И. Л. Гуревич, О разрешимости задачи обтекания профиля тяжелой жидкостью,
Изв. вузов. Матем., 1984, номер 10, 33–41

https://www.mathnet.ru/ivm8349

И. Л. Гуревич УДК 517.958

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В работе обобщаются результаты, полученные в [1] для симметричного или выпуклого профиля. Постановка задачи дается в п. 1. В п. 2 строится комплексный потенциал течения, в п. 3 исследуется вспомогательная краевая задача в кольце для функции Жуковского, в п. 4 выводится уравнение для параметра d (связанного с положением образа некоторой фиксированной точки профиля), а в п. 5 выводятся уравнения для функций $u(\sigma)$ и $s(t)$ (u — производная от логарифма скорости, s — дуговая координата на профиле), характеризующих граничное соответствие между кольцом и областью течения соответственно на внешней и внутренней окружностях. Пункт 6 посвящен изучению некоторых свойств гладкости введенных в пп. 2, 3 линейных интегральных операторов. В п. 7 выведенная ранее система трех нелинейных уравнений заменяется операторным уравнением вида $x = T_k x$ и доказывается, что вполне непрерывный оператор T_k оставляет инвариантным некоторое функциональное пространство E. Здесь же получаются априорные оценки величин $|u|$, $|d|$. В п. 8 выводится оценка гёльдеровской нормы функции $s(t)$; наконец, в п. 9 с помощью принципа Лере — Шаудера доказывается теорема существования.

1. Рассматривается течение жидкости в двусвязной области $D_{z'}$ плоскости $z' = x' + iy'$. Внутренней границей $D_{z'}$ является замкнутый профиль $L_{z'}$, а внешняя $S_{z'}$ состоит из горизонтальной прямой S^1 и свободной линии тока S^2 с горизонтальными асимптотами; давление на S^2 постоянно. Ось x' совпадает с S^1, ось y' направлена вверх, течение на бесконечности направлено вдоль оси x'.

Через A, B обозначим точки, где $x' = -\infty$ и $x' = \infty$ соответственно, через C — некоторую фиксированную точку профиля. Примем также следующие обозначения: v — скорость; $v_0 = v(A)$; g — ускорение силы тяжести; s' — длина дуги на $L_{z'}$, отсчитываемая от C против часовой стрелки; L — длина $L_{z'}$; $s = s'/L$; $\Psi(s)$ — угол между касательной к $L_{z'}$ и осью x'; Γ — циркуляция скорости вдоль $L_{z'}$.

Введем комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$; $w(z')$ — многозначная функция, получающая приращение Γ при каждом обходе $L_{z'}$, причем $\psi = 0$ на S^1, $\psi = Q$ на S^2, $\psi = \text{const}$ на $L_{z'}$. Пусть $D_{z'}$ конформно соответствует кольцу $D_\zeta = \{\zeta : 1 < |\zeta| < R\}$ в плоскости $\zeta = re^{i\sigma}$, причем образом $L_{z'}$ является окружность $|\zeta| = 1$, $\zeta(A) = Re^{i\alpha}$, $\zeta(B) = Re^{-i\alpha}$ $(0 < \alpha < \pi)$. Будем считать известными параметры Q, Γ, v_0, g, R, α и функцию $\Psi(s)$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$; задача заключается в отыскании L, $w(\zeta)$, $z'(\zeta)$. Ниже будет доказана ее разрешимость при достаточно малых значениях параметров $1/R$, $\lambda = Qg/v_0^3$, $\gamma = \Gamma/Q$ (в частности, будем считать $R > 2$). Предполагается, что $\Psi(s) = \Psi_1(s)$, где $\Psi_k(s)$ $(0 \leqslant k \leqslant 1)$ — семейство функций, обладающих следующими свойствами.

1°. Функция $\Psi_k(s)$ кусочно гёльдерова, причем ее точки разрыва s_j $(j = \overline{1, n})$, а также постоянная и показатель Гёльдера ν^* не зависят от k. На интервалах непрерывности Ψ_k непрерывно зависит от k.

2°. Каждая из кривых L_z^k с естественным уравнением

$$z(s) = \int_0^s \exp[-i\Psi_k(s)]\, ds \quad (0 \leqslant s \leqslant 1)$$

замкнута и проста; внутренние и внешние углы в точках излома L_z^k положительны. Кривая L_z^0 гладкая и выпуклая. Существует окружность l_z, лежащая внутри L_z^k при всех k.

По-видимому, такое семейство можно построить, если $\Psi(s)$ кусочно гёльдерова, а $L_{z'}$ — простая кривая с положительными углами в точках излома.

В дальнейшем будем рассматривать сразу все семейство задач, соответствующих семейству функций Ψ_k и ускорению силы тяжести kg.

2. Мы неоднократно будем использовать формулы решения задачи Шварца для функции $w(\zeta)=u+iv$ в кольце D_ζ, когда заданы $u(e^{i\sigma})=f_1(\sigma)$ и $u(Re^{i\sigma})=f_2(\sigma)$:

$$\begin{gathered} v(e^{i\sigma})=S[f_1]-A_1[f_1]-A_2[f_2]+a_0, \\ v(\mathrm{Re}^{i\sigma})=A_2[f_1]-S[f_2]+A_1[f_2]+a_0, \end{gathered} \tag{1}$$

$$S[u]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\operatorname{ctg}\frac{t-\sigma}{2}\,dt,\quad A_j[u]=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{u(t)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2R^{j-1}\sin k(t-\sigma)}{R^{2k}-1}\,dt.$$

Представим комплексный потенциал в виде $w=\Gamma(2\pi i)^{-1}\ln\zeta+w_0(\zeta)$. Тогда

$$\begin{gathered} \operatorname{Im}w_0(e^{i\sigma})=\mathrm{const},\ \operatorname{Im}w_0(Re^{i\sigma})=\Gamma(2\pi)^{-1}\ln R\ \ (|\sigma|>\alpha), \\ \operatorname{Im}w_0(Re^{i\sigma})=Q+\Gamma(2\pi)^{-1}\ln R\ \ (|\sigma|<\alpha). \end{gathered}$$

С помощью (1) получим

$$\varphi(R^ne^{i\sigma})=\frac{\Gamma}{2\pi}\sigma-\frac{2Q}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R^{nk}+R^{-nk}}{R^k-R^{-k}}\sin k\alpha\sin k\sigma+a_0\ \ (n=0,\ 1). \tag{2}$$

В дальнейшем через $a_j\,(j\geqslant 1)$ будем обозначать известные положительные постоянные, зависящие лишь от α. Заметим, что $w_0(\zeta)$ отображает D_ζ на полосу с прямолинейным разрезом конечной длины. Используя это, можно показать, что при выполнении условия

$$|\gamma|R<a_1 \tag{3}$$

$d\varphi(e^{i\sigma})/d\sigma$ обращается в нуль лишь в двух точках: $\sigma=\pm\sigma^*$. Отсюда легко получить, что $w(\zeta)$ отображает кольцо D_ζ, разрезанное по отрезку $\zeta=\pm r$ $(1\leqslant r\leqslant R)$, на область D_w, ограниченную ломаной со следующими вершинами (D_w при обходе остается слева)[1]:

$$\begin{gathered} M_1(-\infty,\ -b_1),\ M_2(\infty,\ -b_1),\ M_3(\infty,\ b_2),\ M_4(c_1,\ b_2),\ M_5(c_1,\ 0), \\ M_6(c_2,\ 0),\ M_7(-c_2,\ 0),\ M_8(-c_1,\ 0),\ M_9(-c_1,\ b_2),\ M_{10}(-\infty,\ b_2), \end{gathered}$$

где

$$c_2>0,\ b_{1,2}>0,\ c_1=-\Gamma/2<c_2,$$

причем точки $M_{6,7}$ соответствуют $\zeta_{1,2}=\exp(\pm\sigma^*)$. Поэтому $dw/d\zeta\neq 0$ в замкнутой области $\bar D_\zeta$, кроме точек $\zeta_{1,2}$, соответствующих точкам разветвления и схода потока на $L_{z'}$. Кроме того, из (2) получаем

$$\frac{d\varphi}{d\sigma}(e^{i\sigma})=QI(\sigma)\mu_0(\sigma),\ \mu_0=\sin\frac{\sigma-\sigma^*}{2}\sin\frac{\sigma+\sigma^*}{2},\ \ \frac{a_2}{R}<I<\frac{a_3}{R}; \tag{4}$$

$$\frac{d\varphi}{d\sigma}(Re^{i\sigma})=-\frac{Q}{2\pi}\frac{\sin\alpha}{\varkappa^2}+\frac{\Gamma}{2\pi}+QI_1(\sigma)\ \ (|\sigma|<\alpha),\ \ |I_1|<\frac{a_4}{R}, \tag{5}$$

$$\varkappa=\varkappa_1\varkappa_2,\ \varkappa_{1,2}=\sqrt{\sin\frac{\alpha\mp\sigma}{2}}.$$

3. Рассмотрим функцию

$$F(\zeta)=\theta+i\tau=i\ln(v_0^{-1}dw/dz).$$

---

[1] При $\Gamma>0$ область D_w двулистна.

Очевидно, $\tau = \ln(v/v_0)$. Легко видеть, что $\theta(Re^{i\sigma}) = 0$ ($|\sigma| > \alpha$). Пусть $\tau(Re^{i\sigma}) = h(\sigma)$ ($|\sigma| < \alpha$), $\theta(e^{i\sigma}) = f(\sigma)$. Считая h и f известными, найдем F. Для этого применим метод [2] с небольшими изменениями. Запишем граничное условие в виде $\mathrm{Re}\,[e^{i\nu}F] = c$, где $\nu = 0$, $c = f$ при $|\zeta| = 1$; $\nu = -\pi/2$, $c = -h$ при $|\zeta| = R$, $-\alpha < \sigma < 0$; $\nu = \pi/2$, $c = h$ при $|\zeta| = R$, $0 < \sigma < \alpha$; $\nu = c = 0$ при $|\zeta| = R$, $|\sigma| > \alpha$. Функцию ν будем рассматривать как граничное значение действительной части однозначной в D_ζ функции $\chi(\zeta) = \chi_1 + i\chi_2$. По формулам (1) найдем

$$\chi_2(R^n e^{i\sigma}) = \rho_n(\sigma) + n\ln\left|\frac{\sin\sigma/2}{\varkappa}\right| = \hat{\rho}_n(\sigma), \quad \left|\frac{d^k\rho_n}{d\sigma^k}\right| < \frac{a_5}{R} \quad (k,\ n = 0,\ 1). \tag{6}$$

Вводя обозначение $\Omega(\zeta) = Fe^{-i\chi}$, запишем граничное условие в виде $\mathrm{Re}\,\Omega = ce^{\chi_2}$. Вновь используя (1), найдем $\mathrm{Im}\,\Omega(R^n e^{i\sigma})$. Так как $\hat{\rho}_1(0) = -\infty$, то для ограниченности F потребуем $\mathrm{Im}\,\Omega(R) = 0$, откуда найдем константу a_0. В результате получим

$$\tau(e^{i\sigma}) = e^{-\rho_0}\,\mathrm{Im}\,\Omega = e^{-\rho_0}\{S[fe^{\rho}] + A_3[f] + A_4[h]\}, \tag{7}$$

$$\theta(Re^{i\sigma}) = e^{-\hat{\rho}_1}\,\mathrm{Im}\,\Omega = \varkappa e^{-\rho_1}\{S_1[he^{\rho_1}] + A_5[f] + A_6[h]\} \quad (|\sigma| < \alpha), \tag{8}$$

$$S_1[u] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{u(t)\,dt}{\varkappa(t)\sin((t-\sigma)/2)}, \quad A_j[u] = \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{u(t)}{\varkappa(t)}K_j(t,\ \sigma)\,dt \quad (j = 4,\ 6), \tag{9}$$

$$A_j[u] = \int_{-\pi}^{\pi}u(t)K_j(t,\ \sigma)\,dt \quad (j = 3,\ 5), \quad |K_j| < \frac{a_6}{R} \quad (j = 3,\ 5,\ 6), \quad |K_4| < a_7.$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$\varkappa S_1[u] = D_1\left[\frac{du}{d\sigma}\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{du}{d\sigma}(t)\ln\left|\frac{a(t) + a(\sigma)}{a(t) - a(\sigma)}\right|dt, \quad a = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}. \tag{10}$$

Отметим, что функция $\Omega(\zeta)$ с краевым условием $\mathrm{Re}\,\Omega = ce^{\chi_2}$ будет однозначной лишь при выполнении равенства, которое с учетом (6) и определения c имеет вид

$$\int_{-\pi}^{\pi}fe^{\rho_0}d\sigma = A_7[h] \equiv \int_{-\alpha}^{\alpha}h\sin\frac{\sigma}{2}\,e^{\rho_1}\varkappa^{-1}d\sigma. \tag{11}$$

4. Найдем связь между $f(\sigma) = \theta(e^{i\sigma})$ и $\Psi_k(s)$ при $|\zeta| = 1$. Пусть $e^{i\sigma_0} = \zeta(C)$. Введем переменную $t \in [0,\ 2\pi]$ по формулам

$$t = \sigma - \sigma_0 \quad (\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \pi), \quad t = \sigma - \sigma_0 + 2\pi \quad (-\pi < \sigma < \sigma_0). \tag{12}$$

Если считать известной функцию $z'(\zeta)$, то найдется $s[t(\sigma)]$. Тогда

$$f(\sigma) = \Psi_k[s(t(\sigma))] - \pi\delta(\sigma,\ \sigma_0) + 2\pi n; \tag{13}$$

здесь n — неизвестное целое число, а δ определяется из условий:

$$\begin{gathered} \delta = 2\ (-\pi < \sigma \leqslant \sigma_0),\ \delta = 0\ (\sigma_0 < \sigma \leqslant -\sigma^*),\ \delta = 1\ (-\sigma^* < \sigma \leqslant \sigma^*), \\ \delta = 2\ (\sigma^* < \sigma < \pi) \text{ при } -\pi < \sigma_0 \leqslant -\sigma^*; \\ \delta = 0\ (-\pi < \sigma \leqslant -\sigma^*),\ \delta = 1\ (-\sigma^* < \sigma \leqslant \sigma_0),\ \delta = -1\ (\sigma_0 < \sigma \leqslant \sigma^*), \\ \delta = 0\ (\sigma^* < \sigma \leqslant \pi) \text{ при } -\sigma^* < \sigma_0 \leqslant \sigma^*; \\ \delta = 0\ (-\pi < \sigma \leqslant -\sigma^*),\ \delta = 1\ (-\sigma^* < \sigma \leqslant \sigma^*),\ \delta = 2\ (\sigma^* < \sigma \leqslant \sigma_0), \\ \delta = 0\ (\sigma_0 < \sigma \leqslant \pi) \text{ при } \sigma^* < \sigma_0 \leqslant \pi. \end{gathered} \tag{14}$$

Подставляя (13), (14) в (11), получим

$$\int_{-\pi}^{\sigma_0} e^{\rho_0}d\sigma + n' \int_{-\pi}^{\pi} e^{\rho_0}d\sigma = \frac{1}{2} \int_{-\sigma^*}^{\sigma^*} e^{\rho_0}d\sigma + \int_{-\pi}^{-\sigma^*} e^{\rho_0}d\sigma - \frac{1}{2\pi} A_7[h] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_k[s(t(\sigma))]\, d\sigma \equiv A_8[h,\ s(t),\ \sigma_0], \tag{15}$$

$$n' = n + 1\ (-\pi \leqslant \sigma_0 \leqslant -\sigma^*),\ n' = n\ (-\sigma^* < \sigma_0 < \pi). \tag{16}$$

Вместо σ_0, n введем один параметр: $d = \sigma_0 + 2\pi n'$. Тогда

$$n' = [(d + \pi)/(2\pi)],\ \sigma_0 = d - 2\pi n'. \tag{17}$$

Левая часть (15) есть непрерывная монотонная функция $P(d)$, имеющая непрерывную обратную P^{-1}. Поэтому из (15) имеем

$$d = P^{-1}(A_8),\ |P^{-1}(x)| < a_8(|x| + 1). \tag{18}$$

С учетом (13), (14) преобразуем первое слагаемое в (7). Пусть

$$\pi\Delta_{kj} = \Psi_k(s_j + 0) - \Psi_k(s_j - 0)\ (j = \overline{1, n}),\ \pi\Delta_{k0} = \Psi_k(0) - \Psi_k(2\pi) + 2\pi,$$

$$s_j = s[t(\sigma_j)]\ (j = \overline{1, n}),\ \delta_{kj} = \Delta_{kj}\exp[\rho_0(\sigma_j)]\ (j = \overline{0, n}),\ \delta^* = \exp[\rho_0(\sigma^*)].$$

Введем функцию

$$\omega(\zeta) = -i\ln\{[(1 - \zeta^{-1}e^{i\sigma^*})(1 - \zeta^{-1}e^{-i\sigma^*})]^{\delta^*} \prod_{j=0}^{n} (1 - \zeta^{-1}e^{i\sigma_j})^{\delta_{kj}}\}.$$

Очевидно, функция $\operatorname{Re}\omega(e^{i\sigma}) = \theta_0(\sigma)$ непрерывна и дифференцируема всюду, кроме $\sigma = \pm\sigma^*$ и $\sigma = \sigma_j$ $(j = \overline{0, n})$, где скачки $\theta_0(\sigma)$ и fe^{ρ_0} совпадают. Так как $\omega(\zeta)$ регулярна при $|\zeta| > 1$, $\omega(\infty) = 0$, то $\operatorname{Im}\omega(e^{i\sigma}) = S[\theta_0]$, где $\operatorname{Im}\omega(e^{i\sigma}) = -\ln\mu(\sigma)$,

$$\mu(\sigma) = b|\mu_0|^{\delta^*} \prod_{j=1}^{n} \left|\sin\frac{\sigma - \sigma_j}{2}\right|^{\delta_{kj}},\ \log_2 b = 2\delta^* + \sum_{j=0}^{n} \delta_{kj}.$$

Имеем $S[fe^{\rho_0}] = -\ln\mu + S[fe^{\rho_0} - \theta_0]$, т. е.

$$e^{-\rho_0}S[fe^{\rho_0}] = e^{-\rho_0}S[fe^{\rho_0} - \theta_0] - \ln\mu_1(\sigma) - \mu_2(\sigma) - \mu_3(\sigma), \tag{19}$$

$$\mu_1 = |\mu_0| \prod_{j=0}^{n} \left|\sin\frac{\sigma - \sigma_j}{2}\right|^{\Delta_{kj}},\ \mu_3 = (e^{\rho_0(\sigma^*) - \rho_0(\sigma)} - 1)\ln|\mu_0|,$$

$$\mu_2 = e^{-\rho_0}\ln b + \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{n} \Delta_{kj}(e^{\rho_0(\sigma_j) - \rho_0(\sigma)} - 1)\ln\left|\sin\frac{\sigma - \sigma_j}{2}\right|.$$

Легко видеть, что $\mu_j(\sigma)$ $(j = 2,\ 3)$ непрерывны.

Рассмотрим еще случай $k = 0$, когда профиль гладкий и имеет ограниченную кривизну. Тогда $\Delta_{0j} = 0$ при $j = \overline{0, n}$. Интегрируя по частям, будем иметь

$$e^{-\rho_0}S[fe^{\rho_0}] = \ln|\mu_0| - \mu_3 + e^{-\rho_0}D\left[e^{\rho_0}\left(f\frac{d\rho_0}{d\sigma} + \frac{ds}{dt}\frac{d\Psi_0}{ds}\right)\right], \tag{20}$$

$$D[u] = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\ln\left|\sin\frac{t - \sigma}{2}\right| dt.$$

5. Из тождества $dz' = z'_w w_\zeta d\zeta$, (4), определения $t(\sigma)$ и $\tau(\zeta)$ имеем

$$s(t) = \frac{Q}{v_0 L} \int_{\sigma_0}^{t+\sigma_0} A_9 d\sigma \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi - \sigma_0), \quad A_9 = l\,|\mu_0|\exp[-\tau(e^{i\sigma})], \tag{21}$$

$$s(t) = s(\pi - \sigma_0) + \frac{Q}{v_0 L} \int_{-\pi}^{t+\sigma_0-2\pi} A_9 d\sigma \quad (\pi - \sigma_0 < t \leqslant 2\pi).$$

Так как $s(0) = 0$, $s(2\pi) = 1$, то из (21) получим

$$\frac{v_0 L}{Q} = \int_{-\pi}^{\pi} A_9 d\sigma. \tag{22}$$

Далее, на S^2 из уравнения Бернулли вытекает $v^3 d\ln v/d\varphi = -kg\sin\theta$; используя (5) и обозначая $u(\sigma) = dh/d\sigma$, имеем

$$u(\sigma) = -\frac{k\lambda}{\pi}\left(\frac{\sin\alpha}{\varkappa^2} + \gamma + 2\pi l_1\right) e^{-3h}\sin\theta\,(Re^{i\sigma}), \tag{23}$$

$$h(\sigma) = \int_{\alpha}^{\sigma} u\,d\sigma. \tag{24}$$

Соотношения (18), (21), (23) с учетом (7) — (10), (12), (17)—(22), (24) образуют нелинейную систему интегральных уравнений Σ_k относительно $u(\sigma)$, $s(t)$, d.

6. Введем обозначение: $\|x(\sigma)\| = \sup|x(\sigma)|$. Легко получить следующие оценки норм операторов A_j, D:

$$\begin{gathered} |A_j[u]| \leqslant (a_9/R)\|u\| \quad (j = 1, 2, 3, 5, 6), \\ |A_j[u]| \leqslant a_{10}\|u\| \quad (j = 4, 7), \quad |D[u]| \leqslant \ln 2\,\|u\|. \end{gathered} \tag{25}$$

Лемма 1. *Пусть выполнено неравенство*

$$|u| \leqslant p_\beta(\sigma) = \frac{\sin\alpha}{2}\frac{\varkappa_0^\beta}{\varkappa^2}\,(0 < \beta < 1), \quad \varkappa_0(\sigma) = \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\right)^{\operatorname{sign}\sigma}. \tag{26}$$

Тогда

$$|D_1[u]| \leqslant (\pi/(1-\beta^2))\,\varkappa_0^\beta. \tag{27}$$

Так как оператор D_1 положителен, то в силу (26) достаточно доказать (27) для $u = p_\beta$. Введем в (10) новые переменные x, y по формулам $e^x = a^2(t)$, $e^y = a^2(\sigma)$. Учитывая, что $2dx = \sin\alpha\varkappa^2(t)\,dt$, а $e^{-|x|} = \varkappa_0^2(t)$, получим

$$|D_1[p_\beta]| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta|x|/2}\ln\left|\frac{e^{x/2}+e^{y/2}}{e^{x/2}-e^{y/2}}\right| dx.$$

Применение леммы 1 из [3] дает $|D[p_\beta]| \leqslant \pi e^{-\beta|y|/2}/(1-\beta^2)$. Так как $e^{-|y|} = \varkappa_0^2(\sigma)$, то отсюда вытекает (27).

7. Заменим в уравнении (23) $\sin\theta$ на $\Phi(\sigma) = \operatorname{sign}(\sin\theta)\inf\{N_1\varkappa_0^{\beta_1}, |\sin\theta|\}$, где $N_1 > 0$, $0 < \beta_1 < 1$. Новое уравнение обозначим через (23*), а новую систему — через Σ_k^*. Она эквивалентна задаче о течении в области $D_{z'}$ с видоизмененным условием на свободной границе. Докажем, что Σ_k^* имеет решение, которое удовлетворяет и Σ_k.

Пусть C^ν — пространство функций $s(t)$, гёльдеровых на $[0, 2\pi]$ с показателем ν, норму в котором обозначим через $\|s\|^\nu$, а множество $C_0^\nu \subset C^\nu$ состоит из монотонных функций таких, что $s(0)=0$, $s(2\pi)=1$. Пусть C_β — банахово пространство функций $u(\sigma)$, непрерывных в $(-\alpha, \alpha)$ и имеющих при $\sigma=\pm\alpha$ полюс порядка $1-\beta/2$; норму в C_β возьмем в виде $\|u\|_\beta = \sup|u(\sigma)/p_\beta(\sigma)|$. Пусть Z — числовая ось, $E=C_\beta\times C_0^\nu\times Z$ $(0<\beta<1)$, $x=(u, s, d)$. Систему Σ_k^* запишем в виде $x=T_k x$, где оператор T_k действует следующим образом. Пусть $x\in E$. Находим n' и σ_0 из (17), n из (16), $t(\sigma)$ из (12), $\delta(\sigma, \sigma_0)$ из (14), $\Psi_k[s(t(\sigma))]$, $f(\sigma)$ из (13), $h(\sigma)$ из (24), $\theta(Re^{i\sigma})$ из (8), $\tau(e^{i\sigma})$ из (7), L из (22). После этого определяем $\hat{s}(t)$ из (21), $\hat{u}(\sigma)$ из (23*), $\hat{d}$ из (18), т. е. $\hat{x}=(\hat{u}, \hat{s}, \hat{d})=T_k x$. Выясним, когда $\hat{x}\in E$.

Лемма 2. *Пусть* $\|s\|^\nu\leqslant M$, $\|u\|_\beta\leqslant N$, $|d|\leqslant D$. *Тогда*

$$|\hat{d}|<a_{11}(1+N/\beta), \tag{28}$$

$$|\theta(Re^{i\sigma})|<\frac{N\pi}{1-\beta^2}\left[1+\frac{a_{12}}{R}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1+D}{N}\right)\right]\varkappa_0^\beta, \tag{29}$$

$$|\hat{u}|<\lambda k\left(1+a_{13}|\gamma|+\frac{a_{14}}{R}\right)e^{a_{15}N/\beta}\inf\left\{N_1 p_{\beta_1},\ \frac{N}{1-\beta^2}\left[1+\frac{a_{12}}{R}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1+D}{N}\right)p_\beta\right]\right\}, \tag{30}$$

$$\frac{Lv_0}{Q}\geqslant c_1(R, \alpha, N, \beta, D)>0, \tag{31}$$

$$\|\hat{s}\|^{\nu_1}<c_2(R, \alpha, N, \beta, D, M, \nu),\ \nu_1>\nu. \tag{32}$$

С помощью оценок (5), (6), (9), (18), (25) и леммы 1 получаем (28) — (30), а также

$$e^{-\rho_0}|A_3[f]+A_4[h]|<a_{16}(1+D+N/\beta). \tag{33}$$

Далее, из гёльдеровости $\Psi_k(s)$ на интервалах непрерывности и из непрерывности $fe^{\rho_0}-\theta_0=f_0(\sigma)$ вытекает $\|f_0\|^{\nu_2}<c_3(M, \nu)$, $\nu_2=\nu\nu^*$. Из (19), непрерывности оператора S в C^{ν_2}, (7), (33) будем иметь $c_4-\ln\mu_1\leqslant\tau(e^{i\sigma})\leqslant c_5+e^{-\rho_0}S[fe^{\rho_0}]$, $c_4=c_4(R, \alpha, N, \beta, D, M, \nu)$, $c_5=c_5(R, \alpha, N, \beta, D)$. Отсюда получаем оценки на A_9 в (21):

$$\frac{a_2}{R}|\mu_0|\exp\{-c_5-e^{-\rho_0}S[fe^{\rho_0}]\}\leqslant A_9\leqslant\frac{a_3}{R}e^{c_4}\prod_{j=0}^{n}\left|\sin\frac{\sigma-\sigma_j}{2}\right|^{-\Delta_{kj}}. \tag{34}$$

Применяя первое неравенство из (34) и действуя аналогично доказательству леммы 4 ([4], с. 204), получим из (22) оценку (31). Используя (31), второе неравенство в (34), неравенство Гёльдера и вытекающую из свойств $\Psi_k(s)$ оценку $-(1-\varepsilon)\leqslant\Delta_{kj}\leqslant 1$ $(0<\varepsilon\leqslant 1)$, получим из (21) неравенство (32) с $\nu_1=\varepsilon/(2-\varepsilon)$.

Неравенства (28), (30), (32) показывают, что при $\nu\leqslant\nu_1$ оператор T_k действует в E. Более того, с помощью достаточно стандартных рассуждений можно показать, что при $\nu<\nu_1$, $\beta<\beta_1$ он вполне непрерывен в E, а также непрерывен по k равномерно на любом замкнутом множестве из E.

8. Для применения принципа Лере — Шаудера потребуется априорная оценка на $\|s(t)\|^\nu$, не зависящая от решения. Мы будем использовать известную теорему Варшавского [5], которую сформулируем в виде леммы.

Лемма 3. *Пусть $w=f(z)$ отображает ограниченную область D_z на круг $|w|<1$. Предположим, что граница D_z — простая кривая, состоящая из n дуг Ляпунова с показателем Гёльдера ν и константой Λ для угла наклона. Пусть $\gamma_i\pi$ — внутренние углы в точках излома границы ($\gamma_i\geqslant\gamma>0$, $i=\overline{1, n}$), Γ — нижняя граница для отношения длины хорды к длине дуги на границе, R — верхняя граница для диаметра D_z. Пусть $f(z_0)=0$, а $r>0$ — нижняя граница для расстояния z_0 от границы D_z. Тогда в замыкании D_z имеем*

$$\left|\frac{df}{dz}\right| \geqslant N \prod_{j=1}^{n} |z - z_j|^{1/\gamma_j - 1},$$

где $N = N(\nu, \Lambda, \gamma, \Gamma, R, r)$.

Лемма 4. *Пусть двусвязные области* D_z^1, D_z^2 $(D_z^1 \subset D_z^2)$ *имеют общую внутреннюю границу* L. *Пусть функция* $F_j(z)$ $(j = 1, 2)$ *отображает* D_z^j *на кольцо* $r_j < |w| < 1$ *с изменением ориентации, т. е.* L *соответствует* $|w| = 1$. *Тогда*

$$r_1 > r_2, \ |dF_1/dz| \geqslant \lambda |dF_2/dz| \ (z \in L, \ \lambda = \ln r_1 / \ln r_2). \tag{35}$$

Первое неравенство хорошо известно. Для доказательства второго введем гармонические функции $u_j(z) = \mathrm{Re} \ln F_j$. Легко видеть, что $u_j = 0$ на L, а на L_1 (внешней границе D_z^1) $u_1 = \ln r_1$, $u_2 > \ln r_2$. Пусть $u = u_1 - \lambda u_2$. Имеем $u = 0$ на L, $u < 0$ на L_1. Применяя принцип максимума, получаем $\partial u / \partial n > 0$ на L, где n — внешняя (по отношению к D_z^1) нормаль. Из этого неравенства и соотношения $\partial u_j / \partial n = |dF_j/dz|$ вытекает (35).

Теорема 1. *Пусть область* $D_{z'}$ *однолистна и* $|y'| < H'$ *при* $z' \in D_{z'}$, *где* H' *не зависит от решения. Пусть* $L > l$, *где* L — *длина* $L_{z'}$, *а* $l > 0$ *не зависит от решения. Тогда для некоторого* $\nu_0 = \nu_0(H)$ $(H = H'/l)$ *справедлива равномерная оценка* $\|s\|^{\nu_0} < M_0 = M_0(H)$.

Совершим в плоскости течения гомотетию, вводя $z = (z' - iy'(C))/L$. Тогда $D_{z'}$ перейдет в D_z, семейство обтекаемых профилей перейдет в семейство подобных им кривых единичной длины, проходящих через $z = 0$ и обозначенных выше через L_z^k (в дальнейшем индекс k опускаем). В силу условий теоремы в $D_z |\mathrm{Im}\, z| < H$. Пусть Σ_z — пара прямых $|\mathrm{Im}\, z| = H$. Рассмотрим области D_z, $\hat{D}_z$, D_z^*, где $\hat{D}_z$ ограничена L_z и Σ_z, а D_z^* ограничена окружностью l_z и Σ_z. Очевидно, $D_z \subset \hat{D}_z \subset D_z^*$.

Отобразим D_z, $\hat{D}_z$, D_z^* с изменением ориентации соответственно на кольца $D_u = \{u : R^{-1} = r < |u| < 1\}$, $\hat{D}_u = \{u : \hat{r} < |u| < 1\}$, $D_\omega^* = \{\omega : r^* < |\omega| < 1\}$. По лемме $4r^* < \hat{r} < r$ (r^* и r не зависят от решения, а $\hat{r}$ зависит). В силу очевидного соотношения $dt/ds = |dF/dz|$ $(z \in L_z)$ и леммы 4 будем иметь

$$dt/ds \geqslant \lambda_0 |d\hat{F}/dz|, \ z \in L_z, \ \lambda_0 = \ln r / \ln r^*. \tag{36}$$

Пусть $\hat{D}_\omega = F^*(\hat{D}_z)$. Очевидно, $\hat{D}_\omega \subset D_\omega$. Область $\hat{D}_\omega$ ограничена окружностью $|\omega| = r^*$ и кривой $L_\omega = F^*(L_z)$, на которой $r^* < r_1(H) \leqslant |\omega| < 1$. Пусть функция $u = \Phi(\omega)$ отображает $\hat{D}_\omega$ на $\hat{D}_u$ с сохранением ориентации. Тогда

$$\hat{F}(z) = \Phi(F^*(z))$$

и

$$|d\hat{F}/dz| = |d\Phi/d\omega| \, |dF^*/dz|, \ z \in L_z, \ \omega \in L_\omega. \tag{37}$$

Так как $F^*(z)$ не зависит от решения, то получаем оценку

$$|dF^*/dz| \geqslant m_1(H) |\omega - \omega(A)| \, |\omega - \omega(B)|,$$

где $|\omega(A)| = |\omega(B)| = r^*$, откуда

$$|dF^*/dz| \geqslant m_2(H), \ z \in L_z. \tag{38}$$

Пусть функция $\Phi_0(\omega)$ отображает односвязную область $D'_\omega \supset \hat{D}_\omega$ (внутренность L_ω) на круг $|u| < 1$, причем $\Phi_0(0) = 0$. Сравним $|d\Phi/d\omega|$ и $|d\Phi_0/d\omega|$ на L_ω. Так как $|\Phi_0^{-1}(u)| < 1$ при $|u| = 1$, то по лемме Шварца $|\Phi_0^{-1}(u)| < |u|$.

Поэтому при $|\omega|=r^*$ будет $|u|=|\Phi_0(\omega)|>r^*$. С учетом этого имеем $|\Phi(\omega)|=$ $=\Phi_0(u)|=1$ при $\omega \in L_\omega$; $|\Phi(\omega)|=\hat{r}$, $|\Phi_0(\omega)|>r^*$ при $|\omega|=r^*$. Отсюда для гармонических функций $\rho(\omega)=\ln|\Phi|$, $\rho_0(\omega)=\lambda_0^{-1}\ln|\Phi_0|$ получим $\rho=\rho_0=0$ при $\omega\in L_\omega$, а при $|\omega|=r^*$ будет $0>\rho_0>\lambda_0^{-1}\ln r^*=\ln r>\ln\hat{r}=\rho$. Сравнивая ρ и ρ_0 в $\hat{D}_\omega$, получим по принципу максимума $\partial\rho/\partial n>\partial\rho_0/\partial n$, где n — внешняя нормаль к L_ω. Отсюда

$$|d\Phi/d\omega|\geqslant\lambda_0^{-1}|d\Phi_0/d\omega|,\quad \omega\in L_\omega. \tag{39}$$

Далее, нетрудно убедиться в том, что для области D'_ω известны величины $\nu=\nu^*$, Λ, Γ, $\gamma=\varepsilon$, $R=2$, $r=r_1(H)$, фигурирующие в лемме 3. Применяя эту лемму, получим

$$|d\Phi/d\omega|\geqslant m_3(H)\prod_{j=1}^{n}|\omega-\omega_j|^{\mu},\quad \mu=1/\varepsilon-1, \tag{40}$$

где $\omega_j=F^*(z_j)$, а z_j — угловые точки L_z. Из (38) вытекает

$$|\omega-\omega_j|>m_2(H)\Gamma|s-s_j|.$$

Отсюда и из (36) — (40) получаем последовательно $dt/ds\geqslant m_4(H)B^{\mu}$,

$$|t''-t'|\geqslant m_4(H)\left|\int_{s'}^{s''}B^{\mu}ds\right|,\quad B(s)=\prod_{j=1}^{n}|s-s_j|.$$

Но в силу неравенства Гёльдера для любого $\delta>0$

$$|s''-s'|\leqslant\left|\int_{s'}^{s''}B^{\delta p}ds\right|^{1/p}\left|\int_0^1 B^{-\delta q}ds\right|^{1/q}\quad (1/p+1/q=1,\ p>1).$$

Возьмем $p>1+\mu$, $\delta p=\mu$. Тогда $\delta q<1$, и из двух последних оценок имеем $|t''-t'|>m_5(H)|s''-s'|^{1/p}$, что и требовалось доказать.

9. Предположим, что (u, s, d) — решение Σ_k^*, причем $\|u\|_\beta=N$, $|d|=D$. Выберем $N_1=N[\lambda(1+a_{13}|\gamma|+a_{14}/R)\exp(a_{15}N/\beta)]^{-1}$. Тогда из (30) получим $\|u\|_{\beta_1}<N$. Если β_1 достаточно близко к β, то отсюда и из (28) — (30) вытекает

$$D<a_{11}\,1+N/\beta, \tag{41}$$

$$|\theta(Re^{i\sigma})|<\frac{N\pi}{1-\beta^2}\left[1+\frac{a_{17}}{R}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{N}\right)\right]\varkappa_0^{\beta_1}, \tag{42}$$

$$\|u\|_\beta<\frac{\lambda N}{1-\beta^2}\left(1+a_{13}|\gamma|+\frac{a_{14}}{R}\right)\left[1+\frac{a_{17}}{R}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{N}\right)\right]e^{a_{15}N/\beta}. \tag{43}$$

Пусть выполнено неравенство

$$\frac{\lambda}{1-\beta^2}\left(1+a_{13}|\gamma|+\frac{a_{14}}{R}\right)\left[1+\frac{a_{17}}{R}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{N}\right)\right]e^{a_{15}N/\beta}<1. \tag{44}$$

Тогда, как видно из (43), $\|u\|_\beta<N$, что противоречит исходному предположению.

Предположим теперь, что $\|u\|_\beta\leqslant N$, $|d|<D$ и

$$\frac{2N}{1-\beta^2}\left[1+\frac{a_{17}}{R}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{N}\right)\right]<\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{45}$$

Тогда, используя (42), получаем $|\theta(Re^{i\sigma})|<\pi/2$, т. е. область течения однолистна. Далее, из (31) вытекает $L>l=Qv_0^{-1}c_1(R, \alpha, N, \beta, a_{11}(1+N/\beta))$. Наконец, из справедливого на свободной границе соотношения

$$\frac{dy'}{d\sigma}=\frac{Q}{2\pi v_0}\sin\theta e^{-h}\left(\frac{\sin\alpha}{\varkappa^2}+\gamma+2\pi I_1\right)$$

и (42) получим $|y'|<H'=H'(R,\ \alpha,\ \gamma,\ N,\ \beta)$. По теореме 1 найдутся такие $\nu_0=\nu_0(H'/l)$ и $M_0=M_0(H'/l)$, что $\|s\|^{\nu_0}<M_0$ (без ограничения общности можно считать $\nu_0<\nu_1$).

Таким образом, доказана

Лемма 5. *Пусть выполняются условия* (44), (45). *Тогда на границе замкнутого множества* $E_0=\{x:\|u\|_\beta\leqslant N,\ |d|\leqslant a_{11}(1+N/\beta),\ \|s\|^{\nu_0}\leqslant M\}$ *уравнение* $x=T_kx$ *не имеет решений* (*здесь* $\nu_0=\nu_0(\alpha,\ R,\ \gamma,\ N,\ \beta)$, $M\geqslant M_0(\alpha,\ R,\ \gamma,\ N,\ \beta)$).

Лемма 6. *При достаточно большом* M *оператор* T_0 *переводит* E_0 *в себя.*

Для доказательства вспомним, что уравнение $x=T_0x$ соответствует задаче обтекания гладкого профиля с неотрицательной кривизной невесомой жидкостью. Пусть $x\in E_0$. Из (28), (30) имеем $|\hat{d}|<a_{11}(1+N/\beta)$, $\|\hat{u}\|_\beta=0$. Так как $d\Psi_0/ds\geqslant 0$, $ds/dt\geqslant 0$, а оператор D положителен, то из (21), (7), (25), (20), (31), (33) получаем $ds/dt\leqslant c_6(\alpha,\ R,\ N,\ \beta)$, т. е. $\|s\|^{\nu_0}<c_7(\alpha,\ R,\ N,\ \beta)$. Полагая $M=\max(c_7,\ M_0)$, завершаем доказательство леммы.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (44), (45). *Тогда система* Σ_k^* *имеет при каждом* $k\in[0,\ 1]$ *хотя бы одно решение* x_k *внутри* E_0, *являющееся одновременно решением* Σ_k.

Существование решения x_k системы Σ_k^*, т. е. уравнения $x=T_kx$, вытекает из лемм 5, 6 и принципа Лере — Шаудера[1]). Для этого решения в силу выбора N_1 и неравенств (42), (44) имеем $|\sin\theta(Re^{i\sigma})|\leqslant N_1\varkappa_0^{\beta_1}$, т. е. $\Phi(\sigma)=\sin\theta(Re^{i\sigma})$, и уравнения (23*) и (23) совпадают. Следовательно, x_k удовлетворяет системе Σ_k.

В заключение обсудим ограничения (3), (44), (45) на исходные параметры R, γ, λ (α считаем произвольно фиксированным), при которых исходная задача разрешима.

Пусть $|\gamma|$ и $1/R$ настолько малы, что $2a_{17}/R<\sin\alpha/2$ и выполняется (3). Тогда можно выбрать настолько малое N, что будет справедливо (45), а затем настолько малое λ, что выполняется (44).

Пусть, наоборот, задано произвольное $\lambda<1$. Тогда можно указать достаточно малые $1/R$ и $|\gamma|$ такие, что выполняется (3) и что при них и достаточно малых β, N, N/β выполняются (44), (45).

Пусть $\lambda<1$, $R\to\infty$, $\gamma R\to 0$. Тогда с помощью (42) легко получить, что $\theta(Re^{i\sigma})\to 0$, т. е. свободная граница становится прямолинейной. Можно показать, что $R\to\infty$ соответствует случаю, когда длина профиля стремится к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич И. Л. О существовании решения задачи потенциального обтекания симметричного профиля в канале.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 948—952.

2. Салимов Р. Б., Селезнев В. В. Решение краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами для кольца.— Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1980, вып. 17, с. 140—157.

3. Киселёв О. М. О течении тяжелой жидкости в канале с криволинейным дном.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 4, с. 630—640.

4. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны.— М., 1964.— 466 с.

5. Warschawsky S. Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung.— Math. Z., 1932, Bd. 35, № 3—4, S. 321—456.

6. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа.— М., 1975.—511 с.

г. Казань

Поступила 11.01.1983

1) См. [6], теоремы 21.5 и 41.2.