Применимость метода максимума правдоподобия к нелинейному конфлюентному анализу не ограничивается использованными нами условиями нормальности распределения ошибок и малости второй производной. Функция правдоподобия может быть записана в виде произведения интегралов вдоль кривой для любого распределения и для любой кривой, однако в общем случае придется подбирать параметры кривой, например, с помощью электронной счетной машины, не делая никаких предположений о кривизне линии регрессии. Вопрос о способе нахождения начального приближения и о характере сходимости последовательных приближений в общем случае остается открытым.

В следующей статье, которая будет опубликована в другом журнале, мы дадим пример применения изложенного метода к обработке экспериментальных данных по рассеянию π^+-мезонов протонами.

Авторы благодарны проф. Н. В. Смирнову и проф. Я. А. Смородинскому за ценные дискуссии по поводу данной работы.

Объединенный Институт Ядерных Исследований

Поступила в редакцию 11. 7. 57

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Frisch, Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems, Oslo, 1934.

[2] A. Wald, The Fitting of Straight Lines of Both Variables Are Subject to Errors, Ann. Math. Statistics, **11**, (1940), 284.

[3] O. Reirsöl, Confluence Analysis by Means of Instrumental Sets of Variables, Ark. för Mat., Astr. och Fysik, **32** A, No, 4 (1945).

[4] А. Хальд, Математическая статистика с техническими приложениями, М., 1956.

NON-LINEAR CONFLUENCE ANALYSIS

N. P. KLEPIKOV, S. N. SOKOLOV (*MOSCOW*)

(*Summary*)

Non-linear confluence analysis, necessary for the treatment of experimental data when all variables are subject to errors, is considered from the standpoint of the maximum likelihood method. The likelihood function is a product of curvilinear integrals of the respective distribution densities of each point of the curve. For a sufficiently small curvature and a normal error distribution, these integrals are evaluated approximately, resulting in distribution functions of the normal type but with modified weights and shifted experimental points. Thus, a confluent problem is reduced to an ordinary regressional one. Weight modifications and point shifts may be found by means of successive approximations.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю. В. ПРОХОРОВ, М. ФИШ

1. Цель настоящей заметки состоит в распространении теоремы Полиа [2] на случайные элементы в Гильбертовом пространстве.

2. Под случайными элементами ξ со значениями из вещественного сепарабельного пространства Гильберта H мы понимаем измеримые отображения (см. [1] гл. 1) $\xi(u)$ основного поля вероятностей в пространство H. Распределение вероятностей случай-

ного элемента ξ и его характеристический функционал мы будем обозначать через $\mathbf{P}^{\xi}$ и $\chi(f, \xi)$ соответственно:

$$\chi(f, \xi) = \int\limits_H e^{i(f, x)}\, d\mathbf{P}^{\xi} \qquad f \in H.$$

Соотношение $\mathbf{P}^{\xi} = \mathbf{P}^{\eta}$ мы будем записывать также в виде $\xi \sim \eta$. Если ξ — случайный элемент, то $\|\xi\|$ и линейные функционалы

$$(f, \xi), \qquad f \in H \tag{1}$$

будут случайными величинами.

Распределение $\mathbf{P}^{\xi}$ называют нормальным, если все случайные величины (1) имеют нормальное распределение ([3], [4]). *Математическим ожиданием случайного элемента* ξ называют такой элемент $\mathbf{M}\xi \in H$, что для любого $f \in H$

$$\mathbf{M}(f, \xi) = (f, \mathbf{M}\xi).$$

В дальнейшем мы ограничиваемся лишь такими случайными элементами ξ, для которых

(α) $\qquad \mathbf{M}\|\xi\|^2 < \infty$,

(β) $\qquad \mathbf{M}(f, \xi)^2 > 0$ для любого $f \in H$, $f \neq \theta$,

(γ) $\qquad \mathbf{M}\xi = \theta$,

где θ — нулевой элемент в H (существование $\mathbf{M}\xi$ вытекает из (α)).

Теорема 1. *Пусть*

$$\xi^{(1)} \sim \xi^{(2)} \sim \xi^{(3)} \tag{2}$$

— *случайные элементы в* H, *подчиненные условиям* (α), (β), (γ) *и условиям*

(δ) $\qquad \xi^{(1)}$ *и* $\xi^{(2)}$ *независимы,*

(ε) $\qquad \xi^{(1)} + \xi^{(2)} \sim A\xi^{(3)}$,

где A — ($A1$) *линейный*, ($A2$) *ограниченный*, ($A3$) *самосопряженный*, ($A4$) *положительный оператор в* H.

Тогда распределение $\mathbf{P}$ *каждого из случайных элементов* $\xi^{(i)}$ *нормально и* $A = \sqrt{2}\, E$, *где* E — *единичный оператор.*

3. Доказательство теоремы 1. Входящую в условие (β) квадратичную форму $\mathbf{M}(f, \xi)^2$ можно записать в виде (Sf, f), где S — некоторый ограниченный линейный оператор (аналогичный матрице вторых моментов конечномерного распределения), причем в силу (β)

$$(Sf, f) > 0 \quad \text{для} \quad f \neq \theta. \tag{3}$$

Из условий (δ), (γ), (ε) и самосопряженности A вытекает равенство

$$\mathbf{M}(\xi^{(1)}, f)^2 + \mathbf{M}(\xi^{(2)}, f)^2 = \mathbf{M}(A\xi, f)^2 = \mathbf{M}(\xi, Af)^2,$$

т. е. в других обозначениях

$$2(Sf, f) = (SAf, Af). \tag{4}$$

Полагая $A_1 = \dfrac{A}{\sqrt{2}}$, получаем

$$(Sf, f) = (SA_1 f, A_1 f). \tag{5}$$

Из (5) выводим, что при каждом натуральном n

$$(Sf, f) = (SA_1^n f, A_1^n f). \tag{6}$$

Пусть E_λ — «разложение единицы», соответствующее оператору A_1 и $f \in E_{1-\varepsilon}H$, $\varepsilon > 0$. Тогда при $n \to \infty$

$$A_1^n f = \int\limits_0^{1-\varepsilon} \lambda^n dE_\lambda f \to \theta,$$

и в силу (6) $(Sf, f) = 0$, т. е. $f = \theta$. Иными словами, при каждом $\varepsilon > 0$ подпространство $E_{1-\varepsilon}$ состоит из единственного элемента θ. Следовательно, спектр A_1 лежит на полупрямой $[1, \infty)$.

Оператор A^{-1} определен всюду в H и удовлетворяет тем же условиям $(A1 - 4)$, что и A. Подставляя вместо f в формулу (5) $g = A_1^{-1} f$, мы приходим к соотношению

$$(Sf, f) \equiv (SA_1^{-1} f,\ A_1^{-1} f),$$

откуда, подобно предыдущему, заключаем, что спектр A_1^{-1} лежит на полупрямой $[1, \infty)$. Из сказанного вытекает, что спектр состоит ровно из одной точки $\lambda = 1$, т. е. $A_1 = E$ и

$$A = E \cdot \sqrt{2}. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь последовательность независимых случайных элементов

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots,$$

которые имеют одно и то же распределение $\mathbf{P}$. Из (ε) нетрудно извлечь, что

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{2^n}}{\sqrt{2^n}} \sim \frac{A^n}{\sqrt{2^n}} \xi^{(3)} = \xi^{(3)}.$$

По теореме Мурье [4] при $n \to \infty$ распределения $\mathbf{P}^{\eta_n}$ слабо сходятся к нормальному распределению $\mathbf{P}_*$ в H с характеристическим функционалом

$$\chi(f) = e^{-\frac{1}{2} M(\xi, f)^2}.$$

Поскольку $\mathbf{P}^{\eta_n} = \mathbf{P}$ при каждом n, то и $\mathbf{P}_* = \mathbf{P}$, что и требовалось доказать.

Поступила в редакцию
25. 3. 57

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., ГИТТЛ, 1949.

[2] G. Polya, Herleitung des Gausschen Gesetzes aus einer Funktionalgleichung, Math. Z., B. **18** (1923), 96—108.

[3] A. Kolmogoroff, La transformation de Laplace dans les espaces linéaires, C. R. Akad. Sci., **200** (1935), 1717.

[4] E. Mourier, Eléments aléat ires dans un espace de Banach, Thèse., Paris, 1954.

A CHARACTERISATION OF NORMAL DISTRIBUTIONS IN HILBERT SPACE

Yu. V. PROHOROV (MOSCOW) and M. FISH (WARSAW)

(Summary)

Theorem 1 gives an extension of the well known result of [2] to the case of random elements in Hilbert space.
