Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

И. В. Мухина, Дифракция на гладкой границе двух неоднородных упругих сред,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1972, том 25, 132–150

https://www.mathnet.ru/znsl2486

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.169
11 декабря 2025 г., 11:35:07

И.В.Мухина

ДИФРАКЦИЯ НА ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕ ДВУХ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СРЕД

§ I. Постановка задачи

Рассматриваются две неоднородные среды (I и 2), разделенные гладкой незамкнутой поверхностью S, эффективная кривизна которой $\varkappa(\vec{x})$[I] положительна при $\vec{x} \in S$, $\vec{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$. Вне поверхности S показатели преломления продольных и поперечных волн $n_p^{(1)}$, $n_s^{(1)}$, $n_p^{(2)}$, $n_s^{(2)}$ являются гладкими функциями от $\vec{x}$ вплоть до S, где в каждой точке выполняется неравенство

$$n_p^{(1)}(S) < n_p^{(2)}(S). \tag{I.I}$$

Кроме того, в некоторой не малой окрестности S все показатели преломления возрастают как функции расстояния от S, т.е.

$$\frac{\partial n_j^{(1)}}{\partial N} > 0, \quad \frac{\partial n_j^{(2)}}{\partial N} < 0, \tag{I.2}$$

где j принимает значения p (продольная волна) и s (поперечная волна), значки (I) и (2) показывают, к какой среде относится данная величина, $\vec{N}$ – единичный вектор нормали к поверхности, направленный в сторону первой среды и $\partial/\partial N = \vec{N}\nabla$

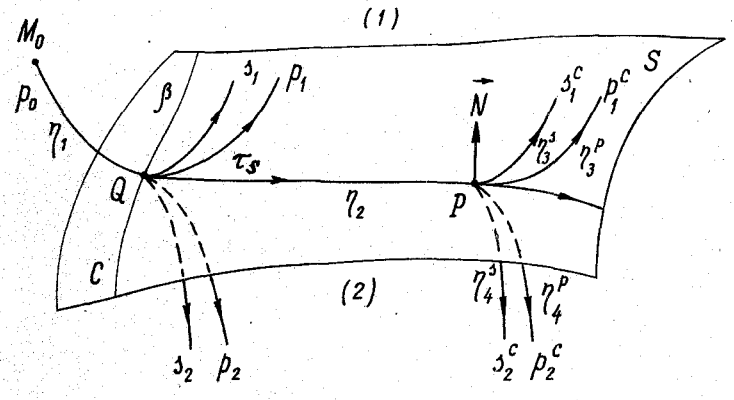

Рис.I

Пусть из точки $\mathcal{M}_0$ в первой среде на поверхности S падает под предельным углом продольная волна p_0 (рис.I). На линии каса-

ния C она расщепляется, часть ее возвращается в первую среду в виде продольной волны p_1 и поперечной s_1, причем луч p_1 касается поверхности S, а луч s_1 выходит из точки Q под углом, отличным от нуля.

Другая часть падающей волны, преломляясь, проникает во вторую среду в виде волн s_2 и p_2. Так же как и луч s_1, лучи s_2 и p_2 составляют конечные углы с поверхностью S, величины которых определяются законом Снеллиуса.

Кроме того, некоторая часть падающей волны дифрагирует. В зоне тени, которая отделяется от освещенной области лучами p_1 и p_2, распространяется поверхностная волна QP, порождая в каждой точке четыре волны соскальзывания. Лучи p_1^c, s_1^c, p_2^c и s_2^c аналогичны соответствующим предельным лучам и углы, которые они составляют с поверхностью S в точке P, также определяются законом Снеллиуса.

В математическом отношении задача состоит в решении двух уравнений динамической теории упругости

$$L_1\vec{u}_1=(\lambda_1+2\mu_1)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1-\mu_1\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u}_1+(\mathrm{grad}\,\lambda_1+\mathrm{grad}\,\mu_1)\times$$

$$\times\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1+\mathrm{rot}(\vec{u}_1\times\mathrm{grad}\,\mu_1)+\mathrm{grad}(\mathrm{grad}\,\mu_1\vec{u}_1)-\vec{u}_1\Delta\mu_1+\rho_1\omega^2\vec{u}_1=\vec{F}(\vec{x}_0), \quad (I.3)$$

$$L_2\vec{u}_2=0 \quad (I.4)$$

при некоторых граничных условиях на поверхности S и условии предельного поглощения. В уравнениях (I.3), (I.4) параметры Ламе λ_j, μ_j и плотности сред ρ_j $(j=1,2)$, а также их градиенты являются непрерывными функциями от $\vec{x}$ вплоть до S, ω – частота, вектор $\vec{F}(\vec{x}_0)$ характеризует источник, L_2 – дифференциальный оператор, получающийся из L_1, если в последнем λ_1, μ_1, ρ_1 заменить на λ_2, μ_2 и ρ_2.

Рассматривается 3 типа граничных условий. Пусть имеется только одна среда, первая. Тогда $\vec{u}_2(\vec{x})=0$, $\vec{u}_1(\vec{x})\equiv\vec{u}(\vec{x})$, вместо двух уравнений (I.3),(I.4) остается одно, где все величины с индексами I заменены соответствующими величинами без индексов:

$$L\vec{u}=\vec{F}(\vec{x}_0). \quad (I.3')$$

В этом случае граничные условия задаются либо в виде

$$\vec{u}\,\big|_S=0, \quad (I.5)$$

либо в виде

$$\vec{t}_N(\vec{u})\Big|_S = 0, \tag{I.6}$$

где

$$\vec{t}_N(\vec{u}) = \lambda \operatorname{div}\vec{u}\,\vec{N} + \mu(\vec{N}\operatorname{grad})\vec{u} + \mu \operatorname{grad}(\vec{u}\,\vec{N}) \tag{I.7}$$

есть нормальная составляющая вектора напряжений.

В случае наличия двух сред на поверхности S задаются условия сопряжения

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \quad \text{на } S \tag{I.8$_1$}$$

$$\vec{t}_N^{(1)}(\vec{u}_1) = \vec{t}_N^{(2)}(\vec{u}_2) \text{ на } S \tag{I.8$_2$}$$

Частота ω считается большим параметром. Задача состоит в построении нулевого члена асимптотического разложения для полей волн, распространяющихся в зоне глубокой тени как вблизи S ,так и на конечном расстоянии от нее.

§ 2. Разделение уравнения динамической теории упругости на два скалярных уравнения типа Гельмгольца.

Рассмотрим уравнение динамической теории упругости для произвольной неоднородной изотропной среды

$$L\vec{u} = \vec{F}(\vec{x}_0). \tag{2.I}$$

Считаем, как обычно, что полное поле $\vec{u}$ является суммой полей продольной $\vec{u}_p$ и поперечной $\vec{u}_s$ волн,

$$\vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_s\,, \tag{2.2}$$

распространяющихся со скоростями

$$V_p(\vec{x}) = \frac{1}{n_p(\vec{x})} = \sqrt{\frac{\lambda(\vec{x}) + 2\mu(\vec{x})}{\rho(\vec{x})}} \tag{2.3}$$

и

$$V_s(\vec{x}) = \frac{1}{n_s(\vec{x})} = \sqrt{\frac{\mu(\vec{x})}{\rho(\vec{x})}} \tag{2.3}$$

соответственно. Если среда однородна, т.е. скорости V_p и V_s не за-

висят от $\vec{x}$, уравнение (2.I) распадается на два скалярных уравнения отдельно для потенциалов продольной и поперечной волн. В случае же неоднородной среды поперечные и продольные волны в уравнении не разделяются.

Однако если искать решение в некотором специальном классе функций, зависящих от большого параметра ω , то в нулевом приближении по ω уравнение (2.I) сводится к двум скалярным уравнениям типа Гельмгольца.

Пусть

$$\eta(\vec{x})=e^{i\omega\tau(\vec{x})}E(\vec{x},\omega) \tag{2.4}$$

и $e^{i\omega\tau(\vec{x})}$ - наиболее быстро меняющийся множитель, тогда операция ∇ , примененная к $\eta(\vec{x})$, увеличивает порядок ее абсолютной величины на I. В этом смысле можно написать

$$\nabla = O(\omega). \tag{2.5}$$

Для полей u_p и u_s введем скалярные потенциалы φ и ψ

$$\vec{u}_p(\vec{x})=\nabla\varphi(\vec{x})+G(\vec{x})\varphi(\vec{x}), \tag{2.6}$$

$$\vec{u}_s(\vec{x})=\mathrm{rot}\,(\psi(\vec{x})\vec{f}(x))+\vec{H}(\vec{x})\psi(\vec{x}),^{*)} \tag{2.7}$$

где $\vec{H}(\vec{x})$, $\vec{f}(\vec{x})$, $\vec{G}(\vec{x})$ - произвольные вектора, а $\varphi(\vec{x})$ и $\psi(\vec{x})$ принадлежат к классу функций $\eta(\vec{x})$ (2.4).

В дальнейшем для сокращения записи будем опускать у функций аргумент $\vec{x}$.

Поскольку оператор L является линейным, его можно применить отдельно к $\vec{u}_p$ и отдельно к $\vec{u}_s$. Подействуем оператором L на вектор $\vec{u}_p$, определенный формулой (2.6), выделим в главных членах оператор Гельмгольца и потребуем, чтобы оставшиеся члены порядка не меньше $O(\nabla^2\varphi)$ исчезли. Тогда для $\vec{G}$ получим выражение

$$\vec{G}=\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{\nabla\rho}{\rho}-\frac{2\nabla\mu}{\lambda+\mu} \tag{2.8}$$

и $L\vec{u}_p$ сводится к следующему

---

*) Формулы (2.6) и (2.7) подсказаны соответствующими формулами Сингха и Бен-Менахема, см. [2].

$$L(\nabla\varphi+\vec{G}\varphi)=\frac{\lambda+2\mu}{\sqrt{\rho}}(\nabla+\vec{A})(\Delta+\omega^2 n_p^2)\tilde{\varphi}+O(\nabla^2\tilde{\varphi}), \qquad (2.9)$$

где

$$\tilde{\varphi}=\varphi\sqrt{\rho}$$

и

$$\vec{A}=\frac{\nabla\lambda}{\lambda+2\mu}-\frac{2\mu\nabla\mu}{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}-\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}\frac{\nabla\rho}{\rho}. \qquad (2.10)$$

Применим теперь оператор L к $\vec{u}_3(\vec{x})$, выделим в главных членах оператор Гельмгольца и потребуем обращения в ноль оставшихся членов не меньше $O(\nabla^2\psi)$. Тогда получим, что вектор $\vec{H}$ имеет вид

$$\vec{H}=\vec{h}\times\vec{f}, \quad \vec{h}=\frac{2\mu\nabla\mu}{\mu(\lambda+\mu)}-\frac{\mu\Delta\rho}{\rho(\lambda+\mu)}, \qquad (2.11)$$

а вектор $\vec{f}$ должен удовлетворять следующему уравнению

$$2\,\mathrm{rot}\left\{(\nabla\psi\nabla)\vec{f}\right\}+\left[\frac{\nabla n_3^2}{n_3^2}\times(\vec{f}\nabla)\nabla\psi\right]=O(\nabla^2\psi). \qquad (2.12)$$

В результате для $L\vec{u}_3$ имеем

$$L(\mathrm{rot}(\psi\vec{f})+\vec{H}\psi)=\frac{\mu}{\sqrt{\rho}}(\nabla\times\vec{f}+\vec{B})(\Delta+\omega^2 n_3^2)\tilde{\psi}+O(\nabla^2\tilde{\psi}), \qquad (2.13)$$

где

$$\tilde{\psi}=\psi\sqrt{\rho}$$

и

$$\vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{f}+\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\frac{\nabla\mu}{\mu}-\frac{3\lambda+5\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{\nabla\rho}{\rho} \qquad (2.14)$$

Подставив (2.9) и (2.13) в уравнение (2.1), получим

$$L\vec{u}=\frac{\lambda+2\mu}{\sqrt{\rho}}(\nabla+\vec{A})(\Delta+\omega^2 n_p^2)\tilde{\varphi}+\frac{\mu}{\sqrt{\rho}}(\nabla\times\vec{f}+\vec{B})(\Delta+\omega^2 n_3^2)\tilde{\psi}+$$

$$+O(\nabla^2\tilde{\varphi})+O(\nabla^2\tilde{\psi})=\vec{F}(\vec{x}_0). \qquad (2.15)$$

Выберем функцию источника следующим образом

$$\vec{F}(\vec{x}_0) = -\frac{\lambda+2\mu}{\sqrt{\rho}}(\nabla + \vec{A})\delta(\vec{x}-\vec{x}_0). \qquad (2.16)$$

Главный член выражения (2.16) представляет собой объемную силу типа "центра расширения" [3] и в нулевом приближении порождает продольную волну *).

Если теперь потребовать, чтобы потенциал $\tilde{\varphi}$ удовлетворял с точностью до членов порядка $O(\nabla\tilde{\varphi})$ неоднородному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + \omega^2 n_p^2)\tilde{\varphi} = -\delta(\vec{x}-\vec{x}_0), \qquad (2.17)$$

а $\tilde{\psi}$ - с точностью до членов $O(\nabla\tilde{\psi})$ однородному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + \omega^2 n_s^2)\tilde{\psi} = 0, \qquad (2.18)$$

то погрешность в (2.15) не изменится, а уравнение (2.1), как это следует из (2.6),(2.7), будет удовлетворено с точностью $O(\nabla\vec{u})$.

Таким образом, вычислив нулевые члены решений $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ скалярных уравнений (2.17) и (2.18), легко определить по формулам (2.6) и (2.7) нулевое приближение для полей продольной $\vec{u}_p$ и поперечной $\vec{u}_s$ волн.

Следует заметить, что вторые члены в формулах (2.6) и (2.7) не дают вклада в нулевое приближение, хотя и играют весьма существенную роль при сведении уравнения теории упругости к уравнениям Гельмгольца.

Подобным же образом дело обстоит с функцией источника. В формуле (2.16) второй член порождает поле на порядок менее интенсивное, чем источник типа $\nabla\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)$, что легко показать с помощью формулы Грина-Вольтерра [3]. Следовательно для нулевого приближения поля $\vec{u}$ существование второго члена в (2.16) вполне безразлично. Но, как и в формулах (2.6) и (2.7), его присутствие важно для сведения векторного уравнения (2.1) к системе хорошо изученных скалярных уравнений (2.17) и (2.18).

Перейдем к определению вектора $\vec{f}$. Используя то обстоятельство, что ψ относится к классу функций (2.4), можно написать

$$\nabla\psi = i\omega\nabla\tau_s\psi + O(\nabla\psi), \qquad (2.19)$$

где $\tau_s(\vec{x})$- эйконал поперечной волны. Подставим (2.19) в уравне-

*) В качестве $F(\vec{x}_0)$ можно выбрать также функцию, описывающую объемную силу типа и центра вращения. Источник такого типа порождает в нулевом приближении поперечную волну.

ние (2.I2) и выделим главные члены. Тогда для $\vec{f}$ получается уравнение

$$2\nabla\tau_s\times(\nabla\tau_s\nabla)\vec{f}+(\vec{f}\nabla\tau_s)\frac{\nabla n_s^2}{n_s^2}\times\nabla\tau_s=0. \qquad (2.20)$$

Если ввести в рассмотрение локальную систему координат $\nabla\tau_s$, $\vec{n}$ и $\vec{B}$, где $\vec{n}$ – нормаль и $\vec{B}$ – бинормаль к лучу в данной точке, то решение уравнения (2.20) можно представить в виде

$$\vec{f}=a_f\nabla\tau_s+\sin\vartheta\vec{n}-\cos\vartheta\vec{B}. \qquad (2.2I)$$

В (2.2I) a_f – неопределенный коэффициент, не входящий в выражение для нулевого члена, угол ϑ имеет тот же смысл, что в лучевом метода [4]

$$\frac{d\vartheta}{d\eta}=T,$$

η – длина дуги луча и T – кручение луча в данной точке. Если в формулу (2.7) подставить выражения (2.I9) и (2.2I), то для $\vec{u}_s$ получится следующее выражение

$$\vec{u}_s=i\omega\psi n_s(\cos\vartheta\vec{n}+\sin\vartheta\vec{B})+O(\omega\psi), \qquad (2.22)$$

т.е. поляризация вектора поперечной волны в нулевом приближении точно такая же, как в лучевом методе. Если теперь в (2.22) подставить нулевой член лучевого разложения для ψ, то с точностью до несущественного в данном случае множителя $i\omega$ получается лучевая формула для поля поперечной волны. Аналогично дело обстоит с лучевой формулой для продольной волны.

С помощью формул (2.6) и (2.7), используя известные выражения для нулевого члена асимптотического разложения φ и ψ [5], легко определить нулевое приближение для поля упругой волны в области глубокой тени.

§ 3. Дифракция в случае двух акустических сред

Если вместо упругих имеются две неоднородные акустические среды, то в задаче, аналогичной описанной в § I, дифрагированные поля u_1 и u_2 ищутся как решение уравнений Гельмгольца

$$[\Delta+\omega^2n_1^2(\vec{x})]u_1=-\delta(\vec{x}-\vec{x}_0), \qquad (3.I)$$

$$[\Delta+\omega^2n_2^2(\vec{x})]u_2=0 \qquad (3.2)$$

при условии предельного поглощения и граничных условий сопряжения

$$a u_1 = u_2 \quad \text{на } S, \tag{3.3$_1$}$$

$$-b(\vec{N}\nabla u_1) = (\vec{N}\nabla u_2) \quad \text{на } S, \tag{3.3$_2$}$$

где a и b – функции, определенные на поверхности S. При этом "акустические" лучи ведут себя подобно лучам P_1 и P_2 на рис.I.

Для полей u_1 и u_2 в нулевом приближении были выведены [5] с использованием равномерной асимптотики [1] обобщенные формулы Келлера.

Пусть точка наблюдения M_1 находится в первой среде в зоне глубокой тени вдали от поверхности S, тогда

$$u_1(M_1) = \frac{1}{\sqrt{n_1(M_0)\gamma(M_0)}} D(Q) e^{-\int_Q^P \alpha(\eta_2)d\eta_2} D(P) \frac{1}{\sqrt{n_1(M_1)\gamma(M_1)}} \cdot \tag{3.4}$$

$$\cdot \exp\left\{i\omega\left[\int_{M_0}^{Q} n_1(\eta_1)d\eta_1 + \int_Q^P n_1(\eta_2)d\eta_2 + \int_P^{M_1} n_1(\eta_3)d\eta_3\right]\right\} \text{*)}.$$

Если точка наблюдения находится во второй среде в зоне глубокой тени, то дифрагированное поле $u_2(M_2)$ определяется следующим образом

$$u_2(M_2) = \frac{1}{\sqrt{n_1(M_0)\gamma(M_0)}} D(Q) e^{-\int_Q^P \alpha(\eta_2)d\eta_2} S(P) \cdot \frac{1}{\sqrt{n_2(M_2)\gamma(M_2)}} \cdot \tag{3.5}$$

$$\cdot \exp\left\{i\omega\left[\int_{M_0}^{Q} n_1(\eta_1)d\eta_1 + \int_Q^P n_1(\eta_2)d\eta_2 + \int_P^{M_2} n_2(\eta_4)d\eta_4\right]\right\}.$$

В формулах (3.4), (3.5) используются следующие обозначения

$$\gamma(\vec{x}) = \left|[\vec{x}_{\tau_\alpha} \cdot \vec{x}_\beta]\right|. - \tag{3.6}$$

---

*) В (3.4) и в последующих формулах предполагается, что точка источника находится вдали от поверхности S.

геометрическое расхождение дифрагированных лучей, $\vec{x}_\nu \equiv \frac{\partial \vec{x}}{\partial \nu}$, $\vec{x} = \vec{x}(\tau, \tau_s, \beta)$ – параметрическое уравнение луча, τ, τ_s, β – дифракционные лучевые координаты;

$$D(\vec{x}) = \frac{1}{2^{\frac{1}{6}} \cdot 2 \cdot v'(-t_1)} \left[\frac{e^{i\frac{\pi}{2}} \varkappa(\vec{x})}{\omega n_1(\vec{x})} \right]^{\frac{1}{3}} - \tag{3.7}$$

коэффициент дифракции Келлера, $v'(-t_1)$ – производная от интеграла Эйри, взятая в первом нуле интеграла Эйри, $v(-t_1) = 0$,

$$\varkappa(\vec{x}) = \vec{N}(\vec{x}) \left[\frac{\nabla n_1(\vec{x})}{n_1(\vec{x})} - \varkappa_s(\vec{x}) \vec{N}_s(\vec{x}) \right] - \tag{3.8}$$

эффективная кривизна поверхности, $\varkappa_s$ – кривизна поверхностного луча и $\vec{N}_s$ – нормаль к нему в данной точке;

$$\alpha(\vec{x}) = e^{-i\frac{\pi}{6}} \omega^{\frac{1}{3}} \frac{t_1}{2^{\frac{1}{3}}} n_1^{\frac{1}{3}}(\vec{x}) \varkappa^{\frac{2}{3}}(\vec{x}) - \frac{b(\vec{x})}{a(\vec{x})} \frac{\varkappa(\vec{x})}{\sqrt{\gamma^2(\vec{x}) - 1}} - \tag{3.9}$$

показатель экспоненты затухания, $\gamma(\vec{x}) \equiv n_2(\vec{x}) / n_1(\vec{x})$;

$$S(\vec{x}) = \frac{b(\vec{x})}{\sqrt{\gamma^2(\vec{x}) - 1}} \left[\frac{e^{i\frac{\pi}{2}} \varkappa(\vec{x})}{\omega n_1(\vec{x})} \right]^{\frac{1}{2}} - \tag{3.10}$$

дифракционный коэффициент преломления и η_j – длины дуг соответствующих лучей.

В пограничном слое (вблизи S) для $u_1(M_1)$ имеет место следующая формула

$$u_1^{\text{погр.}}(M_1) = \frac{1}{\sqrt{n_1(M_0) \gamma(M_0)}} D(Q) e^{-\int_Q^P \alpha(\eta_2) d\eta_2} D^{\text{погр.}}(P) \frac{1}{\sqrt{n_1(P) j(P)}} \cdot$$

$$\cdot W_1\left[-\omega^{\frac{2}{3}} \nu(P) \eta_{M_1}(P) - \zeta_1\right] \exp\left\{ i\omega \left[\int_{M_0}^{Q} n_1(\eta_1) d\eta_1 + \int_Q^P n_1(\eta_2) d\eta_2 \right] \right\}, \tag{3.11}$$

где

$$D^{\text{погр.}}(\vec{x}) = \frac{e^{-\frac{\pi i}{6}}}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 2 \cdot v'(-t_1)} \left[\frac{e^{i\frac{\pi}{2}} \varkappa(\vec{x})}{\omega n_1(\vec{x})} \right]^{\frac{1}{6}} \tag{3.12}$$

пограничный коэффициент дифракции;

$$j(\vec{x}) = \left| [\vec{y}_{\tau_s} \cdot \vec{y}_\beta] \right|, \quad \vec{x} \in \vec{y}(\tau_s, \beta), \tag{3.13}$$

$j(\vec{x})$ – геометрическое расхождение поверхностных лучей, $\vec{y} = \vec{y}(\tau_s, \beta)$ – параметрическое уравнение поверхности S ; $W_1(\nu)$ – функция Эйри, $-\varrho_1 = t_1 e^{i\pi/3}$,

$$\nu(\vec{x}) = 2^{\frac{1}{3}} n_1^{\frac{2}{3}}(\vec{x}) \varkappa^{\frac{1}{3}}(\vec{x}), \tag{3.14}$$

$\eta_{\mu_1}(\vec{x})$ – длина нормали к поверхности в данной точке $\vec{x}$, определяющая толщину пограничного слоя и имеющая порядок $O(\omega^{-2/3})$

§ 4. Дифракция в одной упругой среде

Вернемся к задаче дифракции в упругой среде. Пусть имеется только одна среда и на поверхности S выполняется условие (I.5). Тогда в области глубокой тени распространяется продольная волна соскальзывания и поперечная волна срыва. На рис.I они представлены лучами p_1 и s_1 . В задаче для акустических сред также присутствуют две волны, волна соскальзывания в среде I и волна срыва, покидающая поверхность S под конечным углом и распространяющаяся в среде 2. Лучевые картины в том и другом случае совпадают с точностью до направления распространения волны срыва, что несущественно. Это совпадение позволяет предполагать, что, по крайней мере, в нулевом приближении, для решения задачи в упругой среде можно использовать соответствующие "акустические" решения. Поскольку φ и ψ удовлетворяют уравнениям (2.17) и (2.18), вполне аналогичным акустическим уравнением (3.I) и (3.2), будем считать, что для "продольного" потенциала φ справедливы формулы (3.4)или (3.II) в зависимости от расстояния до границы S , а для "поперечного" потенциала ψ – формула (3.5) везде в области глубокой тени.

Остается определить неизвестные функции a и b на поверхности S . Для этой цели следует граничное условие (I.5) свести к условиям типа (3.3). При этой процедуре применяются те же приемы, что и в работе [6]

Используя выражения (2.6) и (2.7), перепишем условие (I.5) в виде

$$\nabla\varphi + \nabla\psi \times \vec{f} + O(\nabla\varphi) + O(\nabla\psi) = 0 \text{ на } S, \qquad (4.1)$$

где $\vec{f}$ определяется формулой (2.21). Нормаль $\vec{n}$ к поперечному лучу и бинормаль $\vec{b}$ к нему лежат в плоскости, перпендикулярной вектору $\nabla\tau_s$. В этой плоскости повернем вектор $\vec{n}$ и $\vec{b}$ таким образом, чтобы они приняли положение $\vec{n}'$ и $\vec{b}'$. Тогда для $\vec{f}$ получаем

$$\vec{f} = a_f \nabla\tau_s + \sin(\vartheta-\alpha)\vec{n}' - \cos(\vartheta-\alpha)\vec{b}', \qquad (4.2)$$

где α – угол поворота

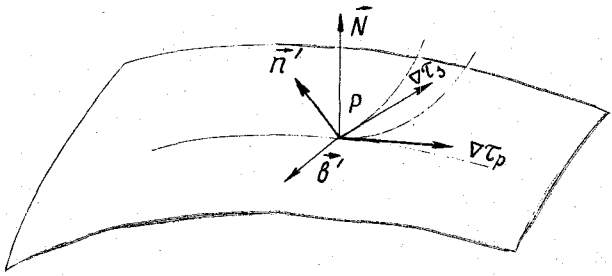

Рис. 2

На рис. 2 изображена некоторая окрестность точки P. Используя принцип Ферма, можно показать, что вектора $\vec{N}$, $\nabla\tau_s$ и $\nabla\tau_p$ лежат в одной плоскости. Назовем ее плоскостью распространения. В точке P (как и в любой другой точке поверхности S в области тени) направление распространения продольной волны и волны, бегущей по поверхности, совпадают, следовательно

$$(\vec{N}\,\nabla\tau_p) = 0 \text{ на } S. \qquad (4.3)$$

Угол α в (4.2) выберем таким образом, чтобы вектор $\vec{n}'$ лежал в плоскости распространения, тогда вектор $\vec{b}'$ будет ей перпендикулярен.

Как было замечено выше, для потенциала ψ везде, в том числе и на поверхности S, справедлива формула

$$\nabla\psi = i\omega\nabla\tau_s\psi + O(\omega\psi).$$

Аналогичную формулу для φ (справедливую во всей области определения вплоть до S) получим, используя равномерную асимптотику[1].

$$\nabla\varphi = i\omega\nabla\tau_p\varphi + i\omega\left[c_1\varphi + c_2\right]\vec{N} + O(\omega\varphi), \tag{4.4}$$

где c_1 и c_2 некоторые определенные функции от $\vec{x}$, отличные от нуля на поверхности S. Подставим теперь (2.I9),(4.2) и (4.4) в условие (4.I) и выделим главные члены, тогда

$$\nabla\tau_p\varphi + \left[c_1\varphi + c_2\right]\vec{N} + \psi n_s\left[\cos(\vartheta-\alpha)\vec{n}_1' + \sin(\vartheta-\alpha)\vec{b}'\right] = 0 \text{ на } S. \tag{4.5}$$

Проекция (4.5) на вектор $\vec{b}'$ дает уравнение

$$\sin(\vartheta-\alpha) = 0. \tag{4.6$_1$}$$

Из множества решений уравнения (4.6$_1$) выберем $\alpha = \vartheta$ и будем считать, что

$$\cos(\vartheta-\alpha) = 1. \tag{4.6$_2$}$$

Из равенства (4.5), умножая его скалярно на $\nabla\tau_p$, учитывая соотношения (4.3) и (4.6) и пользуясь законом Снеллиуса, получим первое из искомых граничных условий для φ и ψ

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma^2-1}}\,\varphi = \psi \quad \text{на } S, \tag{4.7}$$

где $\gamma = n_s/n_p$.

Обратимся снова к равенству (4.I). Принимая во внимание(4.6), а также то обстоятельство, что в нулевом приближении направление $\nabla\psi$ совпадает с вектором $\nabla\tau_s$, перепишем (4.I), оставляя лишь главные члены

$$\nabla\varphi + \nabla\psi\times\vec{b}' = 0. \tag{4.8}$$

Чтобы получить условие типа (3.3), умножим скалярно (4.8) на $\vec{N}$. Вектор $\vec{N}$ можно представить в виде суммы

$$\vec{N} = \frac{1}{\gamma}\vec{n}' + \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}\,\frac{\nabla\tau_s}{n_s} \qquad \text{на } S, \tag{4.9}$$

что легко вывести, пользуясь рис.2 и законом Снеллиуса. После ряда элементарных выкладок получаем

$$-\sqrt{\gamma^2-1}\,(\vec{N}\nabla\varphi) = (\vec{N}\nabla\psi) \text{ на } S. \tag{4.I0}$$

Таким образом, соотношения (4.7) и (4.10) представляют собой искомые граничные условия для потенциалов φ и ψ типа условий сопряжения (3.3) и определяют недостающие функции на поверхности

$$a=\frac{1}{\sqrt{\gamma^2-1}} \tag{4.11}$$

и

$$b=\sqrt{\gamma^2-1}. \tag{4.12}$$

Учитывая полученные формулы, а также соотношения (2.6)и(2.7) легко написать нулевое приближение для поля упругих колебаний в области глубокой тени.

Поскольку φ и ψ как решения уравнений Гельмгольца в зоне глубокой тени определяются формулами (3.4),(3.11) и (3.5) с точностью $O(\omega^{-1/3})$, то и поле упругих колебаний $\vec{u}=\vec{u}_p+\vec{u}_s$, которое выражается через потенциалы φ и ψ, определено с той же точностью.

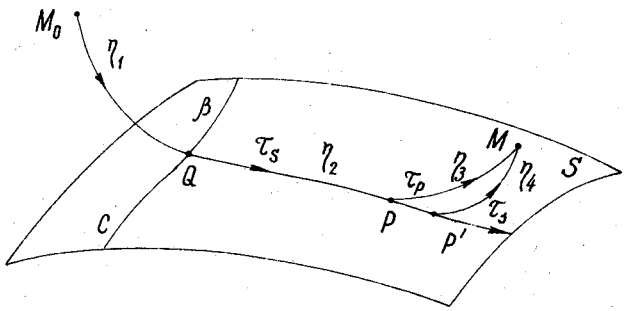

Рис. 3

Пусть в точку наблюдения $\mathcal{M}$ в глубокой тени вдали от границы приходят одновременно две дифрагированные волны, продольная волна соскальзывания (луч $P\mathcal{M}$ на рис.3) и поперечная волна срыва (луч $P'\mathcal{M}$), тогда

$$\vec{u}(\mathcal{M})=\frac{e^{\frac{5\pi i}{6}}\omega^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{6}}\cdot 2\cdot v'(-t_1)}\left(\frac{\varkappa}{n_p}\right)^{\frac{1}{3}}_{Q}\frac{e^{i\omega\int\limits_{\mathcal{M}_0}^{Q}n_p(\eta_1)d\eta_1}}{\sqrt{(n_p\gamma_p)_{\mathcal{M}_0}}}\left\{\frac{1}{2^{\frac{1}{6}}\cdot 2\cdot v'(-t_1)}\left(\frac{\varkappa}{n_p}\right)^{\frac{1}{3}}_{P}\cdot\right.$$

$$\cdot e^{\int\limits_Q^P\left[e^{\frac{5\pi i}{6}}\omega^{\frac{1}{3}}\frac{t_1}{2^{1/3}}n_p^{\frac{1}{3}}(\eta_2)\varkappa^{\frac{2}{3}}(\eta_2)+\frac{b(\eta_2)}{a(\eta_2)}\frac{\varkappa(\eta_2)}{\sqrt{\gamma^2(\eta_2)-1}}\right]d\eta_2}\cdot$$

$$\frac{e^{i\omega\left[\int\limits_Q^P n_p(\eta_2)d\eta_2+\int\limits_P^{\mathcal{M}}n_p(\eta_3)d\eta_3\right]}}{\sqrt{(n_p\gamma_p)_{\mathcal{M}}}}\left(\frac{\vec{t}_p}{\sqrt{\lambda+2\mu}}\right)_{\mathcal{M}}+\frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{\omega^{\frac{1}{6}}}\frac{b(P')}{\sqrt[4]{\gamma^2(P')-1}}\left(\frac{\varkappa}{n_p}\right)^{\frac{1}{2}}_{P'}.$$

$$\cdot e^{\int_Q^{P'}\left[e^{\frac{5\pi i}{6}}\omega^{\frac{1}{3}}\frac{t_1}{2^{1/3}}n_p^{\frac{1}{3}}(\eta_2)\varkappa^{\frac{2}{3}}(\eta_2)+\frac{b(\eta_2)}{a(\eta_2)}\frac{\varkappa(\eta_2)}{\sqrt{\gamma^2(\eta_2)-1}}\right]d\eta_2}\cdot$$

$$\cdot\frac{e^{i\omega\left[\int_Q^{P'}n_p(\eta_2)d\eta_2+\int_{P'}^{M}n_3(\eta_4)d\eta_4\right]}}{\sqrt{(n_3 J_3)_M}}\left(\frac{\cos\vartheta\vec{n}+\sin\vartheta\vec{b}}{\sqrt{\mu}}\right)_M\Bigg\}\left[1+O(\omega^{-\frac{1}{3}})\right], \quad (4.13)$$

где использованы обозначения, введенные в § 3, с очевидными изменениями, так, например, J со значком P означает геометрическое расхождение лучей продольной волны; кроме того, введены обозначения $(f)_M = f(M)$ и $\vec{t}_P = \frac{\nabla\tau_P}{n_P}$.

Из формулы (4.13) видно, что продольная волна в точке M является более интенсивной, чем поперечная. Это происходит главным образом за счет того, что поперечная волна, прежде чем покинуть поверхность S, проходит по ней более длинный путь $(QP'>QP)$ следовательно, сильнее затухает, чем продольная.

Используя (3.11), легко получить выражение для поля $\vec{u}$ в пограничном слое

$$u^{\text{погр.}}(M)=\frac{e^{\frac{7\pi i}{12}}\omega^{\frac{1}{2}}}{4\sqrt{2}[v'(-t_1)]^2}\left(\frac{\varkappa}{n_P}\right)_Q^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\varkappa}{n_P}\right)_P^{\frac{1}{6}}\cdot e^{\int_Q^P\left[e^{\frac{5\pi i}{6}}\omega^{\frac{1}{3}}\frac{t_1}{2^{1/3}}n_P^{\frac{1}{3}}(\eta_2)\varkappa^{\frac{2}{3}}(\eta_2)+\frac{b(\eta_2)}{a(\eta_2)}\frac{\varkappa(\eta_2)}{\sqrt{\gamma^2(\eta_2)-1}}\right]d\eta_2}\cdot$$

(4.14)

$$\cdot\frac{e^{i\omega\left[\int_{M_0}^{Q}n_p(\eta_1)d\eta_1+\int_Q^P n_p(\eta_2)d\eta_2\right]}}{\sqrt{(n_P J_P)_{M_0}(n_P j)_P}}W_1\left[-\omega^{\frac{2}{3}}\nu(P)\eta_M(P)-\xi_1\right]\left(\frac{\vec{t}_P}{\sqrt{\lambda+2\mu}}\right)_P\left[1+O(\omega^{-\frac{1}{3}})\right].$$

Здесь выписана только продольная часть поля, поскольку в пограничном слое поперечная часть по абсолютной величине в $\omega^{+1/3}$ меньше продольной и, следовательно, в нулевое приближение вклада не дает.

Заметим еще раз, что "лучевая формула" для поперечной части поля (второе слагаемое в (4.13)) является равномерной относительно расстояния от точки наблюдения до поверхности S. Для продольной части поля также можно написать равномерную асимптотику в духе работы [1].

Пусть, по-прежнему, источник типа центра расширения находится в точке M_0 на конечном расстоянии от поверхности S, точка наблюдения M – в области глубокой тени, тогда для M на любом (конечном или малом) расстоянии от S

827 10

$$\vec{u}_p(M)=i\omega e^{i\omega\theta_0+i\omega^{\frac{1}{3}}\theta_1}\Big\{(g_0\nabla\theta_0+\varrho_0 h_0\nabla\varrho_0)W_1(-\omega^{\frac{2}{3}}\varrho_0-\varrho_1)+$$

$$+\frac{i}{\omega^{\frac{1}{3}}}(h_0\nabla\theta_0+g_0\nabla\varrho_0)W_1'(-\omega^{\frac{2}{3}}\varrho_0-\varrho_1)\Big\}\left[1+O(\omega^{-\frac{1}{3}})\right], \tag{4.I5}$$

где все величины, кроме ϱ_1, являются функциями координат точки наблюдения. Функции θ_0 и ϱ_0 удовлетворяют следующей паре уравнений в частных производных

$$(\nabla\theta_0)^2+\varrho_0(\nabla\varrho_0)^2=n_p^2, \tag{4.I6}$$

$$\nabla\theta_0\nabla\varrho_0=0. \tag{4.I7}$$

На поверхности S

$$\varrho_0(S)=0 \tag{4.I8}$$

и θ_0 удовлетворяет поверхностному уравнению эйконала

$$(\nabla\theta_0)^2=n_p^2 \qquad \text{на } S. \tag{4.I9}$$

Величина ϱ_1 постоянна и просто связана с первым корнем интеграла Эйри

$$-\varrho_1=t_1 e^{i\frac{\pi}{3}},$$

а θ_1 подчиняется уравнениям

$$2(\nabla\theta_0\nabla\theta_1)+\varrho_1(\nabla\varrho_0)^2=0, \tag{4.20}$$

$$\nabla\theta_1\nabla\varrho_0=0. \tag{4.2I}$$

Из граничных условий следует, что вектор $\nabla\varrho_0$ в каждой точке поверхности направлен по нормали к ней и имеет величину

$$|\nabla\varrho_0|=n_p^{\frac{2}{3}}(2\varkappa)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{на } S. \tag{4.22}$$

Для коэффициентов g_0 и h_0 имеют место следующие уравнения

$$2(\nabla\theta_0\nabla\tilde{g}_0)+\tilde{g}_0\Delta\theta_0+(\nabla\rho_0)^2\tilde{h}_0+\rho_0\Delta\rho_0\tilde{h}_0+2\rho_0(\nabla\rho_0\nabla\tilde{h}_0)=0, \quad (4.23)$$

$$2(\nabla\theta_0\nabla\tilde{h}_0)+\tilde{h}_0\Delta\theta_0+\tilde{g}_0\Delta\rho_0+2(\nabla\rho_0\nabla\tilde{g}_0)=0, \quad (4.24)$$

где $\tilde{g}_0=\sqrt{\rho}\,g_0$, $\tilde{h}_0=\sqrt{\rho}\,h_0$, ρ - плотность среды, и граничные условия

$$\tilde{h}_0=-\frac{b}{a}\left(\frac{2\varkappa}{n_p}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt{\gamma^2-1}}\,\tilde{g}_0 \qquad \text{на } S, \quad (4.25)$$

$$\tilde{g}_0\Big|_S=\frac{e^{i\frac{\pi}{12}}\,\omega^{-\frac{1}{2}}}{4\sqrt{2}\,[v'(-t_1)]^2}\,\frac{\left(\frac{\varkappa}{n_p}\right)^{\frac{1}{3}}_Q}{\sqrt{(n_p\gamma_p)_{M_0}}}\,\frac{\left(\frac{\varkappa}{n_p}\right)^{\frac{1}{6}}_P}{\sqrt{(n_p\gamma)_P}}\cdot\exp\Big\{i\omega\Big[\int_{M_0}^{Q}n_p(\eta_1)d\eta_1+$$

$$+\int_Q n_p(\eta_2)d\eta_2\Big]+e^{\frac{5\pi i}{6}}\,\omega^{\frac{1}{3}}\,\frac{t_1}{2^{\frac{1}{3}}}\int_Q n_p^{\frac{1}{3}}(\eta_2)\varkappa^{\frac{2}{3}}(\eta_2)+\int_Q^P\frac{b(\eta_2)}{a(\eta_2)}\,\frac{\varkappa(\eta_2)}{\sqrt{\gamma^2(\eta_2)-1}}\,d\eta_2\Big\}. \quad (4.26)$$

Выражение (4.I5) переходит в "лучевое", когда точка наблюдения находится вдали от поверхности S (первое слагаемое формулы (4.I3)) и в выражение (4.I4), когда точка наблюдения находится в пограничном слое.

§ 5. Дифракция в случае двух упругих сред

Вполне аналогично тому, как это делалось в предыдущем параграфе, выводятся условия типа (3.3) в случае граничного условия (I.6). В результате

$$a=-\frac{\lambda}{2\mu\sqrt{\gamma^2-1}} \qquad \text{на } S \quad (5.I)$$

и

$$b=-\frac{2\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma^2-2} \qquad \text{на } S, \quad (5.2)$$

что согласуется, как и в случае условия (I.5), с соответствующими результатами работы [6] .

Не возникает принципиальных трудностей и в случае условий сопряжения (I.8) при наличии двух упругих сред.

Проектируя равенства (I.8), выраженные через потенциалы, на различные направления, получаем четыре равенства, связывающие φ_1, ψ_1, φ_2 и ψ_2. Индекс I показывает принадлежность к первой среде, индекс 2 - ко второй. Далее путем элементарных (хотя и громоздких) выкладок сводим эти четыре соотношения к двум, например, для пары φ_1 и ψ_2 и их нормальных производных, затем то же самое делаем для пары φ_1, ψ_1 и наконец для пары φ_1, φ_2.

Как видно из (4.I3)-(4.I5), коэффициент a в чистом виде не входит в выражение для поля, а коэффициент b входит только в формулу для волны срыва. Ниже приводятся таблицы для отношения b/a и коэффициента b при различных граничных условиях.

Таблица I

	$u_1\big\|_S=0$	$\vec{t}_N\big\|_S=0$	Условия сопряжения
$\dfrac{b}{a\sqrt{\gamma^2-1}}$	$\sqrt{\gamma^2-1}$	$\dfrac{4\mu\sqrt{\gamma^2-1}}{\lambda(\gamma^2-2)}$	$\dfrac{\left[\frac{\rho_2}{\rho_1}(\lambda_1+2\mu_1)+(2\mu_1-2\mu_2)\right]^2 k_1+\frac{\rho_2}{\rho_1}(\lambda_1+2\mu_1)^2 k_2+(2\mu_1-2\mu_2)^2 k_1 k_2 k_p}{\Delta}$

Таблица 2

гран. условия	потенциал	b
$\vec{u}\big\|_S=0$	ψ	$\sqrt{\gamma^2-1}$
$\vec{t}_N\big\|_S=0$	ψ	$-\dfrac{2\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma^2-2}$
условия сопряжения	φ_2	$\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}(\lambda_1+2\mu_1)}\,\dfrac{\left[\frac{\rho_2}{\rho_1}(\lambda_1+2\mu_1)+(2\mu_1-2\mu_2)\right]k_1+(\lambda_1+2\mu_2)k_2}{\Delta}\,k_p$
	ψ_1	$\dfrac{\left[\frac{\rho_2}{\rho_1}(\lambda_1+2\mu_1)+(2\mu_1-2\mu_2)\right]\left[\frac{\rho_2}{\rho_1}(\lambda_1+2\mu_1)-(\lambda_1+2\mu_2)\right]-(\lambda_1+2\mu_2)(2\mu_1-2\mu_2)\cdot k_2 k_p}{\Delta}\cdot k_1$

гран. условия	потенциал	b
условия сопряжения	ψ_2	$-\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}(\lambda_1+2\mu_1)\frac{\left[\frac{\rho_2}{\rho_1}(\lambda_1+2\mu_1)-(\lambda+2\mu_2)\right]+(2\mu_1-2\mu_2)\kappa_1\kappa_p}{\Delta}\kappa_2$

Кроме уже упоминавшихся, в таблицах I и 2 использованы следующие обозначения

$$\kappa_1=\sqrt{\gamma_s^{(1)2}-1},\ \kappa_2=\sqrt{\gamma_s^{(2)2}-1},\ \kappa_p=\sqrt{\gamma_p^2-1},\ \gamma_s^{(1),(2)}=\frac{n_s^{(1),(2)}}{n_p^{(1)}},\ \gamma_p=\frac{n_p^{(2)}}{n_p^{(1)}},$$

$$\Delta=\left[\frac{\rho_2}{\rho_1}(\lambda_1+2\mu_1)-(\lambda_1+2\mu_2)\right]^2+\frac{\rho_2}{\rho_1}(\lambda_1+2\mu_1)^2\kappa_1\kappa_p+(\lambda_1+2\mu_2)^2\kappa_2\kappa_p.$$

Все функции в таблицах I и 2 берутся на поверхности S .

Для волн соскальзывания верны следующие формулы: первое слагаемое в (4.I3), формулы (4.I4) и (4.I5), в которых отношение b/a берется из таблицы I в соответствии с различными граничными условиями.

Для волн срыва справедлива "лучевая" формула (второе слагаемое в (4.I3)) с соответствующими значениями b/a и b из таблиц I и 2.

Таблицами I и 2 завершается решение задачи, поставленной в § I. Точно так же можно решить и другие задачи дифракции для двух упругих сред, разделенных гладкой границей. Не представляет особого труда, например, написать нулевое приближение для поля в глубокой тени в случае, когда имеется только три волны или когда источник находится во второй среде и т.д.

В заключение автор выражает глубокую признательность И.А.Молоткову за весьма ценные обсуждения в процессе работы над данной задачей.

ЛИТЕРАТУРА

I. Lewis R.M., Bleistein N. and Ludwig D. Uniform asymptotic theory of creeping waves. Comm. Pure Appl. Math., I967, Vol. 20, № 2, 295-327.

2. Singh Sarva Jit, Ben-Menahem Ari. Decoupling of the vector wave equation of elasticity for radially heterogeneous media. J. Acoust. Soc. Amer. I969, v. 46, № 3, pt. 2, 655-660.

3. Бабич В.М. Принцип взаимности для динамических уравнений теории упругости. Сб."Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн". УI, Изд. ЛГУ, I962.
4. Бабич В.М., Алексеев А.С. О лучевом методе вычисления интенсивности волновых фронтов., Изв. АН СССР, сер.геофиз., I958, № I.
5. Мухина И.В. Геометрическая теория дифракции в случае двух неоднородных сред, разделенных произвольной гладкой границей. Сб. "Труды У Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн". Изд."Наука", Л.,I97I.
6. Молотков И.А. Дифракция на гладком выпуклом цилиндре при существовании двух скоростей распространения, Вестник ЛГУ, I967, № I0, в.2, 69-79.