Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

M. I. Dyachenko, On some conditions for local smoothness of functions,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1982, Number 1, 10–18

https://www.mathnet.ru/eng/ivm6744

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.173
December 11, 2025, 22:07:24

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1982 МАТЕМАТИКА № 1 (236)

М. И. Дьяченко

УДК 517.52

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ ЛОКАЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИЙ

§ 1. Введение

В статье рассматривается одно условие локальной гладкости функций и его роль в суммируемости ряда Фурье в точке. Всюду ниже мы будем считать функцию $f(x)$ суммируемой и 2π-периодической. Пусть

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg}(t/2)}\, dt.$$

И. И. Приваловым (см. [1], с. 528) было доказано, что если $f(x) \in L(0, 2\pi)$, то $\tilde{f}(x)$ существует почти всюду. Через $\omega(t)$ будем обозначать функцию типа модуля непрерывности, т. е.:

1) $\omega(t)$ определена и непрерывна на $[0, \infty)$;
2) $\omega(0) = 0$;
3) $\omega(t) \uparrow$ при $t \in [0, \infty)$;
4) $\omega(t_1 + t_2) \leqslant \omega(t_1) + \omega(t_2)$ при $t_1, t_2 \geqslant 0$.

В частности, функция $\omega(t)$ может удовлетворять еще и таким условиям:

1) существует постоянная $A_1 > 1$ такая, что

$$1 < \varliminf_{\delta \to +0} (\omega(A_1\delta)/\omega(\delta)); \tag{1}$$

2) существует число $\beta \in (0, 1]$ и число $A_2 > 1$ такие, что

$$\varlimsup_{\delta \to +0} (\omega(A_2\delta)/\omega(\delta)) < A_2^{\beta}. \tag{1°}$$

Условия (1) и (1°) (для $\beta = 1$) были введены С. М. Лозинским в [2], а позднее рассматривались Н. К. Бари и С. Б. Стечкиным в работах [3] и [4].

Пусть точка $x_0 \in [0, 2\pi]$ и число $p \in (1, \infty]$. Будем говорить, что $f(x) \in H(\omega, p, x_0)$, если $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$,

$$\left(\frac{1}{u} \int_0^u |f(x_0 + t) - f(x_0)|^p\, dt\right)^{1/p} \leqslant \omega(|u|) \text{ при } |u| \leqslant \pi,$$

когда $p < \infty$, и $|f(x_0 + u) - f(x_0)| \leqslant \omega(|u|)$ при $|u| \leqslant \pi$, когда $p = \infty$.

Теорема 1. *Пусть число $p \in (1, \infty)$, а точка $x_0 \in [0, 2\pi]$. Тогда для того чтобы из условия $f(t) \in H(\omega, p, x_0)$ следовало, что $\tilde{f}(t) \in H(C_1\omega, p, x_0)$, где постоянная C_1 зависит лишь от функции $\omega(u)$ и p, необходимо и достаточно, чтобы функция $\omega(u)$ удовлетворяла условиям* (1) *и* (1°) для $\beta = 1$.

В § 2 мы докажем достаточность. Что касается необходимости, то она, по существу, доказана в работе [4] (см. лемму 8 на с. 515—518).

Обозначим n-е (C, α)-средние ряда Фурье функции $f(t)$ в точке x_0 через $\sigma_n^{\alpha}(f, x_0)$.

В § 3 будет доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть точка $x_0 \in [0, 2\pi]$, число $\alpha \in (0, 1]$ и число $p \in (1, \infty]$. Тогда для того чтобы для любой функции $f(t) \in H(\omega, p, x_0)$ выполнялась оценка $|f(x_0) - \sigma_n^{\alpha}(f, x_0)| \leqslant C_2\omega(1/n)$ при $n \geqslant 1$, где постоянная C_2 зависит лишь от p, α и функции $\omega(u)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\omega(u)$ удовлетворяла условию* (1°) *для* $\beta = \alpha$.

При доказательстве необходимости мы будем пользоваться лишь тем, что C_2 не зависит от n.

Не ограничивая общности, будем считать, что $x_0 = 0$ и $f(x_0) = 0$. Случай $\omega(t) \equiv 0$ мы исключим из рассмотрения. При доказательстве достаточности в теореме 2 будем считать $p < \infty$.

§ 2. О сопряженных функциях

Докажем несколько вспомогательных утверждений. Прежде всего сформулируем две леммы, доказанные Н. К. Бари и С. Б. Стечкиным (см. [4], сс. 494 и 497).

Лемма А. *Если функция* $\omega(u)$ *удовлетворяет условию* (1), *то*

$$\int_0^u \frac{\omega(t)}{t}\,dt \leqslant C_3\omega(u) \text{ при } u \in (0, \pi],$$

где постоянная C_3 *зависит лишь от функции* $\omega(t)$.

Лемма Б. *Если непрерывная и возрастающая на* $[0, \infty)$ *функция* $\varphi(t)$, *обращающаяся в* 0 *при* $t = 0$, *обладает тем свойством, что для некоторого* $A_3 > 1$ *и целого* $k \geqslant 1$ *выполняется неравенство*

$$\overline{\lim_{\delta \to +0}} \frac{\varphi(A_3\delta)}{\varphi(\delta)} < A_3^k, \tag{2}$$

то

$$u^k \int_u^\pi \frac{\varphi(t)}{t^{k+1}}\,dt \leqslant C_4\varphi(u) \quad \textit{при } u \in (0, \pi], \tag{3}$$

где постоянная C_4 *зависит лишь от функции* $\varphi(t)$; *и обратно, выполнение неравенства* (3) *при всех* $u \in (0; \pi]$ *влечет существование числа* $A_3 > 1$, *для которого выполнено* (2).

Теперь докажем два утверждения.

Лемма 1. *Пусть число* $p \in (1, \infty)$, *функция* $\omega(t)$ *удовлетворяет условию* (1), *а функция* $f(t) \in H(\omega, p, 0)$. *Тогда*

$$\left| \int_{-2u}^{2u} \frac{f(t)}{2\operatorname{tg}(t/2)}\,dt \right| \leqslant C_5\omega(|u|) \quad \textit{при } |u| \leqslant \pi,$$

где постоянная C_5 *зависит лишь от функции* $\omega(u)$ *и* p.

Доказательство. Пусть $u > 0$. Рассмотрим выражение (см. лемму А):

$$\left|\int_0^{2u} \frac{f(t)}{2\operatorname{tg}(t/2)}\,dt\right| \leqslant \int_0^{2u} \frac{|f(t)|}{t}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{u\cdot 2^{-k}}^{u\cdot 2^{-k+1}} \frac{|f(t)|}{t}\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{u\cdot 2^{-k}}^{u\cdot 2^{-k+1}} |f(t)|^p\,dt \right)^{1/p} \times$$

$$\times \left(\int_{u\cdot 2^{-k}}^{u\cdot 2^{-k+1}} t^{-p/(p-1)}\,dt \right)^{(p-1)/p} \leqslant p \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^k}{u} \int_{u\cdot 2^{-k}}^{u\cdot 2^{-k+1}} |f(t)|^p\,dt \right)^{1/p} \leqslant 2p \sum_{k=0}^{\infty} \omega(u\cdot 2^{-k+1}) \leqslant$$

$$\leqslant 8p \sum_{k=0}^{\infty} \int_{u\cdot 2^{-k}}^{u\cdot 2^{-k+1}} \frac{\omega(t)}{t}\,dt = 8p \int_0^{2u} \frac{\omega(t)}{t}\,dt \leqslant 8pC_3\omega(2u) \leqslant 16pC_3\omega(u).$$

Интеграл $\displaystyle\int_{-2u}^{0} \frac{f(t)}{2\operatorname{tg}(t/2)}\,dt$ оценивается совершенно аналогично.

Заметим, что из условий леммы следует существование $\tilde{f}(0)$.

Для отрицательных u все аналогично, и лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть число* $p \in (1, \infty)$, *число* $\alpha \in (0, 1]$, *функция* $\omega(t)$ *удовлетворяет условию* (1°) *для* $\beta = \alpha$ *и функция* $f(t) \in H(\omega, p, 0)$. *Тогда*

$$u^\alpha \int_u^\pi \frac{|f(t)|}{t^{1+\alpha}}\, dt \leqslant C_6 \omega(u) \text{ при } u \in (0, \pi],$$

где постоянная C_6 *зависит лишь от* p, α *и функции* $\omega(u)$.

Доказательство. Выберем целое $m \geqslant 1$ так, что $\pi \cdot 2^{-m} < u \leqslant \pi \cdot 2^{-m+1}$. Тогда

$$u^\alpha \int_u^\pi \frac{|f(t)|}{t^{1+\alpha}}\, dt \leqslant u^\alpha \sum_{k=1}^m \int_{\pi \cdot 2^{-k}}^{\pi \cdot 2^{-k+1}} \frac{|f(t)|}{t^{1+\alpha}}\, dt \leqslant u^\alpha \sum_{k=1}^m \Big(\int_{\pi \cdot 2^{-k}}^{\pi \cdot 2^{-k+1}} |f(t)|^p\, dt \Big)^{1/p} \times$$

$$\times \Big(\int_{\pi \cdot 2^{-k}}^{\pi \cdot 2^{-k+1}} t^{-(1+\alpha)(1+1/(p-1))}\, dt \Big)^{(p-1)/p} \leqslant p u^\alpha \sum_{k=1}^m \Big(\frac{2^k}{\pi}\Big)^\alpha \Big(\frac{2^k}{\pi} \int_{\pi \cdot 2^{-k}}^{\pi \cdot 2^{-k+1}} |f(t)|^p\, dt \Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant 2pu^\alpha \sum_{k=1}^m \Big(\frac{2^k}{\pi}\Big)^\alpha \omega(\pi \cdot 2^{-k+1}) \leqslant 16p(\pi \cdot 2^{-m})^\alpha \int_{\pi \cdot 2^{-m}}^\pi \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}\, dt =$$

$$= 16p(\pi \cdot 2^{-m})^\alpha \int_{\pi \cdot 2^{-m}}^\pi \frac{\omega(t)\, t^{1-\alpha}}{t^2}\, dt.$$

Ясно, что функция $\omega(t)\, t^{1-\alpha}$ удовлетворяет условию (1°) для $\beta = 1$, а тогда по лемме Б (для $k = 1$) имеем

$$u^\alpha \int_u^\pi \frac{|f(t)|}{t^{1+\alpha}}\, dt \leqslant 16pC_4 (\pi \cdot 2^{-m})^{\alpha-1} \omega\Big(\frac{\pi}{2^m}\Big) (\pi \cdot 2^{-m})^{1-\alpha} \leqslant 16pC_4 \omega(u).$$

Теперь докажем достаточность в теореме 1. Теорему достаточно доказать для $0 < u < \pi/4$. Оценим при $0 < x < u$ выражение (см. лемму 2):

$$\Big| \int_{2u}^\pi \frac{f(t)}{2\,\mathrm{tg}\,(t/2)}\, dt - \int_{2u}^\pi \frac{f(t)}{2\,\mathrm{tg}\,((t-x)/2)}\, dt \Big| = \Big| \int_{2u}^\pi f(t)\, \frac{\mathrm{tg}\,(t/2) - \mathrm{tg}\,((t-x)/2)}{2\,\mathrm{tg}\,(t/2)\,\mathrm{tg}\,((t-x)/2)}\, dt \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{2u}^\pi |f(t)|\, \frac{|\sin(t/2)\cos((t-x)/2) - \sin((t-x)/2)\cos(t/2)|}{2\sin(t/2)\sin((t-x)/2)}\, dt \leqslant \frac{\pi^2}{4} \int_{2u}^\pi |f(t)|\, \frac{2\sin(x/2)}{t(t-x)}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi^2}{2}\, x \int_{2u}^\pi \frac{|f(t)|}{t^2}\, dt \leqslant C_7 \omega(u), \tag{4}$$

где постоянная C_7 зависит лишь от p и функции $\omega(t)$. Аналогично:

$$\Big| \int_{-\pi}^{-2u} \frac{f(t)}{2\,\mathrm{tg}\,(t/2)}\, dt - \int_{-\pi}^{-2u} \frac{f(t)}{2\,\mathrm{tg}\,((t-x)/2)}\, dt \Big| \leqslant C_7 \omega(u). \tag{5}$$

Далее ясно, что $f(x) = f(x)\chi_{[-2u, 2u]}(x) + f(x)(1 - \chi_{[-2u, 2u]}(x)) = f_1(x) + f_2(x)$. Отсюда получим

$$\left(\frac{1}{u}\int_0^u |\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{1}{u}\int_0^u |\tilde{f}_2(x)-\tilde{f}_2(0)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\frac{1}{u}\int_0^u |\tilde{f}_1(x)|^p dx\right)^{1/p} +$$

$$+\left(\frac{1}{u}\int_0^u |\tilde{f}_1(0)|^p dx\right)^{1/p} = I_1 + I_2 + I_3. \tag{6}$$

По лемме 1 имеем

$$I_3 \leqslant C_5\omega(u). \tag{7}$$

Из неравенств (4) и (5) вытекает, что

$$I_1 \leqslant 2C_7\omega(u). \tag{8}$$

Наконец, по теореме М. Рисса (см. [1], с. 566):

$$I_2 \leqslant \left(\frac{1}{u}\right)^{1/p}\left(\int_0^{2\pi} |\tilde{f}_1(x)|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{1}{u}\right)^{1/p} A_p\left(\int_0^{2\pi} |f_1(x)|^p dx\right)^{1/p} =$$

$$= A_p\left(\frac{1}{u}\int_{-2u}^{2u} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \leqslant 4A_p\omega(u), \tag{9}$$

где постоянная A_p зависит только от p. Из формул (6) — (9) вытекает утверждение теоремы.

Следствие 1. *Если точка* $x_0 \in [0, 2\pi]$, *функция* $\omega(u)$ *удовлетворяет условиям* (1) *и* (1°) *для* $\beta = 1$ *и* $|f(x_0+t)-f(x_0)| \leqslant \omega(|t|)$ *при* $|t| \leqslant \pi$, *то*

$$u^{-1}\int_0^u |\tilde{f}(t)-\tilde{f}(0)|\,dt \leqslant C_8\omega(|u|) \text{ при } |u| \leqslant \pi.$$

Доказательство. Имеем (см. теорему 1):

$$u^{-1}\int_0^u |\tilde{f}(t)-\tilde{f}(0)|\,dt \leqslant \left(u^{-1}\int_0^u |\tilde{f}(t)-\tilde{f}(0)|^2 dt\right)^{1/2}\left(u^{-1}\int_0^u dt\right)^{1/2} \leqslant C_1\omega(|u|).$$

§ 3. О суммируемости рядов Фурье

Лемма 3. *Пусть число* $\alpha \in (0, 1)$, *целое число* $n \geqslant 1$, *а числа* $u, v \in [1/n, \pi]$, *причем* $u < v/40$. *Тогда, если*

$$I_1 = \int_u^v \frac{\omega(t)}{t}\sin^2\frac{n+1}{2}t\,dt,$$

а

$$I_\alpha = \int_u^v \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}\left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right)t-\frac{1}{2}\pi\alpha\right)\right| dt,$$

то

$$I_1 \geqslant C_9\int_u^v \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt$$

и

$$I_\alpha \geqslant C_\alpha\int_u^v \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}\,dt,$$

где постоянная C_α *зависит лишь от* α.

Доказательство. Доказательства обоих неравенств проводятся аналогично, поэтому мы ограничимся доказательством первого. Положим при $k=1, 2, \ldots, n+3$ $t_k=(\pi/2(n+1))(2k-1)$. Пусть $t_m \leqslant 2u < t_{m+1}$ и $t_l \leqslant v < t_{l+1}$. Так как $1/n \leqslant u < v/40$, то между $m+1$ и l есть нечетное число. Ясно, что при любом $n+1 \geqslant k > 2$ справедливо неравенство

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t_k} - \frac{1}{t_{k+1}} = \frac{2(n+1)}{\pi} \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} \geqslant \frac{1}{20} \frac{2(n+1)\cdot 8}{\pi(2k-5)(2k+3)} =$$

$$= \frac{1}{20}\left(\frac{1}{t_{k-2}} - \frac{1}{t_{k+2}}\right) = \frac{1}{20}\int_{t_{k-2}}^{t_{k+2}} \frac{dt}{t^2}.$$

Отсюда вытекает, что

$$I_1 \geqslant \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \text{ нечетно}}}^{l} \frac{1}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\omega(t)}{t^2} dt \geqslant \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \text{ нечетно}}}^{l} \omega(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{t^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{40} \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \text{ нечетно}}}^{l} \omega(t_k) \int_{t_{k-2}}^{t_{k+2}} \frac{dt}{t^2} \geqslant \frac{1}{200} \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \text{ нечетно}}}^{l} \omega(t_{k+2}) \int_{t_{k-2}}^{t_{k+2}} \frac{dt}{t^2} \geqslant \frac{1}{200} \int_{2u}^{v} \frac{\omega(t)}{t^2} dt \geqslant \frac{1}{600} \int_{u}^{v} \frac{\omega(t)}{t^2} dt,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Пусть число* $\alpha \in (0, 1)$, *а функция* $f(x)$ *такова, что* $|f(x_0) - \sigma_n^\alpha(f, x_0)| \leqslant \omega(1/n)$ *при всех* n. *Тогда существует постоянная* Λ, *не зависящая от* n, *такая, что* $|f(x_0) - \sigma_n^1(f, x_0)| \leqslant \Lambda\omega(1/n)$.

Доказательство. Справедливы формулы (см. [5], с. 130): $\sigma_n^\alpha = S_n^\alpha / A_n^\alpha$, коэффициент $A_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{k=0}^{n} A_k^\alpha A_{n-k}^\beta$ и $S_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{k=0}^{n} S_k^\alpha A_{n-k}^\beta$, где $\alpha, \beta > -1$, причем $A_n^\alpha| \leqslant C_{10} n^\alpha$, где постоянная C_{10} зависит лишь от α. Заметим также, что по лемме Б (при $k=2$), примененной к функции $\omega(t)t^{1-\alpha}$, получаем

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} \int_{1/n}^{1} \frac{\omega(t)}{t^{2+\alpha}} dt \leqslant C_5 \omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{10}$$

Отсюда, т. к. $A_n^\beta > 0$ при $\beta > -1$ и $n \geqslant 0$ (см. также (10)),

$$|f(x_0) - \sigma_n^1(f, x_0)| = \frac{1}{n+1} |A_n^1 f(x_0) - S_n^1(f, x_0)| = \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{n} A_k^\alpha A_{n-k}^{-\alpha} f(x_0) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{n} S_k^\alpha A_{n-k}^{-\alpha} \right| = \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{n} A_k^\alpha A_{n-k}^{-\alpha} (f(x_0) - \sigma_k^\alpha(f, x_0)) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{[n/2]} A_k^\alpha A_{n-k}^{-\alpha} \omega\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=[n/2]+1}^{n} A_k^\alpha A_{n-k}^{-\alpha} \omega\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{C_{11}}{u} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{12}}{n^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \omega\left(\frac{1}{k}\right) + C_{13}\omega\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} A_k^\alpha A_{n-k}^{-\alpha} + \frac{C_{11}}{n} \leqslant$$

$$\leqslant C_{14} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \int_{1/n}^{1} \frac{\omega(t)}{t^{2+\alpha}} dt + C_{15}\omega\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant C_{16}\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

где постоянные $C_{11} - C_{16}$ не зависят от n.

Приступим к доказательству теоремы 2. Вначале докажем достаточность. Через $K_n^\alpha(t)$ при $\alpha \in (0, 1]$ и $n \geqslant 0$ обозначим ядра метода (C, α). Известно (см. [5], с. 157), что

$$|K_n^\alpha(t)| \leqslant 2n \tag{11}$$

и

$$|K_n^\alpha(t)| \leqslant A_\alpha n^{-\alpha} |t|^{-(\alpha+1)} \text{ при } |t| \leqslant \pi, \tag{12}$$

где постоянная A_α зависит лишь от α. Рассмотрим выражение

$$|f(0) - \sigma_n^\alpha(f, 0)| = |\sigma_n^\alpha(f, 0)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi (f(t) + f(-t)) K_n^\alpha(t)\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{1/n} |f(t) + f(-t)|\, |K_n^\alpha(t)|\, dt + \frac{1}{\pi}\int_{1/n}^\pi |f(t) + f(-t)|\, |K_n^\alpha(t)|\, dt = I_1 + I_2. \tag{13}$$

Воспользовавшись неравенством (11), получим

$$I_1 \leqslant \frac{1}{\pi} 2n\left(\int_0^{1/n} |f(t)|\, dt + \int_0^{1/n} |f(-t)|\, dt\right) \leqslant \frac{2n}{\pi}\left(\left(\int_0^{1/n} |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^{1/n} |f(-t)|^p\, dt\right)^{1/p}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{(p-1)/p} \leqslant \frac{2}{\pi}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{14}$$

Кроме того (см. (12) и лемму 2):

$$I_2 \leqslant \frac{A_\alpha n^{-\alpha}}{\pi}\left(\int_{1/n}^\pi \frac{|f(t)|}{t^{1+\alpha}}\, dt + \int_{1/n}^\pi \frac{|f(-t)|}{t^{1+\alpha}}\, dt\right) \leqslant C_{17}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{15}$$

где постоянная C_{17} зависит лишь от p, α и функции $\omega(t)$. Из формул (13) — (15) следует достаточность условий теоремы.

Докажем теперь необходимость. Пусть вначале $\alpha = 1$. Предположим, что условие (1°) для $\beta = 1$ нарушено. Тогда по лемме Б существует последовательность $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $\theta_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$ и

$$\theta_n \int_{\theta_n}^\pi \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt = \omega(\theta_n) M_n, \tag{16}$$

где $M_n \uparrow \infty$ при $n \to \infty$. Выберем целые числа m_n так, что

$$1/m_n \leqslant \theta_n < 1/(m_n - 1). \tag{17}$$

Рассмотрим четную, 2π-периодическую функцию $f(x)$, определенную при $x \in [0, \pi]$ равенством

$$f(x) = \omega(x). \tag{18}$$

Для нее справедлива оценка (см. (18), лемму 3, (16) и (17)):

$$|\sigma_{m_n}^1(f, 0) - f(0)| = \sigma_{m_n}^1(f, 0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \omega(t) K_{m_n}^1(t)\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi m_n} \int\limits_{\theta_n}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2} \sin^2 \frac{m_n+1}{2} t dt \geqslant C_{18} \frac{1}{m_n} \int\limits_{\theta_n}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2} dt =$$

$$= C_{18} \frac{1}{\theta_n m_n} \omega(\theta_n) M_n \geqslant C_{19} \omega\left(\frac{1}{m_n}\right) M_n,$$

если n достаточно велико, где постоянные C_{18} и C_{19} положительны. Таким образом, при $\alpha = 1$ теорема 2 доказана полностью.

Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Тогда по лемме 4 и доказанному выше для функции $\omega(t)$ выполнено условие (1°) для $\beta = 1$. Докажем, что оно выполняется и для $\beta = \alpha$. Предположим, что это не так. Тогда для функции $\varphi(t) = \omega(t) t^{1-\alpha}$ условие (1°) при $\beta = 1$ не выполнено. Применив лемму Б, мы докажем существование последовательности $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что $\tau_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$ и

$$\tau_n \int\limits_{\tau_n}^{\pi} \frac{\omega(t) t^{1-\alpha}}{t^2} dt = \tau_n \int\limits_{\tau_n}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt = \omega(\tau_n) \tau_n^{1-\alpha} M_n$$

или

$$\tau_n^{\alpha} \int\limits_{\tau_n}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt = \omega(\tau_n) M_n, \tag{19}$$

где $M_n \uparrow \infty$ при $n \to \infty$. Рассмотрим целые числа m_n такие, что

$$1/m_n \leqslant \tau_n < 1/(m_n - 1). \tag{20}$$

Выберем из последовательности $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ подпоследовательность $\{\tau_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом (для краткости вместо m_{n_k} будем писать m_k):

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ n_1 = 1; \\ 2)\ \text{число } m_k > 40 (m_{k-1})^{2(2+\alpha)/\alpha} \text{ при } k = 2, 3, \ldots; \\ 3)\ \displaystyle\int\limits_{m_k^{-1}}^{m_{k-1}^{-1}} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt \geqslant \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \int\limits_{m_k^{-1}}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt \text{ при } k = 2, 3, \ldots \end{array}\right\} \tag{21}$$

Известно (см. [5], с. 159), что при $\alpha \in (0, 1)$ ядро

$$K_n^{\alpha}(t) = \frac{1}{A_n^{\alpha}} \frac{\sin((n + 1/2 + \alpha/2) t - (1/2) \pi\alpha)}{(2 \sin(t/2))^{\alpha+1}} + \frac{2\theta_n(t) \alpha}{n (2 \sin(t/2)^2} \tag{22}$$

при $t \in [-\pi, \pi]$, где $|\theta_n(t)| \leqslant 1$. Обозначим $q_n(t) = (n + 1/2 + \alpha/2) t - \pi\alpha/2$. Определим при $x \in [0, \pi]$ четную, 2π-периодическую функцию $f(x)$:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x \in (1/m_1, \pi]; \\ \omega(x) \operatorname{sign}(\sin q_{m_k}(x)) \text{ при } x \in (m_k^{-1}, m_{k-1}^{-1}], \text{ где } k = 2, 3, \ldots \end{array}\right\} \tag{23}$$

Ясно, что при любом $p \in (1, \infty]$ функция $f(x) \in H(\omega, p, 0)$. Рассмотрим выражение (см. (22) и (23)):

$$|\sigma_{m_k}^{\alpha}(f, 0) - f(0)| = |\sigma_{m_k}^{\alpha}(f, 0)| \geqslant -\frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{m_k^{-1}} \omega(t) |K_n^{\alpha}(t)| dt -$$

$$-\frac{2}{\pi}\frac{1}{A^{\alpha}_{m_k}}\left|\int\limits_{m_{k-1}^{-1}}^{\pi} f(t)\frac{\sin q_{m_k}(t)}{(2\sin(t/2))^{1+\alpha}}dt\right|+\frac{2}{\pi A^{\alpha}_{m_k}}\int\limits_{m_k^{-1}}^{m_{k-1}^{-1}}\omega(t)\frac{|\sin q_{m_k}(t)|}{(2\sin(t/2))^{1+\alpha}}dt-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_{m_k^{-1}}^{\pi}\omega(t)\frac{2|\theta_{m_k}(t)|^{\alpha}}{m_k 4\sin^2(t/2)}dt=-I_1-I_2+I_3-I_4. \tag{24}$$

В силу неравенства (11) имеем

$$I_1\leqslant\frac{4m_k}{\pi m_k}\omega\left(\frac{1}{m_k}\right)=\frac{4}{\pi}\omega\left(\frac{1}{m_k}\right). \tag{25}$$

Так как по доказанному выше для функции $\omega(t)$ выполнено условие (1°) для $\beta=1$, то по лемме Б получим, что

$$I_4\leqslant\frac{\pi}{m_k}\int\limits_{m_k^{-1}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\leqslant C_{20}\omega\left(\frac{1}{m_k}\right), \tag{26}$$

где постоянная C_{20} зависит лишь от функции $\omega(u)$. Далее, пусть I_l^r обозначает интервал знакопостоянства функции $\sin(q_{m_l}(t))$, пересеченный с отрезком $[m_l^{-1}, m_{l-1}^{-1}]$, для $l=2, 3, \ldots$

Тогда

$$I_2\leqslant\frac{2}{\pi A^{\alpha}_{m_k}}\sum_{n=1}^{k-1}\sum_{r:\,I_n^r\neq\varnothing}\left|\int\limits_{I_n^r}\omega(t)\frac{\sin q_{m_k}(t)}{(2\sin(t/2))^{1+\alpha}}dt\right|. \tag{27}$$

Заметим, что если $\mu(n)$ — число непустых интервалов I_n^r, то

$$\mu(n)\leqslant 2m_n. \tag{28}$$

Кроме того, дважды применяя вторую теорему о среднем, получим

$$\left|\int\limits_{I_n^n}\omega(t)\frac{\sin q_{m_k}(t)}{(2\sin(t/2))^{1+\alpha}}dt\right|=\left|\int\limits_a^b\omega(t)\frac{\sin q_{m_k}(t)}{(2\sin(t/2))^{1+\alpha}}dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(2\sin(a/2))^{1+\alpha}}\sup_{\xi\in[a,b]}\left|\int\limits_a^{\xi}\omega(t)\sin q_{m_k}(t)\,dt\right|\leqslant\frac{\pi^{1+\alpha}}{2^{1+\alpha}a^{1+\alpha}}\omega(b)\times$$

$$\times\sup_{[a',b']\subset[a,b]'}\left|\int\limits_{a'}^{b'}\sin\left(\left(m_k+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)t-\frac{\pi\alpha}{2}\right)dt\right|\leqslant\pi^2 m_n^{1+\alpha}\omega(\pi)\frac{1}{m_k}.$$

Отсюда (см. (27), (28) и (21)) получим, что

$$I_2\leqslant C_{21}\left(\frac{1}{m_k}\right)^{1+\alpha/2}\frac{m_{k-1}^{1+\alpha}}{m_k^{(1/2)\alpha}}\sum_{n=1}^{k-1}m_n\leqslant C_{22}\left(\frac{1}{m_k}\right)^{1+\alpha/2}\frac{m_{k-1}^{2+\alpha}}{m_k^{(1/2)\alpha}}\leqslant$$

$$\leqslant C_{22}\left(\frac{1}{m_k}\right)^{1+\alpha/2}\leqslant C_{23}\omega\left(\frac{1}{m_k}\right), \tag{29}$$

где постоянные $C_{21}-C_{23}$ зависят лишь от функции $\omega(t)$. Наконец, применяя лемму 3 и неравенства (21), (20) и (19), получим, что

$$I_3 \geqslant C_{24} m_k^{-\alpha} \int\limits_{m_k^{-1}}^{m_{k-1}^{-1}} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}\, dt \geqslant C_{24} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} m_k^{-\alpha} \int\limits_{m_k^{-1}}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}\, dt \geqslant$$

$$\geqslant C_{25} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \tau_{n_k}^{\alpha} \int\limits_{\tau_{n_k}}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}\, dt \geqslant C_{25}\, \omega(\tau_{n_k}) \sqrt{M_{n_k}} \geqslant C_{25}\, \omega\left(\frac{1}{m_k}\right) \sqrt{M_{n_k}}, \tag{30}$$

где постоянные C_{24} и C_{25} зависят лишь от α и функции $\omega(u)$. Рассматривая формулы (24) — (26), (29) и (30), получим, что

$$|\sigma_{m_k}^{\alpha}(f, 0) - f(0)| \geqslant \frac{C_{25}}{2}\, \omega\left(\frac{1}{m_k}\right) \sqrt{M_{n_k}},$$

если k достаточно велико. Мы получили искомое противоречие.

Автор глубоко признателен профессору П. Л. Ульянову за постановку задач и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н. К. Тригонометрические ряды.— М., 1961.— 935 с.
2. Лозинский С. М. Обращение теорем Джексона.— ДАН СССР, 1952, т. 83, № 5, с. 645—647.
3. Бари Н. К. О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций.— Изв. АН СССР, 1955, т. 19, № 5, с. 285—302.
4. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1956, т. 5, с. 483—522.
5. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1.— М., 1965.— 615 с.

г. Москва

Поступила
26 X 1979

М. В. Левит, А. Н. Чурилов. Об оценках некоторых функционалов от решений матричных неравенств, встречающихся в теории управления

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Рассматриваются специальные матричные уравнения теории управления (уравнения Лурье) и связанные с ними матричные неравенства. Получены оценки значений функционалов, рассматриваемых на множестве решений матричных неравенств. Доказательства основных результатов опираются на теорию квадратичных матричных уравнений и аппарат частотных методов теории управления. Установленные оценки могут быть использованы для исследования нелинейных систем автоматического управления, в том числе систем с параметрическим белошумным возмущением. (Работа поступила в журнал „Математика“ 25 V 1981.)

А. Д. Нахман, Б. П. Осиленкер. Оценки весовых норм некоторых операторов, порожденных кратными тригонометрическими рядами Фурье

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

В работе изучаются линейные полунепрерывные средние кратных рядов Фурье функций n переменных из весовых пространств L_{ω}^{p} $(p \geqslant 1)$.

Если функция $\omega(x)$ удовлетворяет известному A_p-условию, то для рассматриваемых средних получены весовые оценки сильного и слабого типа, причем для методов Чезаро и Пуассона—Абеля A_p-условие на вес является не только достаточным, но и необходимым. Получены также утверждения о суммируемости почти всюду и по метрике L_{ω}^{p}. (Работа поступила в журнал „Математика“ 1 VII 1980.)