И. С. Шикин, Точное решение типа источника в модели с центральным притягивающим телом в ньютоновской и релятивистской газовой динамике, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1997, номер 6, 39–41

6. *Li X.* Spacial instability of a viscous liquid sheet//Chem. Eng. Sci. 1993. **48**. 2973—2981.
7. *Li X.* Instability of plane liquid sheets//Acta mech. 1994. **106**. 137—156.
8. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. М., 1949.
9. *Erneux T., Davis S.H.* Nonlinear rupture of free films//Phys. Fluids. 1993. **A5**. 1117—1122.
10. *Prevost M., Gallez D.* Nonlinear rupture of thin free liquid films//J. Chem. Phys. 1986. **84**. 4043—4048.
11. *Sharma A., Ruckenstein E.* An analytic nonlinear theory of thin film rupture and its application to wetting films//J. Colloid and Interface Sci. 1986. **113**. 456.
12. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* Гидродинамика слабодеформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория//Успехи матем. наук. 1989. **44**. 29—98.

Поступила в редакцию
29.11.96

УДК 530.12:531.51

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ТИПА ИСТОЧНИКА В МОДЕЛИ С ЦЕНТРАЛЬНЫМ ПРИТЯГИВАЮЩИМ ТЕЛОМ В НЬЮТОНОВСКОЙ И РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

И. С. Шикин

Л.И. Седовым исследованы многие задачи динамики гравитирующего газа [1]. В настоящей работе рассматривается точное решение задачи для сферически-симметричного течения из точечного источника — центрального притягивающего тела массы M — в рамках ньютоновской и релятивистской газовой динамики. В качестве показателя политропы рассматривается значение $N = 3/2$. Обсуждается решение для звездного ветра.

1. В рамках ньютоновской гравитации данная задача известна как модель Паркера, в которой давление p и плотность ρ предполагаются связанными политропной зависимостью [2]

$$p = A\rho^N. \tag{1}$$

В соотношении (1) показатель политропы N не равен, вообще говоря, отношению теплоемкостей γ. При $N < \gamma$ политропный процесс (1) соответствует притоку тепла к частице при расширении [3].

Случаи модели (1) при $1 < N < 3/2$ и $3/2 < N < 5/3$ рассмотрены автором в [3]. Здесь обсуждается случай $N = 3/2$, обнаруживающий специфическое газодинамическое поведение (в отличие, как показано в разделе 2, от релятивистской газодинамики).

В ньютоновской газовой динамике интегралы уравнений неразрывности и импульса для сферически симметричного установившегося движения при условии (1) с $N = 3/2$ имеют вид (r — расстояние от центра симметрии, v — скорость газа, G — гравитационная постоянная)

$$\rho v r^2 = C = \text{const}\,, \tag{2}$$

$$\frac{v^2}{2} + 3\,\frac{p}{\rho} - \frac{GM}{r} = F = \text{const}\ . \tag{3}$$

Для качественного анализа движения удобно рассматривать дифференциальное уравнение, вытекающее из основных уравнений и интегралов (2), (3), в виде [3]

$$\frac{dv}{dr} = \frac{2v}{r}\, b^2 (v^2 - b^2)^{-1} \left(1 - \frac{GM}{2B}\, v^{1/2}\right), \qquad b^2 = \frac{3p}{2\rho}, \tag{4}$$

$$B \equiv \frac{3}{2}\, AC^{1/2} = \text{const}\ . \tag{5}$$

Качественное поведение зависимости $v(r)$ в ньютоновской газовой динамике, определяемое уравнением (4), показано на рис. 1. Прямая, проходящая через точки A и C, отвечает решению

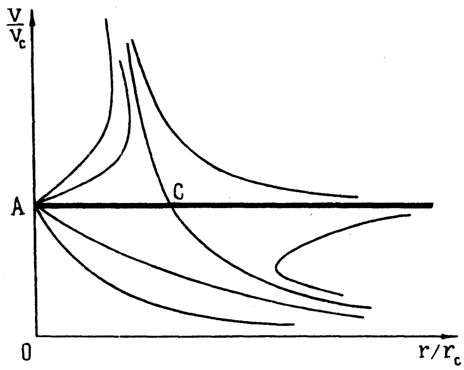

Рис. 1

$$v = v_c = \left(\frac{2B}{GM}\right)^2. \quad (6)$$

При $r \to \infty$ для этого решения скорость остается конечной, и в этом смысле оно соответствует звездному ветру. Вблизи центра симметрии можно представить вместо точечного источника [3] источник конечного радиуса R. Интегральные кривые, выходящие из точки A и стремящиеся к значению $v = 0$ при $r \to \infty$, отвечают звездному бризу. Через точку C проходит вторая наряду с (6) сепаратриса, для которой в соотношении (3)

$$F = F^* = \frac{8B^4}{(GM)^4}.$$

Ее уравнение имеет вид

$$v^{1/2}\left[v + \frac{4B^2}{(GM)^2}\right]\left(v^{1/2} + \frac{2B}{GM}\right) r = 2GM.$$

На рис. 1 кривые, отвечающие звездному бризу, лежат ниже этой сепаратрисы.

2. Рассмотрим сферически-симметричное установившееся движение (пробной) материи в пространстве-времени Шварцшильда в рамках общей теории относительности.

Метрика, на фоне которой происходит движение, имеет вид [4]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r_g/r} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \quad (7)$$

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}. \quad (8)$$

Латинские индексы изменяются от 0 до 3, $x^0 = ct$, c — скорость света.

Уравнения релятивистской гидродинамики в ковариантной форме записываются в виде

$$(nu^i)_{;i} = 0, \quad (9)$$

$$(T_i^k)_{;k} = 0, \quad (10)$$

где n — плотность числа частиц, u^i — 4-скорость, T_i^k — введенный в [3] тензор энергии-импульса:

$$T^{ik} = (e+p)u^iu^k - pg^{ik} + q^iu^k + q^ku^i, \quad (11)$$

e — плотность внутренней энергии, p — давление. Для 4-вектора q^i, имеющего смысл притока энергии-импульса, принимается выражение [3]

$$q^i = k_1 p u^i, \qquad k_1 = \text{const}.$$

При этом (11) записывается в виде [3]

$$T^{ik} = (e^* + p)u^iu^k - pg^{ik}, \qquad e^* = e + 2k_1p. \quad (12)$$

Будем рассматривать нерелятивистское уравнение состояния (m — масса покоя частиц) [3]

$$e = mnc^2 + \frac{p}{\gamma - 1},$$

для которого в (12) имеем (с постоянной ν)

$$e^* = mnc^2 + \frac{p}{\nu - 1}, \qquad k_1 = \frac{\gamma - \nu}{2(\gamma - 1)(\nu - 1)}. \quad (13)$$

со значением $\nu = 3/2$. При этом предполагается, что процесс политропный:

$$p = A(mn)^{3/2}. \tag{14}$$

Аналогично определению скорости звука в релятивистской газовой динамике вводим, исходя из (12)–(14), характерную скорость b [3]:

$$b^2 = c^2\left(\frac{de^*}{dp}\right)^{-1} = \frac{3p}{2(mnc^2+3p)}\,c^2 .$$

Уравнения (9) и (10) при $i = 0$ в случае зависимости переменных только от радиуса r после интегрирования приводят к конечным соотношениям [3]

$$r^2nu^1 = \frac{C}{mc} = \mathrm{const}\,, \qquad u^1 = (-g_{11})^{-1/2}\,\mathrm{sh}\,\varphi\,, \qquad \frac{e^*+p}{n}\,u_0 = \mathrm{const}\,, \qquad u_0 = (g_{00})^{1/2}\,\mathrm{ch}\,\varphi\,.$$

Качественное исследование движения оказывается удобным проводить, рассматривая дифференциальное уравнение для зависимости скорости v ($v/c = \mathrm{th}\,\varphi$) от радиуса r в виде [3]

$$\frac{dv}{dr}\,\mathrm{ch}^2\varphi(v^2-b^2)\left(1-\frac{r_g}{r}\right) = \frac{2v}{r}b^2\left(1-\frac{GM}{r}\frac{mn}{3p}-\frac{5GM}{2rc^2}\right). \tag{15}$$

Картина интегральных кривых уравнения (15) показана на рис. 2. Решению типа звездного ветра соответствует интегральная кривая, выходящая из точки $r = r_g$, $v = 0$, проходящая через область $v < b$, через седловую особую точку C, в которой имеем [3]

$$v_c = b\,, \qquad r_c = \frac{GM}{2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{3}{c^2}\right), \tag{16}$$

и затем в области $v > b$ стремящаяся к значению $v \to \mathrm{const}$. Для координат особой точки C, определяемых формулой (16), с точностью до $1/c^2$, учитывая (5), имеем

$$r_c = \frac{1}{B^4}\left(\frac{GM}{2}\right)^5 + 10\frac{GM}{c^2}\,, \qquad v_c = \left(\frac{2B}{GM}\right)^2\left[1-\frac{17}{2c^2}\left(\frac{2B}{GM}\right)^4\right].$$

Наклон сепаратрисы, проходящей через точку C и отвечающей звездному ветру, с точностью до $1/c^2$ равен

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{c^2}\,6B^{10}\left(\frac{2}{GM}\right)^{11}.$$

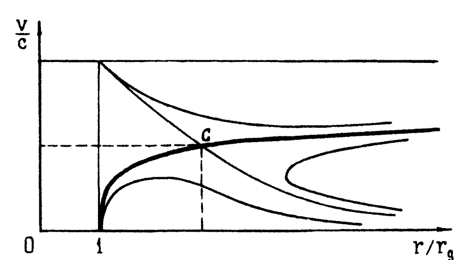

Рис. 2

Кривые, выходящие из точки $r = r_g$, $v = 0$ и идущие при $r \to \infty$ к значению $v \to 0$, отвечают решению типа звездного бриза.

Асимптотика интегральных кривых уравнения (15) вблизи точки $r = r_g$, $v = 0$ (8) имеет вид

$$v \approx \mathrm{const}(r-r_g)^{1/2}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №97-01-00196.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М., 1981.
2. *Parker E.N.* Interplanetary Dynamical Processes. N.Y.; L., 1963. (Рус. пер.: *Паркер Е.Н.* Динамические процессы в межпланетной среде. М., 1965.)
3. *Shikin I.S.* Stellar wind model in relativistic hydrodynamics// Int. J. Modern Phys. D. 1994. **3**, N 4. 747–754.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М., 1988.

Поступила в редакцию
02.06.97