УДК 517.98

ПРИМЕР НЕДОПОЛНЯЕМОГО ГИЛЬБЕРТОВА W^*-МОДУЛЯ

В. М. Мануйлов

Как известно, теория гильбертовых модулей [1, 2] построена по модели теории гильбертовых пространств и во многом напоминает ее. Если A — C^*-алгебра, то правый A-модуль M называется гильбертовым A-модулем, если на M задано отображение (внутреннее произведение) $\langle\cdot,\cdot\rangle : M \times M \to A$, которое для всех $x, y \in M$, $a \in A$ обладает свойствами $\langle x, y\rangle^* = \langle y, x\rangle$, $\langle x, ya\rangle = \langle x, y\rangle a$, $\langle x, x\rangle \geqslant 0$, причем $\langle x, x\rangle = 0$, только если $x = 0$ и M является банаховым пространством по отношению к норме $\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|^{1/2}$. Стандартным A-модулем $l_2(A)$ называется модуль, состоящий из последовательностей $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $a_n \in A$, для которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^* a_n$ сходится по норме C^*-алгебры A, с внутренним произведением $\langle (a_n), (b_n)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n \in A$.

Подмодуль $N \subset M$ называется дополняемым, если верно равенство $M = N \oplus K$ для некоторого подмодуля K; N называется ортогонально дополняемым, если в качестве K можно взять ортогональное дополнение $N^{\perp}$. Основное отличие теории гильбертовых модулей от теории гильбертовых пространств состоит в том, что не все гильбертовы подмодули являются дополняемыми (тем более ортогонально дополняемыми). Ряд условий, обеспечивающих ортогональную дополняемость, можно найти в статье [3].

В случае когда A является W^*-алгеброй, гильбертовы A-модули более похожи на гильбертовы пространства. В частности, в них имеет место полярное разложение. Следующий пример, сообщенный М. Франком, показывает, что и в случае W^*-алгебр существуют ортогонально недополняемые подмодули. Пусть $A = B(H)$ — алгебра ограниченных операторов гильбертова сепарабельного пространства, $K(H) \subset B(H)$ — идеал компактных операторов. Рассмотрим A-модуль $M = K(H) \oplus B(H)$ и подмодуль $N \subset M$, состоящий из пар (k, k), где $k \in K(H)$. Ясно, что $N^{\perp} = \{(k, -k) : k \in K(H)\}$ и $M \neq N \oplus N^{\perp}$. Однако если взять $K = \{(0, b) : b \in B(H)\}$, то $M = N \oplus K$ и подмодуль N является дополняемым.

В статье [4] было показано, что если модуль M над W^*-алгеброй A конечно-порожден и проективен, то биортогональный подмодуль $N^{\perp\perp}$ всегда является дополняемым, и высказано предположение, что это верно для произвольного M. Мы приводим пример, показывающий, что это не так, именно существует гильбертов модуль M над коммутативной W^*-алгеброй, в котором существует недополняемый подмодуль вида $N^{\perp\perp}$ для некоторого N.

Пусть $A = l_\infty$ — W^*-алгебра ограниченных последовательностей, $c_0 \subset l_\infty$ — ее подалгебра последовательностей, сходящихся к нулю. Рассмотрим гильбертов модуль $M = l_2(c_0) \oplus l_2(l_\infty)$ над алгеброй A. Положим $N = \{(f_1, f_2, f_3, \ldots), (f_1, 2f_2, 3f_3, \ldots)\} \subset M$, где $f_k \in c_0$ для всех k и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |f_k|^2$ сходится в c_0. Легко видеть, что модуль N замкнут и совпадает со своим биортогональным дополнением: $N^{\perp\perp} = N$.

Теорема. *Подмодуль N не является дополняемым.*

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Пусть существует разложение $M = N \oplus K$ для некоторого подмодуля $K \subset M$. Тогда существует A-инвариантный (неортогональный) ограниченный проектор $P : M \to N$. Так как P коммутирует с действием A, он может быть записан в виде последовательности $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$, где P_k — проектор, действующий на k-ю координату. Точнее, пусть $p_k \in A$ — проектор на k-ю координату, тогда $P_k = p_k P$. Для ограниченности P нормы проекторов P_k должны быть равномерно ограничены. Но каждый проектор P_k является проектором из $l_2 \oplus l_2$ на $l_2 \oplus N(l_2)$, где $N : l_2 \to l_2$ — неограниченный оператор, $N(a_1, a_2, \ldots) = (a_1, 2a_2, \ldots)$. Для каждого k имеем разложение $M_k = l_2 \oplus l_2 = N_k \oplus K_k$, где $K_k = p_k K$, $N_k = p_k N$. Для равномерной ограниченности норм проекторов P_k дополнения K_k должны состоять из пар $\{(x, y) : x, y \in l_2\}$, в которых $|x_n| > \epsilon |y_n|$ для некоторого $\epsilon > 0$, не зависящего от k.

Пусть $f_i \in c_0$, $g_i \in l_\infty$ для всех i. Рассмотрим произвольный элемент

$$(f_1, f_2, \ldots), (g_1, g_2, \ldots) \in M.$$

Если $M = N \oplus K$, то мы можем этот элемент разложить в сумму

$$(h_1, h_2, \ldots), (h_1, 2h_2, \ldots) \oplus (f_1 - h_1, f_2 - h_2, \ldots), (g_1 - h_1, g_2 - 2h_2, \ldots).$$

При фиксированном n для последовательности $f_n \in A = l_\infty$ верхним индексом будем обозначать номер элемента этой последовательности: $f_n = (f_n^k)_{k\in\mathbf{N}}$. При достаточно больших значениях n элементы подмодуля K таковы, что

$$|f_n^k - h_n^k| > \epsilon|g_n^k - nh_n^k|.$$

Но левая часть этого неравенства стремится к нулю при $k \to \infty$ (при фиксированном n), а правая часть нет, поскольку $h_n \in c_0$ (достаточно взять в качестве g_n^k постоянные последовательности: $g_n^k = g_n \neq 0$). Полученное противоречие доказывает, что подмодуль N недополняем.

Следствие. *Пусть $T : M \to M$ — ограниченный A-линейный оператор. Тогда его ядро не обязано быть дополняемым.*

Работа частично поддержана РФФИ, грант № 99–01–01202.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Paschke W.L.* Inner product modules over B*-algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. **182**. 443–468.
2. *Lance E.C.* Hilbert C*-modules — a toolkit for operator algebraists // London Math. Soc. Lect. Note Ser. 210. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
3. *Frank M.* Geometrical aspects of Hilbert C^*-modules // Positivity. 1999. **3**. 215–243.
4. *Франк М., Троицкий Е.В.* Числа Лефшеца и геометрия операторов в W^*-модулях // Функц. анализ и его прил. 1996. **30**, № 4. 45–57.

Поступила в редакцию
27.12.99

УДК 511.36

О ТОЧНЫХ ПО ВЫСОТЕ ОЦЕНКАХ ДЛЯ СОВМЕСТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

А. И. Галочкин

Пусть $\mathbb{I}$ — поле рациональных чисел или мнимое квадратичное поле, ε — некоторый корень из единицы, $\varepsilon^u = 1$, поле $\mathbb{K} = \mathbb{I}(\varepsilon)$, v — степень поля $\mathbb{K}$ относительно поля $\mathbb{I}$. Через $\mathbb{Z}_\mathbb{I}$ и $\mathbb{Z}_\mathbb{K}$ будем обозначать кольца целых чисел в полях $\mathbb{I}$ и $\mathbb{K}$. Рассмотрим функцию

$$\psi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^{(s+1)n} n![\lambda_1 + 1,\, n] \cdots [\lambda_s + 1,\, n]}, \quad [\lambda + 1,\, n] = (\lambda + 1) \cdots (\lambda + n), \tag{1}$$

где a, $a\lambda_j \in \mathbb{Z}_\mathbb{I}$, $\lambda_j \neq -1, -2, \ldots$.

Функция ψ является решением линейного дифференциального уравнения

$$a^{s+1}\delta(\delta + \lambda_1) \ldots (\delta + \lambda_s)y = zy, \quad \delta = z\frac{d}{dz}.$$

В ряде работ с помощью эффективных построений устанавливались оценки снизу линейных форм от значений функции $\psi(z)$ и s ее последовательных производных в точке $\alpha \in \mathbb{I}$. В 1981 г. А. Н. Коробов [1] в некотором частном случае получил для линейных форм оценки снизу и сверху, которые отличались друг от друга лишь на постоянный множитель. В более общей ситуации такие оценки были установлены в статье [2].

В настоящей работе результаты статьи [2] распространяются на некоторый случай, когда коэффициенты линейных форм и число α принадлежат полю $\mathbb{K}$. При этом для совместных приближений линейных форм впервые удается получить верхние и нижние оценки, отличающиеся лишь на постоянный множитель.

Введем следующие обозначения, большинство из которых совпадает с обозначениями статьи [2].