Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Д. Полянин, О конвективном массотеплообмене реагирующей частицы при малых числах Пекле, *Докл. АН СССР*, 1982, том 262, номер 2, 292–296

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.169
27 марта 2025 г., 20:16:19

УДК 532.7

А.Д. ПОЛЯНИН

О КОНВЕКТИВНОМ МАССОТЕПЛООБМЕНЕ РЕАГИРУЮЩЕЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ ПЕКЛЕ

(Представлено академиком П.Я. Кочиной 12 XI 1980)

Рассматривается конвективная диффузия к теплопроводной реагирующей сфере, обтекаемой ламинарным поступательным и сдвиговым потоком при протекании на ее поверхности химической реакции, скорость которой произвольным образом зависит от температуры и концентраций. Предполагается, что реагирующие компоненты присутствуют в достаточно малых концентрациях, так что наличие поверхностной реакции не влияет на параметры потока и частицы.

Безразмерные уравнения конвективной диффузии и теплопроводности и граничные условия имеют вид

(1) $\Delta c_m = \mathrm{Pe}_m(\mathbf{u}\nabla)c_m, \quad 1 < r < \infty, \quad m = 1, 2, \ldots, M;$

(2) $\Delta T = \mathrm{Pe}_0(\mathbf{u}\nabla)T, \quad 1 < r < \infty;$

(3) $\Delta t = 0, \quad 0 \leqslant r < 1;$

(4) $r \to \infty, \quad c_m \to 0, \quad T \to 0;$

(5) $r = 1, \quad T = t;$

(6) $r = 1, \quad \dfrac{\partial c_m}{\partial r} = f_m(c_1, c_2, \ldots, c_M, T);$

(7) $r = 1, \quad \dfrac{\partial T}{\partial r} - \delta \dfrac{\partial t}{\partial r} = \sum\limits_{m=1}^{M} h_m f_m(c_1, c_2, \ldots, c_M, T);$

(8) $r = 0, \quad |t| < \infty;$

$$c_m^* = c_{m\infty}(1 - c_m), \qquad T^* = T_\infty(1 - T), \qquad t^* = T_\infty(1 - t),$$

$$\mathrm{Pe}_m = aUD_m^{-1}, \qquad \mathrm{Pe}_0 = aU\chi^{-1}, \qquad \delta = \lambda_1\lambda^{-1}, \qquad h_m = c_{m\infty}D_mH_m(\lambda T_\infty)^{-1},$$

$$f_m(c_1, c_2, \ldots, c_M, T) \equiv -a(c_{m\infty}D_m)^{-1}F_m(c_1^*, c_2^*, \ldots, c_M^*, T^*),$$

где c_m^* – концентрации реагентов, T^* и t^* – температура в потоке и внутри частицы, $c_{m\infty}$ и T_∞ – концентрации и температура на бесконечности: Pe_0, Pe_m – тепловое и диффузионные числа Пекла, a – радиус частицы, U – характерная скорость потока, D_m – коэффициент диффузии m-го вещества в смеси, χ – коэффициент температуропроводности, H_m – теплота m-й реакции, F_m – скорости поверхностной реакции, $\mathbf{u}$ – вектор скорости жидкости, M – число реагентов, участвующих в реакции, λ_1 и λ – коэффициенты теплопроводности частицы и жидкости; r, θ, φ – сферическая система координат, связанная с частицей.

Граничное условие (4) означает однородность температуры и концентраций вдали от частицы, (5) – непрерывность температуры, (6) – "закон реакции" m-го компонента (см., например, [1–4]), (7) – баланс тепла на поверхности частицы [1]. Основные предположения и подробная постановка рассматриваемой задачи приведена в [1].

В изотермическом случае для $M = 1$ при малых значениях числа Пекле массоперенос к частице в поступательном потоке рассматривался ранее для диффузионного режима реакции [5–7], реакции первого [8–10], второго [8] и произвольного [11] порядков; в случае сдвигового обтекания аналогичный анализ проводился только для диффузионного режима реакции [12–14]. В [15] определялось поле температур вне и внутри теплопроводной частицы при полном поглощении растворенного в жидкости вещества на ее поверхности [5].

1. Сдвиговый поток. В случае произвольного сдвигового потока распределение скоростей жидкости вдали от частицы в безразмерных переменных имеет вид

$$
(9)\qquad r\to\infty,\quad u_i\to G_{ij}x_j,\quad G_{ii}=0,\quad i,j=1,\ 2,\ 3;
$$
$$
G_{ij}=G^*_{ij}G^{-1},\quad G=\max_{i,j}|G^*_{ij}|,\quad U=aG.
$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам i и j ведется суммирование; G^*_{ij} – элементы матрицы коэффициентов сдвига, u_i – компоненты скоростей жидкости в декартовой системе координат x_i, $i=1,\ 2,\ 3$.

Исследуем краевую задачу (1)–(8) методом сращиваемых асимптотических разложений по малым числам Пекле [5–15]. При этом считается, что

$$
\epsilon\to 0,\quad \mathrm{Pe}_m=\epsilon Q_m,\quad Q_m=O(1),\quad m=0,\ 1,\dots,\ M,
$$

и вся область течения разбивается на две подобласти: внутреннюю $\Omega_1=\{1\leqslant r\leqslant O(\epsilon^{-1/2})\}$ и внешнюю $\Omega_\infty=\{O(\epsilon^{-1/2})\leqslant r\}$ [12–14]. Как обычно, во внешней области вводится "сжатая" координата $\rho=\epsilon^{1/2}r$ и решение в каждой из подобластей ищется по отдельности в виде внутреннего и внешнего разложений. При построении асимптотического решения во внутренней области используются граничные условия на поверхности частицы (5)–(7), а во внешней области – граничные условия на бесконечности (4); возникающие при решении неизвестные постоянные определяются путем использования процедуры сращивания [5–15].

Аналогично [14] можно показать, что в случае сдвигового стоксова обтекания сферы (9) распределение температуры и концентраций на внутренней границе области Ω_∞ (т.е. при $r=O(\epsilon^{-1/2})$) может быть представлено в виде

$$
(10)\qquad \begin{aligned}
T&=\Psi(\mathrm{Pe}_0,\ \mathrm{Pe}_1,\dots,\ \mathrm{Pe}_M)\{r^{-1}-\alpha\mathrm{Pe}_0^{1/2}+O(\mathrm{Pe}_0^2)\},\qquad r=O(\epsilon^{-1/2}),\\
c_m&=\Phi_m(\mathrm{Pe}_0,\mathrm{Pe}_1,\dots,\ \mathrm{Pe}_M)\{r^{-1}-\alpha\mathrm{Pe}_m^{1/2}+O(\mathrm{Pe}_m^2)\},\qquad m=1,\ 2,\dots,\ M.
\end{aligned}
$$

Здесь $\alpha=\alpha(G_{ij})$ – числовой коэффициент, а Ψ и Φ_m – неизвестные функции, определяемые в ходе решения задачи. Общее выражение для определения величины параметра α приведено в [13]. В частности, в осесимметричном случае ($G_{11}=G_{22}=\frac{1}{2}$, $G_{33}=-1$ и $G_{ij}=0$ при $i\neq j$) $\alpha=0{,}399$ [13], а в случае простого сдвига (один недиагональный элемент матрицы G_{ij} равен единице, а остальные – нулю) $\alpha=0{,}258$ [12].

Для внутреннего разложения температуры и концентраций в области Ω_1, а также для распределения температуры внутри частицы имеет место следующее представление:

$$
(11)\qquad \begin{aligned}
T&=\sum_{k=0}^{3}\mathrm{Pe}_0^{k/2}T^{(k)}+o(\mathrm{Pe}_0^{3/2}),\qquad t=\sum_{k=0}^{3}\mathrm{Pe}_0^{k/2}t^{(k)}+o(\mathrm{Pe}_0^{3/2}),\\
c_m&=\sum_{k=0}^{3}\mathrm{Pe}_m^{k/2}c_m^{(k)}+o(\mathrm{Pe}_m^{3/2}),\qquad m=1,\ 2,\dots,\ M,
\end{aligned}
$$

где функции $c_m^{(k)}$, $T^{(k)}$, $t^{(k)}$ удовлетворяют уравнениям

$$
(12)\qquad \begin{aligned}
&\Delta c_m^{(k)}=0,\qquad \Delta T^{(k)}=0,\qquad \Delta t^{(k)}=0,\quad k=0,\ 1,\\
&\Delta c_m^{(k)}=-\mu_m^{(k)}r^{-3}u_ix_i,\qquad \Delta T^{(k)}=-\sigma^{(k)}r^{-3}u_ix_i,\qquad \Delta t^{(k)}=0,\qquad k=2,\ 3.
\end{aligned}
$$

При выводе второй группы уравнений (12) при $k = 2, 3$ учтено, что первые члены внутреннего разложения (11) (при $k = 0, 1$) зависят только от радиальной координаты r и определяются двучленом вида $A + Br^{-1}$, где для каждого $c_m^{(k)}$, $T^{(k)}$, $t^{(k)}$, $k = 0, 1$, свои постоянные A и B, которые определяются из граничных условий (5)–(8), и условия сращивания с решением в области Ω_∞ (10); в (12) по индексу i ведется суммирование; $\mu_m^{(k)}$, $\sigma^{(k)} = \mathrm{const}$.

Интегрируя уравнения (12) по поверхности S_r сферы радиуса r, получаем

$$\mathrm{L}\langle c_m^{(k)}\rangle = 0, \quad \mathrm{L}\langle T^{(k)}\rangle = 0, \quad \mathrm{L}\langle t^{(k)}\rangle = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{13}$$
$$\mathrm{L} \equiv \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr}, \quad \langle w\rangle \equiv \frac{1}{4\pi r^2}\int_{S_r} w\,ds = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta w\,d\theta\,d\varphi.$$

При выводе уравнений (13) для $k = 2, 3$ учитывалось равенство $\langle u_i x_i\rangle = 0$ [14], которое является следствием предположения о несжимаемости жидкости, условия прилипания на поверхности сферы и формулы Остроградского, записанной для объема, заключенного между поверхностями S_r и S_1. Отметим, что для любых функций w, зависящих только от координаты r, справедливо равенство $\langle w(r)\rangle = w(r)$.

Общее решение уравнений для средних (13) имеет вид

$$\langle c_m^{(k)}\rangle = a_{m1}^{(k)} + b_{m1}^{(k)}r^{-1}, \quad \langle T^{(k)}\rangle = a_2^{(k)} + b_2^{(k)}r^{-1}, \quad \langle t^{(k)}\rangle = a_3^{(k)}, \tag{14}$$
$$k = 0, 1, 2, 3; \quad a_{m1}^{(k)}, b_{m1}^{(k)}, a_2^{(k)}, b_2^{(k)}, a_3^{(k)} = \mathrm{const}.$$

При записи последнего равенства (14) было учтено условие ограниченности решения внутри частицы (8).

Из соотношений (11), (14) для полных средних получаем

$$\langle c_m\rangle = \mathrm{Sh}_m(r^{-1} - \alpha \mathrm{Pe}_m^{1/2}), \quad \langle T\rangle = \mathrm{Nu}(r^{-1} - \alpha \mathrm{Pe}_0^{1/2}),$$
$$\langle t\rangle = \mathrm{Nu}(1 - \alpha \mathrm{Pe}_0^{1/2}), \quad m = 1, 2, \ldots, M, \tag{15}$$
$$\mathrm{Sh}_m = -\left\langle\frac{\partial c_m}{\partial r}\right\rangle\bigg|_{r=1} = \Phi_m, \quad \mathrm{Nu} = -\left\langle\frac{\partial T}{\partial r}\right\rangle\bigg|_{r=1} = \Psi.$$

Вид функций $\langle c_m\rangle$ и $\langle T\rangle$ обусловлен использованием процедуры сращивания с решением во внешней области (10), а функции $\langle t\rangle$ – граничным условием (5); здесь Sh_m и Nu – средние числа Шервуда и Нуссельта соответственно.

Так как при $k = 0, 1$ функции $c_m^{(k)}$, $T^{(k)}$, $t^{(k)}$ зависят только от расстояния до центра сферы, то для любой (аналитической) функции f с точностью до $o(\epsilon^{3/2})$ справедлива формула

$$\langle f(c_1, c_2, \ldots, c_M, T)\rangle = f(\langle c_1\rangle, \langle c_2\rangle, \ldots, \langle c_M\rangle, \langle T\rangle), \tag{16}$$

которая доказывается путем непосредственной проверки, с учетом представления (11) и свойств операции $\langle\cdot\rangle$.

Осредняя граничные условия (6), (7) и используя формулы (15) и свойство (16), для определения средних чисел Шервуда и Нуссельта получаем следующую алгебраическую (трансцендентную) систему уравнений:

$$-\mathrm{Sh}_m = f_m\left(\frac{\mathrm{Sh}_1}{\mathrm{Sh}_{1\infty}}, \ldots, \frac{\mathrm{Sh}_M}{\mathrm{Sh}_{M\infty}}, \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Nu}_\infty}\right), \quad m = 1, 2, \ldots, M, \tag{17}$$
$$\mathrm{Nu} = \sum_{m=1}^{M} h_m \mathrm{Sh}_m.$$

Последнее уравнение получено подстановкой в граничное условие (7) выражений для f_m из (6), а величины $\mathrm{Sh}_{m\infty}$, Nu_∞ соответствуют чисто диффузионному (тепловому) режиму реакции (что соответствует граничным условиям на поверхности сферы $r = 1, c_m = 1, T = 1$ для уравнений (1), (2), (4)) [14]

$$
(18) \quad \begin{aligned}
&\mathrm{Sh}_{m\infty} = 1 + \alpha \mathrm{Pe}_m^{1/2} + \alpha^2 \mathrm{Pe}_m + \alpha^3 \mathrm{Pe}_m^{3/2} + o(\mathrm{Pe}_m^{3/2}) \approx (1 - \alpha \mathrm{Pe}_m^{1/2})^{-1}, \\
&\mathrm{Nu}_\infty = 1 + \alpha \mathrm{Pe}_0^{1/2} + \alpha^2 \mathrm{Pe}_0 + \alpha^3 \mathrm{Pe}_0^{3/2} + o(\mathrm{Pe}_0^{3/2}) \approx (1 - \alpha \mathrm{Pe}_0^{1/2})^{-1}.
\end{aligned}
$$

2. Поступательный поток. Аналогичным образом можно показать, что в случае поступательного стоксова обтекания сферы со скоростью $U = U_\infty$ на бесконечности решение краевой задачи (1)–(8) сводится к определению средних чисел Шервуда и Нуссельта из решения той же самой алгебраической системы (17), где параметры $\mathrm{Sh}_{m\infty}$ и Nu_∞ определяются согласно [5]:

$$
(19) \quad \begin{aligned}
&\mathrm{Sh}_{m\infty} = 1 + \tfrac{1}{2}\mathrm{Pe}_m + \tfrac{1}{2}\mathrm{Pe}_m^2 \ln \mathrm{Pe}_m + O(\mathrm{Pe}_m^2), \qquad m = 1, 2, \ldots, M, \\
&\mathrm{Nu}_\infty = 1 + \tfrac{1}{2}\mathrm{Pe}_0 + \tfrac{1}{2}\mathrm{Pe}_0^2 \ln \mathrm{Pe}_0 + O(\mathrm{Pe}_0^2).
\end{aligned}
$$

В общем случае обтекания сферы произвольным ламинарным потоком несжимаемой жидкости система (17) дает правильный результат по крайней мере для двух первых членов асимптотического разложения средних чисел Шервуда и Нуссельта по малым числам Пекле (параметры $\mathrm{Sh}_{m\infty}$ и Nu_∞ соответствуют диффузионному режиму реакции на поверхности сферы). В этом смысле система (17) является универсальной и не зависит от типа обтекания частицы (от типа обтекания зависят параметры $\mathrm{Sh}_{m\infty}$ и Nu_∞, а также точность уравнения (17)).

Из системы (17) видно, что при малых значениях числа Пекле отношение коэффициентов теплопроводности частицы и окружающей жидкости не влияет на интегральные характеристики процесса. Изменение параметра δ приводит лишь к перераспределению локальных теплового и диффузионных потоков на поверхности сферы при неизменности соответствующих полных потоков.

Подчеркнем, что при малых числах Пекле для определения интегральных притоков тепла и вещества реагирующих компонент к частице достаточно решить алгебраическую систему (17), которая существенно проще исходной системы уравнений в частных производных. При этом в случае изотермической реакции, соответствующей задаче (1), (4), (6) (когда функции f_m, входящие в граничные условия (6) не зависят от температуры), средние числа Шервуда определяются решением системы (17) без последнего уравнения.

Замечание. Система (17) может быть записана в размерном виде через интегральные потоки

$$
(20) \quad I_m = 4\pi a^2 F_m\left(\left(c_{1\infty} - \frac{I_1}{I_{1\infty}}\right), \ldots, \left(c_{M\infty} - \frac{I_M}{I_{M\infty}}\right), \left(T_\infty - \frac{J}{J_\infty}\right)\right),
$$

$$
J = \sum_{m=1}^{M} H_m I_m, \qquad m = 1, 2, \ldots, M,
$$

$$
I_m = 4\pi a D_m \left\langle \frac{\partial c_m^*}{\partial r} \right\rangle \bigg|_{r=1}, \qquad J = 4\pi a \lambda \left\langle \frac{\partial T^*}{\partial r} \right\rangle \bigg|_{r=1},
$$

$$
I_{m\infty} = 4\pi a D_m \mathrm{Sh}_{m\infty}, \qquad J_\infty = 4\pi a \lambda \mathrm{Nu}_\infty.
$$

Здесь I_m и J – полные потоки реагирующего вещества и тепла на поверхность сферы; выражения для $\mathrm{Sh}_{m\infty}$ и Nu_∞ определяются в формулах (18), (19) соответственно.

Уравнения (20) более удобны для использования, чем система (17), в случаях когда хотя бы одна из концентраций реагирующих компонент в набегающем потоке вдали от частицы равна нулю, т.е. при $\prod\limits_{m=1}^{M} c_{m\infty} = 0$.

Автор благодарит Ю.П. Гупало, Ю.С. Рязанцева и Ю.А. Сергеева за полезное обсуждение.

Институт проблем механики
Академии наук СССР, Москва

Поступило
17 IV 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шамбре П.Л.* В сб.: Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций. М.: ИЛ, 1962, с. 20. 2. *Франк-Каменецкий Д.А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967. 3. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 4. *Броунштейн Б.И., Фишбейн Г.А.* Гидродинамика, массо- и теплообмен в дисперсных системах. Л.: Химия, 1977. 5. *Acrivos A., Taylor T.D.* – Phys. Fluids, 1962, vol. 5, № 4. 6. *Brenner H.* – Chem. Eng. Sci., 1963, vol. 18, № 2. 7. *Rimmer P.L.* – J. Fluid Mech., 1968, vol. 32, № 1. 8. *Taylor T.D.* – Intern. J. Heat Mass Transfer, 1963, vol. 6, № 11. 9. *Гупало Ю.П., Рязанцев Ю.С.* – ПММ, 1971, т. 35, в. 2. 10. *Гупало Ю.П., Рязанцев Ю.С., Сысков Ю.Н.,* – Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа, 1975, № 2. 11. *Гупало Ю.П., Полянин А.Д., Рязанцев Ю.С., Сергеев Ю.А.* – ДАН, 1977, т. 237, № 1. 12. *Frankel N., Acrivos A.* – Phys. Fluids, 1968, vol. 11, № 9. 13. *Batchelor G.K.* – J. Fluid Mech., 1979, vol. 95, № 2. 14. *Acrivos A.* – Ibid., 1980, vol. 98, № 2. 15. *Гупало Ю.П., Рязанцев Ю.С., Чалюк А.Т.* – ПМТФ, 1972, № 2.