А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

Том 5
Выпуск 5 Руководитель А.И.Мальцев 1966 г.

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПОЛУГРУППАХ ОДНОГО КЛАССА КОЛЕЦ БЕЗ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ

Э.Г.Кошевой

В в е д е н и е

WB -кольца (weak Bezout rings) введены П.М.Коном в работе [I] . Ниже мы приведем все необходимые определения, понятия и свойства, относящиеся к этим кольцам.

Мы будем рассматривать такие WB -кольца, в которых выполняется условие факторизации (то есть каждый ненулевой и необратимый элемент в них разложим в произведение простых)*). Доказанная Коном факторизационная теорема для таких колец состоит в том, что два разложения

$$p_1 p_2 \cdots p_n = q_1 \cdots q_m \qquad (I)$$

элемента на простые

во-первых, содержат одинаковое число множителей: $n=m$;

во-вторых, существует перестановка π такая, что p_i подобно $q_{\pi(i)}$ $(p_i \sim q_{\pi(i)})$.

Из наших рассмотрений, в частности, вытекает следующее дополнение к этой теореме:

Пусть $\mathfrak{A}$ - произвольный двусторонний простой идеал (собственный) WB -кольца. В разложении (I) выпишем последователь-

*) Под простым элементом понимаем необратимый элемент $a, a \neq 0$, не представимый в виде произведения двух необратимых элементов.

но все простые множители, принадлежащие $\mathfrak{A}$:

$$p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}; q_{j_1}, \dots, q_{j_r}.$$

Свойства разложения (I) далее таковы:

$$1^{\circ} \quad k = r$$

$$2^{\circ} \quad p_{i_1} \sim q_{j_1}, \dots, p_{i_k} \sim q_{j_k}.$$

Перейдем теперь к другим результатам работы.

Пусть $A = k[X]$ –произвольная ассоциативная свободная алгебра над некоторым полем k со свободными порождающими X. П.М.Кон показал (см. [I]), что A является WB-кольцом (условие факторизации проверяется тривиально). С другой стороны, в [4] он показал, что в A любые два разложения однородного элемента на простые ассоциированы друг с другом, то есть почленно простые одного разложения ассоциированы с простыми другого разложения.

Надо отметить, что свойства элемента алгебры A быть однородным зависит от того, как "навесить" степени на свободные порождающие из X. Так что возникает вопрос о том, можно ли в терминах, не зависящих от понятия степени, выделить в свободной алгебре какое-нибудь множество элементов с однозначным разложением, которое содержало бы однородные элементы (при любом определении степени). Доказываемая ниже теорема I про WB-кольца с условием факторизации позволяет в случае кольца A указать полугруппу, которая содержит указанные элементы (и не только их), и каждый элемент которой обладает однозначным разложением.

Пусть $\bar{A}$ замыкание кольца A по естественной топологии. Другими словами, $\bar{A}$ является кольцом формальных степенных рядов над полем k со свободными порождающими из X. В $\bar{A}$ два главных правых идеала $a\bar{A}$ и $b\bar{A}$ имеют ненулевое пересечение тогда и только тогда, когда один идеал содержится в другом [3]. Отсюда легко вытекает, что в $\bar{A}$ элементы имеют однозначное разложение. Этот же факт получается и из теоремы I.

Будет показано, что в WB-кольцах (с условием факторизации) всякое "естественное" утверждение о двух разложениях элемента на простые достаточно проверить на элементах, разлагающихся в произведение двух простых множителей. В частности, упомянутое выше дополнение к факторизационной теореме Кона доказывается именно таким образом.

§ I

Рассматриваются ассоциативные кольца без делителей нуля и с единицей $1 \neq 0$. Пусть R такое кольцо. Кольцо R из рассматриваемого класса колец называется WB-кольцом, если выполнены следующие условия:

а) для любых главных правых идеалов aR и bR кольца R $aR \cap bR = dR$, то есть пересечение есть главный правый идеал;

в) если $d \neq 0$ в а), то есть если пересечение ненулевое, то

$$aR + bR = cR.$$

Следует заметить, условия а) и в) в совокупности равносильны условиям а′) и в′), которые являются левыми аналогами условий а) и в) (см. [I]).

Поэтому, хотя в дальнейшем мы будем иметь дело с правыми идеалами, для всех утверждений будут справедливы также и их левые аналоги. В дальнейшем кольцо R у нас будет WB-кольцом в котором каждый элемент разлагается на простые.

Под простым идеалом в кольце R понимаем, как обычно, двусторонний идеал, фактор-кольцо по которому ненулевое и без делителей нуля.

Элементы a и b кольца R подобны $(a \sim b)$, если правые R-модули R/aR и R/bR изоморфны. Заметим, что тогда изоморфны и левые R-модули R/Ra и R/Rb, и наоборот (см. [I]). В частности, элементы a и b подобны, если они ассоциированы, то есть если $a = \varepsilon_1 b \varepsilon_2$, где ε_1 и ε_2 - обратимые элементы. Легко видеть ([I], 2.I), что элементы a и b кольца R подобны тогда и только тогда, когда в R существуют элементы x, y, z, t такие, что

$$\begin{cases} a)\ ax + yz = 1\ ; \\ b)\ at = yb = d\ ; \\ c)\ aR \cap yR = dR\ . \end{cases} \qquad (I)$$

Ввиду факторизационной теоремы Кона (см. введение), для каждого элемента $a \in R$, $a \neq 0$, определено неотрицательное целое число $\zeta(a)$ такое, что $\zeta(a)$ - число простых множителей при разложении элемента a на простые.

Относительно числа $z(a)$ отметим, что если a подобно b и $z(a)$ определено, то есть $a \neq 0$, то и $z(b)$ определено, $z(a)=z(b)$ ([I] , 2.2).

§ 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть $\mathfrak{A}$ - простой идеал в кольце R. Если $a \sim b$ и $a \in \mathfrak{A}$, то $b \in \mathfrak{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из определения простого идеала и условий а) и в) из (I).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть p и q - простые элементы кольца R. Если $pR \cap qR \neq (0)$ и $pR \neq qR$, то $pR+qR=R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как R - WB - кольцо, то $pR+qR=sR$. Тогда $p=ss', q=ss''$. Если бы s было необратимо, то s' и s'' - обратимые и $pR=sR=qR$. Поэтому $sR=R$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathfrak{A}$ - правый идеал в R, $\mathfrak{A} \neq R$, $pp'=qq' \neq 0$, где p, p', q, q' - элементы из R, p, q - простые и принадлежат $\mathfrak{A}$. Тогда $pR=qR$.

Собственный (правый) идеал кольца R назовем ε -идеалом, если он выдерживает умножение слева на обратимые элементы.

ТЕОРЕМА I. Пусть $\mathfrak{A}$ - ε - идеал, $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ простые элементы кольца R, принадлежащие $\mathfrak{A}$. Пусть, далее,

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n .$$

Тогда $p_1=q_1\varepsilon_1$, $p_2=\varepsilon_1^{-1}q_2\varepsilon_2, \dots, p_i=\varepsilon_{i-1}^{-1}q_i\varepsilon_i, \dots, p_n=\varepsilon_{n-1}^{-1}q_n$.

Доказательство получаем индукцией, пользуясь определением ε -идеала и предыдущим следствием.

Рассмотрим пример, когда кольцо R есть свободная алгебра A. Совокупность элементов алгебры A, свободный член которых равен нулю, образуют, очевидно, простой идеал A_0. Простые элементы из A, принадлежащие A_0, порождают полугруппу A_1, которая содержит в себе полугруппы однородных элементов (при любом допустимом навешивании степеней на образующие элементы). Любое разложение в A элемента из A_1 на простые состоит из простых, свободный член которых равен нулю (ввиду факторизационной теоремы Кона и предложения I). Следовательно, ввиду теоремы I, это разложение однозначно (см. введение).

Для кольца $\bar{A}$ из введения дело обстоит еще проще, посколь-

ку все необратимые элементы в $\bar{A}$ образуют $\mathcal{E}$ -идеал.

ЛЕММА. Пусть p и q - простые элементы кольца R.

$$pp' = qq' = d \neq 0 \quad \text{и} \quad pR \cap qR = dR.$$

Тогда либо p' и q' обратимые (в этом случае $p = q\varepsilon$), либо p' и q' - простые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p = q\varepsilon$, ε - обратимый, то тогда, очевидно, p' и q' - обратимые. Пусть теперь $p \neq q\varepsilon$,то есть $pR \neq qR$. Ввиду предложения 2 имеет место соотношение $pR + qR = R$, то есть существуют элементы x и z такие, что $px + qz = 1$. Учитывая условия в лемме, вспоминая (I) из § I, получаем, что p и q' подобны. Значит, $1 = \mathfrak{z}(p) = \mathfrak{z}(q')$, то есть q' - простой. Далее, $\mathfrak{z}(pp') = 1 + \mathfrak{z}(p') = \mathfrak{z}(qq') = 2$. Поэтому и p'-простой.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ - простые элементы кольца R, $n \geqslant 3$ и $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$. Тогда либо $p_1 = q_1\varepsilon$, ε -обратимый, либо $p_2 \cdot \ldots \cdot p_n, q_2 \cdot \ldots \cdot q_n \in Rc$, где c - некоторый простой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p_1 R = q_1 R$, то $p_1 = q_1\varepsilon$, ε - обратимый. Пусть $p_1 R \neq q_1 R$. Имеем $p_1 R \cap q_1 R = dR$, $d = p_1 p' = q_1 q'$. $p_1(p_2 \ldots p_n) = q_1(q_2 \ldots q_n) = d \cdot c'$. Если бы элемент c' был обратимый, то, ввиду леммы, элемент $p_2 \ldots p_n$ должен был бы быть простым. Но это не так, потому что по условию $n \geqslant 3$. Поэтому $c' \in Rc$, где c - простой. Отсюда следует теорема.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть имеем два разложения элемента a с $\mathfrak{z}(a) = n-1$:

$$a = p_1 \ldots p_{n-1} = q_1 \ldots q_{n-1}.$$

Относительно элемента b , полученного из a умножением справа (соответственно, слева) на некоторый простой элемент, мы будем говорить, что он получается из a с помощью преобразования I (соответственно, преобразования 2). С помощью теоремы 2 легко получить, что утверждение E о любых двух разложениях элемента кольца R на простые справедливо, если

I. утверждение справедливо для всяких двух разложений произвольного элемента a с $\mathfrak{z}(a) = 2$;

2. если утверждение E справедливо для двух разложений элемента a с $\mathfrak{z}(a) = n-1$ и если элемент b с $\mathfrak{z}(b) = n$ получен из a с помощью преобразований I или 2, то утверждение E

верно и для соответствующих разложений элемента b ;

3. если для элемента имеем три разложения на простые, записанные в виде последовательности из трех равенств, то из справедливости E для пары из первого и второго разложений, для пары из второго и третьего разложений следует справедливость E для пары из первого и третьего разложений.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p_1 \dots p_n = q_1 \cdot q_2 \dots q_n$ - два разложения элемента на простые в кольце R. $\mathfrak{A}$ - простой идеал кольца R и, наконец, $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}; q_{j_1}, \dots q_{j_l}$ последовательно все простые из этих разложений, принадлежащие $\mathfrak{A}$. Тогда $k=l$ и $p_{i_1} \sim q_{j_1}, \dots, p_{i_k} \sim q_{j_k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты 2 и 3 предыдущего замечания выполняются очевидно. Пусть $pq = st$, где p, q, s, t - простые. Пусть $p, q \in \mathfrak{A}$. Тогда (предложение I) $s, t \in \mathfrak{A}$. По теореме I $p = s\varepsilon$, $\varepsilon q = t$, ε - обратимый. Тем более $p \sim s$, $q \sim t$. Если $p, q \bar{\in} \mathfrak{A}$, то $pq \bar{\in} \mathfrak{A}$, $st \bar{\in} \mathfrak{A}$, $s \bar{\in} \mathfrak{A}$, $t \bar{\in} \mathfrak{A}$.

Теорема доказана.

Поступила в редакцию
5.УШ.1966 г.

Литература

1. Cohn P.M., Noncommutative unique factorization domains, Trans. Amer. Math. Soc., 109 (1963), 2, 313-331.

2. Cohn P.M., On subsemigroups of free semigroups, Proc. Amer. Math. Soc., 13 (1962), 347-351.

3. Cohn P.M., Factorization in non-commutative power series rings, Proc. Camb. Philos. Soc. 58 (1962), 452-464.