что f может быть продолжено до отображения $\overline{f} \colon K \to L$ со свойством $\overline{f}(K_i) \subseteq L_i$, $i = 1, \dots, n$.

Обозначим через $\mathcal{R}_n$, $n \geqslant 2$, категорию с объектами $(F, R_1, \dots, R_n)$, где F – свободная группа и R_i – нормальные подгруппы в F. Морфизм в $\mathcal{R}_n$ между двумя объектами $(F, R_1, \dots, R_n)$ и $(F', R'_1, \dots, R'_n)$ – это гомоморфизм групп $g \colon F \to F'$ такой, что $g(R_i) \subseteq R'_i$, $i = 1, \dots, n$. Данная категория рассматривалась в [21].

Имеется естественный функтор между этими категориями

$$\mathcal{F}_n \colon \mathcal{K}_n \to \mathcal{R}_n,$$

определяемый как

$$\mathcal{F}_n \colon (K, K_1, \dots, K_n) \mapsto (\pi_1(K^1), R_1, \dots, R_n),$$

где $R_i = \ker\{\pi_1(K^1) \to \pi_1(K_i)\}$.

Для $n \geqslant 2$ определим функтор

$$I_n \colon \mathcal{R}_n \to \mathcal{A}b,$$

где $\mathcal{A}b$ – категория абелевых групп, посредством

$$I_n \colon \overline{R} = (F, R_1, \dots, R_n) \mapsto I_n(\overline{R}) := \frac{R_1 \cap \dots \cap R_n}{\prod_{I \cup J = \{1, \dots, n\},\, I \cap J = \varnothing} [\bigcap_{i \in I} R_i, \bigcap_{j \in J} R_j]}.$$

Естественно, для любого $\overline{R} \in \mathcal{R}_n$ абелева группа $I_n(\overline{R})$ имеет естественную структуру $F/R_1 \cdots R_n$-модуля, где действие группы определяется через сопряжение в F.

Сюръектия q и гипотеза о α_*. Рассмотрим двумерную сферу S^2, представленную как стандартный комплекс, построенный по следующему копредставлению тривиальной группы:

$$\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}^{-1} \cdots x_1^{-1} \rangle. \tag{6.3.1}$$

Это представление задает элемент $\overline{S}_n$ из $\mathcal{K}_n$:

$$\overline{S}_n = (S^2, L_1, \ldots, L_n), \tag{6.3.2}$$

где $L_i = \bigvee_{i=1}^{n-1} S^1 \cup e_i$ и e_i – двумерная клетка, соответствующая соотношению x_i, $i = 1, \ldots, n-1$, а e_n – клетка, соответствующая соотношению $x_{n-1}^{-1} \cdots x_1^{-1}$.

Предложение 6.3.1. *Для объекта $\overline{S}_n$ в $\mathcal{K}_n$ имеет место естественная для $\overline{K} \in \mathcal{K}_n$ сюръекция*

$$q\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{K}_n}(\overline{S}_n, \overline{K}) \twoheadrightarrow \pi_2(K)/(i_1(K_1) + \cdots + i_n(K_n)).$$

Для $\alpha \in \pi_n(S^2) = I_n\mathcal{F}_n(\overline{S}_n)$ мы, таким образом, получаем следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathcal{K}_n}(\overline{S}_n, \overline{K}) \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, "\alpha^*"'] & \pi_2(K)/(i_1\pi_2(K_1) + \cdots + i_n\pi_2(K_n)) \arrow[dl, dashed, "\alpha_*"'] \\
I_n(\mathcal{F}_n(\overline{K})) &
\end{tikzcd} \tag{6.3.3}$$

где $\alpha^*(f) = f_*(\alpha)$.

Гипотеза 6.3.1. *Для каждого $\alpha \in \pi_n(S^2)$ существует функция α_*, для которой диаграмма (6.3.3) коммутирует. Следовательно, α_* корректно определена и $q(f) = q(g)$ влечет $\alpha^*(f) = \alpha^*(g)$.*

Для данного двумерного комплекса K свободный скрещенный модуль

$$\partial\colon \pi_2(K, K^1) \to \pi_1(K^1)$$

может быть определен следующим образом. Группа $\pi_2(K, K^1)$ порождается множеством

$$\{e_\alpha^w \mid \alpha \text{ – двумерная клетка в } K,\ w \in \pi_1(K^1)\}$$

с соотношениями

$$\{e_\alpha^v e_\beta^w e_\alpha^{-v} e_\beta^{-u},\ u = v r_\alpha v^{-1} w\}, \tag{6.3.4}$$

где r_α – соответствующий элемент из $\pi_1(K^1)$ (см., например, [81]). Гомоморфизм ∂ определен посредством $\partial\colon e_\alpha^w \mapsto r_\alpha^w$. Следовательно, каждый элемент из $\ker(\partial) = \pi_2(K)$ может быть представлен как $e_{\alpha_1}^{\pm w_1} \cdots e_{\alpha_m}^{\pm w_m}$, так что $r_{\alpha_1}^{\pm w_1} \cdots r_{\alpha_m}^{\pm w_m}$ тривиально в $\pi_1(K^1)$.

Пусть $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{K}_n}(\overline{S}_n, \overline{K})$. Тогда имеет место гомоморфизм свободных групп $f\colon F_{n-1} := F(x_1, \ldots, x_n) \to \pi_1(K^1)$ такой, что

$$f(x_i) \in \ker\{\pi_1(K^1) \to \pi_i(K_i)\}, \qquad i = 1, \ldots, n-1, \tag{6.3.5}$$

и f может быть продолжен до гомоморфизма скрещенных модулей:

$$\begin{tikzcd}
\pi_2(S^2, \bigvee_{i=1}^{n-1} S^1) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f'"'] & F_{n-1} \arrow[d, "f"] \\
\pi_2(K, K^1) \arrow[r, "\partial_2"] & \pi_1(K^1)
\end{tikzcd} \tag{6.3.6}$$

Для данного гомоморфизма групп $f\colon F_{n-1} \to \pi_1(K^1)$ со свойством (6.3.5) необходимым и достаточным условием для существования (6.3.6) является

$$f(x_1 \cdots x_n) \subseteq R_n := \ker\{\pi_1(K^1) \to \pi_1(K)\}.$$

Для $\overline{K} = (K, K_1, \ldots, K_n) \in \mathcal{K}_n$ определим теперь каноническое отображение (забывания)

$$q\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{K}_n}(\overline{S}_n, \overline{K}) \to \pi_2(K)/(i_1\pi_2(K_1) + \ldots i_n\pi_2(K_n)),$$

которое переводит морфизм $\overline{S}^2 \to \overline{K}$ в отображение $S^2 \to K$. Здесь естественные отображения $i_j\colon \pi_2(K_j) \to K$ индуцируются вложениями $K_j \to K$. Используя язык скрещенных модулей, можем описать отображение q следующим образом. Обозначим через $\{s_1, \ldots, s_n\}$ множество 2-клеток в S^2, как в стандартном комплексе для копредставления (6.3.1). Тогда отображение f' определяет элементы $f'(s_\alpha) \in \pi_2(K, K^1)$. Заметим, что $\partial_1(s_1 \cdots s_n) = 1$ и элемент $s_1 \cdots s_n$ представляет порождающий $\pi_2(S^2)$. Поэтому диаграмма (6.3.6) коммутативна, $\partial_2(f'(s_1) \cdots f'(s_n)) = 1$ и элемент $f'(s_1) \cdots f'(s_n)$ представляет некоторый элемент из $\ker(\partial_2) = \pi_2(K)$, который есть в точности $q(f)$. Покажем, что это отображение не зависит от расширения (6.3.6). Предположим, что имеем некоторое другое расширение гомоморфизма f

$$\begin{tikzcd}
\pi_2(S^2, \bigvee_{i=1}^{n-1} S^1) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f''"'] & F_{n-1} \arrow[d, "f"] \\
\pi_2(K, K^1) \arrow[r, "\partial_2"] & \pi_1(K^1)
\end{tikzcd} \tag{6.3.7}$$

с $f''(s_j) \neq f'(s_j)$ как минимум для одного j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Получаем $\partial_2(f'(s_j)f''(s_j)^{-1}) = 1$, поэтому

$$f'(s_j)f''(s_j)^{-1} \in \operatorname{im}\{i_j\colon \pi_2(K_j) \to \pi_2(K)\}.$$

Следовательно, образы элементов $f'(s_1 \cdots s_n)$ и $f''(s_1 \cdots s_n)$ равны в факторгруппе

$$\pi_2(K)/(i_1\pi_2(K_1) + \cdots + i_n\pi_2(K_n))$$

и отображение q корректно определено.

Лемма 6.3.1. *Отображение q сюръективно.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму (6.3.7). Теперь пусть $c = e_{\alpha_1}^{\pm w_1} \cdots e_{\alpha_m}^{\pm w_m}$ – произвольный элемент из $\ker(\partial_2)$. Пронумеруем клетки K следующим образом: $e_{1,\alpha}, \ldots, e_{n,\alpha}$ с $e_{i,\alpha} \in K_i$, $i = 1, \ldots, m$. Естественно, множество соотношений (6.3.4) в $\pi_2(K, K^1)$ дает возможность представить элемент c в виде

$$c = \prod_* e_{1,*}^{\pm w_{1,*}} \cdots \prod_* e_{n,*}^{\pm w_{n,*}}$$

для некоторых $w_{i,*} \in \pi_1(K^1)$. Теперь определим отображение $f\colon F_{n-1} \to \pi_1(K^1)$ посредством $f(x_i) = \prod_* r_{i,*}^{\pm w_{n,*}}$. Тогда мы можем расширить его до $f'\colon \pi_2(S^2, \bigvee_{i=1}^{n-1} S^1) \to \pi_2(K, K^1)$ как $f'(s_i) = \prod_* r_{i,*}^{\pm w_{n,*}}$. Оно корректно, так как

$$\partial_1(f'(s_n)) = \partial_2(f'(s_1) \cdots f'(s_{n-1}))^{-1} = f(\partial_1(s_1 \cdots s_{n-1})^{-1}).$$

Гомотопический класс, соответствующий элементу $c \in \pi_2(K, K^1)$, совпадает с $q(f)$, и сюръективность q доказана.

6.4. Доказательство гипотезы 6.3.1 для $n = 2$ и $n = 3$

Для данного $\overline{K}$ выберем элементы $e_{i,\alpha} \in \pi_2(K, K^1)$, $i = 1, \ldots, n$, $\alpha \in A$, которые представляют двумерные клетки в K_i, $i = 1, \ldots, n$, с естественным свойством

$$\partial(e_{i,\alpha}) \in R_i,$$

где $R_i = \ker\{\pi_1(K^1) \to \pi_1(K_i)\}$, $i = 1, \ldots, n$, и нормальное замыкание множества $\{\partial(e_{i,\alpha}) \mid \alpha \in A\}$ в $\pi_1(K^1)$ равно R_i. Естественно, K гомотопически эквивалентно букету

$$K \simeq \bigvee_{j \in J} S^2 \vee K_{\mathcal{P}},$$

где $K_{\mathcal{P}}$ – стандартный двумерный комплекс, построенный по копредставлению

$$\langle X \mid \partial(e_{i,\alpha}),\, i = 1, \ldots, n,\, \alpha \in A \rangle,$$

X – базис $\pi_1(K^1)$. Получаем следующий естественный изоморфизм $\pi_1(K)$-модулей:

$$\pi_2(K)/(i_1\pi_2(K_1) + \cdots + i_n\pi_2(K_n)) \simeq \pi_2(K_{\mathcal{P}})/(i_1\pi_2(K_{\mathcal{P}_1}) + \cdots + i_n\pi_2(K_{\mathcal{P}_n})),$$

где $\mathcal{P}_i$ – следующее копредставление группы $\pi_1(K_i)$:

$$\langle X \mid \partial(e_{i,\alpha}),\, \alpha \in A \rangle$$

для $i = 1, \ldots, n$.

Пусть $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_n}(\overline{S}_n, \overline{K})$. Можем записать

$$f(x_i) = r_1^{(i)\,\pm w_{1,i}} \cdots r_{k_i}^{(i)\,\pm w_{k_i,i}}, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$
$$f(x_1 \cdots x_n) = r_1^{(n)\,\pm w_{1,n}} \cdots r_{k_n}^{(n)\,\pm w_{k_n,n}}$$

для некоторых $r_j^{(i)} \in \{\partial(e_{i,\alpha}),\, \alpha \in A\}$ и $w_{j,i} \in \pi_1(K^1)$. Аналогично для $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_n}(\overline{S}_n, \overline{K})$

$$g(x_i) = r_1'^{(i)\,\pm w'_{1,i}} \cdots r_{k'_i}'^{(i)\,\pm w'_{k'_i,i}}, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$
$$g(x_1 \cdots x_n) = r_1'^{(n)\,\pm w'_{1,n}} \cdots r_{k'_n}'^{(n')\,\pm w'_{k'_n,n}}.$$

Следующая лемма получается напрямую из определения отображения q и описания второго гомотопического модуля в терминах последовательностей.

Лемма 6.4.1. *С учетом вышеприведенных обозначений $q(f) = q(g)$ тогда и только тогда, когда последовательность*

$$(r_1^{(1)\,\pm w_{1,1}}, \ldots, r_{k_n}^{(n)\,\pm w_{k_n,n}}, r_{k'_n}'^{(n')\,\mp w'_{k'_n,n}}, \ldots, r_1'^{(1)\,\mp w'_{1,1}})$$

эквивалентна последовательности вида

$$(s_1^{(1)}, \ldots, s_{l_1}^{(1)}, \ldots, s_1^{(n)}, \ldots, s_{l_n}^{(n)})$$

с $s_j^{(i)} \in \{\partial(e_{i,\alpha})^{\pm w},\, w \in \pi_1(K^1)\}$ такими, что $s_1^{(i)} \cdots s_{l_i}^{(i)}$ тривиальны в $\pi_1(K^1)$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Пусть имеем $(K, K_1, K_2) \in \mathcal{K}_2$. Тогда $\pi_1(K)$-модуль $\pi_2(K)/(i_1\pi_2(K_1) + i_2\pi_2(K_2))$ может быть отождествлен с модулем последовательностей вида

$$(c_1, \dots, c_m), \qquad c_j \in \{\partial(c_{i,\alpha})^w,\, w \in \pi_1(K^1),\, \alpha \in A,\, i = 1, 2\} \tag{6.4.1}$$

по модулю последовательностей вида $(c_1, \dots, c_{m_1}, c_{m_1+1}, \dots, c_m)$ с

$$c_1, \dots, c_{m_1} \in \{\partial(c_{1,\alpha})^w,\, w \in \pi_1(K^1)\}, \qquad c_{m_1+1}, \dots, c_m \in \{\partial(c_{2,\alpha})^w,\, w \in \pi_1(K^1)\}$$

и

$$c_1 \dots c_{m_1} = c_{m_1+1} \dots c_m = 1$$

в $\pi_1(K^1)$.

Каждая последовательность (6.4.1) с помощью операций Пайффера типа (iv) может быть приведена к последовательности вида $(c_1, \dots, c_{m_1}, c_{m_1+1}, \dots, c_m)$ с

$$c_1, \dots, c_{m_1} \in \{\partial(c_{1,\alpha})^w,\, w \in \pi_1(K^1)\}, \qquad c_{m_1+1}, \dots, c_m \in \{\partial(c_{2,\alpha})^w,\, w \in \pi_1(K^1)\}.$$

Для самого простого случая $n = 2$ рассмотрим двумерную сферу S^2 как стандартный комплекс, построенный по копредставлению тривиальной группы

$$\langle x \mid x, x^{-1} \rangle.$$

Тогда

$$I_2(\overline{S}^2) = \frac{\langle x \rangle \cap \langle x^{-1} \rangle}{[\langle x \rangle, \langle x \rangle]} \simeq \mathbb{Z},$$

где x – порождающий бесконечной циклической группы. Для порождающего $x \in \pi_2(S^2)$ отображение

$$\Lambda_x \colon \pi_2(K)/(i_1\pi_2(K_1) + i_2\pi_2(K_2)) \to \frac{R_1 \cap R_2}{[R_1, R_2]}$$

задается в приведенных выше обозначениях как

$$\Lambda_x \colon (c_1, \dots, c_{m_1}, c_{m_1+1}, \dots, c_m) \mapsto c_1 \cdots c_{m_1}.[R_1, R_2].$$

Отметим сначала, что Λ_x – гомоморфизм $\pi_1(K)$-модулей, $\pi_1(K) = \pi_1(K^1)/R_1R_2$. Во-вторых, Λ_x является эпиморфизмом. Тот факт, что Λ_x является мономорфизмом, не сложен (см. теорему 1.3 [79]). Следовательно, мы имеем следующую точную последовательность $\pi_1(K)$-модулей, полученную Гутиеррезом и Ратклиффом [44]:

$$0 \to i_1\pi_2(K_1) + i_2\pi_2(K_2) \xrightarrow{\alpha} \pi_2(K) \to \frac{R_1 \cap R_2}{[R_1, R_2]} \to 0. \tag{6.4.2}$$

Теорема 6.4.1. *Гипотеза 6.3.1 верна для* $n = 3$.

Доказательство. В данном случае мы смотрим на двумерную сферу S^2 как на стандартный комплекс, построенный по копредставлению тривиальной группы

$$\langle x_1, x_2 \mid x_1, x_2, x_2^{-1}x_1^{-1} \rangle$$

с

$$I_3(\mathcal{F}_3(\overline{S}^2)) = I_3(F(x_1, x_2), \langle x_1 \rangle^{F(x_1,x_2)}, \langle x_2 \rangle^{F(x_1,x_2)}, \langle x_2^{-1}x_1^{-1} \rangle^{F(x_1,x_2)}) \simeq \mathbb{Z}.$$

Порождающий данной циклической группы – это коммутатор $[x_1, x_2]$.

Пусть $\overline{K} = (K, K_1, K_2, K_3) \in \mathcal{K}_3$. Обозначим $F = \pi_1(K^1)$. Введем также обозначение для следующих множеств слов в F: $\mathcal{R}_i = \{\partial(e_{i,\alpha},\, \alpha \in A\}$, $i = 1, 2, 3$. Под $\mathcal{R}_i^F$ мы понимаем множество $\{r^w,\, r \in \mathcal{R}_i,\, w \in F\}$. Тогда $\pi_1(K)$-модуль $\pi_2(K)/(i_1\pi_2(K_1) + i_2\pi_2(K_2) + i_3\pi_2(K_3))$ может быть отождествлен с модулем последовательностей

$$c = (c_1, \dots, c_m), \qquad c_j \in \mathcal{R}_1^F \cup \mathcal{R}_2^F \cup \mathcal{R}_3^F \tag{6.4.3}$$

по модулю последовательностей вида

$$(c_1, \dots, c_{m_1}, c_{m_1+1}, \dots, c_{m_2}, c_{m_2+1}, \dots, c_m) \tag{6.4.4}$$

с

$$c_1, \dots, c_{m_1} \in \mathcal{R}_1^F, \qquad c_{m_1+1}, \dots, c_m \in \mathcal{R}_2^F, \qquad c_{m_2+1}, \dots, c_m \in \mathcal{R}_3^F$$

и

$$c_1 \cdots c_{m_1} = c_{m_1+1} \cdots c_{m_2} = c_{m_2+1} \cdots c_m = 1 \tag{6.4.5}$$

в F.

Разделим последовательность (6.4.3) на три упорядоченные подпоследовательности

$$(c_{r_1}, \dots, c_{r_l}), \qquad (c_{s_1}, \dots, c_{s_k}), \qquad (c_{t_1}, \dots, c_{t_n}), \tag{6.4.6}$$

где

$$c_{r_i} \in \mathcal{R}_1^F, \quad i = 1, \dots, l, \qquad c_{s_i} \in \mathcal{R}_2^F, \quad i = 1, \dots, k, \qquad c_{t_i} \in \mathcal{R}_3^F, \quad i = 1, \dots, h,$$

и

$$\begin{gathered} r_1 < r_2 < \dots < r_l, \qquad s_1 < s_2 < \dots < s_k, \qquad t_1 < t_2 < \dots < t_h, \\ \{r_1, \dots, r_l\} \cup \{s_1, \dots, s_k\} \cup \{t_1, \dots, t_h\} = \{1, \dots, m\}. \end{gathered}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \overline{c}_i &= c_{r_i}, && i = 1, \dots, l, \\ \overline{c}_{l+i} &= c_{s_i}^{\prod_{r_j > s_i} c_{r_j}}, && i = 1, \dots, k, \\ \overline{c}_{l+k+i} &= c_{t_1}^{(\prod_{r_z > t_i} c_{r_z}) \prod_{s_j > t_1} c_{s_j}^{\prod_{r_z > s_j} c_{r_z}}}, && i = 1, \dots, h. \end{aligned}$$

Естественно, имеем

$$\overline{c}_1, \dots, \overline{c}_l \in R_1, \qquad \overline{c}_{l+1}, \dots, \overline{c}_{l+k} \in R_2, \qquad \overline{c}_{l+k+1}, \dots, \overline{c}_{l+k+h} \in R_3,$$

и последовательность

$$(\overline{c}_1, \dots, \overline{c}_{l+k+h}) \tag{6.4.7}$$

получается из последовательности (6.4.3) применением операций Пайффера типа (iv). На первом шаге мы перегоняем все члены c_{r_i} на левую сторону последовательности. На втором шаге мы заменяем все члены c_{s_i} между членами c_{r_i} и c_{t_i} и получаем последовательность (6.4.7). Обозначим

$$\begin{aligned} r_c &:= \overline{c}_1 \cdots \overline{c}_l \in R_1, \\ s_c &:= \overline{c}_{l+1} \cdots \overline{c}_{l+k} \in R_2, \\ t_c &:= \overline{c}_{l+k+1} \cdots \overline{c}_{l+k+h} \in R_3. \end{aligned}$$

В этих обозначениях для порождающего $x := [x_1, x_2]$ группы $I_3(\mathcal{F}_3(\overline{S}^2))$ построим отображение

$$\Lambda_x \colon \pi_2(K)/(i_1\pi_2(K_1) + i_2\pi_2(K_2) + i_3\pi_2(K_3)) \to \frac{R_1 \cap R_2 \cap R_3}{[R_1, R_2 \cap R_3][R_2, R_3 \cap R_1][R_3, R_1 \cap R_2]}, \tag{6.4.8}$$

где $F=\pi_1(K^1)$, $R_i=\ker\{F\to\pi_1(K_i)\}$, $i=1,2,3$, посредством

$$\Lambda_x\colon (c_1,\dots,c_m)\mapsto [r_c,s_c].[R_1,R_2\cap R_3][R_2,R_3\cap R_1][R_3,R_1\cap R_2].$$

Так как $r_cs_ct_c=1$ в F, получаем $[r_c,s_c]\in R_1\cap R_2\cap R_3$.

Теперь покажем, что отображение Λ_x корректно определено. Пусть c' – последовательность, эквивалентная последовательности c. Определяя элементы $r_{c'}$, $s_{c'}$, $t_{c'}$, как и раньше, нам надо показать, что

$$[r_c,s_c]\equiv[r_{c'},s_{c'}]\,\mathrm{mod}[R_1,R_2\cap R_3][R_2,R_3\cap R_1][R_3,R_1\cap R_2]. \tag{6.4.9}$$

Так как отображение Λ_x определенно тривиально для любой последовательности вида (6.4.4) с условиями (6.4.5), эквивалентность (6.4.9) необходима и достаточна для корректности определения отображения Λ_x.

Сначала заметим, что последовательности c и c' отличаются операциями Пайффера типа (ii) или (iii), эквивалентность (6.4.9) выполняется. Остается проверить операции (iv) и (v). Так как операция (v) – обратная к операции (iv), достаточно доказать эквивалентность (6.4.9) для случая, когда c' получается из c одной операцией Пайффера типа (iv):

$$c'_i=c_{i+1},\quad c'_{i+1}=c_{i+1}^{-1}c_ic_{i+1},\quad c'_j=c_j,\qquad j\neq i,i+1,$$

для некоторого $1\leqslant i<m$.

Случаи

$$i,i+1\in\{r_1,\dots,r_l\},\qquad i,i+1\in\{s_1,\dots,s_k\},\qquad i,i+1\in\{t_1,\dots,t_h\}$$

тривиальны. В этих случаях $r_c=r_{c'}$, $s_c=s_{c'}$, поэтому требуемая эквивалентность (6.4.9) следует. Если $i+1\in\{r_1,\dots,r_l\}$, то доказывать нечего, так как определение r_c, s_c использует процесс итерации таких операций. Если $i\in\{t_1,\dots,t_h\}$ или $i+1\in\{t_1,\dots,t_h\}$, то получаем

$$[r_c,s_c]\equiv[r_{c'},s_{c'}]\,\mathrm{mod}[R_1,R_2\cap R_3][R_2,R_3\cap R_1].$$

Единственным нетривиальным случаем оказывается $i\in\{r_1,\dots,r_l\}$, $i+1\in\{s_1,\dots,s_k\}$. Тогда $[r_{c'},s_{c'}]=[r_{c''},s_{c''}]$, где последовательность c'' получается применением операции (iv) к последовательности c':

$$c''_i=c_{i+1}^{-1}c_ic_{i+1},\qquad c''_{i+1}=c_{i+1}^{-1}c_i^{-1}c_{i+1}c_ic_{i+1}.$$

Пусть $c_i=c_{r_j}$, $c_{i+1}=c_{s_e}$. Повторяя операцию (iv), мы можем привести последовательности c и c'' к виду

$$r_2=r_1+1,\quad \dots,\quad r_{j-1}=r_{j-2}+1,\quad r_{j+2}=r_{j+1}+1,\quad \dots,\quad r_l=r_{l-1}+1$$

без изменения $[r_c,s_c]$ и $[r_{c''},s_{c''}]$. Теперь мы можем образовать тройки слов в F

$$\mathcal{R}'_1=\mathcal{R}_1\cup\{c_{r_1}\dots c_{r_{j-1}},c_{j+1}\dots c_l\},\qquad \mathcal{R}'_2=\mathcal{R}_2,\qquad \mathcal{R}'_3=\mathcal{R}_3.$$

Естественно, эта тройка согласована с тройкой нормальных подгрупп R_1, R_2, R_3, и мы можем рассмотреть новые последовательности для троек слов из $\mathcal{R}'_1\cup\mathcal{R}'_2\cup\mathcal{R}'_3$, полученных приписыванием элементов $c_{r_1},\dots,c_{r_{j-1}}$ и $c_{r_{j+1}},\dots,c_{r_l}$:

$$c'''=(*,\dots,*,c_{r_1}\cdots c_{r_{j-1}},*,\dots,*,c_{r_{j+1}}\cdots c_{r_l},*,\dots,*).$$

Легко видеть, что

$$[r_c,s_c]=[r_{c'''},s_{c'''}]$$

в F. Поэтому мы всегда можем предположить, что $l = 3$, $c_{r_2} = c_i$, и свести любой случай к этому, используя описанный метод. В данных обозначениях мы имеем последовательности

$$c = (*, \dots, *, c_{r_1}, *, \dots, *, c_{r_2}, c_{s_e}, *, \dots, *, c_{r_3}, *, \dots, *),$$
$$c'' = (*, \dots, *, c_{r_1}, *, \dots, *, c_{r_2}^{c_{s_e}}, c_{s_e}^{c_{r_2}c_{s_e}}, *, \dots, *, c_{r_3}, *, \dots, *).$$

Получаем следующее:

$$[r_c, s_c] = [c_{r_1}c_{r_2}c_{r_3}, S_1],$$
$$[r_{c'''}, s_{c'''}] = [c_{r_1}c_{r_2}^{c_{s_e}}c_{r_3}, S_2],$$

где

$$S_1 = \Big(\prod_{s_j<r_1} c_{s_j}^{c_{r_1}c_{r_2}c_{r_3}}\Big)\Big(\prod_{r_1<s_j<s_e} c_{s_j}^{c_{r_2}c_{r_3}}\Big)\cdot c_{s_e}^{c_{r_3}}\cdot\Big(\prod_{s_e<s_j<r_3} c_{s_j}^{c_{r_3}}\Big)\Big(\prod_{r_3<s_j} c_{s_j}\Big),$$
$$S_2 = \Big(\prod_{s_j<r_1} c_{s_j}^{c_{r_1}c_{r_2}^{c_{s_e}}c_{r_3}}\Big)\Big(\prod_{r_1<s_j<s_e} c_{s_j}^{c_{r_2}^{c_{s_e}}c_{r_3}}\Big)\cdot c_{s_e}^{c_{r_2}c_{s_e}c_{r_3}}\cdot\Big(\prod_{s_e<s_j<r_3} c_{s_j}^{c_{r_3}}\Big)\Big(\prod_{r_3<s_j} c_{s_j}\Big).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}
[c_{r_1}c_{r_2}^{c_{s_e}}c_{r_3}, S_2] &= c_{r_3}^{-1}c_{r_2}^{-1}[c_{r_2}^{-1}, c_{s_e}]c_{r_1}^{-1}S_2^{-1}c_{r_1}c_{r_2}^{c_{s_e}}c_{r_3}S_2\\
&= c_{r_3}^{-1}c_{r_2}^{-1}[c_{r_2}^{-1}, c_{s_e}]c_{r_1}^{-1}S_2^{-1}c_{r_3}^{-1}c_{r_2}^{-c_{s_e}}c_{r_2}^{c_{s_e}}c_{r_3}c_{r_1}c_{r_2}^{c_{s_e}}c_{r_3}S_2\\
&\equiv c_{r_3}^{-1}c_{r_2}^{-1}c_{r_1}^{-1}S_2^{-1}c_{r_3}^{-1}c_{r_2}^{-c_{s_e}}[c_{r_2}^{-1}, c_{s_e}]c_{r_2}^{c_{s_e}}c_{r_3}c_{r_1}c_{r_2}^{c_{s_e}}c_{r_3}S_2 \bmod [R_3, R_1\cap R_2],
\end{aligned}$$

так как $S_2^{-1}c_{r_3}^{-1}c_{r_2}^{-c_{s_e}} \in R_3$, $[c_{r_2}^{-1}, c_{s_e}] \in R_1\cap R_2$. Следовательно,

$$[c_{r_1}c_{r_2}^{c_{s_e}}c_{r_3}, S_2] \equiv c_{r_3}^{-1}c_{r_2}^{-1}c_{r_1}^{-1}S_2^{-1}c_{r_3}^{-1}c_{r_2}^{-c_{s_e}}c_{r_2}c_{r_3}c_{r_1}c_{r_2}^{c_{s_e}}c_{r_3}S_2 \bmod [R_3, R_1\cap R_2].$$

Однако

$$c_{r_1}c_{r_2}^{c_{s_e}}c_{r_3}S_2 = c_{r_1}c_{r_2}c_{r_3}S_1 \in R_3,$$

поэтому $S_2 = c_{r_3}^{-1}c_{r_2}^{-c_{s_e}}c_{r_2}c_{r_3}S_1$, и мы получаем

$$[c_{r_1}c_{r_2}^{c_{s_e}}c_{r_3}, S_2] \equiv [c_{r_1}c_{r_2}c_{r_3}, S_1] \bmod [R_3, R_1\cap R_2].$$

Поэтому у нас всегда имеется требуемая эквивалентность (6.4.9), и мы доказали, что отображение Λ_x корректно определено.

Для порождающего $x \in \pi_3(S^2)$ обозначим через Λ_x композицию естественной проекции $\pi_2(K) \to \pi_2(K)/(i_1\pi_2(K_1) + i_2\pi_2(K_2) + i_3\pi_2(K_3))$ и отображения

$$\Lambda\colon \pi_2(K) \to \frac{R_1\cap R_2\cap R_3}{[R_1, R_2\cap R_3][R_2, R_3\cap R_1][R_3, R_1\cap R_2]}.$$

Предложение 6.4.1. *Пусть*

$$b \in i_{12}\pi_2(K_1\cup K_2) + i_{13}\pi_2(K_1\cup K_3) + i_{23}\pi_2(K_2\cup K_3) \subseteq \pi_2(K),$$

где отображения i_{12}, i_{13}, i_{23} индуцированы вложениями

$$i_{12}\colon K_1\cup K_2 \to K, \qquad i_{13}\colon K_1\cup K_3 \to K, \qquad i_{23}\colon K_2\cup K_3 \to K.$$

Тогда $\Lambda(a+b) = \Lambda(a)$ для всех $a \in \pi_2(K)$.

Доказательство. Пусть a – некоторый элемент из $\pi_2(K)$, представленный последовательностью (6.4.6), а b – элемент из $i_{12}(K_1 \cup K_2) \subseteq \pi_2(K)$, представленный последовательностью $(d_1, \dots, d_{l'}, e_1, \dots, e_{k'})$ с $d_i \in \mathcal{R}_1^F$, $e_i \in \mathcal{R}_2^F$. Элемент $a+b$ может быть представлен последовательностью

$$c(a+b) = (c_{r_1}, \dots, c_{r_l}, d_1, \dots, d_{l'}, c_{s_1}^{d_1 \dots d_{l'}}, \dots, c_{s_k}^{d_1 \dots d_{l'}}, e_1, \dots, e_{k'}, f_1, \dots, f_{h'})$$

с $f_1, \dots, f_{h'} \in \mathcal{R}_3^F$. Обозначим

$$a_1 = c_{r_1} \cdots c_{r_l}, \qquad a_2 = d_1 \cdots d_{l'}, \qquad b_1 = c_{s_1} \cdots c_{s_k}, \qquad b_2 = e_1 \cdots e_{k'}.$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}[][a_1a_2, b_1^{a_2}b_2] &= a_2^{-1}a_1^{-1}b_2^{-1}a_2^{-1}b_1^{-1}a_2a_1b_1a_2b_2 \\ &\equiv a_1^{-1}b_2^{-1}a_2^{-1}b_1^{-1}a_1b_1a_2b_2 \equiv a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1 \bmod [R_3, R_1 \cap R_2],\end{aligned}$$

так как $a_2 \in R_1 \cap R_2$, $a_1^{-1}b_2^{-1}a_2^{-1}b_1^{-1} \in R_3$, $a_2b_2 = 1$. Тогда $\Lambda(a+b) = \Lambda(a)$.

В этом случае $b \in i_{13}\pi_2(K_1 \cup K_3) + i_{23}\pi_2(K_2 \cup K_3)$ и очевидно, что элементы, представляющие $\Lambda(a+b)$ и $\Lambda(a)$, равны по модулю $[R_1, R_2 \cap R_3][R_2, R_3 \cap R_1]$, поэтому $\Lambda(a+b) = \Lambda(a)$.

Следующий пример показывает, что отображение Λ не всегда является сюрьективным.

Пример 6.4.1. Пусть F – свободная группа с порождающими x_1, x_2. Рассмотрим следующее множество слов:

$$\mathcal{R}_1 = \{x_1\}, \qquad \mathcal{R}_2 = \{[x_1, x_2]\}, \qquad \mathcal{R}_3 = \{[x_1, x_2, x_1]\}.$$

Обозначая через R_1, R_2, R_3 нормальные замыкания множеств $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ соответственно, получаем

$$[R_1, R_2 \cap R_3], [R_2, R_3 \cap R_1], [R_3, R_1 \cap R_2] \subseteq \gamma_4(F).$$

Однако

$$[x_1, x_2, x_1] \in (R_1 \cap R_2 \cap R_3) \setminus \gamma_4(F),$$

так как $[x_1, x_2, x_1]$ является базисным коммутатором длины 3 в F. Предположим, что

$$\Lambda(x) = [x_1, x_2, x_3].[R_1, R_2 \cap R_3][R_2, R_3 \cap R_1][R_3, R_1 \cap R_2]$$

для некоторого элемента x второго гомотопического модуля стандартного комплекса, построенного по копредставлению группы

$$\langle x_1, x_2 \mid x_1, [x_1, x_2], [x_1, x_2, x_1] \rangle.$$

Мы получаем

$$[x_1, x_2, x_1] \equiv [r, s] \bmod \gamma_4(F) \tag{6.4.10}$$

для некоторых $r \in R_1$, $s \in R_2$ таких, что

$$rs \in R_3. \tag{6.4.11}$$

Отднако условие (6.4.11) влечет, что $r \in \gamma_2(F)$, так как $s \in \gamma_2(F)$. Следовательно, $[r, s] \in \gamma_4(F)$ и эквивалентность (6.4.10) невозможна. Поэтому отображение Λ не является сюрьективным.

Теорема 6.4.2. *Отображение Λ является однородным квадратичным отображением, т.е.*

$$\Lambda(a, b) = \Lambda(a+b) - \Lambda(a) - \Lambda(b)$$

билинейно и $\Lambda(x) = \Lambda(-x)$ для всех $a, b, x \in \pi_2(K)$.

Доказательство. Для $x, y \in \pi_2(K_{\langle X|\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2\cup\mathcal{R}_3\rangle})$ рассмотрим скрещенный эффект

$$\Lambda(a,b) = \Lambda(a+b) - \Lambda(a) - \Lambda(b) \in \frac{R_1 \cap R_2 \cap R_3}{[R_1, R_2 \cap R_3][R_2, R_3 \cap R_1][R_3, R_1 \cap R_2]}.$$

Представим элементы a, b последовательностями

$$c(a) = (c_1, \dots, c_m), \qquad c(b) = (c'_1, \dots, c'_{m'}).$$

Рассмотрим соответствующие деления последовательностей $c(a)$ и $c(b)$:

$$\{c_{r_1}, \dots, c_{r_l}\} \cup \{c_{s_1}, \dots, c_{s_k}\} \cup \{c_{t_1}, \dots, c_{t_n}\} = \{c_1, \dots, c_m\},$$
$$\{c'_{\overline{r}_1}, \dots, c'_{\overline{r}_{l'}}\} \cup \{c'_{\overline{s}_1}, \dots, c'_{\overline{s}_{k'}}\} \cup \{c'_{\overline{t}_1}, \dots, c'_{\overline{t}_{n'}}\} = \{c'_1, \dots, c'_m\}$$

с $c_{r_i}, c'_{\overline{r}_i} \in \mathcal{R}_1^F$, $c_{s_i}, c'_{\overline{s}_i} \in \mathcal{R}_2^F$, $c_{t_i}, c'_{\overline{t}_i} \in \mathcal{R}_3^F$. Рассмотрим теперь индуцированное деление последовательности $c(a+b) = (c_1, \dots, c_m, c'_1, \dots, c'_{m'})$, которое представляет элемент $a+b \in \pi_2(K_{\langle X|\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2\cup\mathcal{R}_3\rangle})$:

$$\{c_{r_1}, \dots, c_{r_l}, c'_{\overline{r}_1}, \dots, c'_{\overline{r}_{l'}}\} \cup \{c_{s_1}, \dots, c_{s_k}, c'_{\overline{s}_1}, \dots c'_{\overline{s}_{k'}}\} \cup \{c_{t_1}, \dots, c_{t_n}, c'_{\overline{t}_1}, \dots, c'_{\overline{t}_{n'}}\}.$$

Для описания функтора $\Lambda(a,b)$, применяя операцию Пейффера (iv) к последовательностям $c(a)$ и $c(b)$, мы можем привести общий случай к случаю $l = 1$, $k = 1$, $l' = 1$, $k' = 1$ с $r_1 < s_1$, $\overline{r}_1 < \overline{s}_1$. Обозначим $x_1 = c_{r_1}$, $y_1 = c_{s_1}$, $x_2 = c'_{\overline{r}_1}$, $y_2 = c'_{\overline{s}_1}$. Тогда имеем

$$\Lambda(a) = [x_1, y_1], \qquad \Lambda(b) = [x_2, y_2], \qquad \Lambda(a+b) = [x_1x_2, y_1^{x_2}y_2].$$

Получаем

$$\begin{aligned}\Lambda(a+b) &= [x_1, y_2]^{x_2}[x_2, y_2][x_1, y_1^{x_2}]^{x_2y_2}[x_2, y_1^{x_2}]^{y_2}\\ &\equiv [x_1, y_2]^{x_2}[x_2, y_2][x_1, y_1^{x_2}][x_2, y_1] \operatorname{mod}[R_3, R_1 \cap R_2]\\ &\equiv [x_1, y_2]^{x_2}[x_2, y_2]x_1^{-1}x_2^{-1}y_1^{-1}x_2x_1y_1 \operatorname{mod}[R_3, R_1 \cap R_2]\\ &\equiv [x_1, y_2]^{x_2}[x_2, y_2][x_2, y_1]^{x_1}[x_1, y_1] \operatorname{mod}[R_3, R_1 \cap R_2].\end{aligned}$$

Так как $x_1y_1, x_2y_2 \in R_3$,

$$\begin{aligned}\Lambda(a,b) = \Lambda(a+b) - \Lambda(a) - \Lambda(b) &\equiv [x_1, y_2]^{x_2}[x_2, y_1]^{x_1} \operatorname{mod}[R_3, R_1 \cap R_2]\\ &\equiv [x_1, y_2]^{y_2^{-1}}[x_2, y_1]^{y_1^{-1}} \operatorname{mod}[R_3, R_1 \cap R_2]\\ &\equiv [y_2^{-1}, x_1][y_1^{-1}, x_2] \operatorname{mod}[R_3, R_1 \cap R_2].\end{aligned}$$

Теперь покажем билинейность функтора $\Lambda(*,*)$, т.е. то, что

$$\Lambda(a+b, d) = \Lambda(a, c) + \Lambda(b, d), \tag{6.4.12}$$
$$\Lambda(a, b+d) = \Lambda(a, b) + \Lambda(a, d) \tag{6.4.13}$$

для любых элементов $a, b, d \in \pi_2(K_{\langle X|\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2\cup\mathcal{R}_3\rangle})$. Пусть $c(a)$, $c(b)$ и $c(d)$ – последовательности, представляющие элементы a, b и d соответственно. Снова без потери общности можем считать, что эти элементы представимы последовательностями с одним элементом из каждого класса $\mathcal{R}_i$. Обозначим соответствующие пары как $x_1, y_1 \subset c(a)$ (теоретико-множественное вложение означает, что x_1, y_1 являются элементами последовательности $c(a)$), $x_2, y_2 \subset c(b)$, $x_3, y_3 \subset c(d)$. В этих обозначениях, работая по модулю $[R_1, R_2 \cap R_3][R_2, R_3 \cap R_1][R_3, R_1 \cap R_2]$, получаем

$$\begin{aligned}\Lambda(a+b, d) &\equiv [y_3^{-1}, x_1x_2][y_2^{-1}y_1^{-x_2}, x_3]\\ &\equiv [y_3^{-1}, x_2][y_3^{-1}, x_1]^{x_2}[y_2^{-1}, x_3]^{y_1^{-x_2}}[y_1^{-x_2}, x_3]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv [y_3^{-1}, x_2]x_2^{-1}y_3x_1^{-1}y_3x_1y_1x_2y_2x_3^{-1}y_2^{-1}x_2^{-1}y_1^{-1}x_2x_3\\
&\equiv [y_3^{-1}, x_2]x_2^{-1}y_3x_1^{-1}y_3x_1y_1(x_2y_2x_3^{-1}y_2^{-1}x_2^{-1}x_3)x_3^{-1}y_1^{-1}x_2x_3\\
&\equiv [y_3^{-1}, x_2]x_2^{-1}(x_2y_2x_3^{-1}y_2^{-1}x_2^{-1}x_3)y_3x_1^{-1}y_3x_1y_1x_3^{-1}y_1^{-1}x_2x_3\\
&\equiv [y_3^{-1}, x_2][y_2^{-1}, x_3]x_3^{-1}x_2^{-1}x_3y_3x_1^{-1}y_3x_1y_1x_3^{-1}y_1^{-1}x_2x_3\\
&\equiv [y_3^{-1}, x_2][y_2^{-1}, x_3]x_3^{-1}x_2^{-1}x_3[y_3^{-1}, x_1][y_1^{-1}, x_3]x_3^{-1}x_2x_3\\
&\equiv [y_3^{-1}, x_2][y_2^{-1}, x_3][y_3^{-1}, x_1][y_1^{-1}, x_3]\\
&\equiv \Lambda(a,d)+\Lambda(b,d),
\end{aligned}
$$

так как $[y_3^{-1}, x_1][y_1^{-1}, x_3] \in R_2 \cap R_3$, и (6.4.12) следует. Равенство (6.4.13) доказывается аналогично.

Теперь докажем, что $\Lambda(-x) = \Lambda(x)$. Естественно, можем предположить, что наша последовательность представляет элемент $x \in \pi_2(K)$, имеющий форму

$$(r_1, s_1, t_1)$$

с $r_1 \in \mathcal{R}_1$, $s_1 \in \mathcal{R}_2$, $t_1 \in \mathcal{R}_3$. Обратная последовательность, которая представляет элемент $-x$, имеет вид

$$(t_1^{-1}, s_1^{-1}, r_1^{-1}).$$

Получаем

$$\Lambda(-x) = [r_1^{-1}, s_1^{-r_1^{-1}}] = [s_1^{-1}, r_1] = [r_1, s_1]^{s_1^{-1}} \equiv [r_1, s_1] \equiv \Lambda(x) \operatorname{mod}[R_2, R_3 \cap R_1].$$

Теорема 6.4.3. *Функция Λ индуцирует гомоморфизм $F/R_1R_2R_3$-модулей*

$$\overline{\Lambda}\colon \pi_3(K) \to \frac{R_1 \cap R_2 \cap R_3}{[R_1, R_2 \cap R_3][R_2, R_3 \cap R_1][R_3, R_1 \cap R_2]}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \pi_2(K_{\langle X \mid \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3\rangle})$. Представим x последовательностью

$$c(x) = (c_1, \dots, c_m).$$

Пусть задан элемент $f \in \pi_1(K)$. Представим его как смешанный класс $f = w.R_1R_2R_3$ для некоторого элемента $w \in F$. Элемент $f \circ x \in \pi_2(K_{\langle X \mid \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3\rangle})$ может быть представлен последовательностью

$$c(x)^w = (c_1^w, \dots, c_m^w).$$

Из определения $\Lambda(x)$ непосредственно следует, что

$$\Lambda(f \circ x) \equiv \Lambda(x)^w \operatorname{mod}[R_1, R_2 \cap R_3][R_2, R_3 \cap R_1][R_3, R_1 \cap R_2].$$

Так как $\pi_3(K) = \Gamma\pi_2(K)$, получаем требуемый гомоморфизм $F/R_1R_2R_3$-модулей благодаря теореме 6.4.2.

Пример 6.4.2. Для двумерной сферы S^2, естественно, Λ определяет изоморфизм:

$$\overline{\Lambda}\colon \pi_3(S^2) \to I_3(\mathcal{F}_3(\overline{S}_3))$$

с $\overline{S}_3 \in \mathcal{K}_3$, определенным в (6.3.2).

Пример 6.4.3. Рассмотрим копредставление

$$\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_k \mid r_1, \dots, r_l\rangle$$

группы G. Пусть $\mathcal{P}'$ – другое копредставление группы G с $k+2l$ порождающими и $3l$ соотношениями, заданное как

$$\mathcal{P}' = \langle x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l, z_1, \ldots, z_l \mid y_1, \ldots, y_l, z_1 y_1^{-1}, \ldots, z_l y_l^{-1}, z_1^{-1} r_1, \ldots, z_l^{-1} r_l \rangle.$$

Стандартный комплекс $K_{\mathcal{P}'}$ является объединением $K_1 \cup K_2 \cup K_3$, где K_1, K_2, K_3 – стандартные комплексы следующих копредставлений:

$$\begin{aligned}
&\langle x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l, z_1, \ldots, z_l \mid y_1, \ldots, y_l \rangle, \\
&\langle x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l, z_1, \ldots, z_l \mid z_1 y_1^{-1}, \ldots, z_l y_l^{-1} \rangle, \\
&\langle x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l, z_1, \ldots, z_l \mid z_1^{-1} r_1, \ldots, z_l^{-1} r_l \rangle.
\end{aligned}$$

Обозначая $\overline{K} = (K_{\mathcal{P}'}, K_1, K_2, K_3) \in \mathcal{K}_3$, получаем следующий изоморфизм G-модулей:

$$\pi_3(K_{\mathcal{P}}) \simeq \pi_3(K_{\mathcal{P}'}) \simeq I_3(\mathcal{F}_3(\overline{K})).$$

Этот изоморфизм следует напрямую из петлевой конструкции Кана $GK_{\mathcal{P}}$ и того факта, что для симплициальной группы G_*, у которой G_2 порождается вырожденными элементами, имеем $\pi_2(G_*) \simeq I_3(G_2, \ker(d_0), \ker(d_1), \ker(d_2))$ (см., к примеру, [32]).

Приложение к гомологиям групп. Для данного элемента $(F; R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}_n$ из [82] и [21] следует, что при выполнении некоторых условий на $(F; R_1, \ldots, R_n)$ гомологии групп или, более обще, производные нижних центральных факторов могут быть получены с помощью групп $I_n(F; R_1, \ldots, R_n)_F$, т.е. F-коинвариантных факторов групп $I_n(F; R_1, \ldots, R_n)$.

Хорошо известно, что для каждого $(F; R_1, R_2) \in \mathcal{R}_2$ существует каноническое отображение

$$H_3(G) \to I_2(F; R_1, R_2) = \frac{R_1 \cap R_2}{[R_1, R_2][F, R_1 \cap R_2]}, \tag{6.4.14}$$

которое является частью длинной точной последовательности гомологий групп (см. [83] и [84]). Это отображение может быть легко получено из отображения Гутиерреза–Ратклиффа. Для этого рассмотрим произвольное $(K, K_1, K_2) \in \mathcal{K}_2$ с $F = \pi_1(K^1)$, $R_i = \ker\{\pi_1(K^1) \to \pi_1(K_i)\}$, $i = 1, 2$. Цепной комплекс

$$0 \to \pi_2(K) \to C_2(\widetilde{K}) \to C_1(\widetilde{K}) \to \mathbb{Z}[F/R_1R_2] \to \mathbb{Z} \to 0 \tag{6.4.15}$$

универсального накрытия $\widetilde{K}$ комплекса K может быть рассмотрен как комплекс свободных F/R_1R_2-модулей. Применяя функтор гомологий групп $H_*(F/R_1R_2, -)$ к (6.4.15), получаем естественные отображения

$$\partial_n \colon H_n(F/R_1R_2) \to H_{n-3}(F/R_1R_2, \pi_2(K)), \qquad n \geqslant 3,$$

которые являются изоморфизмами для $n \geqslant 4$. Отображение (6.4.14) является композицией ∂_3 и F-коинвариантного отображения Гутиерреза–Ратклиффа.

Напомним определение функтора P. Пусть A – абелева группа. Тогда

$$P_2(A) = \Delta(A)/\Delta^3(A), \qquad \Delta(A) = \ker\{\mathbb{Z}[A] \to \mathbb{Z}\}.$$

Хорошо известно (см., например, [85]), что для свободной абелевой группы A существуют следующие короткие точные последовательности абелевых групп:

$$0 \to SP^2(A) \to P_2(A) \to A \to 0, \tag{6.4.16}$$

$$0 \to SP^2(A) \to \Gamma(A) \to A \otimes \mathbb{Z}_2 \to 0. \tag{6.4.17}$$

Теперь пусть A – некоторый G-модуль. Тогда G-действие можно естественным образом расширить на абелевы группы $SP^2(A)$, $P_2(A)$, $\Gamma(A)$, $A \otimes \mathbb{Z}_2$, приводя к последовательностям G-модулей (6.4.16) и (6.4.17). Применяя функтор $H_*(G,-)$ к (6.4.16) и (6.4.17), получаем длинные точные последовательности

$$\cdots \to H_1(G, P_2(G)) \to H_1(G, A) \to H_0(G, SP^2(A)) \to H_0(G, P_2(A)) \to \cdots,$$
$$\cdots \to H_1(G, \Gamma(A)) \to H_1(G, A \otimes \mathbb{Z}_2) \to H_0(G, SP^2(A)) \to H_0(G, \Gamma(A)) \to \cdots.$$

Теперь мы получаем приложение конструкции, данной в теореме 6.4.3. Рассмотрим $(K; K_1, K_2, K_3) \in \mathcal{K}_3$ с

$$\pi_1(K^1) = F,\ R_i = \ker\{\pi_1(K^1) \to \pi_1(K_i)\}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Обозначим $G = F/R_1R_2R_3$ и определим отображение

$$\Psi_4 \colon H_4(G) \to I_3(F; R_1, R_2, R_3)_F = \frac{R_1 \cap R_2 \cap R_3}{[R_1, R_2 \cap R_3][R_2, R_3 \cap R_1][R_3, R_1 \cap R_2][F, R_1 \cap R_2 \cap R_3]}$$

как композицию в следующей диаграмме с точными строками и столбцами:

$$\begin{tikzcd}
 & H_4(G) \arrow[d, equal] & H_1(G, \pi_2(K) \otimes \mathbb{Z}_2) \arrow[d] \\
H_1(G, P_2(\pi_2(K))) \arrow[r] & H_1(G, \pi_2(K)) \arrow[r] & H_0(G, SP^2(\pi_2(K))) \arrow[d] \\
 & H_0(G, \pi_3(K)) \arrow[r, equal] \arrow[d, "H_0(F, \overline{\Lambda})"'] & H_0(G, \Gamma\pi_2(K)) \arrow[d, two heads] \\
 & I_3(F; R_1, R_2, R_3)_F & H_0(G, \pi_2(K) \otimes \mathbb{Z}_2)
\end{tikzcd}$$

Замечание 6.4.1. Предложение 6.4.1 влечет, что естественная композиция

$$H_4(F/R_1R_2) \oplus H_4(F/R_2R_3) \oplus H_4(F/R_1R_3) \to H_4(G) \xrightarrow{\Psi_4} I_3(F; R_1, R_2, R_3)_F$$

является нулевым отображением.

Глава 7. Приложения

7.1. Симметрические произведения идеалов

Здесь мы изложим конструкцию из работы [10]. Для кольца S и двусторонних идеалов $I_1, \dots, I_n$, $n \geqslant 2$, в S рассмотрим их симметрическое произведение

$$(I_1 \cdots I_n)_S = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} I_{\sigma_1} \cdots I_{\sigma_n},$$

где Σ_n – n-я группа перестановок. К примеру, для $n = 2$ имеем $(I_1 I_2)_S = I_1 I_2 + I_2 I_1$. Отметим, что всегда имеет место включение идеалов $(I_1 \cdots I_n)_S \subseteq I_1 \cap \dots \cap I_n$. Пусть теперь F – свободная группа, $R_1, \dots, R_n$ – нормальные подгруппы в F. Рассмотрим двусторонние идеалы в целочисленном групповом кольце $\mathbb{Z}[F]$, определенные как $\mathbf{r}_i = (R_i - 1)\mathbb{Z}[F]$, $i = 1, \dots, n$. Возникают естественные вопросы:

1) описать фактор

$$Q(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) := \frac{\mathbf{r}_1 \cap \dots \cap \mathbf{r}_n}{(\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n)_S};$$

2) описать нормальную подгруппу в F, определяемую идеалом $(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n)_S$, т.е. подгруппу

$$D(F; (\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n)_S) := F \cap (1 + (\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n)_S).$$

Для того чтобы ответить на второй вопрос, рассмотрим симметрическое произведение нормальных подгрупп $R_1, \dots, R_n$, определенное как

$$[R_1, \dots, R_n]_S = \prod_{\sigma \in \Sigma_n} [\dots, [R_{\sigma_1}, R_{\sigma_2}], \dots, R_{\sigma_n}].$$

Заметим, что

$$[R_1, \dots, R_n]_S \subseteq D(F; (\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n)_S).$$

Получаем естественное отображение

$$f_{F;R_1,\dots,R_n} \colon \frac{R_1 \cap \dots \cap R_n}{[R_1, \dots, R_n]_S} \to \frac{\mathbf{r}_1 \cap \dots \cap \mathbf{r}_n}{(\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n)_S},$$
$$f_{F;R_1,\dots,R_n} \colon g.[R_1, \dots, R_n]_S \mapsto g - 1 + (\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n)_S, \qquad g \in R_1 \cap \dots \cap R_n.$$

Мы покажем, что для некоторого выбора $F, R_1, \dots, R_n$ существует пространство X такое, что отображение $f_{F;R_1,\dots,R_n}$ представляет собой n-й гомоморфизм Гуревича:

$$\begin{tikzcd}
\frac{R_1 \cap \dots \cap R_n}{[R_1, \dots, R_n]_S} \arrow[r, "f_{F;R_1,\dots,R_n}"] \arrow[d, equal] & \frac{\mathbf{r}_1 \cap \dots \cap \mathbf{r}_n}{(\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n)_S} \arrow[d, equal] \\
\pi_{n-1}(X) \arrow[r] & H_{n-1}(X)
\end{tikzcd}$$

В этом случае фактор $\frac{D(F; (\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n)_S}{[R_1, \dots, R_n]}$ представляет собой в точности ядро гомоморфизма Гуревича, и мы можем использовать топологические методы для его описания.

Технические результаты.

Лемма 7.1.1. *Пусть N – нормальная подгруппа группы G. Тогда*

$$N \cap (1 + \Delta(N)\Delta(G)) = [N, N].$$

Для случая $n = 2$ имеем следующее.

Предложение 7.1.1. *Пусть $F = R_1R_2$. Тогда отображение*

$$f_{F;R_1,R_2} \colon \frac{R_1 \cap R_2}{[R_1, R_2]} \to \frac{\mathbf{r}_1 \cap \mathbf{r}_2}{\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2\mathbf{r}_1}$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Пусть $T = \{t_i\}_{i \in I} \subseteq R_1$ – множество левых представителей для R_2 в F. Тогда любой элемент $f \in F$ может быть записан единственным образом в виде $f = ts$ с $t \in T$ и $s \in R_2$; в частности, если $f \in R_1$, то $s \in R_1 \cap R_2$. Пусть $\varphi \colon \mathbb{Z}[F] \to \mathbb{Z}[R_2]$ – $\mathbb{Z}$-линейное расширение отображения $F \to R_2$, заданное $f \mapsto s$. Отметим, что $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = \Delta(R_1)\Delta(R_2)$ и $\mathbf{r}_2\mathbf{r}_1 = \Delta(R_2)\Delta(R_1)$, так как $F = R_1R_2$. Более того,

$$\varphi(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2\mathbf{r}_1) \subseteq \Delta(R_1 \cap R_2)\Delta(R_2) + \Delta([R_1, R_2])\mathbb{Z}[R_2].$$

Рассмотрим отображение

$$\theta \colon R_1 \cap R_2 \to \frac{\mathbf{r}_1 \cap \mathbf{r}_2}{\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2\mathbf{r}_1}, \qquad f \mapsto f - 1 + \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2\mathbf{r}_1.$$

Очевидно, что θ является гомоморфизмом и $[R_1, R_2] \subseteq \ker\theta$. Пусть $f \in R_1 \cap R_2$ – некоторый элемент в $\ker\theta$. Тогда имеем

$$f - 1 = \varphi(f - 1) \in \Delta(R_1 \cap R_2)\Delta(R_2) + \Delta([R_1, R_2])\mathbb{Z}[R_2]$$

в групповом кольце $\mathbb{Z}[R_2]$. Поэтому, работая по модулю $[R_1, R_2]$ и применяя лемму 7.1.1 с $G = R_1/[R_1, R_2]$, $N = (R_1 \cap R_2)/[R_1, R_2]$, получаем $f \in [R_1, R_2]$. Следовательно, θ индуцирует мономорфизм

$$f_{R_1,R_2} \colon \frac{R_1 \cap R_2}{[R_1, R_2]} \hookrightarrow \frac{\mathbf{r}_1 \cap \mathbf{r}_2}{\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2\mathbf{r}_1}.$$

Пусть $\alpha \in \mathbf{r}_1$. Тогда $\alpha = \sum_i (r_i - 1)\beta_i$ с $r_i \in R_1$ и $\beta_i \in \mathbb{Z}[R_2]$. Теперь $r_i = t_{i_j}s_{i_J}$ с $t_{i_j} \in T$ и $s_{i_j} \in R_1 \cap R_2$. Следовательно,

$$\alpha \equiv (w - 1) + \sum_k m_k(t_k - 1) \bmod \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2\mathbf{r}_1$$

с $m_k \in \mathbb{Z}$ и $w \in R_1 \cap R_2$. Получаем, что для $\alpha \in \mathbf{r}_1 \cap \mathbf{r}_2$ выполнено: $m_k = 0$ для всех k, и заключаем, что f_{R_1,R_2} является эпиморфизмом, а потому и изоморфизмом.

Лемма 7.1.2. *Пусть $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$, $n \geqslant 2$, – объединение множеств. Рассмотрим естественные проекции $p_i \colon F(X) \mapsto F(X_1 \sqcup \dots \sqcup \widehat{X}_i \sqcup \dots \sqcup X_n)$, $i = 1, \dots, n$. Обозначим $R_i = \ker(p_i)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда*:

(i) $R_1 \cap \dots \cap R_n = [R_1, \dots, R_n]_S$ *в* $F(X)$;

(ii) $\mathbf{r}_1 \cap \dots \cap \mathbf{r}_k = (\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_k)_S$ *в* $\mathbb{Z}[F(X)]$.

Доказательство. Утверждение (i) следует из следствия 3.5 [80].

Для доказательства утверждения (ii) отметим для начала, что для всех $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, справедливо

$$R_i = \langle X_i \rangle^{F(X \setminus X_j)}[R_i, R_j].$$

Так как $\mathbb{Z}[F(X)] = \mathbb{Z}[F(X \setminus X_j)] + \mathbf{r}_j$ и $[R_i, R_j] - 1 \subseteq \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_j\mathbf{r}_i$, получаем

$$\mathbf{r}_i = (\langle X_i \rangle^{F(X\setminus X_j)} - 1)\mathbb{Z}[F(X \setminus X_j)] + \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_j\mathbf{r}_i \tag{7.1.1}$$

и поэтому

$$\mathbf{r}_i \cap \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_j\mathbf{r}_i, \qquad i \neq j.$$

Предположим, что для некоторого k, $2 \leqslant k < n$, мы показали, что

$$\mathbf{r}_{i_1} \cap \dots \cap \mathbf{r}_{i_k} = (\mathbf{r}_{i_1} \cdots \mathbf{r}_{ik})_S$$

для всех подмножеств из k элементов из $\{1, \dots, n\}$, и пусть j – некоторое целое число, $1 \leqslant j \leqslant n$, $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. Из (7.1.1) получаем

$$\mathbf{r}_{i_l} = (\langle X_{i_l} \rangle^{F(X\setminus X_j)} - 1)\mathbb{Z}[F(X \setminus X_j)] + \mathbf{r}_{i_l}\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_j\mathbf{r}_{i_l}, \qquad l = i_1, \dots, i+k.$$

Следовательно,

$$(\mathbf{r}_{i_1} \cdots \mathbf{r}_{i_k})_S \subseteq \mathbb{Z}[F(X \setminus X_j)] + (\mathbf{r}_{i_1} \cdots \mathbf{r}_{i_k}\mathbf{r}_j)_S.$$

Как приложение естественной проекции $\mathbb{Z}[F(X)] \to \mathbb{Z}[F(X \setminus X_j)]$, индуцированной отображением, тождественным на $X \setminus X_j$ и тривиальным на X_j, получаем

$$\mathbf{r}_j \cap \mathbf{r}_{i_1} \cap \dots \cap \mathbf{r}_{i_k} \subseteq (\mathbf{r}_{i_1} \cdots \mathbf{r}_{i_k}\mathbf{r}_j)_S.$$

Обратное включение очевидно. Получаем, что пересечение $(k+1)$-го идеала из $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ равно соответствующему симметрическому произведению этих идеалов. Утверждение (ii) получается по индукции.

Симплициальная конструкция. Напомним, что для данного отмеченного симплициального множества K, конструкция Милнора $F(K)$ [86] представляет собой симплициальную группу с $F(K)_n = F(K_n \setminus *)$, где $F(\,\cdot\,)$ – функтор взятия свободной группы. Рассмотрим симплициальную окружность $S^1 = \Delta[1]/\partial\Delta[1]$:

$$S^1_0 = \{*\}, \quad S^1_1 = \{*, \sigma\}, \quad S^1_2 = \{*, s_0\sigma, s_1\sigma\}, \quad \dots, \quad S^1_n = \{*, x_0, \dots, x_n\},$$

где $x_i = s_n \cdots \widehat{s}_i \cdots s_0\sigma$. Конструкция Милнора $F(S^1)$ имеет свободную группу $F(S^1)_n$ ранга n для $n \geqslant 1$:

$$F(S^1)\colon \ \cdots \ \substack{\longrightarrow \\ \cdots \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \cdots \\ \longleftarrow} \ F_3 \ \substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow} \ F_2 \ \substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow} \ \mathbb{Z}$$

с естественными гомоморфизмами граней и вырождения:

$$\begin{aligned} &\partial_i\colon F_n \to F_{n-1}, \qquad i = 0, \dots, n, \quad n = 2, 3, \dots, \\ &s_i\colon F_n \to F_{n+1}, \qquad i = 0, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots . \end{aligned}$$

Имеет место гомотопическая эквивалентность [86]

$$|F(S^1)| \simeq \Omega S^2.$$

Поэтому для $n \geqslant 2$ n-я гомотопическая группа S^2 может быть представлена как пересечение ядер в размерности $n - 1$ по модулю симплициальным границам. Следуя [80], обозначим элементы базиса F_{n+1} следующим образом:

$$\begin{aligned} &y_n = s_{n-1} \cdots s_0\sigma, \\ &y_i = s_n \cdots \widehat{s}_i \cdots s_0\sigma(s_n \cdots \widehat{s}_{i+1} \cdots s_0\sigma)^{-1}, \qquad 0 \leqslant i < n. \end{aligned}$$

Тогда получаем, что в группе F_{n+1}

$$\begin{aligned}\ker(\partial_0) &= y_0 \cdots y_n,\\ \ker(\partial_i) &= \langle y_{i-1}\rangle^{F_{n+1}}, \qquad 0 < i \leqslant n+1.\end{aligned}$$

Лемма 7.1.2, примененная к случаю $X = \{y_0, \dots, y_n\}$, влечет

$$\ker(\partial_1) \cap \dots \cap \ker(\partial_{n+1}) = [\ker(\partial_1), \dots, \ker(\partial_{n+1})]_S.$$

Получаем следующее естественное представление $(n+1)$-й гомотопической группы S^2, данное впервые Ву [80]:

$$\pi_{n+1} \simeq \frac{\ker(\partial_0) \cap \dots \cap \ker(\partial_n)}{[\ker(\partial_0), \dots, \ker(\partial_n)]_S}, \qquad n \geqslant 1.$$

Теорема 7.1.1. *Пусть* $n \geqslant 3$, F_n *– свободная группа с базисом* $\{x_1, \dots, x_n\}$. *Пусть* $R_i = \langle x_i\rangle^{F_n}$, $i = 1, \dots, n$, $R_{n+1} = \langle x_1 \cdots x_n\rangle^{F_n}$. *Тогда*:

(i) *существует изоморфизм* $Q(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n+1}) \simeq \mathbb{Z}$;

(ii) *имеем*

$$D(F; (\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_{n+1})_S) = R_1 \cap \dots \cap R_{n+1}.$$

В приведенных обозначениях $R_1 \cap \dots \cap R_{n+1} \neq [R_1, \dots, R_{n+1}]_S$ *для* $n \neq 0 \bmod 8$.

Доказательство. Сначала применим функтор $\mathbb{Z}[\,\cdot\,]$ к конструкции Милнора $F(S^1)$:

$$\mathbb{Z}[F(S^1)] : \cdots \quad \substack{\longrightarrow\\ \cdots \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \cdots \\ \longleftarrow} \quad \mathbb{Z}[F_3] \quad \substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow} \quad \mathbb{Z}[F_2] \quad \substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow} \quad \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$$

По определению гомологий имеем

$$\pi_n\mathbb{Z}[F(S^1)] = H_n(\Omega S^2) = \mathbb{Z}, \qquad n \geqslant 1.$$

Ядра гомоморфизмов

$$\overline{\partial}_i \colon \mathbb{Z}[F_{n+1}] \to \mathbb{Z}[F_n], \qquad i = 0, \dots, n+1,$$

представляют собой идеалы

$$(\ker(\partial_i) - 1)\mathbb{Z}[F_{n+1}], \qquad i = 0, \dots, n+1.$$

После переписывания в свободной группе F_n имеем $x_i = y_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$; лемма 7.1.2, (ii) влечет

$$H_n(\Omega S^2) \simeq Q(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n+1}) \simeq \mathbb{Z},$$

и утверждение (i) доказано.

Для доказательства утверждения (ii) заметим, что существует естественная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\frac{R_1\cap\dots\cap R_{n+1}}{[R_1,\dots,R_{n+1}]_S} & \xrightarrow{f_{F;R_1,\dots,R_{n+1}}} & \frac{\mathbf{r}_1\cap\dots\cap\mathbf{r}_{n+1}}{(\mathbf{r}_1\dots\mathbf{r}_{n+1})_S}\\
\| & & \|\\
\pi_n(\Omega S^2) & \longrightarrow & H_n(\Omega S^2)
\end{array}$$

Гомотопические группы $\pi_n(\Omega S^2) = \pi_{n+1}(S^2)$ конечны для $n \geqslant 3$ по известной теореме Серра, поэтому гомоморфизм $f_{F;R_1,\dots,R_{n+1}}$ является нулевым гомоморфизмом и

$$R_1 \cap \dots \cap R_{n+1} \subseteq D(F; (\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_{n+1})_S).$$

Обратное включение тривиально, поэтому утверждение (ii) следует. Замечание, что

$$R_1 \cap \dots \cap R_{n+1} \neq [R_1, \dots, R_{n+1}]_S \qquad \text{для} \quad n \neq 0 \bmod 8,$$

представляет собой переформулировку результата Кертиса [87] о том, что $\pi_n(S^2) \neq 0$, $n \neq 1 \bmod 8$.

7.2. Длинные коммутаторы

Рассмотрим конструкцию $F[S^n]$ для $n \geqslant 1$. Маломерные компоненты симплициальной группы $F[S^n]$ следующие:

$$\begin{aligned} F[S^n]_n &= F(\sigma), \\ F[S^n]_{n+1} &= F(s_0\sigma, \dots, s_n\sigma), \\ F[S^n]_{n+2} &= F(s_j s_i \sigma \mid i < j), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Для $n \geqslant 1$ порождающий

$$\pi_{n+1}(F[S^n]) \simeq \pi_{n+1}(\Omega(S^{n+1})) \simeq \pi_{n+2}(S^{n+1})$$

может быть выбран как коммутатор $[s_0\sigma, s_1\sigma]$ в $F[S^n]_{n+1}$ (см. [80]). Теперь эти коммутаторы, рассматриваемые как элементы $F[S^n]_{n+1}$, определяют элементы из $F[S^1]_n$, соответствующие композиции

$$S^{n+1} \to S^n \to \dots \to S^3 \to S^2,$$

где каждое отображение является итерированной надстройкой над расслоением Хопфа. Описание соответствующих элементов в $F[S^1]_n$ следует из последовательности симплициальных групп

$$\begin{tikzcd}
F(S^3)_4 \arrow[r, shift left=2, "\cdots"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[l, shift left=2, "\cdots"] \arrow[d, "\eta^2"] & & \\
F(S^2)_4 \arrow[r, shift left=2, "\cdots"] \arrow[d] & F(S^2)_3 \arrow[l, shift left=2, "\cdots"] \arrow[d] \arrow[r, shift left=4] \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift left=1] & \mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[l, shift right=1] \arrow[l, shift right=2] \arrow[d, "\eta"] & \\
F(S^1)_4 \arrow[r, shift left=2, "\cdots"] & F(S^1)_3 \arrow[l, shift left=2, "\cdots"] \arrow[r, shift left=4] \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift left=1] & F(S^1)_2 \arrow[l] \arrow[l, shift right=1] \arrow[l, shift right=2] \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift left=1] & \mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[l, shift right=1]
\end{tikzcd}$$

где $\eta^k(\sigma) = [s_0\sigma, s_1\sigma] \in F[S^k]_{k+1}$, $k \geqslant 1$. Рассмотрим эти элементы.

1. Для начала пусть $F_2 = F(y_0, y_1)$. Тогда элемент

$$[y_0, y_1] \notin [[y_{-1}, y_0, y_1]]$$

соответствует гомотопическому классу расслоения Хопфа $S^3 \to S^2$.

2. Пусть $F_3 = F(y_0, y_1, y_2)$. Тогда элемент

$$[[y_0, y_1], [y_0, y_1 y_2]] \notin [[y_{-1}, y_0, y_1, y_2]]$$

соответствует гомотопическому классу композиции $S^4 \to S^3 \to S^2$.

3. Пусть $F_4 = F(y_0, y_1, y_2, y_3)$. Тогда элемент

$$[[[y_0, y_1], [y_0, y_1y_2]], [[y_0, y_1], [y_0, y_1y_2y_3]]] \notin [[y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3]]$$

соответствует гомотопическому классу композиции $S^5 \to S^4 \to S^3 \to S^2$.

4. Пусть $F_5 = F(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$. Тогда элемент

$$\begin{aligned}&[[[[y_0, y_1], [y_0, y_1y_2]], [[y_0, y_1], [y_0, y_1y_2y_3]]], [[[y_0, y_1], [y_0, y_1y_2]], [[y_0, y_1], [y_0, y_1y_2y_3y_4]]]] \\ &\qquad \notin [[y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3, y_4]]\end{aligned}$$

соответствует гомотопическому классу композиции $S^6 \to S^5 \to S^4 \to S^3 \to S^2$.

5. Пусть $F_6 = F(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$. Тогда элемент

$$\begin{aligned}&\bigl[[[[y_0, y_1], [y_0, y_1y_2]], [[y_0, y_1], [y_0, y_1y_2y_3]]], [[[y_0, y_1], [y_0, y_1y_2]], [[y_0, y_1], [y_0, y_1y_2y_3y_4]]]], \\ &\qquad [[[[y_0, y_1], [y_0, y_1y_2]], [[y_0, y_1], [y_0, y_1y_2y_3]]], [[[y_0, y_1], [y_0, y_1y_2]], [[y_0, y_1], [y_0, y_1y_2y_3y_4y_5]]]]\bigr] \\ &\quad \in [[y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]]\end{aligned}$$

соответствует тривиальному гомотопическому классу композиции

$$S^7 \to S^6 \to S^5 \to S^4 \to S^3 \to S^2. \tag{7.2.1}$$

Тривиальность данного класса доказывается с использованием стандартных методов теории гомотопий [88]. Это простейший случай теоремы нильпотентности Нишиды [89], утверждающей, что каждый элемент кольца стабильных гомотопических групп сфер нильпотентен. Данные коммутаторные элементы, задающие нетривиальные элементы в гомотопических группах сфер, были использованы в [16] для описания гомотопических групп надстроек над классифицирующими пространствами некоторых групп.

Список литературы

[1] W. Magnus, “Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring”, *Math. Ann.*, **111**:1 (1935), 259–280.

[2] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial Group Theory. Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations*, Interscience Publ., New York, 1966.

[3] E. Rips, “On the fourth integer dimension subgroup”, *Israel J. Math.*, **12**:4 (1972), 342–346.

[4] I. B. S. Passi, “Dimension subgroups”, *J. Algebra*, **9**:2 (1968), 152–182.

[5] D. G. Quillen, *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Math., **43**, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[6] J. R. Stallings, “Quotients of powers of the augmentation ideal in a group ring”, *Knots, Groups and 3-Manifolds*, Ann. of Math. Studies, **84**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1975, 101–118.

[7] H. J. Baues, *Algebraic Homotopy*, Cambridge Stud. Adv. Math., **15**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[8] С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, *Методы гомологической алгебры*. Т. 1. *Введение в когомологии и производные категории*, Наука, М., 1988.

[9] H.-J. Baues, *Homotopy Type and Homology*, Oxford Math. Monogr., Oxford Sci. Publ., Oxford, 1996.

[10] R. Mikhailov, I. B. S. Passi, J. Wu, “Symmetric ideals in group rings and simplicial homotopy”, *J. Pure Appl. Algebra*, **215**:5 (2011), 1085–1092.

[11] A. Dold, D. Puppe, “Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen”, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **11** (1961), 201–312.

[12] J. C. Hausmann, *Acyclic Maps and the Whitehead Aspherical Problem*, Preprint.

[13] N. Gupta, *Free Group Rings*, Contemp. Math., **66**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[14] Б. И. Плоткин, С. М. Вовси, *Многообразия представлений групп. Общая теория, связи и приложения*, Зинатне, Рига, 1983.

[15] G. Ellis, R. Mikhailov, "A colimit of classifying spaces", *Adv. Math.*, **223**:6 (2010), 2097–2113.

[16] R. Mikhailov, J. Wu, "On homotopy groups of the suspended classifying spaces", *Algebr. Geom. Topol.*, **10** (2010), 565–625.

[17] J. Wu, *On Brunnian-Type Links and the Link Invariants Given by Homotopy Groups of Spheres*, arXiv: 0909.4973.

[18] R. Mikhailov, I. B. S. Passi, *Lower Central and Dimension Series of Groups*, Lecture Notes in Math., **1952**, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[19] Р. Михайлов, "О нильпотентной и разрешимой аппроксимируемости групп", *Матем. сб.*, **196**:11 (2005), 109–126.

[20] J. Burns, G. Ellis, "On the nilpotent multipliers of a group", *Math. Z.*, **226**:3 (1997), 405–428.

[21] G. Donadze, N. Inassaridze, T. Porter, "N-fold Čech derived functors and generalised Hopf type formulas", *K-Theory*, **35**:3-4 (2006), 341–373.

[22] W. G. Dwyer, "Homology, Massey products and maps between groups", *J. Pure Appl. Algebra*, **6**:2 (1975), 177–190.

[23] G. Ellis, "A Magnus-Witt type isomorphism for non-free groups", *Georgian Math. J.*, **9**:4 (2002), 703–708.

[24] T. D. Cochran, K. E. Orr, "Stability of lower central series of compact 3-manifold groups", *Topology*, **37**:3 (1998), 497–526.

[25] G. Baumslag, U. Stammbach, "On the inverse limit of free nilpotent groups", *Comment. Math. Helv.*, **52**:2 (1977), 219–233.

[26] A. K. Bousfield, "Homological Localization Towers for Groups and π-Modules", Mem. Amer. Math. Soc., **10**, no. 186, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.

[27] W. Magnus, "Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren", *J. Reine Angew. Math.*, **177** (1937), 105–115.

[28] Р. Михайлов, "Трансфинитные нижние центральные ряды групп: парасвободные свойства и топологические приложения", *Дискретная геометрия и геометрия чисел*, Тр. МИАН, **239**, Наука, М., 2002, 251–267.

[29] J. McCarron, "Residually nilpotent one-relator groups with nontrivial center", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124**:1 (1996), 1–5.

[30] A. Pietrowski, "The isomorphism problem for one-relator groups with non-trivial centre", *Math. Z.*, **136**:2 (1974), 95–106.

[31] E. Raptis, D. Varsos, "The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f.g. abelian group", *J. Pure Appl. Algebra*, **76**:2 (1991), 167–178.

[32] A. Multu, T. Porter, "Iterated Peiffer pairings in the Moore complex of a simlicial group", *Appl. Categ. Structures*, **9**:2 (2001), 111–130.

[33] C. K. Gupta, N. D. Gupta, "Generalized Magnus embeddings and some applications", *Math. Z.*, **160**:1 (1978), 75–87.

[34] C. K. Gupta, I. B. S. Passi, "Magnus embeddings and residual nilpotence", *J. Algebra*, **106**:1 (1987), 105–113.

[35] J. Stallings, "Homology and central series of groups", *J. Algebra*, **2**:2 (1965), 170–181.

[36] B. Hartley, R. Stöhr, "Homology of higher relation modules and torsion in free central extensions of groups", *Proc. London Math. Soc.* (3), **62**:2 (1991), 325–352.

[37] W. Magnus, "On a theorem of Marshall Hall", *Ann. of Math.* (2), **40**:4 (1939), 764–768.

[38] А. Л. Шмелькин, "Сплетения и многообразия групп", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **29**:1 (1965), 149–170.

[39] R. Mikhailov, I. B. S. Passi, "Augmentation powers and group homology", *J. Pure Appl. Algebra*, **192**:1-3 (2004), 225–238.

[40] M. Smith, "On group algebras", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 780–782.

[41] K. W. Gruenberg, *Cohomological Topics in Group Theory*, Lecture Notes in Math., **143**, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[42] А. И. Мальцев, "Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы", *Матем. сб.*, **25**:3 (1949), 347–366.

[43] K. W. Gruenberg, "Residual properties of infinite soluble groups", *Proc. London Math. Soc.* (3), **7**:1 (1957), 29–62.

[44] M. A. Gutiérrez, J. G. Ratcliffe, "On the second homotopy group", *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2), **32** (1981), 45–55.

[45] J. F. Adams, "A new proof of a theorem of W. H. Cockcroft", *J. London Math. Soc.*, **30** (1955), 482–488.

[46] J. Rubio, F. Sergeraert, "Algebraic models for homotopy types", *Homology Homotopy Appl.*, **7**:2 (2005), 139–160.

[47] J.-L. Loday, "Spaces with finitely many nontrivial homotopy groups", *J. Pure Appl. Algebra*, **24**:2 (1982), 179–202.

[48] D. Conduché, "Question de Whitehead et modules précroisés", *Bull. Soc. Math. France*, **124**:3 (1996), 401–423.

[49] G. J. Ellis, "Homology of 2-types", *J. London Math. Soc.* (2), **46**:1 (1992), 1–27.

[50] P. Carrasco, A. M. Cegarra, A. R.-Grandjeán, "(Co)Homology of crossed modules", *J. Pure Appl. Algebra*, **168**:2-3 (2002), 147–176.

[51] M. Barr, J. Beck, "Homology and standard constructions", *Seminar on Triples and Categorical Homology Theory*, Lecture Notes in Math., **80**, Springer-Verlag, Berlin, 1969, 245–335.

[52] J. M. Casas, G. Ellis, M. Ladra, T. Pirashvili, "Derived functors and the homology of n-types", *J. Algebra*, **256**:2 (2002), 583–596.

[53] A. R.-Grandjean, M. Ladra, T. Pirashvili, "CCG-homology of crossed modules via classifying spaces", *J. Algebra*, **229**:2 (2000), 660–665.

[54] T. Everaert, T. Van der Linden, "Baer invariants in semi-abelian categories. II. Homology", *Theory Appl. Categ.*, **12**:4 (2004), 195–224.

[55] A. Fröhlich, "Baer-invariants of algebras", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **109**:2 (1963), 221–244.

[56] R. Brown, "Coproducts of crossed P-modules: applications to second homotopy groups and to the homology of groups", *Topology*, **23**:3 (1984), 337–345.

[57] M. N. Dyer, "Crossed modules and Π_2 homotopy groups", *Two-Dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **197**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, 125–156.

[58] J. G. Ratcliffe, "Free and projective crossed modules", *J. London Math. Soc.* (2), **22**:1 (1980), 66–74.

[59] T. Datuashvili, T. Pirashvili, "On (co)homology of 2-types and crossed modules", *J. Algebra*, **244**:1 (2001), 352–365.

[60] R. Mikhailov, "On residual properties of projective crossed modules", *Comm. Alg.*, **34**:4 (2006), 1451–1458.

[61] N. D. Gilbert, "Cockroft complexes and the plus-construction", *Groups – Korea'94*, de Gruyter, Berlin, 1995, 119–125.

[62] J. Brandenburg, M. Dyer, "On J. H. C. Whitehead's aspherical question. I", *Comment. Math. Helv.*, **56**:3 (1981), 431–446.

[63] I. B. S. Passi, U. Stammbach, "A filtration of Schur multiplicator", *Math. Z.*, **135**:2 (1974), 143–148.

[64] I. B. S. Passi, *Group Rings and Their Augmentation Ideals*, Lecture Notes in Math., **715**, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[65] B. Hartley, "Powers of the augmentation ideal in group rings of infinite nilpotent groups", *J. London Math. Soc.* (2), **25**:1 (1982), 43–61.

[66] K. I. Tahara, "On the structure of $Q_3(G)$ and the fourth dimension subgroups", *Japan. J. Math. (N.S.)*, **3**:2 (1977), 381–394.

[67] N. Gupta, "The dimension subgroup conjecture", *Bull. London Math. Soc.*, **22**:5 (1990), 453–456.

[68] N. Gupta, "Integral dimension subgroups", *Groups – St. Andrews*, 1989, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **159**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991, 214–249.

[69] K.-i. Tahara, "The augmentation quotients of group rings and the fifth dimension subgroup", *J. Algebra*, **71**:1 (1981), 141–173.

[70] Б. И. Плоткин, "Многообразия и квазимногообразия, связанные с представлениями групп", *Докл. АН СССР*, **196** (1971), 527–530.

[71] N. Gupta, F. Levin, "On the Lie ideals of a ring", *J. Algebra*, **81**:1 (1983), 225–231.

[72] S. Eilenberg, S. MacLane, "On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation", *Ann. of Math.* (2), **60**:1 (1954), 49–139.

[73] H.-J. Baues, T. Pirashvili, "A universal coefficient theorem for quadratic functors", *J. Pure Appl. Algebra*, **148**:1 (2000), 1–15.

[74] L. Grünenfelder, "Lower central series, augmentation quotients and homology of groups", *Comment. Math. Helv.*, **55**:2 (1980), 159–177.

[75] D. M. Kan, "A relation between CW-complexes and free c.s.s. groups", *Amer. J. Math.*, **81**:2 (1959), 512–528.

[76] J. A. Sjogren, "Dimension and lower central subgroups", *J. Pure Appl. Algebra*, **14**:2 (1979), 175–194.

[77] R. Brown, J.-L. Loday, "Van Kampen theorems for diagrams of spaces", *Topology*, **26**:3 (1987), 311–335.

[78] K. Reidemeister, "Complexes and homotopy chains", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 297–307.

[79] S. J. Pride, "Identities among relations", *Group Theory From a Geometrical Viewpoint*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, 687–717.

[80] J. Wu, "Combinatorial description of homotopy groups of certain spaces", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **130**:3 (2001), 489–513.

[81] M. A. Gutiérrez, P. S. Hirschhorn, "Free simplicial groups and the second relative homotopy group of an adjunction space", *J. Pure Appl. Algebra*, **39**:1-2 (1986), 119–123.

[82] R. Brown, G. J. Ellis, "Hopf formulae for the higher homology of a group", *Bull. London Math. Soc.*, **20**:2 (1988), 124–128.

[83] W. A. Bogley, M. A. Gutiérrez, "Mayer–Vietoris sequences homotopy of 2-complexes and in homology of groups", *J. Pure Appl. Algebra*, **77**:1 (1992), 39–65.

[84] A. J. Duncan, G. J. Ellis, N. D. Gilbert, "A Mayer–Vietoris sequence in group homology and the decomposition of relation modules", *Glasgow Math. J.*, **37**:2 (1995), 159–171.

[85] H.-J. Baues, "Quadratic homology", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **351**:2 (1999), 429–475.

[86] J. Milnor, "On the construction $F(K)$", *Algebraic Topology – A Student Guide*, ed. J.F. Adams, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1957, 119–136.

[87] E. B. Curtis, "Some nonzero homotopy groups of spheres", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 541–544.

[88] H. Toda, *Composition Methods in Homotopy Groups of Spheres*, Ann. of Math. Studies, **49**, Princeton Uni. Press, Princeton, NJ, 1962.

[89] G. Nishida, "The nilpotency of elements of the stable homotopy groups of spheres", *J. Math. Soc. Japan*, **25**:4 (1973), 707–732.

Научное издание

Современные проблемы математики

Выпуск 18

Роман Михайлов

Гомотопические и комбинаторные аспекты теории нормальных рядов в группах

Компьютерная верстка: *Ю. А. Пупырев*

Подписано в печать 19.06.2013. Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
`http://www.mathnet.ru/spm/` e-mail: `pupyrev@mi.ras.ru`