А. Ф. Вакуленко, О разложениях по произведениям гармонических полиномов в $\mathbb{R}^3$, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2021, том 506, 36–42

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 506, 2021 г.

А. Ф. Вакуленко

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ПО ПРОИЗВЕДЕНИЯМ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В $\mathbb{R}^3$

§0. Введение

Известным фактом, восходящим к классической работе А. Кальдерона [1], является полнота в $L_2(\Omega)$ произведений решений эллиптических уравнений. В [1] и в последующих работах она использована для решения обратных задач [4]. В случае уравнения Лапласа, полную систему образуют произведения fg с гармоническими f и g. В работе [2], также мотивированной потребностями обратных задач, показано, что полнота сохраняется, если один из сомножителей выбирается из некоторого *подпространства* $\mathscr{H}' \subset \mathscr{H}$ пространства гармонических функций $\mathscr{H} \subset L_2(\Omega)$. В нашей работе приводится следующее усиление этого результата.

Скажем, что заданная в $\mathbb{R}^3$ функция $\varphi = \varphi(x, y, z)$ является *осевой*, если она инвариантна относительно сдвигов вдоль оси z (имеет вид $\varphi(x, y)$) и *осесимметрической*, если она инвариантна относительно вращений вокруг оси z (имеет вид $\varphi(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$).

Теорема 1. *Любой полином $P(x, y, z)$ допускает представление*

$$P(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x, y, z)\, g_k(x, y, z), \tag{1}$$

в котором $f_k, g_k \in \mathscr{H}$ суть гармонические полиномы, причем все g_k либо осевые, либо осесимметрические относительно оси z.

Определение осевых и осесимметрических функций очевидным образом обобщается на случай, когда вместо оси z выбирается произвольная прямая l в $\mathbb{R}^3$. Поскольку гармоничность никак не связана с выбором осей и координат, представление (1) (с заменой оси z на l) сохраняет силу.

Ключевые слова: гармонические полиномы в $\mathbb{R}^3$, осевые и осесимметрические полиномы, полнота произведений.

В силу плотности полиномов в $L_2(\Omega)$, из (1) следует полнота произведений $f_k g_k$ гармонических полиномов указанного вида. В [2] доказано утверждение, близкое к варианту (1) с осесимметрическими g_k. Оставшаяся часть работы посвящена доказательству теоремы 1.

§1. Предварительные сведения

• В двумерном случае полиномы допускают следующее представление.

Лемма 1. *Пусть $P(x,y)$ – полином, тогда*

$$P(x,y) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x,y)\, g_k(x,y) \;=\; \Delta Q(x,y),$$

где f_k и g_k суть гармонические полиномы, Q – полином, Δ – оператор Лапласа.

Доказательство. Представим полином в виде $P = \tilde{P}(\zeta, \overline{\zeta})$, где $\zeta = x + iy$ и $\overline{\zeta} = x - iy$. Составляющие $\tilde{P}$ мономы $\zeta^{\,k}\,\overline{\zeta}^{\,m}$ суть произведения голоморфной и антиголоморфной функций. Вещественная и мнимая части каждой из таких функций являются *гармоническими полиномами* от x, y, что и ведет к (1).

Второе представление в (1) следует из равенств $\Delta = \partial_\zeta \partial_{\overline{\zeta}}$ и

$$\zeta^k \overline{\zeta}^{\,m} = \frac{1}{(k+1)(m+1)}\, \partial_\zeta \partial_{\overline{\zeta}} (\zeta^{\,k+1}\, \overline{\zeta}^{\,m+1}). \qquad \square$$

Утверждение леммы очевидным образом переносится на полиномы в $\mathbb{R}^3$, осевые относительно z и, в адекватной формулировке, обобщается на случай произвольной оси l.

• Следующее утверждение использовалось в [3].

Лемма 2. *Пусть $l_1, \ldots, l_{n+1}$ суть попарно различные оси в $\mathbb{R}^3$. Любой однородный гармонический полином P степени n представим в виде*

$$P(x,y,z) = \sum_{k=1}^{n+1} P_k(x,y,z),$$

где каждый P_k есть гармонический полином, осевой относительно l_k.

Доказательство. Применим индукцию. При $n = 1$ утверждение верно. В самом деле, в этом случае $P = ax + by + cz = P_1 + P_2$, где

$P_1 = ax + by$ и $P_2 = z$ являются осевыми относительно z и x (или y) соответственно.

Дифференцируя полином P вдоль оси l_{n+1} получим однородный гармонический полином, степень которого равна $n-1$. Для него, по индукционному предположению, имеем разложение

$$\partial_{l_{n+1}} P(x,y,z) = \sum_{k=1}^{n} W_k(x,y,z),$$

по гармоническим полиномам, осевым относительно $l_1, \ldots, l_n$. Поскольку дифференцирования (как и интегрирования) вдоль разных осей перестановочны, каждый W_k есть производная вдоль оси l_{n+1} от некоторого гармонического полинома P_k, осевого относительно l_k. Поэтому имеем:

$$\partial_{l_{n+1}} \left[P(x,y,z) - \sum_{k=1}^{n} P_k(x,y,z) \right] = \partial_{l_{n+1}} P(x,y,z) - \sum_{k=1}^{n} W_k(x,y,z) = 0.$$

Следовательно, разность в квадратных скобках есть гармонический полином P_{n+1}, осевой относительно l_{n+1}, что равносильно утверждению леммы. □

• Справедлив аналог этой леммы для произвольных (не обязательно гармонических) полиномов.

Лемма 3. *Однородный полином степени n представим в виде*

$$P(x,y,z) = \sum_{k=1}^{n+1} P_k(x,y,z),$$

где P_k суть полиномы, осевые относительно $n+1$ произвольно выбранных попарно различных осей.

Доказательство. Используем индукцию. Пусть оси $l_1, \ldots, l_{n+1}$ выбраны. Пусть P – полином степени n; тогда ΔP есть полином степени $n-2$:

$$\Delta P(x,y,z) = \sum_{k=1}^{n-1} q_k(x,y,z)$$

с q_k, осевыми относительно $l_1, \dots, l_{n-1}$. В то же время $q_k = \Delta Q_k$, где Q_k тоже осевые. Следовательно, имеем:

$$P(x,y,z) = Q(x,y,z) + \sum_{k=1}^{n-1} Q_k(x,y,z),$$

где Q – гармонический полином степени n. По лемме 1 имеем для него разложение по осевым гармоническим:

$$Q(x,y,z) = \sum_{k=1}^{n+1} p_k(x,y,z),$$

что дает требуемое разложение для P. □

§2. Осевые полиномы

Лемма 4. *Пусть P – произвольный полином; тогда*

$$P(x,y,z) = \sum_{k=1}^{N} Q_k(x,y,z)\, q_k(x,y) \tag{2}$$

где q_k суть осевые гармонические полиномы с осью z, а Q_k – однородные осевые гармонические полиномы, оси которых могут быть выбраны в плоскости $\{z=0\}$.

Доказательство. Используем индукцию по степени полинома P относительно z. Запишем P в виде

$$P(x,y,z) = z\tilde{P}(x,y,z) + p(x,y).$$

Для p по Лемме 1 имеем

$$p(x,y) = \sum_{k=1}^{N} u_k(x,y)\, v_k(x,y),$$

где каждый сомножитель $u_k(x,y)$ можно переразложить по осевым гармоническим, выбрав оси в плоскости $\{z=0\}$.

Для $\tilde{P}$ используем представление (2). Вращением вокруг оси z любое слагаемое приводится к виду

$$Q(x,z)q(x,y) = (z^n + axz^{n-1} \dots)q(x,y).$$

Пусть L есть однородный гармонический полином вида

$$L(x,z) = z^{n+1} + \dots .$$

Представление

$$z\,Q(x,z)\,q(x,y) = [zQ(x,z) - L(x,z)]\,q(x,y) + L(x,z)q(x,y)$$

приводит к нужному результату, поскольку в первом слагаемом степень z уменьшена, а второе уже имеет требуемый вид. □

Тем самым, утверждение теоремы 1, касающееся осевых полиномов, доказано.

§3. Осесимметрические полиномы

Лемма 5. *Пусть P – произвольный полином. Справедливо представление*

$$P(x,y,z) = \sum_{k=1}^{N} Q_k(x,y,z)\,q_k(z,x^2+y^2), \tag{3}$$

в котором Q_k и q_k суть гармонические полиномы.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда полином $P = P(z,x^2+y^2)$ симметричен и однороден. Покажем, что его можно представить в виде

$$P(z,x^2+y^2) = \sum_{k=0}^{m} q_k(z,x^2+y^2)q_{n-k}(z,x^2+y^2),$$

где каждый q_k есть осесимметрический однородный гармонический полином степени k, а суммирование проводится до $m = n/2$ или $m = (n-1)/2$ в зависимости от четности n. Размерность пространства однородных полиномов равна числу слагаемых в сумме. Таким образом, достаточно проверить их линейную независимость. Пусть

$$0 = \sum_{k=0}^{m} b_k\,q_k(z,x^2+y^2)\,q_{n-k}(z,x^2+y^2);$$

Ограничение однородного гармонического осесимметрического полинома на единичную сферу это полином Лежандра от координаты z [5]. Заменяя $x^2+y^2 \to 1-z^2$,

$$\begin{array}{lcr} z & \to & z \\ 2z^2 - x^2 - y^2 & \to & 3z^2 - 1 \\ 2z^3 - 3z(x^2+y^2) & \to & 5z^3 - 3z \\ \dots & \to & \dots, \end{array}$$

получим равенство с полиномами Лежандра

$$0 = \sum_{k=0}^{m} b_k L_k(z) L_{n-k}(z) =: G(z)$$

Пусть n четно; тогда в силу ортогональности полиномов Лежандра,

$$0 = \int\limits_{-1}^{1} G(z)dz = b_m \int\limits_{-1}^{1} L_m(z)\, L_m(z)dz,$$

следовательно, $b_m = 0$. Далее, имеем равенства:

$$0 = \int\limits_{-1}^{1} z^2 G(z)dz = b_{m-1} \int\limits_{-1}^{1} \left[z^2 L_{m-1}(z)\right]\, L_{m+1}(z)dz =$$

$$= b_{m-1} \int\limits_{-1}^{1} \left[z^{m+1} + \alpha z^m + \ldots\right]\, L_{m+1}(z)dz = b_{m-1} \int\limits_{-1}^{1} z^{m+1}\, L_{m+1}(z)dz,$$

справедливые поскольку $L_{m+1}(z)$ ортогонален всем z^k при $k < m+1$ и мы можем отбросить младшие члены. Последний интеграл заведомо отличен от нуля, так как, добавив к z^{m+1} соответствующие младшие члены, мы превратим его в $\int\limits_{-1}^{1} L_{m+1}^2(z)dz \neq 0$. Как следствие, заключаем, что $b_{m-1} = 0$. Рассматривая затем интегралы $\int\limits_{-1}^{1} z^{2k} G(z) z dz = 0$, установим обращение в ноль всех коэффициентов b_k.

Для нечетного n, используя равенства $\int\limits_{-1}^{1} G(z) z dz = 0$, $\int\limits_{-1}^{1} G(z) z^3 dz = 0, \ldots$ по вполне аналогичной схеме, также придем к $b_k = 0$.

Для однородного полинома $P(z, x^2+y^2)(x+iy)^d$ имеет место разложение

$$P(z, x^2+y^2)(x+iy)^d = \sum_{k=0}^{m} (x+iy)^d Q_k(z, x^2+y^2)\, q_{n-k}(z, x^2+y^2),$$

где суммирование проводится до $m = (n-d)/2$ или $m = (n-d-1)/2$, а Q_k есть однородный полином, такой что $(x+iy)^d Q_k$ гармоничен. Это условие определяет Q_k однозначно. Сравнение размерностей и проверка линейной независимости вполне аналогичны рассмотренному выше случаю $d = 0$.

Используя очевидные тождества

$$z^c \zeta^{\,k+d}\,\overline{\zeta}^{\,k} = z^c(x^2+y^2)^k(x+iy)^d, \quad z^c \zeta^{\,k}\,\overline{\zeta}^{\,k+d} = z^c(x^2+y^2)^k(x-iy)^d,$$

любой полином можно представить в виде суммы слагаемых вида $P(z, x^2+y^2)(x+iy)^d$ или $P(z, x^2+y^2)(x-iy)^d$, что ведет (3). $\square$

Тем самым, теорема 1 полностью доказана.

Список литературы

1. A.P. Calderon, *On an inverse boundary value problem*, Seminar on Numerical Analysis and Its Applications to Continuum Physics, 1980, 65–73.
2. M. Yu. Kokurin, *On the Completeness of Products of Harmonic Functions and the Uniqueness of the Solution of the Inverse Acoustic Sounding Problem.* — Math. Notes **104**, No. 5 (2018), 689–695.
3. М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко, *Об алгебре гармонических кватернионных полей в* $\mathbb{R}^3$. — Алгебра и анализ **31**, No. 1 (2019), 1-–17.
4. V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Springer, N.Y., 2006.
5. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1966.

Vakulenko A. F. On expansions over harmonic polynomial products in $\mathbb{R}^3$.

In inverse problems, an important role is played by the following fact: the functions of the form

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x,y,z)\, g_k(x,y,z),$$

where f_k, g_k are the solutions of a second order elliptic equation in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, constitute a dense set in $L_2(\Omega)$.

This paper deals with the Laplace equation. We show that the density does hold if f_k and g_k are *harmonic polynomials*, whereas the factors g_k are invariant with respect to shifts or rotations.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: vak@pdmi.ras.ru

Поступило 1 ноября 2021 г.