9-я Конференция Турнира Городов,
Матем. обр., 1997, выпуск 2, 113–127

https://www.mathnet.ru/mo253

Девятая Конференция Турнира Городов

Материалы подготовлены оргкомитетом Конференции

«Конференции» Турнира Городов не похожи на научные конференции в обычном смысле слова. Здесь нет «пленарных докладов», «работы по секциям», официальной программы. Это, скорее, неформальные встречи, на которые приглашаются школьники — победители международного математического Турнира Городов — и сопровождающие их учителя.

Одна из целей конференции — приобщить способных школьников к решению задач исследовательского характера. Для этого организаторы предлагают им интересные трудные задачи, часто с выходом на открытые математические проблемы. Даже рассказ условий такого типа задач превращается в целую лекцию. Поэтому *презентация* задач занимает по крайней мере день работы конференции.

Решение таких задач требует больших затрат времени и значительных интеллектуальных усилий. Поэтому организационно процесс решения проходит в свободной форме: дается много времени (несколько дней), решения могут быть как индивидуальными, так и коллективными, т.е. допускается решение от любой группы объединившихся людей. Это не обязательно совпадает с «командой», приехавшей из одного города. Жюри назначает сроки сдачи письменных решений, по традиции их два, и для них прижились названия «предварительный финиш» и «окончательный финиш». Сданные решения проверяются, оценивается степень продвижения участников в решении той или иной задачи. Затем проводится разбор решенных задач. Некоторые пункты после первого срока сдачи снимаются с конкурса. Иногда после промежуточного разбора добавляются новые задачи. Критерии успеха также отличаются от традиционных: успешность выступления оценивается по *наибольшему* продвижению в одной из задач. Т.е. фактически проводится одновременно несколько конкурсов (по каждой из задач в отдельности). В реальности многие участники не могут остановиться на какой-то единственной задаче и решают сразу несколько задач.

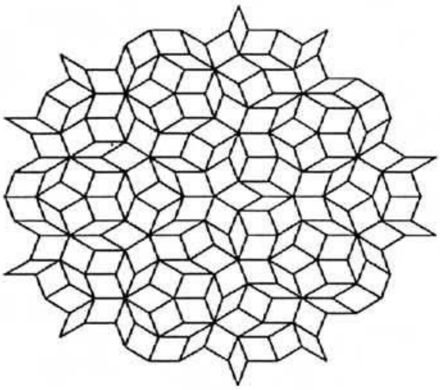
Вообще все участники — как школьники, так и учителя — получают возможность активного отдыха, интенсивной творческой работы и интересного общения.

Девятая Коференция проходила с 1 по 8 августа в г. Переславль-Залесский.

Ниже приводятся условия некоторых задач этой Конференции (полный отчет о Конференции, с условиями и решениями всех задач, списками команд, результатами участников выйдет отдельным изданием).

Задача 1. Кодирующие отображения и узоры Пенроуза

Предложена и представлялась К.П.Кохасем



Кодирования и декодирования

Пусть S_1 — множество всевозможных последовательностей из нулей и единиц, S_2 — множество всевозможных двусторонних последовательностей из нулей и единиц (т. е. последовательностей, элементы которых занумерованы не натуральными, а целыми числами). Изображая двустороннюю последовательность в виде бесконечного в обе стороны списка, мы будем подчеркивать элемент с номером 1, например: $\ldots, 1, 0, 1, \underline{0}, 1, 0, \ldots$

Определение. Операцией *кодирования* называется следующее преобразование последовательностей из S_1. Каждый нуль в последовательности $\{x_n\}$ заменим на единицу, а каждую единицу — на две цифры — 1 и 0 (именно в таком порядке), причем замены всех элементов последовательности выполняются одновременно. Например:

$$1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots \quad \longrightarrow \quad 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1 \ldots$$

Обозначим операцию кодирования буквой $\Bbbk$. Операция кодирования на множестве S_2 определяется аналогичным образом. Пример:

$$\begin{array}{c} \ldots,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ \underline{1},\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots \\ \downarrow \\ \ldots,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ \underline{1},\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots \end{array}$$

Результат кодирования двусторонней последовательности определен с точностью до сдвига, хотя обычно мы будем считать, что подпоследовательность $\{x_n\}_{n>0}$ при кодировании переходит в в подпоследовательность $\{y_n\}_{n>0}$.

1.1. Докажите, что существует последовательность $\{x_n\} \in S_1$, такая что $\Bbbk(\{x_n\}) = \{x_n\}$.

Определение. Если для последовательности $\{x_n\} \in S_1$ удается подобрать такую последовательность $\{y_n\}$, что $\{x_n\} = \Bbbk(\{y_n\})$, то мы будем говорить, что последовательность y_n получается из последовательности x_n *декодированием*. Аналогично определяется декодирование двусторонних последовательностей. Нетрудно сообразить, что результат декодирования определен однозначно с точностью до сдвига.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно декодируемой*, если ее можно декодировать бесконечно много раз, то есть для всякого натурального m, найдется такая последовательность $\{z_n\}$, что

$$\{x_n\} = \underbrace{\Bbbk(\Bbbk(\dots(\Bbbk}_{m \text{ раз}}(\{z_n\})\dots).$$

1.2. Докажите, что существует бесконечно декодируемая последовательность из S_2.

1.3. Докажите, что бесконечно декодируемая последовательность из S_1 непериодична.

1.4. Докажите, что множество бесконечно декодируемых последовательностей несчетно.

1.5. Докажите, что последовательности, допускающие бесконечно много декодирований, локально изоморфны. Это значит, что если в любой такой последовательности взять фрагмент конечной длины, то в любой другой такой последовательности обязательно встретится такой же фрагмент, причем он встречается там бесконечно много раз.

Теперь наша цель — дать исчерпывающее описание множества последовательностей, допускающих бесконечно много декодирований.

Обозначения. Через $\lfloor x \rfloor$ будем обозначать целую часть x, а через $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое, которое больше либо равно x.

Пусть $\alpha > 1$, γ — вещественные числа. Положим $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ (тогда $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$). Рассмотрим двусторонние последовательности

$$p_n = \left\lceil \gamma + \frac{n+1}{\alpha} \right\rceil - \left\lceil \gamma + \frac{n}{\alpha} \right\rceil \qquad (1)$$

$$q_n = \left\lfloor \gamma + \frac{n+1}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \gamma + \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \qquad (2)$$

1.6. Докажите, что

а) $\{n:\ p_n = 1\} = \{\lfloor \alpha(k-\gamma) \rfloor, k \in \mathrm{Z}\}$

б) $\{n:\ p_n = 0\} = \{\lceil \beta(k+\gamma) \rceil - 1, k \in \mathrm{Z}\}$

(Аналогично можно доказать, что

в) $\{n:\ q_n = 1\} = \{\lceil \alpha(k-\gamma) \rceil - 1, k \in \mathrm{Z}\}$

г) $\{n:\ q_n = 0\} = \{\lfloor \beta(k+\gamma) \rfloor, k \in \mathrm{Z}\}$).

1.7. $\{p_n\}$ — двусторонняя последовательность из нулей и единиц. Для нее подобрали такую функцию φ, что $p_n = \varphi(n+1) - \varphi(n)$. Возьмем произвольный элемент p_m. При выполнении кодирования этому элементу будет соответствовать одна единица (и еще, может быть, один нуль). На каком месте в последовательности $\Bbbk\{p_n\}$ будет находиться эта единица?

Начиная с этого места, мы будем считать параметр α, использованный в формулах (1) и (2), равным золотому сечению (т. е. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$).

1.8. Пусть p_n — последовательность вида (1). В качестве функции φ из предыдущей задачи для такой последовательности естественно взять функцию $\varphi(n) = \lceil \gamma + \frac{n}{\alpha} \rceil$. Докажите, что образ последовательности $\{p_n\}$ при кодировании имеет вид $\{\lfloor \gamma^\star + \frac{n+1}{\alpha} \rfloor - \lfloor \gamma^\star + \frac{n}{\alpha} \rfloor\}$ и найдите $\gamma^\star$.

1.9. а) Докажите, что последовательности из задач 1.1, 1.2 — тоже последовательности вида (1), где α — по-прежнему золотое сечение. Найдите параметр γ для этих последовательностей.

б) Как изменится параметр γ, если последовательность вида (1) сдвинуть на m символов вправо?

1.10. Пусть на координатной плоскости нанесены линии целочисленной решетки и проведена прямая $y = \alpha x + b$. Выделим стандартный единичный квадрат с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ и пронесем его вдоль прямой. Квадрат заметет полосу, содержащую исходную прямую; отметим точки с целочисленными координатами, находящиеся в этой замкнутой полосе, за исключением точки $(0,1)$. Нетрудно сообразить, что существует единственная бесконечная ломаная, звенья которой параллельны координатным осям, проходящая через все отмеченные точки и не выходящая из полосы. Спроектируем эту ломаную на исходную прямую. Тогда прямая окажется разбита на отрезки двух типов: проекции горизонтальных единичных отрезков и проекции вертикальных, обозначим эти типы соответственно через 0 и 1. Докажите, что двусторонняя последовательность типов этих отрезков вдоль нашей прямой является бесконечно декодируемой.

1.11. Докажите, что любая последовательность вида (1) или (2) бесконечно декодируемая.

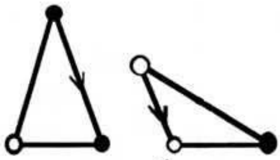
1.12. Докажите, что любая бесконечно декодируемая последовательность из S_1 или S_2 имеет вид (1) или (2).

3. Лирическое отступление. Игра «Цяньшидзы» (или «ним Витхоффа»). Есть две кучи спичек. Двое игроков по очереди берут спички из этих кучек, причем при каждом ходе игрок или берет произвольное количество спичек из одной кучи или поровну из обеих. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что если начальные количества спичек в кучах равны $(\lfloor \alpha n \rfloor, \lfloor \beta n \rfloor)$, то выигрывает второй игрок, в остальных случаях выигрывает первый. Здесь α, конечно же, по-прежнему золотое сечение, а β — сопряженный показатель: $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$.

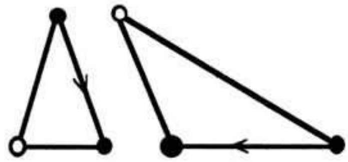
Мозаики Пенроуза

2.1. В треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle ABC = 36°$, $AC = 1$. В треугольнике DEF $DE = EF$, $\angle DEF = 108°$, $DE = \alpha$. Докажите, что $AB = \alpha$, $DF = 1 + \alpha$. Докажите также, что $\sin 18° = \alpha^{-1}/2$, $\cos 36° = \alpha/2$.

2.2. Есть конечное число типов плиток, каждая из которых представляет собой выпуклый многоугольник. Известно, что для любого r из этих плиток можно сложить фигуру, которая содержит круг радиуса r. Докажите, что тогда этими плитками можно замостить всю плоскость.

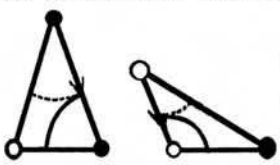


Мозаики Пенроуза можно строить для разных наборов плиточек. Мы начнем с треугольных плиток. Есть два стандартных набора треугольных плиток, назовем их А-набор (слева) и Б-набор (внизу справа). Каждый из этих наборов состоит из двух треугольников, с углами кратными 36°. Вершины треугольников раскрашены в два цвета, стороны с одноцветными вершинами помечены стрелкой. Треугольники разрешается прикладывать друг к другу так, чтобы совмещались вершины одинакового цвета, при этом, если совмещаются стороны со стрелками, то стрелки должны иметь одинаковые направления. Треугольники разрешается поворачивать и переворачивать. Прикладывая плиточки друг к другу по этим правилам, мы получим мозаику Пенроуза. Мы будем, в основном, пользоваться плитками из А-набора.

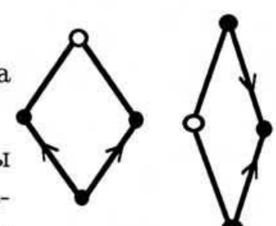


2.3. Докажите, что плиточками из А-набора можно замостить всю плоскость.

2.4. Докажите, что это можно сделать не единственным способом (с точностью до движений плоскости).

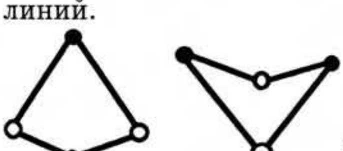


Правило, по которому плитки прикладываются друг к другу при составлении мозаики, можно сделать более наглядным. Нарисуем на каждой плиточке две линии так, как это показано на рисунке и потребуем, чтобы при выкладывании мозаики стороны плиток совмещались так, чтобы концы линий совпадали. Тогда на любой мозаике появится узор из линий.



2.5. Докажите, что всякая замкнутая линия из этого узора имеет симметрию пятого порядка.

Другой способ разметки плиток — так называемые полосы Аммана. На каждой из двух плиток можно нарисовать несколько отрезков таким образом, что при выкладывании мозаики концы этих отрезков совмещаются и на плоскости образуется семейство прямых линий.



2.6. Придумайте такой способ разметки.

Кроме упомянутых наборов из треугольников, рассматривают также набор из ромбов (с углами 72°, 108° и 36°, 144°, см. мозаику в начале текста) и набор “(воздушный) змей + дротик”. Последний набор удобен тем, что не требует введения ориентации на сторонах.

2.7. Докажите, что указанными наборами плиток можно замостить всю плоскость.

2.8. Докажите, что существует несчетное множество различных мозаик Пенроуза.

Будем говорить, что мозаика Пенроуза имеет дыру, если плитки этой мозаики покрывают всю плоскость, за исключением (не обязательно связной) фигуры конечной площади. Для такой мозаики можно попытаться увеличить дыру, сняв несколько (конечное число) плиток, после чего замостить какой-либо фрагмент непокрытой части по-другому. Мозаики с дырами, получающиеся друг из друга при помощи таких операций, будем считать эквивалентными.

2.9. На рисунке изображена фигура «циркулярная пила», построенная из плиток Б-набора с нарушением правил совмещения плиток. Можно считать, что все вершины правильного десятиугольника одного цвета, а стороны ориентированы по часовой стрелке.

Докажите, что существует мозаика с дырой в виде циркулярной пилы.

2.10. Докажите, что никакая мозаика с дырой в виде циркулярной пилы не эквивалентна мозаике без дыр.

2.11. а) Рассмотрим семейство параллельных прямых Аммана. Докажите, что расстояния между соседними прямыми в этом семействе принимают ровно два различных значения.

б) Обозначим эти расстояния через 0 и 1 и выпишем последовательность, в которой эти расстояния встречаются в нашем семействе прямых. Докажите, что эта последовательность бесконечно декодируемая.

Задача 2. Хулиган в библиотеке

Предложена на конференцию С.Л. Берловым и Ф. Назаровым. Представлялась на конференции С.Берловым.

1. Оказавшись как-то раз в библиотеке без присмотра, хулиган Вася переставил 100 томов энциклопедии, стоявших на полке. Библиотекарь заметил это и стал наводить порядок. Для этого проделывает каждый день следующую операцию:

a) меняет местами любые два соседних тома.

b) меняет местами любые два тома.

c) берет любые три тома и расставляет их в другом порядке.

d) переставляет в конец любой том (сдвинув остальные тома).

e) ставит любой том в любое другое место.

За какое наименьшее число дней библиотекарь сможет расставить тома в порядке возрастания номеров?

2. Обнаружив, что библиотекарь исправил его предыдущую шалость, хулиган Вася снова переставил тома и решил, что будет приходить в библиотеку каждый день перед закрытием для поддержания беспорядка. Теперь библиотекарь по утрам вынимает любые k томов и ставит их в другом порядке на те же места, а Вася каждый вечер проделывает такую же операцию с любыми n томами. В энциклопедии по-прежнему 100 томов. Теперь библиотекарь уже не надеется расставить все тома по порядку, а лишь хочет, чтобы на своем месте стояло как можно больше томов. Пусть $P(n,k)$ – наибольшее количество томов, которое он сможет расставить на свои места до очередного прихода Васи (при любых действиях Васи: при этом мы всегда будем предполагать, что исходно тома расставляет Вася).

a) Найдите $P(n,k)$ при $k > n+1$.

b) Найдите $P(2,3)$.

c) Найдите $P(2k, 2k+1)$.

d) Докажите, что $P(3,4) \leqslant 28$. e) Найдите $P(3,4)$.

f) Докажите, что $P(2k-1, 2k) \leqslant [\frac{100}{2k}] + 2k - 1$ при $k < 20$.

g) Вычислите $P(2k-1, 2k)$ с точностью до аддитивной константы, не зависящей от S и k, если в энциклопедии $S >> k$ томов.

h) Пусть k фиксировано. Верно ли, что $P(2k-1, 2k)$ не убывает при возрастании S?

3. Пусть энциклопедия содержит S томов, а подсчет числа томов, стоящих на своих местах, всегда происходит после хода библиотекаря.

a) Библиотекарь переставляет любые два тома, а Вася – любые два соседних тома. Какое наибольшее число томов библиотекарь сумеет расставить на своих местах?

b.1) Библиотекарь переставляет любые три тома, а Вася – любые два соседних. Докажите, что библиотекарь сможет расставить не менее $1/20$ количества всех томов, но не более $2/3$.

b.2) Докажите, что библиотекарь сможет расставить не менее $1/5$ всех томов.

c.1) Лемма о торжестве порядка. Пусть библиотекарь переставляет произвольные $k \geqslant 4$ томов, а хулиган Вася любые n подряд стоящих томов. Тогда найдется такое число $\alpha \in (0,1)$, не зависящее от S, что при любых действиях Васи библиотекарь сумеет поставить на место не менее αS томов.

c.2) Лемма о торжестве беспорядка. Пусть библиотекарь переставляет произвольные $k \geqslant 4$ томов, а хулиган Вася любые $n \geqslant k$ подряд стоящих томов. Тогда найдется такое число $\beta \in (0,1)$, не зависящее от S, что при любых действиях библиотекаря Вася сумеет добиться того, чтобы не менее βS томов стояли не на месте.

4. Теперь библиотекарь переставляет любые k подряд стоящих томов, а Вася – любые n подряд стоящих томов. Пусть $Q(n,k)$ – наибольшее количество томов, которое библиотекарь сможет поставить на место *после своего хода.*

a) Докажите, что $0 < Q(2,3) \leqslant 3$ при любом S.

b) Найдите $Q(2,3)$ при четном S.

c) Докажите лемму о торжестве беспорядка для рассматриваемых операций при любых n и k.

d*) Докажите лемму о торжестве порядка при $k = 5n$.

5. Пусть библиотекарь переставляет любые k подряд стоящих томов, а Вася — 2 любых тома.

a) Лемма о полном торжестве беспорядка. При любом $\alpha > 0$ найдется такое (очень большое) S, что библиотекарь не сумеет поставить на места более чем αS томов.

b) Докажите, что количество томов, которые библиотекарь сможет поставить на место, не превосходит некоторой константы, не зависящей от S.

c) Лемма об абсолютном беспорядке. Если S значительно больше k, то библиотекарь не сумеет поставить на место ни одного тома.

Точный смысл слов «значительно больше» оставляем на Ваше усмотрение.

Задача 3. Почти арифметическая прогрессия

Предложена и представлялась К.Салиховым

Вводные задачи

Определение. Будем называть множество точек X из полуинтервала $[0,1)$ *всюду плотным*, если для любого полуинтервала $[a,b) \subset [0,1)$ существует такая точка $x \in X$, что $x \in [a,b)$.

1. Докажите, что если X всюду плотно на $[0,1)$, то для любого полуинтервала $[a,b) \subset [0,1)$ существует бесконечно много таких точек $x \in X$, что $x \in [a,b)$.

2. а) Пусть α — рациональное число и k пробегает все натуральные числа. Покажите, что множество $\{\{k\alpha\} \mid k \in \mathrm{N}\}$ не является всюду плотным на $[0,1)$ ($\{x\}$ означает дробную часть x).

б) Если α — иррационально, то множество $\{\{k\alpha\} \mid k \in \mathrm{N}\}$ является всюду плотным на $[0,1)$.

Для каждого фиксированного α и полуинтервала $[a,b) \subset [0,1)$ рассмотрим множество K тех натуральных значений k, при которых $\{k\alpha\} \in [a,b)$. Общая проблема состоит в том, чтобы при данных α и $[a,b)$ описать это множество K. Так как K – подмножество N, то K удобно представлять себе как возрастающую последовательность натуральных чисел a_0, a_1, a_2, … (которая может, конечно, не содержать ни одного члена, если K пусто). Наша цель будет состоять в нахождении по данному номеру n числа a_n.

Основные задачи

Пусть m — натуральное число, $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{m}$. Для начала попытаемся найти множество K для числа α и полуинтервала $[m\alpha, 1) \subset [0,1)$.

Легко видеть, что $a_0 = m$.

3. Докажите, что K бесконечно.

4. Найдите a_1.

Подсказка 1. Докажите, что существует и единственно $t \in \mathrm{N}$, такое что $\dfrac{t-1}{(t-1)m+1} \leqslant \alpha < \dfrac{t}{tm+1}$.

5. Пусть a_n и a_{n+1} — два последовательных члена последовательности a_n. При каком условии число $(a_{n+1} - a_n) \in \mathrm{K}$?

6. Какие значения может принимать разность $a_{n+1} - a_n$?

Подсказка 2. Подумайте, когда, например, $\{(a_n + a_1)\alpha\} \in [m\alpha, 1)$.

7. Докажите, что $(a_n - n) \,\vdots\, m$.

8. Докажите, что $[a_n\alpha] = \dfrac{a_n - n}{m} - 1$ (где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x).

9. По данному n научитесь находить a_n.

10. Найдите все натуральные числа k, такие что десятичная запись числа 3^k начинается с цифры 9.

На исследование

11. Попробуйте заменить натуральное число m на какое-нибудь рациональное.

12. Что произойдет, если мы заменим полуинтервал $[m\alpha, 1)$ на полуинтервал $[m\alpha, \frac{p}{q}\alpha)$, где p, q — натуральные числа?

Задача 4. Многомерные многогранники

Предложена и представлялась В.О.Бугаенко

Предлагаемый цикл задач связан с понятием выпуклого многогранника, обобщающим понятие выпуклых многоугольника на плоскости и многогранника в трехмерном пространстве на случай пространства любой размерности.

Выпуклый многогранник может быть определен, как выпуклая оболочка конечного множества точек, или как пересечение конечного числа полупространств (если это пересечение является ограниченным).

1. Покажите, что в n-мерном пространстве существуют аналоги трехмерных многогранников — куба, тетраэдра и октаэдра.

Определение. Эти многогранники называют n-мерными *кубом*, *симплексом* и *октаэдром* соответственно.

Легко заметить, что если на каждой грани выпуклого трехмерного многогранника выбрать по точке, те пары из них, которые принадлежат смежным граням, соединить ребрами, то получится новый многогранник. Так из куба получится октаэдр, из октаэдра — куб, а из тетраэдра — тетраэдр. Эту конструкцию можно обобщить на n-мерный случай.

2. Докажите, что для любого многогранника M существует ему двойственный многогранник M'. Между гранями многогранников M и M' можно установить взаимно-однозначное соответствие f, такое, что:

1) если Γ — грань многогранника M размерности k, то $f(\Gamma)$ — грань многогранника M' размерности $n-k-1$;

2) если грань Γ_1 многогранника M содержится в грани Γ_2 большей размерности, то грань $f(\Gamma_2)$ многогранника M' содержится в грани $f(\Gamma_1)$.

3. В сечении четырехмерного куба трехмерным пространством, перпендикулярным главной диагонали, получаются трехмерные многогранники. Какие? (Естественно, ответ зависит от того, в какой точке пространство сечения пересекает эту диагональ.)

Указание. Рассмотрите трехмерный аналог задачи. Желательно, исходя из аналогий, догадаться, каким будет ответ, а затем строго это доказать.

4. Существует ли многогранник, отличный от симплекса,

а) любые две вершины которого соединены ребром?

б) любые две грани старшей размерности пересекаются?

Определение. Многогранник называется *симплициальным*, если все его грани (коразмерности больше 0) — симплексы. Многогранник, двойственный к симплициальному называется *простым*. Иными словами, простой n-мерный многогранник – это такой, из каждой вершины которого выходит ровно n ребер.

Считаем заданным некоторый многогранник M. Обозначим через a_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ количество его граней размерности i. Рассмотрим многочлен $P_M(t) = a_n(t-1)^n + a_{n-1}(t-1)^{n-1} + \ldots + a_1(t-1) + a_0$. Раскрыв скобки, его можно привести к виду $P_M(t) = b_n t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \ldots + b_1 t + b_0$. Многочлен $P_M(t)$ называется *комбинаторным многочленом* многогранника M.

5. Найдите комбинаторный многочлен для n-мерного а) куба; б) тетраэдра; в) октаэдра.

6. Выразите коэффициенты b_i комбинаторного многочлена через количества a_i граней всех размерностей и наоборот.

Определение. Пусть M — простой многогранник, $\vec{e}$ — вектор в пространстве, не параллельный ни одному из ребер M. Снабдим каждое ребро многогранника M стрелкой в направлении проекции на него вектора $\vec{e}$. Назовем *индексом* (относительно вектора $\vec{e}$) *вершины* многогранника количество выходящих из нее стрелок. (Поскольку, M — простой, то индекс вершины может принимать значения от 0 до n.)

Обозначим через c_i количество вершин простого многогранника индекса i.

7. Выразите числа c_i через числа a_i (естественно, для нахождения каждого числа можно использовать все a_i) и наоборот.

8. Докажите, что $b_i = c_i$ для любого i и любого вектора. В частности, количество вершин индекса i не зависит от выбора вектора $\vec{e}$.

9. (Уравнения Дэна–Соммервиля) Докажите, что коэффициенты комбинаторного многочлена простого многогранника симметричны, т. е. $b_i = b_{n-i}$ для всех $0 \leqslant i \leqslant n$.

Замечание. Соотношение $b_0 = b_n$ называется *формулой Эйлера* и справедливо для любых многогранников, а не только простых.

10. Докажите, что коэффициенты комбинаторного многочлена простого многогранника

а) неотрицательны; б) положительны.

Задача 6. Кляксы и шаблоны

Предложена и представлялась А. Я. Канелем и А. И. Буфетовым

На бесконечной белой плоскости живет ограниченная черная клякса. Она эволюционирует. Каждую секунду все точки меняют свой цвет по следующему закону: Чтобы определить цвет точки в следующий момент времени, надо окружить ее кругом единичного радиуса. Если больше половины его площади черная, то центр становится черным, иначе — белым. Пусть K — клякса, K^n означает результат эволюции кляксы за n единиц времени.

1. а) (А. Тоом) Может ли клякса жить вечно?

б) Может ли ее площадь на промежуточной стадии эволюции увеличиться более, чем в миллион раз?

2. Пусть K — клякса, имеющая форму круга радиуса R. Оцените, по возможности более точно, время его исчезновения.

Перейдем к исследованию дискретной ситуации. Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых точек на прямой, *клякса* — произвольное конечное подмножество $\mathbb{Z}$. *Площадь кляксы* — число ее точек. Дискретный закон эволюции таков: фиксируется конечное множество $S \subset \mathbb{Z}$, с нечетным числом элементов, и одна точка из S отмечена. S называется *шаблоном* эволюции. Чтобы узнать цвет точки $x \in \mathbb{Z}$ через секунду, надо параллельно перенести S так, чтобы отмеченная точка перешла в x и посмотреть, точек какого цвета шаблон закрывает больше — это и будет цвет x через секунду. Будем называть шаблон *убивающим*, если любая клякса гибнет при этом шаблоне, и *неубивающим* в противном случае.

3. а) Покажите, что если отметить другую вершину у шаблона, то новая эволюция отличается от старой параллельными переносами.

б) Существует ли неубивающий шаблон на прямой?

в) Может ли площадь кляксы увеличиться более, чем в миллион раз при некотором шаблоне?

г) Существует ли шаблон, содержащий менее ста точек, такой что площадь любой кляксы в процессе эволюции увеличивается не более, чем в миллион раз по сравнению с начальной площадью?

4. Существует ли убивающий шаблон на прямой?

Перейдем к случаю плоскости. Пусть $\mathbb{Z}^2$ — множество точек на плоскости, обе координаты которых целые. *Шаблон* — это подмножество $\mathbb{Z}^2$, содержащее нечетное число элементов, одна точка которого отмечена. Закон эволюции такой же. Понятия *кляксы*, *убивающего* и *неубивающего* шаблона вводятся аналогично.

5. Решите задачу 3 для плоскости.

6. Пусть *Ш* есть квадрат

а) 3×3, образованный 9 узлами решетки;

б) $(2n+1) \times (2n+1)$, образованный $(2n+1)^2$ узлами решетки.

Являются ли такие шаблоны убивающими?

7. Существует ли убивающий шаблон на плоскости?

8. а) Исследуйте эволюцию полуплоскости $ax + by \geqslant c$ для случая общего центрально-симметричного шаблона.

б)* Докажите, что всякий центрально-симметричный шаблон на плоскости неубивающий.

9.** Докажите, что если шаблон убивающий, то для любого $C > 0$ найдется такая клякса, что через некоторое время ее площадь вырастет более, чем в C раз.

10*. Докажите, что для любого неубивающего шаблона найдется такое $C > 0$, что площадь кляксы в процессе эволюции ни за какое время не может вырасти более, чем в C раз.

11.** Обобщите результаты предыдущих пунктов для пространственного случая.

12. а) Существуют ли шаблон и клякса такие, что диаметр кляксы в процессе эволюции неограничен?

б) Верно ли, что путем выбора отмеченной точки (не обязательно внутри шаблона) можно добиться того, что вся эволюция кляксы будет содержаться внутри некоторого круга?

13. Существует ли такой шаблон на прямой, что для всякого $C > 0$ найдется клякса, площадь которой вырастает в процессе эволюции более, чем в C раз?

14. Пусть шаблон сохраняет две полуплоскости $a_1x + b_1y \geqslant c_1$ и $a_2x + b_2y \geqslant c_2$, причем прямые $a_1x+b_1y = c_1$ и $a_2x+b_2y = c_2$ не параллельны. Пусть полуплоскость $a_3x + b_3y \geqslant c_3$ не сохраняется под действием этого шаблона. Докажите, что тогда шаблон убивающий.

15. Пусть шаблон сохраняет все полуплоскости. Докажите, что тогда он неубивающий.

16. Верно ли, что для всякого убивающего шаблона найдется $C > 0$, такое, что время жизни кляксы диаметра d не превосходит Cd?

17. Существует ли неубивающий шаблон, такой, что не все его точки лежат на одной прямой и не являющийся центральносимметричным?

18. Попробуйте научиться по данному шаблону определять, является ли он убивающим.

19. Опишите эволюцию кляксы через большое время.

а) Возможна ли непериодическая эволюция?

б) Возможна ли периодическая эволюция? Если да, то какие могут быть периоды?

20. Обобщите Ваши результаты на n-мерное пространство.

21. Вернемся к непрерывному случаю на плоскости. Пусть шаблон $Ш$ есть конечное объединение многоугольников и кругов.

а) Верно ли, что любой шаблон — убивающий?

Будем говорить, что при данном шаблоне кляксы имеют *линейное время жизни*, если существует константа $C > 0$ такая, что время жизни любой кляксы не превосходит $C \cdot$ *диаметр*. Будем говорить, что кляксы имеют *квадратичное время жизни*, если при некотором $C > 0$ время жизни любой кляксы не превосходит

$C \cdot \textit{диаметр}^2$, причем найдутся кляксы со сколь угодно большим диаметром, время жизни которых не меньше $C \cdot \textit{диаметр}^2/2$.

б) Верно ли, что для любого шаблона кляксы имеют либо линейное, либо квадратичное время жизни?

22. а)** Существует ли шаблон, для которого всякая клякса имеет прообраз?

б)* Тот же вопрос в дискретном случае на плоскости.