V. A. Gritsenko, Induction in the theory of zeta functions, *Algebra i Analiz*, 1994, Volume 6, Issue 1, 3–63

https://www.mathnet.ru/eng/aa423

Алгебра и анализ
Том 6 (1994), вып. 1

ИНДУКЦИЯ В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИЙ

В. А. Гриценко

Оглавление

Введение и формулировка основных результатов

Эйлеровы произведения, определяемые в арифметике и алгебраической геометрии, тесно связаны с теорией автоморфных функций. Например, L-функция Гекке обычных модулярных форм веса два совпадает с L-функцией модулярной кривой (согласно гипотезе Таниямы-Вейля — с L-функцией эллиптической кривой); L-функция модулярной формы веса один совпадает с L-функцией Артина двумерного представления группы Галуа алгебраического замыкания поля рациональных чисел. Автоморфные формы на классических (симплектической, ортогональной, унитарной) группах связаны так же с арифметикой многообразий Шимуры.

Как и в теории автоморфных форм на группе GL_2, в теории автоморфных форм на классических группах есть примеры рядов Дирихле с Эйлеровыми произведениями, построенными по коэффициентам Фурье автоморфных форм. Основная цель этой статьи состоит в том, чтобы объяснить природу известных примеров и построить новые. Это дает нам метод для исследования дзета-функций автоморфных форм на классических группах, в частности стандартной дзета-функции для групп $SO(2,n)$ и $SO(1,n)$ и нестандартных дзета-функций (в терминологии Ленглендса [L]) групп $SU(2,2)$ (см. [G7]), $SO(1,4)$, $Sp(1,1)$, $Sp(2,2)$, $SO(2,10)$.

Данная статья посвящена изучению алгебраической стороны этого метода. Основным инструментом предлагаемой конструкции является некоммутативное кольцо Гекке некоторой параболической подгруппы. Мы называем это кольцо *параболическим расширением*, так как оно является некоммутативным „алгебраическим“ расширением исходного кольца Гекке редуктивной группы над локальным p-адическим полем. Параболические расширения оказываются очень полезными в различных ситуациях. Например, многочлены Гекке, отвечающие локальным L-функциям редуктивных групп, раскладываются на множители в кольце многочленов над параболическими расширениями, и более того, многочлены из этого разложения совпадают в некоторых случаях с локальными L-функциями подгрупп из разложения Леви параболических групп.

По-видимому, лучше всего объяснить данный метод на простейшем примере L-функции Гекке модулярных форм на $SL_2(\mathbb{Z})$. В этом примере мы дадим короткое доказательство классического соотношения Гекке между рядами Дирихле и Эйлеровыми произведениями. Это доказательство, которое может быть обобщено на случай произвольной классической группы, демонстрирует некоторые аспекты предлагаемого подхода к данной проблеме.

Объяснение метода на примере группы $SL_2(\mathbb{Z})$. Возьмем кольцо Гекке специальной линейной группы $\mathcal{H}(SL_2) = \mathcal{H}(SL_2(\mathbb{Z}), M_2^+(\mathbb{Z}))$, где $M_2^+(\mathbb{Z})$ полугруппа целых матриц с положительным определителем. Кольцо Гекке — это пространство конечных формальных линейных комбинаций двойных классов $SL_2(\mathbb{Z})gSL_2(\mathbb{Z})$ с рациональными коэффициентами, снабженное стандартным законом умножения (см. определение в §1). Точно так же мы можем определить кольцо Гекке $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{H}(\Gamma_\infty, M_\infty^+)$, где $\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{Z} \right\}$ параболическая подгруппа специальной линейной группы и M_∞^+ полугруппа целых верхнетреугольных матриц. В соответствии с теоремой об элементарных делителях

$$SL_2(\mathbb{Z})gSL_2(\mathbb{Z}) = \sum_i SL_2(\mathbb{Z})g_i, \qquad \text{где } g_i \in M_\infty^+.$$

Легко проверить, что соответствие

$$\mathrm{Im}\colon SL_2(\mathbb{Z})gSL_2(\mathbb{Z}) \to \sum_i \Gamma_\infty g_i$$

является инъективным гомоморфизмом колец Гекке, следовательно, кольцо $\mathcal{H}_\infty$ есть расширение кольца $\mathcal{H}(SL_2)$, и мы будем отождествлять кольцо $\mathcal{H}(SL_2)$ с его образом в $\mathcal{H}_\infty$.

Как выглядят образы стандартных операторов Гекке

$$T(p) = SL_2(\mathbb{Z})\,\mathrm{diag}(1,p)SL_2(\mathbb{Z}) \quad \text{и} \quad T(p,p) = SL_2(\mathbb{Z})\,\mathrm{diag}(p,p)SL_2(\mathbb{Z}) \ ? \tag{0.1}$$

В соответствии с определением

$$T(p) = [p]_- + [p]_+ \quad \text{и} \quad [p]_- \cdot [p]_+ = pT(p,p), \tag{0.2}$$

где

$$\begin{aligned} [n]_- =& \Gamma_\infty \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_\infty = \Gamma_\infty \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ [n]_+ =& \Gamma_\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \Gamma_\infty = \sum_{b \bmod n} \Gamma_\infty \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Согласно определению умножения в кольце Гекке, отображения $j_\pm : n \to [n]_\pm$ являются вложением мультипликативной полугруппы натуральных чисел $\mathbb{N}^\times$ в кольцо $\mathcal{H}_\infty$, и мы можем расширить это вложение по линейности до отображения формального кольца $\mathbb{Q}[\mathbb{N}^\times$, которое является кольцом Гекке $\mathcal{H}(\{1\}, \mathbb{N}^\times)$ тривиальной группы, состоящей только из единицы. В результате мы получаем три коммутативных подкольца в кольце Гекке $\mathcal{H}_\infty$:

$$\mathcal{H}(SL_2) \xrightarrow{\mathrm{Im}} \mathcal{H}_\infty \xleftarrow{j_\pm} \mathbb{Q}[\mathbb{N}^\times].$$

Кольцо $\mathcal{H}_\infty$ некоммутативное и обладает делителями нуля, что легко следует из следующих примеров:

$$[n]_-[n]_+ \neq [n]_+[n]_- \quad \text{и} \quad [n]_-\big([n]_-[n]_+ - [n]_+[n]_-\big) = 0.$$

Элемент Гекке (оператор Гекке) $T(n)$ равен сумме всех различных двойных смежных классов определителя n

$$T(n) = \sum_{g \in M_2^+(\mathbb{Z}), \det g = n} SL_2(\mathbb{Z}) g SL_2(\mathbb{Z}). \tag{0.3}$$

Введем локальный многочлен Гекке для простого числа p

$$Q_p(t) = 1 - T(p)t + pT(p,p)t^2,$$

который является знаменателем локальной дзета-функции группы GL_2

$$\sum_{\delta \geqslant 0} T(p^\delta) t^\delta = Q_p(t)^{-1}. \tag{0.4}$$

Тождества (0.2) приводят нас к следующему утверждению, объясняющему введение кольца Гекке параболической подгруппы.

Лемма о разложении. *Многочлен Гекке $Q_p(t) \in \mathcal{H}(SL_2)[t]$ раскладывается на множители в параболическом расширении $\mathcal{H}_\infty$ кольца $\mathcal{H}(SL_2)$*

$$Q_p(t) = (1 - [p]_- t) \cdot (1 - [p]_+ t).$$

Замечание. Если мы заменим t на p^{-s}, то множитель $(1 - [p]_- p^{-s})^{-1}$ является j_--образом локального множителя дзета-функции Римана $\zeta_p(s-1) = (1 - p^{1-s})^{-1}$, и по крайней мере формально локальная дзета-функция группы SL_2 есть произведение j_-- и j_+-образов дзета-функции Римана. В качестве следствия полученного разложения мы получаем следующий классический результат об L-функции Гекке модулярных форм.

Следствие (Гекке). *Пусть*

$$f(\tau) = \sum_{n \geqslant 0} a(n) \exp(2\pi i n \tau)$$

— модулярная форма веса k относительно группы $SL_2(\mathbb{Z})$. Предположим, что $f(\tau)$ является собственной функцией всех операторов Гекке, и заменим операторы Гекке в многочлене $Q_p(t)$ на соответствующие собственные значения

$$Q_{p,f}(t) = 1 - \lambda_p t + p^{k-1}t^2.$$

Тогда следующее тождество выполняется для всех комплексных s с достаточно большой вещественной частью

$$\sum_{n\geqslant 1} a(n)n^{-s} = a(1)\prod_p Q_{p,f}(p^{-s})^{-1}.$$

Доказательство. Ряду Дирихле можно придать следующий вид, используя представление параболического кольца Гекке, которое будет определено ниже,

$$\sum_{n\geqslant 1} a(n)n^{-s} = a(1)|_k[\zeta(s-1)]_+. \tag{0.5}$$

Существует представление кольца Гекке параболической подгруппы Γ_∞ на пространстве периодических функций переменной τ (что эквивалентно, на пространстве модулярных функций относительно группы Γ_∞). Например,

$$f(\tau)|_k[n]_+ = n^{-1}\sum_{b \bmod n} f((\tau+b)/n) = \sum_{m\geqslant 0} a(nm)\exp(2\pi i m\tau).$$

Следовательно, мы имеем следующее двойственное представление на пространстве коэффициентов Фурье

$$a(m)|_k[n]_+ = a(nm)$$

и аналогично

$$a(m)|_k[n]_- = \begin{cases} n^{k-1}a(m/n), & \text{если} \quad m\equiv 0 \mod n,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Для кольца $\mathcal{H}(SL_2)$ это представление совпадает со стандартным представлением кольца Гекке на пространстве модулярных форм веса k. Используя это представление, мы получаем следующее тождество в кольце формальных степенных рядов для любого m, взаимно простого с p

$$\begin{aligned} Q_{p,f}(t)\sum_{\delta\geqslant 0} a(p^\delta m)t^\delta &= Q_{p,f}(t)\sum_{\delta\geqslant 0} a(m)|_k[p^\delta]_+\, t^\delta = a(m)|_k\Bigl(Q_p(t)\sum_{\delta\geqslant 0}[p]_+^\delta t^\delta\Bigr)\\ &= a(m)|_k\left(Q_p(t)(1-[p]_+t)^{-1}\right) = a(m)|_k\,(1-[p]_-t) = a(m), \end{aligned}$$

где мы использовали разложение леммы, чтобы получить четвертое тождество. Полагая $t = p^{-s}$ и применяя последовательно эти равенства для всех простых p, мы получаем тождество следствия.

Мы хотим отметить, что тождество (0.4) также является следствием разложения многочлена $Q_p(t)$. Это доказано в [G2] для общей линейной группы. В этом случае имеется следующее соотношение между стандартными L-функциями общих линейных групп

$$Q_p^{GL_n}(t) = j_-(Q_p^{GL_{n-1}}(pt))^{-1} \cdot (1 - [p]_+ t) = (1 - [p]_- t) \cdot j_+(Q_p^{GL_{n-1}}(pt))^{-1}.$$

Смотри [G2] и [G3], где получены также формулы для косо-симметрического квадрата стандартной L-функции.

Имеются другие приложения конструкции параболических расширений к построению „подъема“ автоморфных форм. Определим „четное“ кольцо Гекке $\mathcal{H}_0(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathcal{H}(SL_2(\mathbb{Z}), Sl_2(\mathbb{Q}))$ и его параболическое расширение $\mathcal{H}_0(\Gamma_\infty) = \mathcal{H}_0(\Gamma_\infty, \Gamma_\infty(\mathbb{Q}))$. Тогда мы можем определить следующее вложение тривиального кольца Гекке $\mathcal{H}(\{1\}, \mathbb{N}^\times) = \mathbb{Q}[\mathbb{N}^\times]$

$$[n^{-1}] = \Gamma_\infty \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{pmatrix} \Gamma_\infty = \Gamma_\infty \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Мы можем рассматривать $\mathbb{Z}$-периодические функции комплексной переменной τ как автоморфные функции относительно параболической подгруппы Γ_∞. Как обычно мы можем определить представление кольца Гекке $H(\Gamma_\infty, \Gamma_\infty(\mathbb{Q}))$ на пространстве $\mathbb{Z}$-периодических функций (автоморфных форм относительно Γ_∞). Например, элемент $[n^{-1}]$ действует на функции $e(\tau) = \exp(2\pi i \tau)$ следующим образом

$$e(\tau)|\,[n^{-1}] = e(n^2\tau).$$

В качестве следствия мы получаем представление тета-функции как суммы по полугруппе операторов Гекке $\{[n^{-1}],\ n \in \mathbb{N}\}$ вместо обычной суммы по решетке $\mathbb{Z}$. А именно,

$$\theta(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e(n^2\tau) = 1 + 2 \sum_{[n^{-1}]\in\mathcal{H}(\{1\},\mathbb{N}^{-1})} e(\tau)|\,[n^{-1}],$$

или используя формальные обозначения,

$$\theta(\tau) = 1 + 2e(\tau)|\prod_p (1 - [p^{-1}])^{-1} = 1 + 2e(\tau)|[\zeta(1)]. \tag{0.6}$$

Это представление объясняет, почему свертка Ранкина модулярной формы с тета-рядом (см. [Sh4]) обладает Эйлеровым произведением. Мы вернемся к этому примеру в §1.

Можно обобщить предложенную выше конструкцию тета-ряда на случай групп ранга два таких, как $SO(2,n)$, $SU(2,2)$ ([G5],[G9]), и получить аналитические свойства нестандартных L-функций для последних двух групп (см. [G4], [G7]). Предложенный метод дает интересные новые примеры и в случае модулярных форм на группе Sp_2. Эти формы порождают сечения канонического линейного расслоения над пространством модулей абелевых поверхностей с неглавной поляризацией, что доказывает, например, что это многообразие не является унирациональным (см. [G11]). Эти же самые „тета-функции" могут быть использованы для построения нового интегрального представления спинорной L-функции зигелевых модулярных форм относительно группы $Sp_2(\mathbb{Z})$ (см. [G4] и [G12]).

Мы хотели бы отметить еще один тип рядов Дирихле из теории зигелевых модулярных форм рода n

$$\sum_M a({}^tMNM)\det(M)^{-s},$$

где $a(N)$ коэффициенты Фурье модулярной формы Зигеля

$$F(Z) = \sum_{N>0} a(N)\exp(2\pi i\,\mathrm{tr}(NZ))$$

и N, M симметричные, полуцелые матрицы. Простым объяснением того, почему ряды Дирихле этого типа раскладываются в Эйлеровы произведения, опять является утверждение о том, что стандартная L-функция группы Sp_n раскладывается в параболическом расширении и что множители этого разложения отвечают стандартной L-функции группы GL_n. За деталями мы отсылаем к работам Андрианова [A1] и [A2].

Опишем кратко основные результаты данной работы в частном случае ортогональной группы $SO(\nu)$ и ее параболической подгруппы $P_2^{(\nu)}$ ранга два. Во-первых, определена следующая диаграмма колец Гекке:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathcal{H}(\mathrm{GL}_2) & & & & \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pm} & & & & \\
\mathcal{H}(SO(\nu)) & \xrightarrow{\mathrm{Im}} & \mathcal{H}(P_2^{(\nu)}) & \xleftarrow{\mathrm{inc}} & \mathcal{EH}(P_2^{(\nu)}) & \xrightarrow{J} & \mathcal{EH}(P_2^{(\nu)})/\mathcal{J} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi} & & & & \\
\mathbb{Q}[x_1^{\pm},\dots,x_\nu^{\pm}]^{W_\nu} & \longrightarrow & \mathbb{Q}[x_1^{\pm},\dots,x_\nu^{\pm}]. & & & &
\end{array}$$

В этой диаграмме $\mathcal{H}(SO(\nu))$ — кольцо Гекке ортогональной группы ранга ν над локальным полем k, $\mathcal{H}(P_2^{(\nu)})$ — кольцо Гекке параболической подгруппы (см. §2)

$$P_2^{(\nu)} = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{A} & * & * \\ 0 & B & * \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \in SO(\nu)\,,\, A \in GL_2(\mathrm{k}), B \in SO(\nu-2) \right\},$$

$\mathcal{EH}(P_2^{(\nu)})$ — подкольцо кольца $\mathcal{H}(P_2^{(\nu)})$, порожденного двойными классами с A, равной единичной матрице, и $\mathcal{EH}(P_2^{(\nu)})/\mathcal{J}$ — фактор-кольцо относительно главного идеала $\mathcal{J}$ (см. §5). Через Im обозначено вложение колец, $\pm$ — два специальных вложения „+“ и „−“ кольца Гекке группы $\mathrm{GL}_2(\mathrm{k})$ в кольцо Гекке параболической подгруппы, Φ — сферическое отображение Сатаке (см. [S]), inc обозначает вложение, а J стандартный эпиморфизм на фактор кольцо. Мы называем фактор-кольцо $\mathcal{EH}(P_2^{(\nu)})/\mathcal{J}$ *кольцом Гекке-Якоби группы Якоби* ранга $\nu-2$, где под *группой Якоби* ранга $\nu-2$ мы понимаем полупрямое произведение ортогональной группы этого ранга и *группы Гейзенберга* размерности $2\nu-1$. Группа Якоби не является редуктивной. Кольцо Гекке параболической подгруппы не является коммутативным, но кольцо Гекке-Якоби, определенное выше, коммутативно и конечно порождено.

Стандартная дзета-функция определяется в контексте колец Гекке как многочлен

$$Q(t)=\sum_{i=0}^{2\nu}(-1)^i Q_i t^i \in \mathcal{H}(SO(\nu))[t],$$

имеющий следующий образ относительно сферического отображения

$$\Phi(Q(t))=\sum_{i=0}^{2\nu}(-1)^i\Phi(Q_i)t^i=\prod_{i=1}^{\nu}(1-\mathbf{p}^{-A}x_i^{-1}t)(1-\mathbf{p}^{A}x_i t),$$

где $A=\frac{n_0}{2}-1$, а n_0 — размерность анизотропного подпространства квадратичного пространства.

Выполняется следующее тождество для локальной дзета-функции (ср. с утверждением леммы о разложении для $SL_2(\mathbb{Z})$): *в кольце Гекке параболической подгруппы* $\mathcal{H}(P_2^{(\nu)})$

$$Q(t)=Q_-^{GL_2}(\mathbf{p}^{-(A+\nu)}t)\,K(t)\,Q_+^{GL_2}(\mathbf{p}^{-(A+\nu)}t), \tag{0.7}$$

где многочлены $Q_\pm^{GL_2}(t)$ *являются* $\pm$*-вложениями многочленов Гекке*

$$Q^{GL_2}(t)=1-T(\pi)t+\mathbf{p}T(\pi,\pi)t^2$$

группы GL_2 *над локальным полем* k *с униформизующим параметром* π. *Коэффициенты многочлена* $K(t)$ *принадлежат подкольцу* $\mathcal{EH}(P_2^{(\nu)})$, *и его образ в кольце Гекке-Якоби с точностью до константы равен стандартной дзета-функции группы Якоби*:

$$J(K(t))=(1-\mathbf{p}^{-n_0}t^2)Q_J^{(\nu-2)}(\mathbf{p}^{-1}t). \tag{0.8}$$

Соотношение (0.7) между тремя дзета-функциями для ортогональной группы, группы Якоби и группы GL_2 дает нам метод построения аналитического продолжения глобальной дзета-функции ортогональной группы $SO(2,n)$. В то же самое время этот метод позволяет доказать инвариантность пространства Маасса группы $SO(2,n)$ (см. [O, G5]) относительно действия операторов Гекке (см. приложение к работе автора [G4] и [G9], где рассмотрен случай группы $SU(2,2)$ или $SO(2,4)$).

Настоящая статья построена следующим образом. В §1 мы демонстрируем работу метода параболического расширения на примере групп $SL_2(\mathbb{Z})$ и $Sp_2(\mathbb{Z})$. В §2 описываются кольца Гекке параболических подгрупп классических групп. §3 посвящен разложению на множители локальной дзета-функции в кольцах Гекке параболических подгрупп ранга один. В §4 мы доказываем тождество (0.7). Кольцо Гекке-Якоби группы Якоби определяется в §5. Там же мы доказываем тождество (0.8). В §6 мы описываем общую конструкцию, которая объясняет существование разложений, построенных в §1 и в §3-4. Эта теория показывает, что подобные разложения существуют в принципе только для параболических подгрупп параболического ранга $1, 2$ или ν, где ν — индекс Витта классической группы. Мы отмечаем, что для группы GL_n подобное разложение существует для всех параболических подгрупп (см. [G2, G3]).

Эта работа была поддержана SFB „Discrete Structure in Mathematic" Университета города Билефельда, где были опубликованы ее основные результаты (см. препринт [G10]). Пользуясь случаем, я хотел бы выразить свою благодарность математическому факультету Билефельдского университета, а также профессору Е. Г. Меннике.

Обозначения. В этой статье через k обозначается $\wp$-адическое локальное поле, т.е. пополнение числового поля относительно неархимедова нормирования. Мы обозначаем через $\mathcal{K}$ само поле k, его *квадратичное расширение* или *центральную алгебру с делением* над k. $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}$ — максимальный порядок в $\mathcal{K}$ и его максимальный идеал. Π — простой элемент идеала $\mathfrak{P}$. Мы обозначаем через $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$ соответствующие объекты локального поля k. π — простой элемент идеала $\mathfrak{p}$, числа e и f обозначают индексы ветвления и инерции, p — число элементов поля вычетов $\mathrm{k}_\mathfrak{p}$ и $\mathrm{q} = |\mathfrak{O}/\mathfrak{P}|$. Через $x \to \bar{x}$ обозначается каноническая инволюция алгебры $\mathcal{K}$ над k.

Множество n на m матриц с элементами из алгебры $\mathcal{K}$ обозначается через $M_{n,m}(\mathcal{K})$; ${}^tM$ — транспонированная матрица и $M^* = {}^t\overline{M}$. Мы полагаем $S[M] = M^*SM$ для любых двух матриц S, M подходящего размера. E_n — единичная матрица порядка n, и

$$I_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрица с единицами на неглавной диагонали.

§1. Группы $SL_2(\mathbb{Z})$ и $Sp_2(\mathbb{Z})$

Пример разложения многочлена Гекке группы $SL_2(\mathbb{Z})$, приведенный во введении, имеет очень специальный характер. В этом разложении имеется только два множителя, которые соответствуют $\pm$-вложениям дзета-функции Римана.

В этом параграфе мы опишем еще два примера: стандартную L-функцию для группы $SL_2(\mathbb{Z})$ и спинорную L-функцию для группы $Sp_2(\mathbb{Z})$.

Мы начнем изложения с определения общего кольца Гекке (см. [A1, F]).

Определение. Пара (Γ, G), где Γ — подгруппа полугруппы G, называется парой Гекке, если любой двойной смежный класс $\Gamma g \Gamma$ $(g \in G)$ есть объединение конечного числа левых и правых смежных классов относительно Γ. **Кольцо Гекке** $\mathcal{H}(\Gamma, G)$ пары (Γ, G) — это Γ-инвариантное подпространство векторного $\mathbb{Q}$-пространства, состоящего из всех формальных конечных линейных комбинаций

$$X = \sum_i a_i \Gamma g_i \qquad (a_i \in \mathbb{Q},\ g_i \in G),$$

где представление группы Γ на этом пространстве определено при помощи левого умножения

$$X \to X \cdot \gamma = \sum_i a_i \Gamma(g_i \gamma),$$

и для любых двух элементов из $\mathcal{H}(\Gamma, G)$ $X = \sum_i a_i \Gamma h_i$ и $Y = \sum_j b_j \Gamma g_j$ их произведение определено следующим образом:

$$X \cdot Y = \sum_{i,j} a_i b_j \Gamma(h_i g_j).$$

Это произведение не зависит от выбора представителей g_i, h_j и $\mathcal{H}(\Gamma, G)$ — ассоциативное кольцо с единицей.

Элементы $\Gamma g \Gamma = \sum_i \Gamma g_i$ $(g \in G)$ образуют базис векторного пространства $\mathcal{H}(\Gamma, G)$, поэтому наше определение эквивалентно обычному определению кольца Гекке (см. [Sh1]).

Следующая простая лемма, справедливость которой следует из определения, будет очень полезным инструментом в дальнейшем изложении (см. [A1], лемма 1.1.3).

Лемма о вложении. *Пусть даны две пары Гекке* (Γ_0, G_0) *и* (Γ, G). *Предположим, что* $\Gamma_0 \subset \Gamma$ *и* $\Gamma G_0 = G$. *Согласно второму из этих условий, любой элемент* $X \in \mathcal{H}(\Gamma, G)$ *может быть записан в виде* $X = \sum_i a_i \Gamma g_i$, *где* $g_i \in G_0$. *В этом случае мы полагаем*

$$\mathrm{Im}(X) = \sum_i a_i \Gamma_0 g_i.$$

Отображение Im *не зависит от выбора элементов* $g_i \in G_0$ *в левых смежных классах* Γg_i *и является гомоморфным вложением кольца Гекке* $\mathcal{H}(\Gamma, G)$ *в кольцо* $\mathcal{H}(\Gamma_0, G_0)$

$$\mathrm{Im} : \mathcal{H}(\Gamma, G) \hookrightarrow \mathcal{H}(\Gamma_0, G_0). \tag{1.1}$$

Мы будем отождествлять кольцо $\mathcal{H}(\Gamma, G)$ с его образом в кольце $\mathcal{H}(\Gamma_0, G_0)$ относительно этого отображения.

Пункт 1: стандартная L-функция для $SL_2(\mathbb{Z})$.

Возьмем „четные“ кольца Гекке специальной линейной группы и ее параболической подгруппы, а именно $\mathcal{H}^{(0)}(SL_2) = \mathcal{H}(SL_2(\mathbb{Z}), SL_2(\mathbb{Q}))$ и $\mathcal{H}^{(0)}_\infty = \mathcal{H}(\Gamma_\infty, \Gamma_\infty(\mathbb{Q}))$, где

$$\Gamma_\infty = \Gamma_\infty(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

В соответствии с предыдущей леммой кольцо $\mathcal{H}^{(0)}_\infty$ является расширением кольца $\mathcal{H}^{(0)}(SL_2)$. Введем следующие элементы кольца Гекке $\mathcal{H}^{(0)}_\infty$:

$$[n^{-1}] = \Gamma_\infty \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{pmatrix} \Gamma_\infty = \Gamma_\infty \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{pmatrix},$$
$$[n^{+1}] = \Gamma_\infty \begin{pmatrix} n^{-1} & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \Gamma_\infty = \sum_{b \in n^{-1}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \Gamma_\infty \begin{pmatrix} n^{-1} & b \\ 0 & n \end{pmatrix}.$$

Из определения колец Гекке ясно, что отображения $i_\pm : n \to [n^{\pm 1}]$ — вложения мультипликативной полугруппы натуральных чисел $\mathbb{N}^\times$ и группы „-1“-степеней натуральных чисел $\mathbb{N}^{-1}$ в кольцо $\mathcal{H}^{(0)}_\infty$. Мы можем распространить эти вложения по линейности до вложений формальных колец $\mathbb{Q}[\mathbb{N}^\times]$ и $\mathbb{Q}[\mathbb{N}^{-1}]$, которые являются кольцами Гекке $\mathcal{H}(\{1\}, \mathbb{N}^\times)$ тривиальной группы. Как было показано во Введении, можно определить три коммутативных подкольца в кольце Гекке $\mathcal{H}_\infty$:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Q}[\mathbb{N}^{-1}] \arrow[d, "i_-"'] & \\ \mathcal{H}^{(0)}(SL_2) \arrow[r, "\mathrm{Im}"] & \mathcal{H}_\infty & \mathbb{Q}[\mathbb{N}^\times]. \arrow[l, "i_+"'] \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Определим теперь локальный p-множитель $R_p(t)$ стандартной L-функции специальной линейной группы.

По определению

$$R_p(t) = 1 - T^{(0)}(p^2)t + pT^{(0)}(p^2)t^2 - p^3t^3,$$

где $T^{(0)}(p^2) = SL_2(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} SL_2(\mathbb{Z}) + 1 = T(p^2)T(p,p)^{-1}$ (см. (0.1), (0.3)).

Напомним, что существует изоморфизм между локальным кольцом Гекке и кольцом симметрических многочленов (изоморфизм Сатаке см. [S]) $\mathcal{H}^{(0)}_p(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathcal{H}^{(0)}_p(SL_2(\mathbb{Z}_p), SL_2(\mathbb{Q}_p))$

$$\Phi : \mathcal{H}^{(0)}_p(SL_2(\mathbb{Z})) \to \mathbb{Q}[x, x^{-1}]^{sym},$$

где по определению $\Phi_p(T^{(0)}(p^2)) = x + x^{-1} + p$. Следовательно,

$$\Phi_p(R_p(t)) = (1-t)(1-x^{-1}t)(1-xt).$$

Предложение 1.1. *Многочлен Гекке $R_p(t) \in \mathcal{H}_p^{(0)}(SL_2(\mathbb{Z}))[t]$ раскладывается на множители в расширении $\mathcal{H}_\infty^{(0)}$ кольца Гекке $\mathcal{H}_p^{(0)}(SL_2(\mathbb{Z}))$*

$$R_p(t) = (1 - [p^{-1}]t)(1 - \nabla_p t + (p\nabla_p - p^2)t^2)(1 - [p^{+1}]t),$$

где $\nabla_p = \sum_{b \in p^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Для доказательства утверждения леммы достаточно проверить следующие тождества:

$$[p^{-1}]\nabla_p = p[p^{-1}] \quad \nabla_p[p^{+1}] = p[p^{+1}] \quad [p^{-1}][p^{+1}] = p^2.$$

Замечание. Первый и третий множители являются вложениями p-множителя ζ-функции Римана. Второй множитель также связан с этим многочленом. Если мы рассмотрим представление параболического кольца Гекке на пространстве периодических функций, то мы получим равенство

$$\exp(2\pi i\tau)|(1 - \nabla_p t + (p\nabla_p - p^2)t^2) = (1 - p^2t^2)\exp(2\pi i\tau).$$

В теоремах 1 и 3 будут построены аналогичные разложения для классических групп.

Первый фактор последнего разложения уже встречался в представлении тета-функции (0.6). Это является естественным объяснением того факта, почему свертка Ранкина тета-функции и собственной функцией всех операторов Гекке раскладывается в эйлерово произведение (см. [Sh4]).

Следствие 1.2. (Шимура). *Пусть*

$$f(\tau) = \sum_{n \geqslant 0} a(n) \exp(2\pi i n\tau)$$

— модулярная форма веса k относительно группы $SL_2(\mathbb{Z})$. Предположим, что $f(\tau)$ является собственной функцией всех операторов Гекке. Заменим операторы Гекке в многочлене Гекке $R_p(t)$ на соответствующие собственные значения. Тогда для всех комплексных s с достаточно большой вещественной частью выполняется следующее тождество

$$\zeta(2s-2) \sum_{n \geqslant 1} a(n^2) n^{2-k-s} = a(1) \prod_p R_{p,f}(p^{-s})^{-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим такое же представление кольца Гекке $\mathcal{H}^{(0)}(\Gamma_\infty)$ на коэффициентах Фурье модулярных форм, как и в доказательстве следствия во Введении; тогда справедливы равенства

$$a(m)|_k[n^{+1}] = n^{2-k}a(mn^2), \quad a(m)|_k[n^{-1}] = \begin{cases} n^k a(m/n^2), & \text{если } m \equiv 0 \mod n^2, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, для произвольного натурального m, которое взаимно просто с p,

$$
\begin{aligned}
R_{p,f}(t)\sum_{\delta\geqslant 0} a(mp^{2\delta})p^{(2-k)\delta}t^{\delta} &= R_{p,f}(t)a(m)|_k \sum_{\delta\geqslant 0}[p^{+\delta}]t^{\delta} = a(m)|_k(R_p(t)(1-[p^{+1}]t)^{-1}) \\
&= a(m)|_k(1-[p^{-1}]t)(1-\nabla_p t+(p\nabla_p-p^2)t^2) \\
&= (1-p^2t^2)a(m).
\end{aligned}
$$

Используя это тождество последовательно для всех простых, мы получаем утверждение леммы.

Это доказательство показывает, что так же, как и во Введении, ряд Дирихле следствия 1.2 можно представить в виде действия бесконечного произведения на первом коэффициенте Фурье модулярной формы

$$
\sum_{n\geqslant 1} a(n^2)n^{2-k-s} = a(1)|_k \prod_p (1-[p^{+1}]p^{-s})^{-1} \tag{1.3}
$$

(ср. с (0.5)).

Пункт 2: $Spin$-L-функция группы $Sp_2(\mathbb{Z})$.

Рассмотрим случай симплектической группы ранга два

$$
Sp_2(\mathbb{Z}) = \{\, g\in M_4(\mathbb{Z}) : {}^t g J_2 g = J_2 \,\}, \text{ где } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}
$$

и ее параболической подгруппы ранга один

$$
P_1(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b & * \\ * & * & * & * \\ c & 0 & d & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in Sp_2(\mathbb{Z})\,,\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \right\}.
$$

Лемма о вложении выполняется для кольца Гекке $\mathcal{H}(Sp_2) = \mathcal{H}(Sp_2(\mathbb{Z}), G)$, где

$$
G = \{\, g\in M_4(\mathbb{Z}) : {}^t g J_2 g = \mu(g)J_2, \quad \mu(g)\in\mathbb{N} \,\},
$$

и для кольца Гекке $\mathcal{H}(P_1) = \mathcal{H}(P_1, GP_1)$ параболической подгруппы P_1. Как и в случае группы $SL_2(\mathbb{Z})$, мы можем определить коммутативные подкольца параболического расширения $\mathcal{H}(P_1)$. Вместо $\pm$-вложений формального кольца $\mathbb{Q}[\mathbb{N}^\times] = \mathcal{H}(\{1\}, \mathbb{N}^\times)$ мы рассмотрим вложения $j_\pm$ кольца Гекке группы $SL_2(\mathbb{Z})$. Для этого достаточно определить вложения образующих $T(p)$, $T(p,p)$ (см. (0.1)). По определению $j_\pm(T(p)) = T_\pm(p)$ и $j_\pm(T(p,p)) = \Lambda_\pm(p)$, где

$$
\begin{aligned}
T_-(p) &= P_1(\mathbb{Z})\,\mathrm{diag}(1,p,p,1)P_1(\mathbb{Z}), & T_+(p) &= P_1(\mathbb{Z})\,\mathrm{diag}(1,1,p,p)P_1(\mathbb{Z}), \\
\Lambda_-(p) &= P_1(\mathbb{Z})\,\mathrm{diag}(p,p^2,p,1)P_1(\mathbb{Z}), & \Lambda_+(p) &= P_1(\mathbb{Z})\,\mathrm{diag}(p,1,p,p^2)P_1(\mathbb{Z}).
\end{aligned}
$$

Эти вложения задают следующие коммутативные подкольца кольца Гекке $\mathcal{H}(P_1)$

$$\mathcal{H}(Sp_2) \xrightarrow{\text{Im}} \mathcal{H}(P_1) \xleftarrow{j_\pm} \mathcal{H}(SL_2). \tag{1.4}$$

Утверждение о том, что отображение j_- — гомоморфное вложение, следует из взаимно однозначного соответствия между левыми смежными классами в разложениях двойных классов $T(p) = SL_2(\mathbb{Z})\,\mathrm{diag}(1,p)SL_2(\mathbb{Z})$ и $T_-(p)$. Отображение j_+ двойственно вложению j_- относительно инволюции $*$ кольца Гекке $\mathcal{H}(P_1)$

$$*:\ P_1(\mathbb{Z})gP_1(\mathbb{Z}) \to P_1(\mathbb{Z})\mu(g)g^{-1}P_1(\mathbb{Z}) \tag{1.5}$$

(см.[A1], предложение 3.1.7). Как и в случае группы $SL_2(\mathbb{Z})$ определим элемент $T(n) \in \mathcal{H}(Sp_2)$ как сумму всех различных левых смежных классов с показателем μ, равным n:

$$T(n) = \sum_{g\in G(\mathbb{Z}),\,\mu(g)=n} Sp_2(\mathbb{Z})gSp_2(\mathbb{Z}).$$

Хорошо известно, что аналог формального степенного ряда (0.1) для симплектической группы Sp_2 является рациональной функцией (см. [Sh2] и [A1]):

$$\sum_{\delta\geqslant 0} T(p^\delta)t^\delta = N_p(t)\,Q_p^{Sp}(t)^{-1}, \tag{1.6}$$

где $N_p(t)$ — многочлен степени два над $\mathcal{H}(Sp_2)$ и

$$Q_p^{Sp}(t) = 1 - T(p)t + p(T_{1,p} + (p^2+1)\Delta_p)t^2 - p^3\Delta_p T(p)t^3 + p^6\Delta_p^2 t^2,$$

где

$$T_{1,p} = Sp_2(\mathbb{Z})\,\mathrm{diag}(1,p,p^2,p)Sp_2(\mathbb{Z}), \qquad \Delta_p = Sp_2(\mathbb{Z})pE_4Sp_2(\mathbb{Z}).$$

Для этого многочлена выполняется аналог предложения 1.1 (см. [G8], (4.7)).

Предложение 1.3. *Многочлен $Q_p^{Sp}(t)$ раскладывается на множители над параболическим расширением $\mathcal{H}(P_1)$:*

$$Q_p^{Sp}(t) = j_-(Q_p(t))(1 + p(\nabla_p - p\Delta_p)t^2)j_+(Q_p(t)),$$

где первый и третий множители — $j_\pm$-образы многочлена Гекке группы GL_2 ($j_\pm(t) = t$) и

$$\nabla_p = \sum_{r \bmod p} P_1(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & r \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Используя теорему об элементарных делителях для симплектической группы, мы можем вычислить образ образующих кольца Гекке симплектической группы в параболическом расширении:

$$T(p) = T_-(p) + T_+(p), \quad T_{1,p} = \Lambda_-(p) + \Lambda_+(p) + P_1(\mathbb{Z})\,\mathrm{diag}(1,p,p^2,p)P_1(\mathbb{Z}) + \nabla_p - \Delta_p.$$

Коэффициенты $T_-(p)$ и $\Lambda_-(p)$ многочлена $j_-(Q_p(t)) = 1 - T_-(p)t + p\Lambda_-(p)t^2$ имеют те же разложения на левые смежные классы, что и элементы $T(p)$ и $T(p,p)$ кольца Гекке группы $SL_2(\mathbb{Z})$, и легко проверить справедливость следующих тождеств:

$$\Lambda_-(p)T_+(p) = p^2\Delta_p T_-(p), \quad T_-(p)(\nabla_p - p\Delta_p) = 0, \quad \Lambda_-(p)(\nabla_p - p\Delta_p) = 0.$$

Используя антиавтоморфизм $*$ (1.5) кольца $\mathcal{H}(P_1)$, мы получаем

$$T_-(p)\Lambda_+(p) = p^2\Delta_p T_+(p), \quad (\nabla_p - p\Delta_p)T_+(p) = 0, \quad (\nabla_p - p\Delta_p)\Lambda_+(p) = 0.$$

Учитывая тождество

$$T_-(p)T_+(p) = pP_1(\mathbb{Z})\,\mathrm{diag}(1, p, p^2, p)P_1(\mathbb{Z}) + (p^3 + p^2)\Delta_p,$$

мы получаем разложение предложения.

Как и в случае предложения 1.1 для группы $SL_2(\mathbb{Z})$, можно применить разложение локального многочлена Гекке к теории модулярных форм относительно симплектической группы $Sp_2(\mathbb{Z})$, т. е. к теории Зигелевых модулярных форм рода два на верхней полуплоскости Зигеля H_2, где

$$H_2 = \{Z = {}^tZ \in M_2(\mathbb{C}), \mathrm{Im}(Z) > 0\}.$$

Вещественная симплектическая группа $Sp_2(\mathbb{R})$ действует на этом пространстве как группа комплексно-линейных автоморфизмов

$$Z \to M\langle Z\rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \qquad \text{если} \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_2(\mathbb{R}).$$

Модулярная форма Зигеля веса k и рода два — это голоморфная функция $F : H_2 \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$J(M, Z)^{-k} F(M\langle Z\rangle) = F(Z) \qquad \text{для любого} \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_2(\mathbb{Z}),$$

с фактором автоморфности $J(M, Z) = \det(CZ + D)$.

Определено следующее представление кольца Гекке (операторы Гекке) симплектической группы на конечномерном пространстве модулярных форм Зигеля веса k:

$$F \to F|_k X = \sum_i a_i \mu(g_i)^{2k-3} J(g_i, Z)^{-k} F(g_i\langle Z\rangle),$$

где $X = \sum_i a_i Sp_2(\mathbb{Z})g_i \in \mathcal{H}(Sp_2)$.

Известно, что собственные функции всех операторов Гекке образуют базис в пространстве зигелевых форм. Если F одна из таких функций, то определена так называемая L-функция Андрианова $Z_F(s)$ модулярной формы F

$$Z_F(s) = \prod_p Q_{p,F}^{Sp}(p^{-s})^{-1},$$

где многочлен $Q_{p,F}^{Sp}(t)$ получается из многочлена $Q_p^{Sp}(t)$ заменой элементов кольца Гекке в коэффициентах многочлена $Q_p^{Sp}(t)$ на соответствующие собственные значения. Эта L-функция является *спинорной* L-функцией в классификации Ленглендса.

Пусть $F(Z)$ — параболическая форма Зигеля веса k, где $Z = \left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{smallmatrix}\right) \in H_2$. Из определения области H_2 следует, что компоненты τ и ω переменной Z принадлежат обычной верхней полуплоскости $H_1 = \{\tau = u + iv,\ v > 0\}$, а $z \in \mathbb{C}$. Разложение Фурье-Якоби формы F — это разложение Фурье относительно переменной ω

$$F\left(\begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{pmatrix}\right) = \sum_{m \geqslant 1} f_m(\tau, z)\exp(2\pi i\, m\omega).$$

Функции $f_m(\tau, z)$ — примеры модулярных функций Якоби (см. [E–Z, G8]).

Определение. *Голоморфная функция*

$$\phi(\tau, z);\ H_1 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

называется модулярной формой Якоби индекса $m \geqslant 1$ *и веса* k*, если функция*

$$\widetilde{\phi}(Z) = \phi(\tau, z)\exp(2\pi i\, m\omega)$$

является модулярной формой веса k *относительно параболической группы* $P_1(\mathbb{Z})$*, т.е.,*

1. $\widetilde{\phi}|_k M = \widetilde{\phi}$ *для любого* $M \in P_1(\mathbb{Z})$;
2. *Функция* $\widetilde{\phi}|_k$ *ограничена в области* $\operatorname{Im} Z > c > 0$.

Можно определить два представления кольца Гекке $\mathcal{H}(P_1)$ параболической подгруппы $P_1(\mathbb{Z})$ на пространстве коэффициентов Фурье-Якоби. Первое представление — это представление $\mathcal{H}(P_1)$ на пространстве всех модулярных форм Якоби веса k

$$\widetilde{f}_m \to \widetilde{f}_m(Z)|_k X = \sum_i a_i \mu(g_i)^{2k-3} J(g_i, Z)^{-k} \widetilde{f}_m(g_i\langle Z\rangle),$$

где $X = \sum_i a_i P_1(\mathbb{Z}) g_i \in \mathcal{H}(P_1)$; второе — представление на пространстве коэффициентов Фурье-Якоби:

$$f_m||_k X = \text{ коэффициент Фурье-Якоби с номером m функции } F|_k X.$$

Следующая лемма легко следует из данного определения.

Лемма 1.4. *Пусть* $f_l(\tau, z)$ *— коэффициент Фурье-Якоби модулярной формы* F*, тогда выполняются следующие равенства:*

$$f_m(\tau, z)||_k T_+(n) = \widetilde{f}_{mn}|_k\, T_+(n)\, exp(-2\pi i\, m\omega),$$

$$f_m(\tau, z)||_k T_-(n) = \begin{cases} \widetilde{f}_{m/n}|_k\, T_-(n)\, exp(-2\pi i\, m\omega), & \text{*если* } m \equiv 0 \mod n, \\ 0, & \text{*в противном случае*.} \end{cases}$$

Как и в следствии 1.2 предложения 1.1 мы можем построить ряд Дирихле с эйлеровым произведением, используя разложение предложения 1.3 (см. формулу в заключительной части статьи [G8]).

Следствие 1.5. *Пусть дана модулярная форма Зигеля веса* k

$$F\left(\begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{pmatrix}\right) = \sum_{m\geqslant 1} f_m(\tau, z)\, \exp(2\pi i\, m\omega).$$

Предположим, что F *является собственной функцией всех операторов Гекке. Выберем натуральное число* l *такое, что* $f_l \not\equiv 0$ *и что коэффициенты Фурье-Якоби* $f_{l/d}$ *модулярной формы* F *равны нулю для всех делителей* $d > 1$ *индекса* l. *Тогда для любого комплексного* s *с достаточно большой вещественной частью выполняется следующее тождество*:

$$L(2s-2k+4,\, \chi_l) \sum_{n\geqslant 1} f_{ln}(\tau, z)|_k T_+(n)\; n^{-s} = f_l(\tau, z) Z_F(s),$$

где $L(2s-2k+4,\, \chi_l)$ — L*-функция Дирихле, и* χ_l — *главный характер по модулю* l.

Доказательство. Формальный степенной ряд

$$\sum_{\delta\geqslant 0} T_+(p^\delta)t^\delta$$

является j_+-образом ряда Гекке группы GL_2 (см. (0.4)) и, следовательно, рациональной функцией. Ее знаменатель — правый множитель локального многочлена Гекке $Q_p^{Sp}(t)$. Как и в доказательстве следствия 1.2, можно получить следующее тождество в кольце формальных степенных рядов при помощи леммы 1.4 и предложения 1.3

$$\begin{aligned} Q_{p,F}^{Sp}(t) \sum_{\delta\geqslant 0} f_{lp^\delta}|_k T_+(p^\delta)\, t^\delta T_+(p^\delta)\, t^\delta &= f_l||_k Q_p^{Sp}(t)(1 - T_+(p)t + p\Lambda_+(p)t^2)^{-1} \\ &= f_l||_k(1 - T_-(p)t + p\Lambda_-(p)t^2)(1 + p(\nabla_p - p\Delta_p)t^2) \\ &= f_l(\tau, z)|_k(1 + p(\nabla_p - p\Delta_p)t^2) \\ &= \begin{cases} (1 - p^{2k-4}t^2)\, f_l, & \text{если} \quad l \equiv 0 \mod p, \\ f_l, & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Для завершения доказательства достаточно применить эти тождества последовательно для всех простых p.

Так же, как и в (0.5) и (1.3), мы можем переписать сумму в правой части последнего тождества, используя бесконечное эйлерово произведение, связанное с j_+-вложением L-функции Гекке (см. (0.4))

$$\sum_{n\geqslant 1} f_{ln}(\tau, z)|_k T_+(n)\; n^{-s} = f_l(\tau, z)|_k \prod j_+(1 - T(p)p^{-s} + pT(p,p)p^{-2s})^{-1}.$$

Можно использовать представление последнего следствия для построения аналитического продолжения спинорной L-функции зигелевых модулярных форм (см. [Gr-12]).

Согласно известному классическому изоморфизму, группа $SL_2/\{\pm E_2\}$ изоморфна группе $SO(1,2)$, а группа $Sp_2/\{\pm E_4\}$ — группе $SO(2,3)$, и мы можем рассматривать разложения предложений 1.1 и 1.3 как разложение локальной дзета-функции ортогональной группы $SO(1,2)$ сигнатуры $(1,2)$ в параболическом расширении, отвечающем параболической подгруппе ранга один и как разложение дзета-функции группы $SO(2,3)$ в параболическом расширении, отвечающем параболической подгруппе ранга два. В следующих параграфах мы построим аналоги этих разложений для произвольных ортогональных групп над локальным полем.

§2. Кольца Гекке параболических подгрупп

Пусть V конечномерное векторное пространство над полем $\mathcal{K}$, снабженное ε-эрмитовой формой S $(\varepsilon = \pm 1)$. Это означает, что S невырожденное полуторалинейное отображение $V \times V \to \mathcal{K}$ такое, что $S(xu, yv) = \bar{x}S(u,v)y$, $S(v,u) = \overline{S}(u,v)$ для любых $u, v \in V$, $x, y \in \mathcal{K}$, и из условия $S(u,V) = 0$ следует, что $u = 0$. Мы будем рассматривать следующие четыре случая:

$(SO) : \mathcal{K} = \mathrm{k}$, $\varepsilon = 1$ и S — симметрическая, билинейная;

$(Sp) : \mathcal{K} = \mathrm{k}$, $\varepsilon = -1$ и S — знакопеременная, билинейная;

$(U) : \mathcal{K}$ — квадратичное расширение, $\varepsilon = 1$ и S — эрмитовая;

$(U^+) : \mathcal{K}$ — алгебра с делением над k, $\varepsilon = 1$ и S — кватернионная эрмитовая форма.

Конечно порожденный $\mathfrak{O}$-модуль L в V называется решеткой, если $\mathcal{K}L = V$. Решетка L называется $\mathfrak{P}^\ell$-целой $(\ell \in \mathbb{Z})$, если выполняются следующие два условия (см. [S], [H–S]):

(1) $S(u,v) \in \mathfrak{P}^\ell$ для любых $(u,v) \in L \times L$;

(2) для любого $u \in L$ существует $x \in \mathfrak{P}^\ell$ такой, что $S(u,u) = \varepsilon x + \bar{x}$.

Решетка L называется $\mathfrak{P}^\ell$-максимальной, если она максимальная в множестве $\mathfrak{P}^\ell$-целых решеток.

Согласно результатам Эйхлера [E], Брюа [B], Шимуры [Sh3] и Сатаке [S], существует система векторов $\{e_i, e'_i\}$ такая, что $\sum_{i=1}^{\nu} \mathcal{K}e_i$ является максимальным изотропным подпространством пространства V , $S(e_i, e_j) = S(e'_i, e'_j) = 0$, $S(e_i, e'_i) = 1$ для любых i, j и

$$L = \sum_{i=1}^{\nu} \mathfrak{O}e_i + \sum_{i=1}^{\nu} \mathfrak{P}^l e'_i + L_0^{(\ell)},$$

где $L_0^{(\ell)}$ — единственная $\mathfrak{P}^\ell$-максимальная решетка в анизотропном подпространстве $V_0 = (\sum_{i=0}^{\nu} \mathcal{K}e_i + \sum_{i=0}^{\nu} \mathcal{K}e'_i)^\perp$, а именно

$$L_0^{(\ell)} = \{\, x \in V_0 : S(x,x) \in \mathrm{tr}_\varepsilon(\mathfrak{P}^\ell)\,\}, \tag{2.1}$$

где для любого $x \in \mathcal{K}$

$$\mathrm{tr}_\varepsilon(x) = \varepsilon x + \bar{x}. \tag{2.2}$$

Зафиксируем $\mathfrak{P}^\ell$-максимальную решетку L в V и выберем $\mathfrak{O}$-базис $(f_1, \dots, f_{n_0})$ решетки $L_0^{(\ell)}$. Мы будем отождествлять элементы пространства V с координатными столбцами в базисе $(e_1, \dots, e_\nu, f_1, \dots, f_{n_0}, e'_\nu, \dots, e'_1)$ и форму S с ее матрицей в этом базисе

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_\nu \\ 0 & S_0 & 0 \\ \varepsilon I_\nu & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S(u,v) = u^* S v, \quad u, v \in \mathcal{K}^{2\nu + n_0}.$$

Мы напомним, что $n_0 = 0$ в случае симплектической группы, $0 \leqslant n_0 \leqslant 4$ в случае ортогональной группы, $0 \leqslant n_0 \leqslant 2$ для унитарной группы $0 \leqslant n_0 \leqslant 1$ и для групп U^+.

Мы определим унитарную (ортогональную, симплектическую) группы G и G_0 как связную компоненты групп

$$G' = \{ g \in GL_{2\nu + n_0}(\mathcal{K}) : S[g] = \mu(g) S, \quad \mu(g) \in \mathrm{k}^\times \},$$

$$G'_0 = \{ g \in GL_{n_0}(\mathcal{K}) : S_0[g] = \mu_0(g) S_0, \quad \mu_0(g) \in \mathrm{k}^\times \}.$$

Для группы G мы определим целый положительный индекс $\mathfrak{f}$

$$\mathfrak{f}\mathbb{Z} = \mathrm{ord}_\mathfrak{p}\, \mu(G). \tag{2.3}$$

Для максимальной решетки L определена максимальная открытая компактная подгруппа

$$U = \{ u \in G : \ uL = L \} = \left\{ u \in G : u, u^{-1} \in \begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & \mathfrak{P}^{-\ell} \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & \mathfrak{P}^{-\ell} \\ \mathfrak{P}^\ell & \mathfrak{P}^\ell & \mathfrak{O} \end{pmatrix} \right\}.$$

Мы введем следующие стандартные подгруппы (см. статью Сатаке [S]): связную k-замкнутую подгруппу H, состоящую только из полупростых элементов, и k-унипотентную подгруппу N

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} d_0 I_\nu (D^*)^{-1} I_\nu & & \\ & D_0 & \\ & & D \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} d_0 \in \mathrm{k}^\times, \ D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_\nu), \ d_i \in \mathcal{K}^\times \\ D_0 \in G_0, \ \mu_0(D_0) = d_0 \end{matrix} \right\},$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} I_\nu (X^*)^{-1} I_\nu & * & * \\ 0 & E_{n_0} & * \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Хорошо известно, что $G = UHN = UHU$.

Мы обозначим через P_m параболическую подгруппу группы G, состоящую из элементов, сохраняющих изотропное подпространство $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$

$$P_m = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \in G, \ A \in \mathrm{GL}_m(\mathcal{K}) \right\}.$$

$S_{\nu-m}$ — ограничение формы S на пространство $L_{\nu-m} \otimes \mathcal{K}$ с решеткой

$$L_{\nu-m} = \mathfrak{O} e_{m+1} + \dots + \mathfrak{O} e_\nu + \mathfrak{O} f_1 + \dots + \mathfrak{O} f_{n_0} + \mathfrak{P}^l e'_\nu + \dots + \mathfrak{P}^l e'_{m+1}. \qquad (2.4)$$

Мы можем параметризовать элементы группы P_m следующим стандартным образом. Если $w \in P_m$, тогда

$$\begin{aligned} w = & \gamma \cdot n = [A,\, 0, 0,\, B] \cdot [E_m,\, X, Z,\, E] \\ = & \begin{pmatrix} \mu(B) I_m (A^{-1})^* I_m & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & O & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_m & -\varepsilon I_m X^* S_{\nu-m} & I_m Z \\ 0 & E_{2n+n_0} & X \\ 0 & 0 & E_m \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$A \in GL_m(\mathcal{K}), \quad B \in G(S_{\nu-m}) \quad (\text{группа преобразований индекса Витта } \nu - m),$$
$$X \in M_{2n+n_0,m}(\mathcal{K}), \ Z \in M_m(\mathcal{K}) \qquad (n = \nu - m),$$

где выполняется следующее тождество: $\varepsilon Z + Z^* + S_{\nu-m}[X] = 0$. Мы введем следующие обозначения:

$$[A, X, Z, B] = \begin{pmatrix} \mu(B) I_m (A^{-1})^* I_m & -\varepsilon I_m (A^{-1})^* X^* S_{\nu-m} B & I_m Z \\ 0 & B & X \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \qquad (2.5)$$

где

$$A \in GL_m(\mathcal{K}), \ B \in G(S_{\nu-m}), \ X = (x_1, \dots, x_m) \in M_{2(\nu-m)+n_0,m}(\mathcal{K}), \ Z \in M_m(\mathcal{K}),$$

удовлетворяющие следующему тождеству

$$\varepsilon A^* Z + Z^* A + S_{\nu-m}[X] = 0.$$

Пусть $U_m = P_m \cap U$ — компактная подгруппа группы P_m.

Лемма 2.1. *Элементы*

$$\gamma = [E_m,\, X, Z_X + Z,\, E_{2(\nu-m)+n_0}],$$

где $X = (x_1, \dots, x_m)$, x_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ *— вектор решетки* $\mathfrak{P}^{-\ell} L_{\nu-m}$, Z_X *— произвольная матрица в* $M_m(\mathfrak{P}^{-\ell})$, *удовлетворяющая тождеству*

$$Tr_\varepsilon(Z_X) + S_{\nu-m}[X] = 0 \qquad (Tr_\varepsilon(Y) = \varepsilon Y + {}^t\overline{Y}),$$

и Z *— произвольная* $\mathfrak{P}^{-\ell}$*-целая матрица с* $Tr_\varepsilon(Z) = 0$*, образуют унипотентную подгруппу* NU_m *компактной группы* U_m*.*

Доказательство. Разложим столбец x_i матрицы X на три части, отвечающие (e_j)-, (f_l)-, (e'_j)-компонентам стандартного базиса $L_{\nu-m}$. Согласно определению группы U_m,

$$ {}^t x_i = ({}^t x'_i, {}^t x_i^{(0)}, {}^t x''_i) \in ((\mathfrak{P}^{-\ell})^{\nu-m}, (\mathfrak{P}^{-\ell})^{n_0}, (\mathfrak{O})^{\nu-m}), \quad Z_X,\, Z \in M_m(\mathfrak{P}^{-\ell}), $$

и для любого $1 \leqslant i \leqslant m$

$$ \mathrm{tr}_\varepsilon(z_{ii}^X) + \mathrm{tr}_\varepsilon((x'_i)^* I_m x''_i) = -S_0[x_i^{(0)}]. $$

Следовательно, $S_0[x_i^{(0)}] \in \mathrm{tr}_\varepsilon(\mathfrak{P}^{-\ell})$ и $x_i^{(0)} \in L_0^{(-l)} = \mathfrak{P}^{-\ell} L_0^{(l)}$. Для любого $x_i \in \mathfrak{P}^{-\ell} L_{\nu-m} (1 \leqslant i \leqslant m)$ существует $z_{ii}^X \in \mathfrak{P}^{-\ell}$, удовлетворяющий приведенному выше равенству. Для любого $z_{ij}^X \in \mathfrak{P}^{-\ell}$ мы можем определить

$$ -\bar{z}_{ji}^X = \varepsilon z_{ij}^X + x_i^* S_{\nu-m} x_j \in \mathfrak{P}^{-\ell}, $$

следовательно, существует подходящая матрица Z_X. Лемма доказана.

Пары (U, G), (P_m, U_m) являются парами Гекке (см. §1). Хорошо известно, что $UP_m = G$, следовательно, лемма о вложении из §1 выполняется для пар Гекке (U, G), (U_m, P_m). Мы будем отождествлять кольцо $\mathcal{H}(U, G)$ с его образом $\mathcal{H}(U_m, P_m)$ при вложении

$$ \mathrm{Im} : \mathcal{H}(U, G) \hookrightarrow \mathcal{H}(U_m, P_m). \tag{2.6} $$

Структура колец Гекке $\mathcal{H}(U, G)$ для максимально компактных групп U была определена Сатаке в [S]. Кольцо $\mathcal{H}$ является коммутативным кольцом, изоморфным кольцу W_G-симметричных многочленов (W_G — группа Вейля группы G). Напомним определение этого изоморфизма.

Произвольный левый смежный класс $U_m g$ для $g \in P_m$ содержит некоторый элемент треугольного вида

$$ U_m g = U_m \mathbb{D}(\mathbf{d}) N, $$

где $(\mathbf{d}) = (d_0;\ d_1, \ldots, d_\nu) \in \mathbb{Z}^{\nu+1}$,

$$ \mathbb{D}(\mathbf{d}) = \begin{pmatrix} \mu(\mathfrak{a})^{d_0} I_m \big(D^*(\mathbf{d})\big)^{-1} I_m & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}^{d_0} & 0 \\ 0 & 0 & D(\mathbf{d}) \end{pmatrix}, \qquad D(\mathbf{d}) = \mathrm{diag}(\Pi^{d_1}, \ldots, \Pi^{d_\nu}), \tag{2.7} $$

$\mathfrak{a}$ обозначает элемент группы G_0 с $\mathrm{ord}_\mathfrak{p}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{f}$ (см. (2.3)) и N — верхнетреугольная унипотентная матрица. Если размерность n_0 анизотропной решетки L_0 равна нулю, то мы положим $\mu(\mathfrak{a}) = \pi$. Определен следующий гомоморфизм (сферическое отображение) кольца $\mathcal{H}(U_m, P_m)$ в кольцо многочленов $\mathbb{Q}[x_0^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \ldots, x_\nu^{\pm 1}]$:

$$ \Phi_\nu\Big(\sum_{i,l} a_{il} U_m \mathbb{D}(\mathbf{d}_i) N_{il}\Big) = \sum_{i,l} a_{il} \prod_{j=0}^{\nu} (x_j\, \mathrm{q}^{-j})^{d_{ij}}, $$

где $\mathbf{q}$ число элементов поля $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ и $\mathbf{d}_i = (d_{i1}, \dots, d_{i\nu})$.

Мы обозначим через W_ν группу, порожденную перестановками переменных $(x_1, \dots, x_\nu)$ и преобразованиями

$$w_i = < x_0 \mapsto x_0(\mathbf{p}^A x_i)^{e\mathfrak{f}}, \quad x_i \mapsto \mathbf{p}^{-2A} x_i^{-1}, \quad x_j \mapsto x_j \ (j \neq 0, i) >, \quad (1 \leqslant i \leqslant \nu),$$

где e индекс ветвления поля $\mathcal{K}$, $\mathfrak{f}$ индекс (2.3) группы G и

$$A = \begin{cases} 0 & \text{для группы } Sp, \quad \dfrac{n_0}{2} - 1 \quad \text{для группы } O, \\ \dfrac{n_0 - 1}{e} & \text{для группы } U, \quad n_0 - \dfrac{1}{2} \quad \text{для группы } U^+. \end{cases} \tag{2.8}$$

Если G — ортогональная группа с $n_0 = 0$, то в этом случае группа W_ν порождена всеми перестановками переменных и преобразованиями $w_i w_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant \nu)$.

Теорема Сатаке (см. [S], теорема 3.). *Отображение Φ_ν является $\mathbb{Q}$-изоморфизмом кольца Гекке $\mathcal{H}(U, G)$ на кольцо многочленов $\mathbb{Q}^{W_\nu}[x_0^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \dots, x_\nu^{\pm 1}]$, инвариантных относительно группы W_ν.*

Как было показано в §1, кольца Гекке параболических подгрупп имеют значительно более сложную структуру. Кольцо $\mathcal{H}(U_m, P_m)$ содержит делители, следовательно, ядро гомоморфизма Φ_ν не пусто. Определим специальное подпространство $\mathcal{DM}(U_m, P_m)$ ***всех диагональных классов*** в ***„параболическом расширении“*** $\mathcal{H}(U_m, P_m)$ (см. обозначения (2.5))

$$\mathcal{DM}(U_m, P_m) = \left\{ \sum_i a_i\, U_m[A_i,\, 0,\, 0,\, B_i] U_m \in \mathcal{H}(U_m,\, P_m) \right\}. \tag{2.9}$$

Мы назовем элементы пространства $\mathcal{DM}(U_m, P_m)$ регулярными элементами. Основанием этого определения является следующая

Лемма 2.2. *Ограничение гомоморфизма Φ_ν на подпространство $\mathcal{DM}(U_m, P_m)$ — инъективно.*

Доказательство. Группа U_m совпадает с полупрямым произведением трех подгрупп: группы $\widetilde{U}^{(\nu-m)}$, которая изоморфна группе $U^{(\nu-m)}$, сохраняющей решетку $L_{\nu-m}$,

$$\widetilde{U}^{(\nu-m)} = \left\{ [E_m,\, 0, 0,\, \gamma] \colon \gamma \in U^{(\nu-m)} \right\},$$

группы $\widetilde{GL_m} = \{ [A,\, 0, 0,\, E] : A \in GL_m(\mathfrak{O}) \}$, изоморфной группе $GL_m(\mathfrak{O})$ и нормальной унипотентной подгруппы NU_m, описанной в лемме 2.2. Возьмем произвольный двойной класс $U_m \mathbf{D} U_m$, где $\mathbf{D} = [A,\, 0, 0,\, B]$. При помощи стандартных вычислений мы получаем следующее разложение этого класса:

$$U_m \mathbf{D} U_m = \sum_{i,j,h} U_m \mathbf{D}\, n_i \gamma_j \alpha_h, \tag{2.10}$$

где элементы n_i, γ_j, и α_h задают разложения следующих классов

$$U^{(\nu-m)}BU^{(\nu-m)}=\sum_j U^{(\nu-m)}B\gamma_j,\qquad GL_m(\mathfrak{O})\,A\,GL_m(\mathfrak{O})=\sum_h GL_m(\mathfrak{O})\,A\alpha_i,$$
$$NU_m\mathbf{D}NU_m=\sum_i NU_m\mathbf{D}n_i.$$

Мы можем определить следующую коммутативную диаграмму гомоморфизмов линейных пространств

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{DM}(U_m,P_m) & \xrightarrow{\widetilde{\Phi}} & \mathcal{H}(U^{(\nu-2)})\times\mathcal{H}(GL_m(\mathfrak{O}))\\
\Phi_\nu\big\downarrow & & \Phi_{\nu-2}\big\downarrow\times\Phi_m\\
\mathbb{Q}[x_0^{\pm1},x_1^{\pm1},\dots,x_\nu^{\pm1}] & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{Q}[x_0^{\pm1},x_1^{\pm1},\dots,x_{\nu-m}^{\pm1}]\times\mathbb{Q}[x_{\nu-m+1}^{\pm1},x_1^{\pm1},\dots,x_\nu^{\pm1}],
\end{array}$$

где Φ_ν, $\Phi_{\nu-m}$ и Φ_m — сферические отображения соответствующих колец Гекке,

$$\widetilde{\Phi}(U_m\mathbf{D}U_m)=\|NU_m\setminus NU_m\mathbf{D}NU_m\|\left(U^{(\nu-m)}BU^{(\nu-m)},\ GL_m(\mathfrak{O})A\,GL_m(\mathfrak{O})\right),$$

и id — тождественное вложение кольца. Двойные классы, участвующие в приведенной диаграмме, являются линейно независимыми элементами соответствующих колец Гекке, следовательно, двойные классы типа $U_m\mathbf{D}U_m$ линейно независимы. Лемма 2.2 доказана.

Определяемое ниже пространство $\mathcal{C}(U_m,P_m)\subset\mathcal{DM}(U_m,P_m)$ будет играть в дальнейшем важную роль. Это пространство всех элементов, которые могут быть записаны в виде суммы *диагональных левых смежных классов*

$$\mathcal{C}(U_m,P_m)=\left\{\sum_i a_i\,U_m[A_i,\,0,\,0,B_i]\in\mathcal{H}(U_m,\,P_m)\right\}.\tag{2.11}$$

Это пространство не пусто. Например, обратимый элемент из центра кольца $\mathcal{H}(U_m,\,P_m)$

$$\mathbf{\Delta}=U_m\pi E_{2\nu+n_0}U_m\tag{2.12}$$

и элемент

$$\mathbf{\Lambda}_m=U_m\begin{pmatrix}\overline{\Pi}E_m&0&0\\0&E_{2(\nu-m)+n_0}&0\\0&0&\Pi^{-1}\end{pmatrix}U_m=U_m\begin{pmatrix}\overline{\Pi}E_m&0&0\\0&E_{2(\nu-m)+n_0}&0\\0&0&\Pi^{-1}\end{pmatrix}\tag{2.13}$$

принадлежат пространству $\mathcal{C}(U_m,P_m)$ при любом $m\geqslant1$. Для $m=\nu$ мы определим элемент

$$\mathbf{\Pi}=U_m\begin{pmatrix}\pi^{\mathfrak{f}}E_\nu&0&0\\0&\mathfrak{a}&0\\0&0&E_\nu\end{pmatrix}U_m,$$

где $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{a}$ определены в (2.3) и (2.7). Если $\mathfrak{f} = 2$ в случае ортогональной группы, то $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{\Lambda}_\nu$, но для групп с $\mathfrak{f} = 1$ $\mathbf{\Pi}$ — это новый элемент.

Лемма 2.3. $\mathcal{C}(U_m, P_m)$ *— коммутативное кольцо без делителей нуля.*

Доказательство. Из определения умножения в кольце $\mathcal{H}(U_m, P_m)$ ясно, что $\mathcal{C}(U_m, P_m)$ является его подкольцом. Из леммы 2.2 следует, что $\mathcal{C}(U_m, P_m)$ изоморфно подкольцу кольца $\mathbb{Q}[x_0^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \ldots, x_\nu^{\pm 1}]$. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Отображения*

$$-\colon GL_m(\mathfrak{O})\, A\, GL_m(\mathfrak{O}) \to U_m\,[A^{-1}, 0, 0, E\,]\, U_m = [\,\mathbf{A}\,]_- \in \mathcal{C}(U_m, P_m),$$
$$+\colon GL_m(\mathfrak{O})\, A\, GL_m(\mathfrak{O}) \to U_m\,[A, 0, 0, E\,]\, U_m = [\,\mathbf{A}\,]_+ \in \mathcal{C}(U_m, P_m)^*$$

являются гомоморфными вложениями целого кольца $\mathcal{G}$ группы $GL_m(\mathcal{K})$ в кольцо $\mathcal{H}(U_m, P_m)$, где

$$\mathcal{G} = \left\{ \sum_i a_i GL_m(\mathfrak{O})\, A_i\, GL_m(\mathfrak{O})\ ;\ A_i \in M_m(\mathfrak{O}), a_i \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Доказательство. Вычислим разложение двойного класса $[\,\mathbf{A}\,]_-$ в сумму левых смежных классов (см. (2.10)). В обозначениях леммы 2.1 выполняется

$$[E_m, -XA, Z_{XA}, E][A^{-1}, 0, 0, E][E_m, X, Z_X + Z, E] = [E_m, 0, Z', E][A^{-1}, 0, 0, E],$$

где $Z' \in M_m(\mathfrak{P}^{-\ell})$. Это означает, что $NU_m[A^{-1}, 0, 0, E]NU_m = NU_m[A^{-1}, 0, 0, E]$, и из (2.10) следует, что $[\,\mathbf{A}\,]_- \in \mathcal{C}(U_m, P_m)$.

Чтобы доказать утверждение леммы относительно отображения „$+$“ мы можем использовать антиавтоморфизм $*$ (см. предложение 3.1.7 [A1])

$$*\colon U_m g U_m \to U_m g^{-1} U_m \tag{2.14}$$

— кольца Гекке $\mathcal{H}(U_m, P_m)$ (левое и правое умножения задают одну и ту же структуру кольца Гекке). Очевидно, что $\pm$-отображения являются двойственными относительно этого антиавтоморфизма.

Произвольный двойной класс $U^{(\nu-m)} B U^{(\nu-m)}$ относительно максимальной компактной подгруппы $U^{(\nu-m)}$, определяемой решеткой $L_{\nu-m}$, содержит диагональный элемент. Мы обозначим максимальный порядок элементарных делителей π^{d_i} $(m+1 \leqslant i \leqslant \nu)$ этого элемента через $d(B)$.

Введем так называемое „четное“ кольцо Гекке, состоящее из всех элементов с тривиальным μ-порядком (см. определение группы Γ)

$$\mathcal{H}^{(0)}(U, G) = \left\{ H = \sum_i a_i U h_i \in \mathcal{H}(U, G)\colon\ \mu(h_i) \in \mathfrak{o}^\times \right\}.$$

Можно определить два вложения этого кольца в кольцо Гекке $\mathcal{H}(U_m,\, P_m)$.

Лемма 2.5. *Отображения*

$$-\colon U^{(\nu-m)}BU^{(\nu-m)} \to U_m[\pi^{-d(B)}E_m, 0, 0, B]U_m \in \mathcal{C}(U_m, P_m),$$
$$+\colon U^{(\nu-m)}BU^{(\nu-m)} \to U_m[\pi^{+d(B)}E_m, 0, 0, B]U_m \in \mathcal{C}(U_m, P_m)^*$$

являются гомоморфными вложениями кольца Гекке $\mathcal{H}^{(0)}(U^{(\nu-m)}, G^{(\nu-m)})$ *в кольцо* $\mathcal{H}(U_m,\, P_m)$, *где группа* $U^{(\nu-m)}$ *состоит из элементов, сохраняющих решетку* $L_{\nu-m}$ (*см.* (2.4)).

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы и данные гомоморфизмы двойственны относительно антиавтоморфизма $*$.

Следующая лемма может быть легко получена из определений и разложения (2.10).

Лемма 2.6. *Линейное пространство* $\mathcal{DM}(U_m, P_m)$ *является* $\mathcal{C}(U_m, P_m)$*-модулем.*

§3. Кольца Гекке параболических подгрупп ранга один

Этот параграф посвящен случаю параболических подгрупп ранга один. Основная цель Введения колец Гекке параболических подгрупп была объяснена на примере группы SL_2 в §1: многочлены над кольцом Гекке группы G раскладываются на множители над кольцом Гекке ее параболической подгруппы P. Чтобы вычислить множители этого разложения, мы можем воспользоваться явными формулами для коэффициентов многочленов Гекке, соответствующих локальной стандартной L-функции, найденными в работе автора [G1] для SO-, SU- и Sp-групп. В этом параграфе мы рассмотрим случай ортогональной группы и ее параболической подгруппы ранга один. Для удобства читателей мы приведем также доказательства необходимых результатов из [G1]. (Отметим, что эти доказательства несколько проще, чем оригинальные доказательства из [G1]).

Без ограничения общности (для ортогональной группы) мы можем ограничиться случаем $\mathfrak{o}$-целой решетки L. Мы полагаем

$$q(t) = \prod_{i=0}^{\nu}(1 - \mathrm{p}^{-A}x_i{}^{-1}t)(1 - \mathrm{p}^{A}x_i t) = \sum_{j=0}^{2\nu}(-1)^j q_j^{(\nu)} t^j,$$

где целое число A определено в (2.8). Коэффициенты этого многочлена принадлежат кольцу $\mathbb{Q}^{W_\nu}[x_0, x_1, \ldots, x_\nu]$, следовательно, существует многочлен $Q(t)$ над $\mathcal{H}(U, G)$, чей Φ_ν-образ равен $q(t)$, а именно

$$Q(t) = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j Q_j^{(\nu)} t^j \in \mathcal{H}(U, G)[t] \quad \text{и} \quad \Phi_\nu(Q_j^{(\nu)}) = q_j^{(\nu)}. \tag{3.1}$$

Многочлен $Q(t)$ отвечает стандартному представлению двойственной (в смысле Ленглендса) группы G^L, поэтому мы называем этот многочлен стандартным многочленом Гекке.

В следующей теореме описывается разложение стандартного многочлена Гекке в параболическом расширении, отвечающем группе U_1. В этой теореме мы используем инвариант *сигнатура*, определяемый следующим образом:

$$\text{если} \quad H = U_1 \begin{pmatrix} \pi^a & * & * \\ 0 & D & * \\ 0 & 0 & \pi^d \end{pmatrix} U_1, \quad \text{тогда} \quad \mathrm{s}(H) = \frac{d-a}{2}.$$

Теорема 1. *В кольце многочленов* $\mathcal{H}(U_1, P_1)[t]$ *выполняется следующее равенство*:

$$Q(t) = (1 - \mathbf{p}^{-A-\nu}\Lambda_1 t)\, S(t)\, (1 - \mathbf{p}^{-A-\nu}\Lambda_1^* t),$$

где

$$S(t) = \sum_{j=0}^{2\nu-1} (-1)^j S_j^{(\nu)} t^j \in \mathcal{H}(U_1, P_1)[t] \quad \text{и} \quad S_j^{(\nu)} = s_0(Q_j - \mathbf{p}^{-A-\nu}\Lambda_1 Q_{j-1}),$$

$s_0(H)$ *обозначает при этом ту часть элемента H, которая имеет сигнатуру, равную нулю,* Λ_1^* *— образ элемента* Λ_1 *относительно антиавтоморфизма* $*$ (*см.* (2.13) *и* (2.14)), *а константа* A *определена в* (2.8).

Можно написать явные формулы для коэффициентов $S_j^{(\nu)}$ в терминах образующих кольца $\mathcal{H}(U, G)$ (см. теорему 2).

Чтобы доказать эту теорему, нам нужна более детальная информация об образующих $\Pi_{k,m}$ кольца Гекке $\mathcal{H}(U, G)$. Положим

$$D_{k,m} = \mathrm{diag}(\pi^{-1}E_k,\ E_m,\ E_{n_0},\ E_m,\ \pi E_k) \qquad \text{и} \qquad \Pi_{k,m} = UD_{k,m}U, \tag{3.2}$$

где $k + m = \nu$. *Это определение должно быть слегка изменено в случае группы* $SO(\nu, \nu)$ $(n_0 = 0)$, *а именно* $\Pi_{k,0} = UD_{k,0}U + U\,\mathrm{diag}(\pi,\ D_{k-1,0},\ \pi^{-1})U$. Элементы $\Pi_{k,m}$ являются образующими кольца $\mathcal{H}(U,\ G)$ (см. [S]).

В статье [G1] образы элементов $\Pi_{k,m}$ при сферическом отображении были вычислены в виде линейной функции от стандартных симметрических функций, и были получены следующие формулы коэффициентов $Q_j^{(\nu)}$ многочлена Гекке (см. теорему 2 в [G1]).

Лемма 3.1. *Для* $j \leqslant \nu$

$$Q_j^{(\nu)} = C_{j,\nu} \sum_{k=0}^{j} U_{j-k,\nu-j}\Pi_{k,\nu-k},$$

где $C_{j,\nu} = \mathbf{p}^{-jA+\langle\nu-j\rangle-\langle\nu\rangle}$ *и* $\langle a\rangle = a(a+1)/2$. *Рациональные коэффициенты* $U_{j-k,\nu-j}$ *задаются формулами*

$$U_{s,\delta} = (-1)^s \sum_{r=0}^{[s/2]} (-1)^r \frac{\lambda_{s-2r}(\mathbf{p})}{\varphi_{s-2r}(\mathbf{p})} \sum_{t=0}^{r} (-1)^t \mathbf{p}^{t(n_0+\delta+t-1)} \frac{(\mathbf{p}^{\delta+t+1}-1)\ldots(\mathbf{p}^{\delta+s}-1)}{\varphi_t(\mathbf{p})\varphi_{r-t}(\mathbf{p}^2)},$$

где

$$\lambda_v(\mathrm{p}) = (\mathrm{p}^{n_0-\ell_0}-1)(\mathrm{p}^{n_0-\ell_0}-\mathrm{p})\dots(\mathrm{p}^{n_0-\ell_0}-\mathrm{p}^{v-1}), \qquad \lambda_0(\mathrm{p})=1,$$
$$\varphi_v(\mathrm{p}) = (\mathrm{p}-1)\dots(\mathrm{p}^v-1), \qquad \varphi_0(\mathrm{p})=1,$$

n_0 *— размерность анизотропной части решетки* L, *и*

$$\ell_0 = dim_{\mathfrak{o}/\mathfrak{p}} L_0/L_0^{(1)} \qquad (\text{см. } (2.1)).$$

В частности, $U_{0,\delta}=1$ *для любого* δ.

Замечание 1. *Параметр* ℓ_0 $(0\leqslant \ell_0\leqslant n_0)$ *совпадает с числом* $\mathfrak{o}^\times$*-единиц в диагональной форме* $S_0(2\notin\mathfrak{p})$. *В частности,* $\ell_0=n_0$ *в случае хорошей редукции* $(\det S_0\in\mathfrak{o}^\times)$.

Замечание 2. *Выполняется*

$$\lambda_{n_0-\ell_0+1}(\mathrm{p})=0,$$

следовательно, внешняя сумма в формуле для $U_{s,\delta}$ *содержит один, два или три члена. В случае разложимой группы можно существенно упростить эти формулы. Для* $n_0=\ell_0=1$ *(группа* $SO(2n+1)$*)*

$$U_{2l,\delta}=\frac{\varphi_{2l+\delta}(\mathrm{p}^2)}{\varphi_{l+\delta}(\mathrm{p}^2)\varphi_l(\mathrm{p}^2)}, \qquad U_{2l+1,\delta}=0$$

и для $n_0=\ell_0=0$ *(группа* $SO(2n)$*)*

$$U_{2l,\delta}=\frac{(\mathrm{p}^\delta+1)\varphi_{2l+\delta}(\mathrm{p}^2)}{(\mathrm{p}^{\delta+2l}+1)\varphi_{l+\delta}(\mathrm{p}^2)\varphi_l(\mathrm{p}^2)}, \qquad U_{2l+1,\delta}=0$$

(*см.* [G1], *окончание параграфа* 1).

Замечание 3. *В* [G1] (*см. тождество* (1.28) *и лемму* 1.4) *были доказаны следующие рекуррентные соотношения*:

$$\begin{aligned}U_{s,\delta} =&(0)\mathrm{p}^s U_{s,\delta-1}+(2)\mathrm{p}^{s+2\delta+n_0-1}U_{s-2,\delta+1}-(\mathrm{p}^{n_0-\ell_0}-1)U_{s-1,\delta}\\ &-\mathrm{p}^{n_0-\ell_0}\,\mathrm{IS}_{2(s+\delta-1)+\ell_0}U_{s-2,\delta},\end{aligned}$$

где $\mathrm{IS}_{2n+\ell_0}$ *— число ненулевых изотропных векторов в квадратичном пространстве над конечным полем* $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$

$$\mathrm{IS}_{2n+\ell_0}=\left\|\left\{h\in(\mathfrak{o}/\mathfrak{p})^n\times L_0/L_0^{(1)}\times(\mathfrak{o}/\mathfrak{p})^n : \begin{pmatrix}0&0&I_n\\0&S_0&0\\I_n&0&0\end{pmatrix}[h]\in 2\mathfrak{p}\right\}\right\|-1,$$

и в случае $\delta = 0$ в правой части формулы отсутствует первый член, а второй имеет коэффициент два.

Для заданного вектора $h \in L_m \otimes \mathrm{k}$ (см. (2.4)) ранга $2m + n_0$ над локальным полем k

$$^t h = (^t h_1,\ ^t h_0,\ ^t h_2), \qquad h_1, h_2 \in M_{m,1}(\mathrm{k}),\ h_0 \in M_{n_0,1}(\mathrm{k}),$$

и $l = \nu - 1 - m$ мы полагаем

$$\Pi^{(0)}_{l,m}(h) = U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -^t h_2 I_m & -^t h_0 S_0 & -^t h_1 I_m & 0 & -\frac{1}{2}\|h\| \\ & \pi^{-1}E_l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & E_m & 0 & 0 & 0 & h_1 \\ & & & E_{n_0} & 0 & 0 & h_0 \\ & & & & E_m & 0 & h_2 \\ & & & & & \pi E_l & 0 \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} U_1, \qquad (3.3)$$

где

$$\|h\| = S_m[h], \qquad S_m = \mathrm{diag}(I_m, S_{n_0}, I_m).$$

Мы должны изменить это определение в случае $m = 0$ для ортогональной группы без анизотропной части ($n_0 = 0$). В этом случае

$$\Pi^{(0)}_{\nu-1,0}(0) = U_1 \,\mathrm{diag}(1, D_{\nu-1,0}, 1)\, U_1 + U_1 \,\mathrm{diag}(1, \pi, D_{\nu-2,0}, \pi^{-1}, 1)\, U_1.$$

Следующая лемма следует из определений и леммы 2.1 о структуре унипотентной подгруппы NU_1.

Лемма 3.2. *Для произвольного заданного $h \in \pi^{-1}L_m$ такого, что $h \notin L_m$, имеет место следующее разложение элемента $\Pi^{(0)}_{l,m}(h)$ в сумму левых смежных классов относительно подгруппы U_1:*

$$\Pi^{(0)}_{l,m}(h) = \sum_{\epsilon, x, \psi} U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\epsilon\, ^t h S_m & 0 & -\frac{1}{2}\|\epsilon h\| \\ & \pi^{-1}E_l & 0 & 0 & \pi^{-1}x \\ & & E_{2m+n_0} & 0 & \epsilon h \\ & & & \pi E_l & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \tilde{\psi},$$

где элементы $x_i \in \mathfrak{o}$ столбца $^t x = (x_1, \ldots, x_l)$ размерности l пробегают систему представителей из $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$, элемент ϵ пробегает все попарно не сравнимые по модулю $\mathfrak{p}$ единицы, а ψ пробегает систему представителей из левых смежных классов элемента

$$\Pi_{l,m} = \sum_{\psi} U_1^{\nu-1} D_{l,m} \psi$$

(см. (3.2)) в кольце Гекке ортогональной группы ранга $\nu - 1$ квадратичной формы $S_{\nu-1}$. $\widetilde{\psi}$ — вложение элемента ψ в ортогональную группу ранга ν $\widetilde{\psi} = \mathrm{diag}(1, \psi, 1)$.

Следствие. *Двойной класс* $\Pi^{(0)}_{l,m}(h)$ *зависит только от подпространства* $\langle h\rangle_{\mathfrak p}$ *векторного пространства* $\pi^{-1}L_m/L_m$ *над конечным полем* $k_{\mathfrak p}=\mathfrak o/\mathfrak p$.

Лемма 3.3. *Элемент* $\Pi_{k,m}$, *где* $m=\nu-k$, *следующим образом раскладывается в кольце Гекке* $\mathcal H(U_1,P_1)$:

$$\begin{aligned}\Pi_{k,m}=&\Pi^{-}_{k-1,m}+\Pi^{+}_{k-1,m}+\Pi^{(0)}_{k,m-1}(0)\\ &+\sum_{\substack{\langle h_0\rangle_{\mathfrak p}\in L_0^{(-1)}/L_0\\ h_0\neq 0}}\Pi^{(0)}_{k-1,m}(h_0)+\sum_{\substack{\langle h\rangle_{\mathfrak p}\in\pi^{-1}L_{m+1}/L_{m+1}\\ S_{m+1}[h]\in 2\mathfrak p^{-1}\\ h=(h_1,h_0,h_2)\neq(0,h_0,0)}}\Pi^{(0)}_{k-2,m+1}(h),\end{aligned}\tag{3.4}$$

где элементы $\Pi^{(0)}_{k,m}(h)$ *определены в* (3.3), *элементы* $\Pi^{\pm}_{k-1,m}$ — *образы образующих* $\Pi_{k-1,m}$ *при вложении „минус“ из леммы* 2.5, *ранг решетки* L_{m+1} *и формы* S_{m+1} *равен* $2(m+1)+n_0$ (*см.* (2.4)), *а суммирования в* (3.4) *ведутся по всем различным одномерным подпространствам, отвечающим линейным подпространствам над конечным полем* $\mathfrak o/\mathfrak p$.

Доказательство. Двойной смежный класс $\Pi_{k,m}$ состоит из всех матриц M таких, что матрица πM — целая и имеет ранг k над конечным полем $\mathfrak o/\mathfrak p$. Положим

$$\Pi_{k,m}=\sum_{D,d,h}U_1\begin{pmatrix}d^{-1}&*&*\\0&D&h\\0&0&d\end{pmatrix}.$$

Из условия целочисленности вытекает

$$d=\pi^{\pm1}\text{ или }1,\quad h\in\pi^{-1}L_{\nu-1},\quad D=D_{k,\nu-k-1}.$$

Если $d=\pi^{-1}$, то h может быть приведено к нулю и, следовательно, получается „минус“-элемент $\Pi^{-}_{k-1,m}$. Если $d=\pi$, то используя двойственность $*$ (см. (2.14)), мы получаем элемент $\Pi^{+}_{k-1,m}$. Если $d=1$, то h-компонента может добавить $+2$ или $+1$ к $k_{\mathfrak p}$-рангу матрицы D. Условия

$$h\in\pi^{-1}L_{m+1},\qquad S_{m+1}[\pi h]\in 2\mathfrak p^{-1}$$

на параметр h во второй сумме в (3.4) эквивалентны условию целочисленности произведения $\Delta\Pi^{(0)}_{k-2,m+1}(h)$, где Δ — элемент (2.12), вместе с предположением, что ранг этого произведения равен k для вектора h с „изотропной частью“, т.е. для $h\neq(0,h_0,0)$ (случай типа $(+2)$). Элементы первой суммы в (3.4), умноженные на элемент π, целочисленные, потому что

$$L_0^{(-1)}=\{\,x\in V_0: S(x,x)\in\ 2\mathfrak p^{-1}\,\}.$$

Легко доказать, что если $h_0 \in L_0^{(-1)}$, то $S_0 h_0 \in L_0$, и ранг элемента $\Delta \Pi^{(0)}_{k-1,m}(h_0)$ равен k (случай типа $(+1)$). Лемма доказана.

В §2 был определен $\mathcal{C}(U_1, P_1)$-модуль $\mathcal{DM}(U_1, P_1)$ (см. (2.9)).

Лемма 3.4. *Для образующих* $\Pi_{k,m}$ *($m = \nu - k$) выполняется включение* $\Lambda_1 \Pi_{k,m} \in \mathcal{DM}(U_1, P_1)$.

Доказательство. Элементы

$$\Lambda_1 \Pi^-_{k-1,m}, \quad \Lambda_1 \Pi^+_{k-1,m}, \quad \Lambda_1 \Pi^{(0)}_{k,m-1}(0)$$

принадлежат $\mathcal{DM}(U_1, P_1)$, так как это — $\mathcal{C}(U_1, P_1)$-модуль. Для элементов из (3.4) *выполнится более сильное включение*

$$I = \Lambda_1 \cdot \Pi^{(0)}_{l,m}(h) \in \mathcal{C}(U_1, P_1) \subset \mathcal{DM}(U_1, P_1)\ . \tag{3.5}$$

Используя лемму 2.1, мы получаем следующее разложение

$$I = \sum_{\epsilon, x, \psi} U_1 D_{\epsilon,x,\psi} = \sum_{\epsilon,x,\psi} U_1 \begin{pmatrix} \pi & * & * & * & * \\ 0 & \pi^{-1} E_l & 0 & 0 & \pi^{-1} x \\ & & E_{2m+n_0} & 0 & \epsilon h \\ & & & \pi E_l & 0 \\ 0 & & & & \pi^{-1} \end{pmatrix} \tilde{\psi},$$

где

$$\epsilon \in \mathfrak{o}^\times/\mathfrak{p}\,, \qquad x \in (\mathfrak{o}/\mathfrak{p})^l\,, \qquad \psi \in U^{(\nu-1)} \setminus U^{(\nu-1)} D_{l,m} U^{(\nu-1)},$$

а $U^{(\nu-1)}$ — максимальная компактная группа, определенная решеткой $L_{\nu-1}$ (см. (2.4)). Согласно определению, $\pi h \in L_m$, поэтому

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & E_l & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & E_{2m+n_0} & 0 & \pi\epsilon h \\ 0 & 0 & 0 & E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{D}_{\epsilon,x,\psi} = \operatorname{diag}(\pi, \pi^{-1} E_l, E_{2m+n_0}, \pi E_l, \pi^{-1}),$$

и последний элемент принадлежит $\mathcal{C}(U_1, P_1)$.

Доказательство теоремы 1. Положим

$$R_-(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j R_j t^j = \left(\sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{p}^{-A-\nu} \Lambda_1)^i t^i \right) Q(t) \tag{3.6}$$

и докажем, что формальный степенной ряд $R_-(t)$ является полиномом. По определению

$$R_j = Q_j - \mathbf{p}^{-A-\nu} \Lambda_1 Q_{j-1} + \dots\ , \quad \text{если } j \leqslant 2\nu,$$
$$R_j = (\mathbf{p}^{-A-\nu} \Lambda_1)^{j-2\nu} Q_j + \dots\ , \quad \text{если } j > 2\nu.$$

Коэффициенты многочлена $Q(t)$ удовлетворяют следующему условию

$$Q_j^{(\nu)} = Q_{2\nu-j}^{(\nu)} \qquad \text{для} \ \ 0 \leqslant j \leqslant 2\nu.$$

В соответствии с леммами 3.1, 3.2 и 3.4

$$R_{2\nu} = 1 - \mathbf{p}^{-A-\nu}\Lambda_1 Q_1^{(\nu)} + \ldots \in \mathcal{DM}(U_1, P_1),$$
$$R_{2\nu+j} \in \mathcal{DM}(U_1, P_1) \qquad \text{для любого } j > 0.$$

Ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \Phi(R_j)\, t^j = (1 - \mathbf{p}^{-A} x_\nu^{-1}\, t)^{-1}\, Q(t)$$

является многочленом от t степени $2\nu - 1$, согласно определению многочлена $Q(t)$. Ограничение сферического гомоморфизма Φ на регулярный модуль $\mathcal{DM}(U_1, P_1)$ — инъективно, согласно лемме 2.2, следовательно, $R_j = 0$ для $j \geqslant 2\nu$. Более того произведение (3.6) не содержит отрицательных степеней переменной x_ν. Из лемм 2.5, 3.1, 3.3, 3.4 и включения (3.5) следует, что любой двойной смежный класс, имеющий отрицательную сигнатуру и принадлежащий коэффициенту R_j ; лежит в регулярном кольце $\mathcal{DM}(U_1, P_1)$, поэтому из $\Phi(\mathrm{s}_-(R_j)) = 0$ следует, что

$$\mathrm{s}_-(R_j) = 0 \qquad \text{для } 0 \leqslant j \leqslant 2\nu - 1,$$

где через $\mathrm{s}_-(R)$ обозначена та часть элемента R , которая имеет отрицательную сигнатуру. Это доказывает, что

$$Q(t) = (1 - \mathbf{p}^{-A-\nu}\Lambda_1\, t)\, R_-(t),$$

где $R_-(t)$ — многочлен степени $2\nu - 1$, коэффициенты которого R_j имеют неотрицательную сигнатуру. Применяя антиавтоморфизм $*$ (см. (2.14)), получаем

$$Q(t) = R_+(t)(1 - \mathbf{p}^{-A-\nu}\Lambda_1^*\, t),$$

где коэффициенты многочлена $R_+(t)$ имеют неположительную сигнатуру. В качестве следствия из двух последних тождеств мы получаем следующее соотношение

$$S(t) = (1 - \mathbf{p}^{-A-\nu}\Lambda_1\, t)^{-1} R_+(t) = R_-(t)(1 - \mathbf{p}^{-A-\nu}\Lambda_1^*\, t)^{-1}.$$

Все коэффициенты первого произведения имеют неположительную сигнатуру, а коэффициенты при степенях t^j с $j \geqslant 2\nu$ имеют отрицательную сигнатуру. Аналогичное утверждение верно и для второго произведения, если мы заменим термин „отрицательный“ на „положительный“. Следовательно, $S(t)$ является многочленом степени $2\nu - 1$, коэффициенты которого состоят из двойных смежных классов сигнатуры ноль. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Коэффициенты* $S_j^{(\nu)}$ *многочлена* $S(t)$ *теоремы 1 задаются следующими формулами:*
если $j \leqslant \nu$, *то*

$$S_j^{(\nu)} = C_{j,\nu} \sum_{i=0}^{j} \Bigg[\big(U_{j-i,\nu-j} - \mathbf{p}^{2\nu-j+1+2A} U_{j-i-2,\nu-j+1} \big) \Pi^{(0)}_{i,\nu-i-1}(0) + U_{j-i-1,\nu-j} \sum_{\substack{\langle h_0 \rangle_\mathfrak{p} \in L_0^{(-1)}/L_0 \\ h_0 \neq 0}} \Pi^{(0)}_{i,\nu-i-1}(h_0) + U_{j-i-2,\nu-j} \sum_{\substack{\langle h \rangle_\mathfrak{p} \in \pi^{-1} L_{\nu-i-1}/L_{\nu-i-1} \\ S_{\nu-i-1}[h] \in 2\mathfrak{p}^{-1} \\ h=(h_1,h_0,h_2) \neq (0,h_0,0)}} \Pi^{(0)}_{i,\nu-i-1}(h) \Bigg];$$

если $j > \nu$, *то*

$$S_j^{(\nu)} = C_{2\nu-j,\nu} \sum_{i=0}^{2\nu-j} \Bigg[\big(U_{2\nu-j-i,j-\nu} - \mathbf{p}^{2\nu-j-i} U_{2\nu-j-i,j-\nu-1} \big) \Pi^{(0)}_{i,\nu-i-1}(0) + U_{2\nu-j-i-1,j-\nu} \sum_{\substack{\langle h_0 \rangle_\mathfrak{p} \in L_0^{(-1)}/L_0 \\ h_0 \neq 0}} \Pi^{(0)}_{i,\nu-i-1}(h_0) + U_{2\nu-j-i-2,j-\nu} \sum_{\substack{\langle h \rangle_\mathfrak{p} \in \pi^{-1} L_{\nu-i-1}/L_{\nu-i-1} \\ S_{\nu-i-1}[h] \in 2\mathfrak{p}^{-1} \\ h=(h_1,h_0,h_2) \neq (0,h_0,0)}} \Pi^{(0)}_{i,\nu-i-1}(h) \Bigg],$$

где элементы $\Pi^{(0)}_{i,\nu-i+1}(h)$ *и индексы суммирования — те же самые, что и в лемме* 3.3. *Коэффициенты* $C_{j,\nu}$ *и* $U_{s,\delta}$ *определены в лемме* 3.1.

Доказательство. В теореме 1 была получена следующая формула для коэффициентов многочлена $S(t)$

$$S_j = \mathrm{s}_0(Q_j - \mathbf{p}^{-A-\nu} \Lambda_1 Q_{j-1}).$$

Часть коэффициента Q_j, имеющая сигнатуру 0, может быть вычислена в соответствии с леммами 3.1 и 3.3, а нулевая (в смысле сигнатуры) часть произведения $\Lambda_1 Q_{j-1}$ является суммой членов типа $\Lambda_1 \Pi^+_{k-1,m}$ (см. лемму 3.3), так как сигнатура — аддитивная функция. Используя равенство (2.10), легко доказать, что

$$\Lambda_1 \Pi^+_{k-1,m} = \mathbf{p}^{2\nu-k-1+n_0} \Pi^{(0)}_{k-1,m}(0).$$

Для завершения доказательства достаточно собрать члены с одним и тем же элементом h в $\Pi^{(0)}_{i,\nu-i-1}(h)$ и учесть, что $Q_j = Q_{2\nu-j}$ для $j > \nu$.

§4. Кольцо Гекке параболической подгруппы ранга два

В этой главе мы рассмотрим случай параболической подгруппы P_2 ортогональной группы G, состоящей из элементов, сохраняющих изотропное подпространство $\langle e_1, e_2\rangle$ (см. §2).

Ниже мы используем следующие обозначения: для произвольного двойного класса $X = U_2 H U_2$ с $\mu(H) = 1$

$$X = U_2 \begin{pmatrix} I_2{}^t A^{-1} I_2 & * & * \\ 0 & D & * \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} U_2,$$

мы определим сигнатуру X

$$\operatorname{sign}(X) = \mathrm{s}(X) = \operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(\det A) \tag{4.1}$$

(см. определение перед Теоремой 1). Мы обозначим через $\mathrm{s}_\delta(X)$ сумму всех двойных классов сигнатуры δ, содержащихся в элементе $X \in \mathcal{H}(U_2, P_2)$. Все двойные классы вида

$$Y = U_2 \begin{pmatrix} E_2 & * & * \\ 0 & D & * \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix} U_2$$

образуют подкольцо кольца Гекке $\mathcal{H}(U_2, P_2)$, которое мы обозначим через

$$\mathcal{EH}(U_2,\ P_2). \tag{4.2}$$

Для группы P_2 первый гомоморфизм леммы 2.4 задает вложение кольца Гекке группы GL_2 в кольцо $\mathcal{C}(U_2, P_2)$. Через $\mathbf{T}_-(\pi^l)$ мы обозначим образ элемента Гекке, $T(\pi^l)$ (см. (0.1)):

$$\mathbf{T}_-(\pi^l) = \sum_{\substack{a+b=l\\ b\geqslant a\geqslant 0}} U_2 \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} \pi^a & 0 \\ 0 & \pi^b \end{pmatrix},\ E_{2(\nu-2)+n_0},\ \begin{pmatrix} \pi^{-b} & 0 \\ 0 & \pi^{-a} \end{pmatrix}\right) U_2.$$

В этих обозначениях образ диагонального класса $T(\pi, \pi) = GL_2(\mathfrak{o}) \operatorname{diag}(\pi, \pi) GL_2(\mathfrak{o})$ совпадает с элементом $\mathbf{\Lambda}_2$ кольца $\mathcal{H}(U_2, P_2)$ (см. (2.13) и (1.4))

$$\mathbf{T}_-(\pi, \pi) = \mathbf{\Lambda}_2 = U_2 \operatorname{diag}(\pi, \pi,\ E_{2(\nu-2)+n_0},\ \pi^{-1}, \pi^{-1}).$$

Стандартный многочлен Гекке $Q(t)$ (см. (3.1)) раскладывается, как и в случае группы P_1, в произведение трех множителей в параболическом расширении $\mathcal{H}(U_2, P_2)$. Первый и третий множители отвечают многочлену Гекке

$$Q^{GL_2}(t) = 1 - \mathbf{T}(\pi)\, t + \mathbf{p}\, T(\pi, \pi)\, t^2$$

группы GL_2 (см. (0.4)).

Теорема 3. *В кольце многочленов* $\mathcal{H}(U_2, P_2)[t]$ *выполняется следующее разложение:*

$$Q(t) = Q_-^{GL_2}(\mathbf{p}^{-(A+\nu)}t) \cdot K(t) \cdot Q_+^{GL_2}(\mathbf{p}^{-(A+\nu)}t),$$

где

$$Q_-^{GL_2}(t) = 1 - \mathbf{T}_-(\pi)\,t + \mathbf{p}\Lambda_2\,t^2, \qquad Q_+^{GL_2}(t) = 1 - \mathbf{T}_-^*(\pi)\,t + \mathbf{p}\Lambda_2^* t^2$$

являются $\pm$*-вложениями многочлена Гекке группы* GL_2 *в кольцо* $\mathcal{H}(U_2, P_2)$ *(см. лемму 2.4). Многочлен* $K(t)$ *имеет степень меньшую или равную* $2\nu - 1$*, а его коэффициенты принадлежат кольцу* $\mathcal{EH}(U_2, P_2)$ *(см. (4.2)).*

Можно получить явные формулы для коэффициентов „ядра“ $K(t)$ (см. теорему 4).

Как и в случае группы P_1, нам потребуется информация об образах образующих $\Pi_{k,m}$ кольца Гекке $\mathcal{H}(U, G)$ (см. (3.2)) в параболическом расширении $\mathcal{H}(U_2, P_2)$. Мы обозначим через $\| \ \|$ и $\langle \ \rangle$ норму и скалярное произведение относительно квадратичной формы $S_{\nu-l}$ (см. (2.4))

$$\|h\| = S_{\nu-l}[h], \qquad \langle h_1, h_2 \rangle = {}^t h_1 S_{\nu-l} h_2. \tag{4.3}$$

Мы полагаем также $h^\sharp = {}^t h S_{\nu-l}$. Ранг формы $S = S_{\nu-l}$ будет ясен из контекста.

Согласно (2.5), элементы группы P_2 параметризуются следующим образом:

$$[A, X, Z, B] = \begin{pmatrix} \mu(B) I_2 {}^t(A^{-1}) I_2 & -I_2 {}^t(A^{-1}) {}^t X S_{\nu-2} B & I_2 Z \\ 0 & B & X \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix},$$

где элементы

$$A \in GL_2(\mathrm{k}), \ B \in G(S_{\nu-2}), \ X = (x_1, x_2) \in M_{2(\nu-2)+n_0,2}(\mathrm{k}), \ Z \in M_2(\mathrm{k})$$

удовлетворяют соотношению ${}^t AZ + {}^t ZA + S_{\nu-2}[X] = 0$. В частности, целый унипотентный элемент $\gamma \in NU_2$ (см. лемму 2.1) равен

$$\gamma(X, r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_2^\sharp & r & -\frac{1}{2}\|x_2\| \\ 0 & 1 & -x_1^\sharp & -\frac{1}{2}\|x_1\| & -r - \langle x_1, x_2 \rangle \\ & & E_{2(\nu-2)+n_0} & x_1 & x_2 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

с целыми векторами $x_1, x_2 \in L_{\nu-2}$ и $r \in \mathfrak{o}$.

Определим теперь стандартные двойные классы в $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$. Для матрицы $D_{l,m}$ с $l + m = \nu - 2$, определенной в (3.2), мы полагаем

$$\Pi_{l,m}^{(\alpha,\beta)} = U_2 \operatorname{diag}(\pi^{-\beta}, \pi^{-\alpha}, D_{l,m}, \pi^\alpha, \pi^\beta) U_2. \tag{4.5}$$

Согласно определению (2.14), антиавтоморфизма $*$, $\Pi_{l,m}^{(-\alpha,-\beta)} = \left(\Pi_{l,m}^{(\alpha,\beta)}\right)^*$.

Для любого вектора h, принадлежащего решетке L_m размерности $2m+n_0$, мы полагаем (см. (3.2) и (4.4))

$$\Pi_{l,m}^{(-1,0)}(h) = U_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\widetilde{h}^\sharp & 0 & -\frac{1}{2}\|h\| \\ 0 & \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{l,m} & 0 & \widetilde{h} \\ 0 & 0 & 0 & \pi^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U_2, \tag{4.6}$$

где $\widetilde{h}$ обозначает вложение пространства $L_m \otimes \mathrm{k}$ в пространство $L_{\nu-2} \otimes \mathrm{k}$ $\widetilde{h} = {}^t(\underbrace{0,\dots,0}_{l}, {}^th, \underbrace{0,\dots,0}_{l})$ и $\Pi_{l,m}^{(0,+1)}(h) = (\Pi_{l,m}^{(0,-1)}(-h))^*$. В определения (4.5) и (4.6) мы должны внести те же самые изменения, что и в определение (3.3), если $m=0$ и ортогональная группа не имеет анизотропной части (т.е. $n_0 = 0$).

Следующая лемма является аналогом леммы 3.3.

Лемма 4.1. *Образ образующей* $\Pi_{k,m}$ $(k+m=\nu)$ *кольца Гекке* $\mathcal{H}(U,G)$ *в кольце* $\mathcal{H}(U_2,P_2)$ *параболической подгруппы* P_2 *имеет следующий вид:*

$$\Pi_{k,m} = \Pi_{k-2,m}^{-} + \Pi_{k-2,m}^{+} + \Pi_{k-1,m-1}^{(0,-1)} + \Pi_{k-1,m-1}^{(0,+1)} + \Pi_{k-2,m}^{(-1,+1)} + \Pi_{k,m-2}^{(0)}(0) \tag{4.7}$$

$$+ \Pi_{k-3,m+1}^{(0,-1)}(+2) + \Pi_{k-3,m+1}^{(0,+1)}(+2) \tag{4.8}$$

$$+ \Pi_{k-4,m}^{(0)}(+4) + \Pi_{k-2,m}^{(0)}(+2)$$

$$+ \Pi_{k-2,m}^{(0,-1)}(-1) + \Pi_{k-2,m}^{(0,+1)}(-1) + \Pi_{k-3,m}^{(0)}(+3) + \Pi_{k-1,m}^{(0)}(-1) \tag{4.9}$$

$$+ \Pi_{k-2,m}^{(0)}(-2) - \Pi_{k-2,m}^{(0)}(-1) - \Pi_{k-2,m}^{(0)}(0), \tag{4.10}$$

где элементы параболического расширения кольца Гекке определены в (4.5)–(4.6) *и в приведенных ниже формулах:*

$$\Pi_{k-2,m}^{-} = \Pi_{k-2,m}^{(-1,-1)}, \qquad \Pi_{k-2,m}^{+} = \Pi_{k-2,m}^{(+1,+1)}$$

— вложения элемента $\Pi_{k-2,m}$ *в* $\mathcal{C}(U_2,P_2)$ *и* $\mathcal{C}(U_2,P_2)^*$ *(см. лемму* 2.5*);*

$$\Pi_{k-3,m+1}^{(0,-1)}(+2) = \sum_{\substack{\langle h\rangle_{\mathfrak{p}} \in \pi^{-1}L_{m+1}/L_{m+1} \\ S_{m+1}[h]\in 2\mathfrak{p}^{-1} \\ h=(h_1,h_0,h_2)\neq(0,h_0,0)}} \Pi_{k-3,m+1}^{(0,-1)}(h),$$

$$\Pi_{k-3,m+1}^{(0,+1)}(+2) = \left(\Pi_{k-3,m+1}^{(0,-1)}(+2)\right)^*,$$

где суммирование ведется по всем одномерным подпространствам пространства над полем $k_{\mathfrak{p}}$: $\pi^{-1}L_{m+1}/L_{m+1} \times \pi^{-1}L_{m+1}/L_{m+1}$ *(см. лемму* 3.3*);*

$$\Pi_{k-2,m}^{(0,-1)}(-1) = \sum_{\substack{\langle h_0\rangle_{\mathfrak{p}} \in L_0^{(-1)}/L_0 \\ h_0\neq 0}} \Pi_{k-2,m}^{(0,-1)}(h_0), \qquad \Pi_{k-2,m}^{(0,+1)}(-1) = (\Pi_{k-2,m}^{(0,-1)}(-1))^*$$

и элементы типа $\Pi^{(0)}_{l,m}(\pm\delta)$ *для* $\delta = 0,1,2,3,4$ *определены как суммы левых классов*

$$\Pi^{(0)}_{l,m}(\pm\delta) = \sum_{\psi} \sum_{\substack{x_1,x_2 \in (\mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o})^l, \\ H,\ r}} U_2 D_{l,m}((x_1,x_2),H,r)\widetilde{\psi}, \tag{4.11}$$

где в первой сумме

$$\widetilde{\psi} = \mathrm{diag}(E_2,\psi,E_2) \quad \text{и} \quad \psi \in U^{(\nu-2)} \setminus U^{(\nu-2)} D_{l,m} U^{(\nu-2)} ,$$

а матрица $D^{(0)}_{l,m}$ *определена следующим образом* (*см.* (4.3)):

$$D^{(0)}_{l,m}(X,H,r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -h_2^{\sharp} & -{}^t x_2 I_l & r & -\frac{1}{2}\|h_2\| \\ 0 & 1 & 0 & -h_1^{\sharp} & -{}^t x_1 I_l & -\frac{1}{2}\|h_1\| & -r-\langle h_1,h_2\rangle \\ & & \pi^{-1}E_l & 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ & & 0 & E_{2m+n_0} & 0 & h_1 & h_2 \\ & & 0 & 0 & \pi E_l & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Суммирование в (4.11) *ведется по* r *и матрицам* $H = (h_1,h_2)$ *со следующими условиями на входящие в них элементы* $h_i \in \pi^{-1}L_m/L_m$, $\frac{1}{2}\|h_i\| \in \mathfrak{p}^{-1}$, $\langle h_1,h_2\rangle \in \mathfrak{p}^{-1}$ *и со следующим условием на ранг матрицы* πSH, *зависящий от индекса* δ:

для $\delta = +2$ $\begin{cases} \mathrm{rank}_{\mathfrak{p}}\ \pi S_{\nu-2}H = 1, \\ \mathrm{rank}_{\mathfrak{p}}\ \pi H = 1, \\ r \in \mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o}, \end{cases}$ *для* $\delta = +3$ $\begin{cases} \mathrm{rank}_{\mathfrak{p}}\ \pi S_{\nu-2}H = 1, \\ \mathrm{rank}_{\mathfrak{p}}\ \pi H = 2, \\ r \in \mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o}, \end{cases}$

для $\delta = -1$ $\begin{cases} \mathrm{rank}_{\mathfrak{p}}\ \pi S_{\nu-2}H = 0, \\ \mathrm{rank}_{\mathfrak{p}}\ \pi H = 1, \\ r = -\frac{1}{2}\langle h_1,h_2\rangle, \end{cases}$ *для* $\delta = -2$ $\begin{cases} \mathrm{rank}_{\mathfrak{p}}\ \pi S_{\nu-2}H = 0, \\ \mathrm{rank}_{\mathfrak{p}}\ \pi H \leqslant 2, \\ r \in \mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o}, \end{cases}$

для $\delta = +4$ $\begin{cases} \mathrm{rank}_{\mathfrak{p}}\ \pi S_{\nu-2}H = 2, \\ r \in \mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o}. \end{cases}$ *для* $\delta = \ 0,\quad h_1 = h_2 = 0,\quad r = 0,$

Мы напоминаем, что необходимо внести стандартные изменения в эти определения в случае ортогональной группы с $n_0 = 0$ (*см.* (3.2), (3.3)).

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 3.3, мы должны найти все двойные классы $X = U_2HU_2$ в $\mathcal{H}(U_2,P_2)$ такие, что $\mathrm{rank}_{k_{\mathfrak{p}}}(\Delta\, h) = k$. Элементы (4.7) принадлежат регулярному модулю $\mathcal{DM}(U_2,P_2)$ и имеют ранг k. Существует только один регулярный элемент типа $\Pi^{(-1,+1)}$. Это следует из леммы 4.2, доказываемой ниже. Элемент (4.8) и два первых элемента в (4.9) соответствуют элементам из леммы 3.4. В элементе $\Pi^{(0)}_{l,m}(\delta)$ параметр $|\delta|$ равен числу, которое мы должны добавить к $\mathrm{k}_\mathfrak{p}$-рангу его диагональной части $D_{l,m}$, чтобы получить $\mathrm{k}_\mathfrak{p}$-ранг, равный числу k. Отметим, что элементы типа (4.9) появляются только в случае плохой редукции, т.е. в случае, когда ($\det S \in \mathfrak{p}$). В случае хорошей редукции суммирование по r ведется только в элементах (4.10):

$$(4.10) = \sum_{r \in \mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o}, r \neq 0} U_2 \left[E_2, 0, \begin{pmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{pmatrix}, D_{k-2,m} \right] U_2 \qquad (\text{если } \det S \in \mathfrak{o}^\times).$$

Для завершения доказательства леммы достаточно доказать следующую полезную лемму 4.2:

Лемма 4.2. *Если любая матрица из двойного смежного класса*

$$\Delta \Pi_{l,m}^{(-1,+1)}(X,r) = \Delta U_2 \left[\begin{pmatrix} \pi^{-1} & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}, 0, 0, D_{l,m} \right] \cdot \gamma(X,r) U_2,$$

где $X = (x_1, x_2) \in M_{\nu-2,2}(k)$ *и* $r \in k$ *(см.* (4.4)*), является* $\mathfrak{o}$*-целой, то элемент* $\Pi_{l,m}^{(-1,+1)}(X,r)$ *равен элементу* $\Pi_{l,m}^{(-1,+1)}$.

Доказательство. Условие целочисленности эквивалентно следующим соотношениям

$$r \in \mathfrak{o}, \quad x_1 \in \pi^{-1} L_{\nu-2}, \quad S_{\nu-2} x_2 \in L, \quad \frac{1}{2} S_{\nu-2}[x_2] \in \mathfrak{o}.$$

Из последних двух условий следует, что $x_2 \in L_{\nu-2}$, тем самым класс $\Pi_{l,m}^{(-1,+1)}(X,r)$ можно получить из диагонального класса $\Pi_{l,m}^{(-1,+1)}$, умножая его слева и справа только на унипотентные матрицы, построенные по векторам x_1 и x_2.

Лемма 4.3. *Для образующих* $\Pi_{k,m}$ $(m = \nu - k)$ *кольца Гекке ортогональной группы выполняется следующее включение:*

$$\Lambda_2 \Pi_{k,m} \in \mathcal{DM}(U_2, P_2).$$

Доказательство. Мы можем доказать эту лемму, используя разложение леммы 4.1 или индукцию по параболическому рангу (см. лемму 6.4). Как и в доказательстве леммы 4.1 выполняются следующие более строгие включения для некоторых компонент рассматриваемых образующих:

$$\Lambda_2 \Pi_{l,m}^{(0,-1)}(h), \ \Lambda_2 \Pi_{l,m}^{(0)}(\delta) \in \mathcal{C}(U_2, P_2).$$

Доказательство теоремы 3. Вначале мы вычислим слагаемое с отрицательной сигнатурой в коэффициентах

$$R_l = \mathbf{p}^{-l(A+\nu)} \mathbf{T}_-(\pi^l) - \mathbf{p}^{-(l-1)(A+\nu)} \mathbf{T}_-(\pi^{l-1}) Q_1 + \cdots + (-1)^l Q_l \tag{4.12}$$

формального степенного ряда

$$Q_-^{GL_2}(t)^{-1}Q(t) = \left(\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{p}^{-k(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi^k)t^k\right)\left(\sum_{i=0}^{2\nu}(-1)^i Q_i t^i\right),$$

где согласно лемме 3.1

$$Q_i = Q_i^{(\nu)} = C_{i,\nu}\sum_{j=0}^{i} U_{i-j,\nu-i}\mathbf{\Pi}_{j,\nu-j}.$$

Сигнатуры $\mathcal{H}(U_2,P_2)$-компонент элемента Q_i равны $\pm 2, \pm 1, 0$ для $1 < i < 2\nu-1$ и равны $\pm 1, 0$ для $i = 1, 2\nu - 1$ (см. (4.1)). По определению $\operatorname{sign}(\mathbf{T}_-(\pi^k)) = -k$, следовательно, $\operatorname{sign}(R_l) \geqslant -l$. Для любого $j \geqslant 0$ однородная $\mathrm{s}_{-l+j}(R_l)$ часть элемента R_l сигнатуры $(j-l)$ может быть вычислена по следующей формуле:

$$\begin{aligned}
&(-1)^j \mathrm{s}_{-l+j}(R_l)\\
&\quad = \mathbf{p}^{-(A+\nu)(l-j)}\mathbf{T}_-(\pi^{l-j})\cdot \mathrm{s}_0(Q_j) + \mathbf{p}^{-(A+\nu)(l-j-2)}\mathbf{T}_-(\pi^{l-j-2})\cdot \mathrm{s}_{-2}(Q_{j+2})\\
&\quad\quad + \mathbf{p}^{-(A+\nu)(l-j+2)}\mathbf{T}_-(\pi^{l-j+2})\cdot \mathrm{s}_{+2}(Q_{j-2}) - \mathbf{p}^{-(A+\nu)(l-j-1)}\mathbf{T}_-(\pi^{l-j-1})\cdot \mathrm{s}_{-1}(Q_{j+1})\\
&\quad\quad - \mathbf{p}^{-(A+\nu)(l-j+1)}\mathbf{T}_-(\pi^{l-j+1})\cdot \mathrm{s}_{+1}(Q_{j-1}).
\end{aligned}$$

Мы полагаем, что $\mathbf{T}_-(\pi^b) = 0$ и $Q_b = 0$ для $b < 0$. Согласно лемме 4.1, второе и третье слагаемые принадлежат регулярному (относительно сферического отображения Φ) $\mathcal{C}(U_2,P_2)$-модулю $\mathcal{DM}(U_2,P_2)$. Используя хорошо известные соотношения в кольце Гекке группы GL_2 и „минус"-вложение мы получаем

$$\mathbf{T}_-(\pi^a)\mathbf{T}_-(\pi^b) = \sum_{c\leqslant a} \mathbf{p}^c\ \mathbf{T}_-(\pi^{a+b-2c})\Lambda_2^c.$$

Произведения $\Lambda_2\cdot \mathrm{s}_0(Q_j)$ и $\Lambda_2\cdot \mathrm{s}_{+1}(Q_j)$ принадлежат модулю $\mathcal{DM}(U_2,P_2)$ (см. лемму 4.3), следовательно, для любых l и $j \leqslant l-1$ выполняется

$$\begin{aligned}
&(-1)^{j+1}\mathrm{s}_{-l+j}(R_l)\\
&\quad \equiv \mathbf{T}_-(\pi^{l-j-1})(\mathrm{s}_{-1}(Q_{j+1}) - \mathbf{p}^{-(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi)\mathrm{s}_0(Q_j) + \mathbf{p}^{-2(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi^2)\mathrm{s}_{+1}(Q_{j-1}))
\end{aligned}$$

($\equiv$ обозначает сравнение по модулю $\mathcal{DM}(U_2,P_2)$). Следующая лемма является основным утверждением в доказательстве теоремы 3.

Лемма 4.4. *Для* $j \geqslant 0$,

$$s_{-1}(Q_{j+1}) - \mathbf{p}^{-(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi)\cdot s_0(Q_j) + \mathbf{p}^{-2(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi^2)\cdot s_{+1}(Q_{j-1}) \in \mathcal{DM}(U_2,P_2).$$

Предположим, что лемма доказана. Φ-сферический образ произведения ряда $Q_-^{GL_2}(t)^{-1}$ с многочленом не содержит отрицательных степеней переменных

$x_{\nu-1}$, x_ν, следовательно, сферический образ произвольной компоненты сигнатуры $(-l+j)$ коэффициента R_l равен 0: $\Phi(\mathrm{s}_j(R_l)) = 0$. Из леммы 4.4 следует, что $\mathrm{s}_{-l+j}(R_l) \in \mathcal{DM}(U_2, P_2)$, следовательно,

$$\mathrm{s}_{-l+j}(R_l) = 0 \qquad \text{для } 0 \leqslant j \leqslant l-1,$$

так как отображение Φ инъективно на модуле $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$. Тем самым мы доказали (по модулю леммы 4.4), что *коэффициент* R_l *имеет неотрицательную сигнатуру*. Из этого вытекает, что ряд $Q_-^{GL_2}(t)^{-1}Q(t)$ является на самом деле многочленом, так как сигнатура элементов $\mathbf{T}_-(\pi^l) = -l$ стремится к бесконечности. Вычислим степень этого многочлена.

Из определения (4.12) ясно, что $\mathrm{sign}(R_{2\nu+l}) < 0$ для $l \geqslant 2$, следовательно, $R_{2\nu+l} = 0$ для $l \geqslant 2$. Для $l = 1$ выполняется

$$R_{2\nu+1} = \mathbf{p}^{-(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi)Q_{2\nu} - \mathbf{p}^{-2(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi^2)Q_{2\nu-1} + \dots ,$$

где $Q_{2\nu} = 1$ и $Q_{2\nu-1} = Q_1 = \mathbf{p}^{-A-\nu}(\mathbf{\Pi}_{1,\nu-1} + U_{1,\nu-1})$ (см. лемму 3.1). Лемма 4.1, в специальном случае $k = 1$ и $m = \nu - 1$, дает $\mathrm{sign}(\mathbf{\Pi}_{1,\nu-1}) \leqslant +1$, следовательно, $\mathrm{sign}(R_{2\nu+1}) < 0$ и $R_{2\nu+1} = 0$. Для $l = 0$ мы имеем

$$R_{2\nu} = 1 - \mathbf{p}^{-(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi)Q_1 + \mathbf{p}^{-2(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi^2)Q_2 + \dots \qquad (Q_{2\nu-2} = Q_2),$$

откуда получается $\mathrm{sign}(R_{2\nu}) \leqslant 0$. Мы доказали выше, что коэффициенты не содержат слагаемых с отрицательной сигнатурой. Однородная часть с сигнатурой 0 имеет вид

$$\mathrm{s}_0(R_{2\nu}) = \mathbf{p}^{-2(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi^2)\mathrm{s}_{+2}(Q_2) - \mathbf{p}^{-(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi)\cdot \mathrm{s}_{+1}(Q_1) + 1.$$

Из формул для коэффициентов Q_2, Q_1 (см. лемму 3.1) и леммы 4.1 о разложении элементов $\mathbf{\Pi}_{2,\nu-2}$ и $\mathbf{\Pi}_{1,\nu-1}$ следует, что

$$\mathrm{s}_{+2}(Q_2),\ \mathrm{s}_{+1}(Q_1) \in \mathcal{DM}(U_2, P_2).$$

Из этого следует, что $\mathrm{s}_0(R_{2\nu})$ принадлежит регулярному модулю $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$, потому что это $\mathcal{C}(U_2, P_2)$-модуль. Φ-образ элемента $R_{2\nu}$ равен 0, поэтому $R_{2\nu} = 0$ и, следовательно, выполняется

$$\deg R(t) = \deg\left(Q_-^{GL_2}(t)^{-1}Q(t)\right) \leqslant 2\nu - 1, \tag{4.13}$$

и более того, все коэффициенты этого многочлена имеют неотрицательную сигнатуру.

Используя антиавтоморфизм $*$, определенный в (2.14), и принимая во внимание соотношение $Q_+^{GL_2} = (Q_-^{GL_2})^*$, мы получаем, что коэффициенты полинома $Q(t)Q_+^{GL_2}(t)^{-1}$ имеют неположительную сигнатуру. Это утверждение можно переписать следующим образом:

$$\mathrm{sign}(Q_+^{GL_2}(t)) \geqslant 0, \qquad \mathrm{sign}(Q_-^{GL_2}(t)^{-1}Q(t)) \geqslant 0,$$
$$\mathrm{sign}(Q_-^{GL_2}(t)) \leqslant 0, \qquad \mathrm{sign}(Q(t)Q_+^{GL_2}(t)^{-1}) \leqslant 0.$$

Следовательно, коэффициенты произведения

$$K(t)=\sum_{l\geqslant 0}(-1)^l K_l^{(\nu)}t^l=\left(Q_-^{GL_2}(t)^{-1}Q(t)\right)Q_+^{GL_2}(t)^{-1}=Q_-^{GL_2}(t)^{-1}\left(Q(t)Q_+^{GL_2}(t)^{-1}\right)$$

имеют сигнатуру, равную 0. Следовательно,

$$K(t)=\mathrm{s}_0(Q_-^{GL_2}(t)^{-1}Q(t))=\mathrm{s}_0(R(t)),$$

где в левой части последнего равенства мы берем только ту часть коэффициентов, которая имеет сигнатуру 0. Из этого равенства мы можем получить явные формулы для коэффициентов $K_l^{(\nu)}$ „ядра“ $K(t)$ в терминах двойных классов

$$K_l^{(\nu)}=\mathrm{s}_0(R_l)=\mathrm{s}_0\left(\mathbf{p}^{-2(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi^2)Q_{l-2}-\mathbf{p}^{-(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi)Q_{l-1}+Q_l\right). \tag{4.14}$$

Из оценки (4.13) вытекает, что

$$\deg K(t)\leqslant\deg R(t)\leqslant 2\nu-1.$$

Чтобы закончить доказательство теоремы 3 теперь достаточно доказать лемму 4.4.

Доказательство леммы 4.4. Мы должны вычислить только нерегулярную часть суммы, определенной в лемме, а именно суммы

$$\mathbf{p}^{-2(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi^2)\cdot\mathrm{s}_{+1}(Q_{k-2})-\mathbf{p}^{-(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi)\cdot\mathrm{s}_0(Q_{k-1})+\mathrm{s}_{-1}(Q_k). \tag{4.15}$$

Символ $\equiv$ обозначает в этом доказательстве эквивалентность по модулю $\mathcal{DM}(U_2,P_2)$ регулярных элементов.

У нас есть точные формулы для коэффициентов $Q_k^{(\nu)}$ многочлена Гекке (см. лемму 3.1)

$$Q_k^{(\nu)}=C_{k,\nu}\sum_{i=0}^{k}U_{i,\nu-k}\mathbf{\Pi}_{k-i,\nu-k+i}\qquad(0\leqslant k\leqslant\nu).$$

Хорошо известное соотношение в кольце Гекке группы GL_2 превращается после „минус“-вложения леммы 2.4 в соотношение

$$(\mathbf{T}_-(\pi))^2=\mathbf{T}_-(\pi^2)+(\mathbf{p}+1)\mathbf{\Lambda}_2.$$

Согласно лемме 4.3, мы имеем $\mathbf{\Lambda}_2\mathbf{\Pi}_{k,m}\in\mathcal{DM}(U_2,P_2)$, следовательно,

$$\mathbf{T}_-(\pi^2)\mathrm{s}_{+1}(Q_{k-2})\equiv(\mathbf{T}_-(\pi))^2\mathrm{s}_{+1}(Q_{k-2}).$$

Из леммы 4.1 о разложении в кольце $\mathcal{H}(U_2, P_2)$ мы получаем

$$
\begin{aligned}
\mathrm{s}_{-1}(Q_k) &\equiv C_k \sum_{i=0}^{k} U_{i,\nu-k}\left[\mathbf{\Pi}^{(0,-1)}_{k-i-3,\nu-k+i+1}(+2) + \mathbf{\Pi}^{(0,-1)}_{k-i-2,\nu-k+i}(-1)\right],\\
\mathrm{s}_{+1}(Q_{k-2}) &\equiv C_{k-2} \sum_{i=0}^{k-2} U_{i,\nu-k+2}\left[\mathbf{\Pi}^{(0,+1)}_{k-i-5,\nu-k+i+3}(+2) + \mathbf{\Pi}^{(0,+1)}_{k-i-4,\nu-k+i+2}(-1)\right],\\
\mathrm{s}_{0}(Q_{k-1}) &\equiv C_{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} U_{i,\nu-k+1}\ \left[\mathbf{\Pi}^{(0)}_{k-i-5,\nu-k+i+3}(+4) + \mathbf{\Pi}^{(0)}_{k-i-4,\nu-k+i+2}(+3)\right.\\
&\qquad + \mathbf{\Pi}^{(0)}_{k-i-3,\nu-k+i+1}(+2) + \mathbf{\Pi}^{(0)}_{k-i-2,\nu-k+i}(-1)\\
&\qquad \left.+ \mathbf{\Pi}^{(0)}_{k-i-3,\nu-k+i+1}(-2) - \mathbf{\Pi}^{(0)}_{k-i-3,\nu-k+i+1}(-1)\right].
\end{aligned}
$$

Чтобы вычислить первый и второй члены в (4.15), нам потребуется следующая таблица умножения:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}_-(\pi)\mathbf{\Pi}^{(0,+1)}_{l,m}(+2) &\equiv \mathbf{p}^{l+2m+n_0}\mathbf{\Pi}^{(0)}_{l,m}(+2), \qquad (4.16)\\
\mathbf{T}_-(\pi)\mathbf{\Pi}^{(0,+1)}_{l,m}(-1) &\equiv \mathbf{p}^{l+2m+n_0+1}\mathbf{\Pi}^{(0)}_{l,m}(-1),\\
\mathbf{T}_-(\pi)\mathbf{\Pi}^{(0)}_{l,m}(+4) &= \mathbf{p}^{l+n_0-\ell_0+2}\,\mathrm{Is}_{2m+\ell_0-2}\,\mathbf{\Pi}^{(0,-1)}_{l,m}(+2),\\
\mathbf{T}_-(\pi)\mathbf{\Pi}^{(0)}_{l,m}(+3) &= \mathbf{p}^{l+2}\left[(\mathbf{p}^{n_0-\ell_0}-1)\mathbf{\Pi}^{(0,-1)}_{l,m}(+2) + \mathbf{p}^{n_0-\ell_0}\,\mathrm{Is}_{2m+\ell_0}\,\mathbf{\Pi}^{(0,-1)}_{l,m}(-1)\right],
\end{aligned}
$$

где ℓ_0 и $n_0-\ell_0$ — размерности регулярной и нерегулярной частей решетки L_0 (см. Замечание 1 после леммы 3.1),

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{T}_-(\pi)\mathbf{\Pi}^{(0)}_{l,m}(+2) \equiv \mathbf{p}^{l+2}\mathbf{\Pi}^{(0,-1)}_{l,m}(+2), \qquad (4.17)\\
&\mathbf{T}_-(\pi)\mathbf{\Pi}^{(0)}_{l,m}(-1) \equiv \mathbf{p}^{l+1}\mathbf{\Pi}^{(0,-1)}_{l,m}(-1), \mathbf{T}_-(\pi)\mathbf{\Pi}^{(0)}_{l,m}(-2) \equiv \mathbf{p}^{l+1+n_0-\ell_0}\mathbf{\Pi}^{(0,-1)}_{l,m}(-1).
\end{aligned}
$$

Все эти тождества, проверяемые прямыми вычислениями, показывают,что в сумме (4.15) присутствуют только элементы типа $\mathbf{\Pi}^{(0,-1)}_{l,m}(\delta)$ с $\delta = +2$ или -1. Следовательно, мы должны вычислить в сумме (4.15) коэффициенты при элементах

$$
\mathbf{\Pi}^{(0,-1)}_{k-i-3,\nu-k+i+1}(+2) \quad (\text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-3), \qquad \mathbf{\Pi}^{(0,-1)}_{k-i-2,\nu-k+i}(-1) \quad (\text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-2).
$$

Используя приведенную выше таблицу умножения, мы вычислим сначала коэффициент для $\delta = +2$. Мы получаем

$$
\begin{aligned}
C_{k,\nu}\mathbf{\Pi}^{(0,-1)}_{k-i-3,\nu-k+i+1}(+2)\big[U_{i,\nu-k} &+ \mathbf{p}^{2\nu-2k+n_0+1}U_{i-2,\nu-k+2}\\
&- \mathbf{p}^{n_0-\ell_0-i}\mathrm{Is}_{\,2(\nu-k+i)+\ell_0}U_{i-2,\nu-k+1}\\
&- \mathbf{p}^{-i}(\mathbf{p}^{n_0-\ell_0}-1)U_{i-1,\nu-k+1} - \mathbf{p}^{-i}U_{i,\nu-k+1}\big], \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

где первое слагаемое взято из элемента $s_{-1}(*)$ (из его части с параметром $(+2)$), второй — из $s_{+1}(*)$ (из его части с $(+2)$), а остальные взяты из слагаемых с параметрами $(+4)$, $(+3)$, $(+2)$ в элементе $s_0(*)$. Коэффициенты $U_{a,b}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} U_{i,\nu-k+1} =& \mathbf{p}^i U_{i,\nu-k} + \mathbf{p}^{2\nu-2k+n_0+1} U_{i-2,\nu-k+2} \\ &- (\mathbf{p}^{n_0-\ell_0} - 1) U_{i-1,\nu-k+1} \\ &- \mathbf{p}^{n_0-\ell_0}\, \mathrm{Is}_{2(\nu-k+i)+\ell_0}\, U_{i-2,\nu-k+1}, \end{aligned}$$

для $a = i$, $b = \nu - k + 1$ (см. Замечание 3 после леммы 3.1). Из этого тождества вытекает, что коэффициент в (4.18) равен 0. Та же рекуррентная формула показывает, что коэффициент при элементе $\Pi^{(0,-1)}_{k-i-2,\nu-k+i}(-1)$ равен 0. Следовательно, лемма доказана для $k \leqslant \nu$.

Для $k = \nu + 1$ доказательство аналогично. Нужно только принять во внимание, что $Q_{\nu+1} = Q_{\nu-1}$, и использовать „0"-форму ($b = 0$) рекуррентного соотношения для $U_{a,0}$.

Предположим, что $k > \nu + 1$. Элементы $\Pi^{(0)}_{l,m}(\delta)$ инвариантны относительно антиавтоморфизма $*$, следовательно, применяя $*$ к тождеству (4.16), мы получаем

$$\Pi^{(0,-1)}_{l,m}(+2)\left(\mathbf{T}_-(\pi)\right)^* \equiv \mathbf{p}^{l+2m+n_0}\, \Pi^{(0)}_{l,m}(+2).$$

Умножая это тождество слева на $\mathbf{T}_-(\pi)$ и используя (4.17), мы получаем

$$\mathbf{T}_-(\pi)\Pi^{(0,-1)}_{l,m}(+2)\left(\mathbf{T}_-(\pi)\right)^* \equiv \mathbf{p}^{2\nu+n_0-2}\, \Pi^{(0,-1)}_{l,m}(+2).$$

Аналогично

$$\mathbf{T}_-(\pi)\Pi^{(0,-1)}_{l,m}(-1)\left(\mathbf{T}_-(\pi)\right)^* \equiv \mathbf{p}^{2\nu+n_0-2}\, \Pi^{(0,-1)}_{l,m}(-1).$$

Модуль $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$ — $*$-инвариантен, следовательно, из утверждения леммы для $k \leqslant \nu$ вытекает, что элемент

$$W = \mathrm{s}_{+1}(Q_k) + \mathrm{s}_{-1}(Q_{k-2})\left(\mathbf{p}^{-2(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi^2)\right)^* - \mathrm{s}_0(Q_{k-1})\left(\mathbf{p}^{-(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi)\right)^*$$

содержится в $\mathcal{C}(U_2, P_2)$-модуле $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$. Из того факта, что $\mathbf{T}_-(\pi^2)$ принадлежит $\mathcal{C}(U_2, P_2)$, и из двух последних сравнений мы получаем, что произведение

$$\mathbf{p}^{-2(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi^2)\cdot W \equiv \mathrm{s}_{-1}(Q_{k-2}) + \mathbf{p}^{-2(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi^2)\cdot \mathrm{s}_{+1}(Q_k) - \mathbf{p}^{-(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi)\cdot \mathrm{s}_0(Q_{k-1})$$

лежит в $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$. Это дает нам утверждение леммы для $k > \nu$, если мы заменим коэффициенты Q_k на $Q_{2\nu-k}$. Лемма 4.4 доказана.

В доказательстве теоремы 3 были получены точные формулы (4.14) для коэффициентов множителя $K(t)$. Сформулируем этот важный результат в виде отдельной теоремы.

Теорема 4. *Коэффициенты* $K_l^{(\nu)}$ *многочлена* $K(t)=\sum_{l\geqslant 0}(-1)^l K_l^{(\nu)} t^l$ *из теоремы 3 имеют следующий явный вид*:
для $l\leqslant\nu$

$$\begin{aligned}
K_l^{(\nu)} = C_{l,\nu}\sum_{j=0}^{l}\Big\{&\mathbf{\Pi}^{(0)}_{j,\nu-j-2}\big[U_{l-j,\nu-l}-U_{l-j-2,\nu-l}\\
&\qquad -(\mathbf{p}+1)\mathbf{p}^{2\nu-l-j-2+n_0}U_{l-j-2,\nu-l+1}\\
&\qquad\qquad +\mathbf{p}^{4\nu-2l-2j+2n_0-3}U_{l-j-4,\nu-l+2}\big]\\
&+\mathbf{\Pi}^{(0)}_{j,\nu-j-2}(-1)\big[U_{l-j-1,\nu-l}-U_{l-j-2,\nu-l}\\
&\qquad -\mathbf{p}^{2\nu-l-j-2+n_0}U_{l-j-3,\nu-l+1}\big]\\
&+\mathbf{\Pi}^{(0)}_{j,\nu-j-2}(-2)U_{l-j-2,\nu-l}\\
&+\mathbf{\Pi}^{(0)}_{j,\nu-j-2}(+2)\big[U_{l-j-2,\nu-l}\\
&\qquad -\mathbf{p}^{2\nu-l-j-3+n_0}U_{l-j-4,\nu-l+1}\big]\\
&+\mathbf{\Pi}^{(0)}_{j,\nu-j-2}(+4)U_{l-j-4,\nu-l}+\mathbf{\Pi}^{(0)}_{j,\nu-j-2}(+3)U_{l-j-3,\nu-l}\Big\},
\end{aligned}$$

где $C_{l,\nu}$ *— коэффициент из леммы* 3.1, *а элементы* $\mathbf{\Pi}_{j,m}(\delta)$ *определены в лемме* 4.1;
для $l>\nu+1$

$$\begin{aligned}
K_l^{(\nu)} = C_{2\nu-l,\nu}\sum_{j=0}^{2\nu-l}\Big\{&\mathbf{\Pi}^{(0)}_{j,\nu-j-2}\big[U_{2\nu-l-j,l-\nu}-U_{2\nu-l-j-2,l-\nu}\\
&\qquad -(\mathbf{p}+1)\mathbf{p}^{l-j-3+n_0}U_{2\nu-l-j,l-\nu-1}\\
&\qquad\qquad +\mathbf{p}^{2l-2j+2n_0-11}U_{2\nu-l-j,l-\nu-2}\big]\\
&+\mathbf{\Pi}^{(0)}_{j,\nu-j-2}(-1)\big[U_{2\nu-l-j-1,l-\nu}-U_{2\nu-l-j-2,l-\nu}\\
&\qquad -\mathbf{p}^{l-j-4+n_0}U_{2\nu-l-j-1,l-\nu-1}\big]\\
&+\mathbf{\Pi}^{(0)}_{j,\nu-j-2}(+2)\big[U_{2\nu-l-j-2,l-\nu}\\
&\qquad -\mathbf{p}^{l-j+n_0-5}U_{2\nu-l-j-2,l-\nu-1}\big]\\
&+\mathbf{\Pi}^{(0)}_{j,\nu-j-2}(-2)U_{2\nu-l-j-2,l-\nu}\\
&+\mathbf{\Pi}^{(0)}_{j,\nu-j-2}(+4)U_{2\nu-l-j-4,l-\nu}\\
&\qquad +\mathbf{\Pi}^{(0)}_{j,\nu-j-2}(+3)U_{2\nu-l-j-3,l-\nu}\Big\},
\end{aligned}$$

и для $l = \nu + 1$ *мы должны заменить в первых квадратных скобках член* $\mathrm{p}^{2l-2j+2n_0-11}\, U_{2\nu-l-j,l-\nu-2}$ *на слагаемое* $\mathrm{p}^{4\nu-2l-2j+2n_0-3} U_{l-j-4,\nu-l+2}$ $(U_{a,b} = 0$ *для* $a < 0)$.

Доказательство теоремы 4. Предположим, что l меньше или равно ν, тогда (см. (4.14))

$$K_l^{(\nu)} = \mathrm{p}^{-2(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi^2)\mathrm{s}_{+2}(Q_{l-2}) - \mathrm{p}^{-(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi)\mathrm{s}_{+1}(Q_{l-1}) + \mathrm{s}_0(Q_l). \tag{4.19}$$

Явная форма элементов $\mathrm{s}_{+2}(Q_{l-2})$, $\mathrm{s}_{+1}(Q_{l-1})$ и $\mathrm{s}_0(Q_l)$ следует из леммы 3.1 и леммы 4.1. Первое слагаемое в K_l содержит произведения двух типов: $\mathbf{T}_-(1,\pi^2)\cdot \mathbf{\Pi}^+_{k,m}$ и $\mathbf{\Lambda}_2 \cdot \mathbf{\Pi}^+_{k,m}$. Сферический образ коэффициента K_l не содержит нетривиальных степеней переменных $x_{\nu-1}, x_\nu$, следовательно, согласно лемме 4.2, нам не нужно вычислять элементы произведения

$$\mathbf{T}_-(1,\pi^2)\mathbf{\Pi}^+_{k,m} = const\ \mathbf{\Pi}^{(-1,+1)}_{k,m}.$$

Чтобы вычислить произведение с $\mathbf{\Lambda}_2$ нам потребуется следующее тождество:

$$\mathbf{\Lambda}_2\mathbf{\Pi}^+_{k,m} = \mathrm{p}^{2\nu-2k+2n_0-6}\mathbf{\Pi}^{(0)}_{k,m}(0),$$

которое является простым следствием представления (2.10). Делая замену в индексе суммирования, мы получаем, что с точностью до элементов типа $\mathbf{\Pi}^{(-1,+1)}_{k,m}$, выполняется следующее равенство

$$\mathrm{p}^{-2(A+\nu)}\mathbf{T}_-(\pi^2)\mathrm{s}_{+2}(Q_{l-2}) \equiv C_{l,\nu}\sum_{j=0}^{l-4} \mathrm{p}^{4\nu-2l-2j+2n_0-3}\, U_{l-j-4,\nu-l+2}\, \mathbf{\Pi}^{(0)}_{j,\nu-j-2}.$$

После умножения на элементы типа $\mathbf{\Pi}^{(0,+1)}_{k,m}$ на $\mathbf{T}_-(\pi)$ во втором слагаемом в (4.19) мы получаем элементы типа $\mathbf{\Pi}^{(0)}_{k,m}$ и $\mathbf{\Pi}^{(-1,+1)}_{k,m}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_-(\pi)\mathbf{\Pi}^{(0,+1)}_{k,m} &= \mathrm{p}^{2\nu-k+n_0-3}(\mathrm{p}+1)\mathbf{\Pi}^{(0)}_{k,m} + c_1\mathbf{\Pi}^{(-1,+1)}_{k,m},\\
\mathbf{T}_-(\pi)\mathbf{\Pi}^{(0,+1)}_{k,m}(+2) &= \mathrm{p}^{2\nu-k+n_0-4}\mathbf{\Pi}^{(0)}_{k,m}(+2) + c_2\mathbf{\Pi}^{(-1,+1)}_{k,m},\\
\mathbf{T}_-(\pi)\mathbf{\Pi}^{(0,+1)}_{k,m}(-1) &= \mathrm{p}^{2\nu-k+n_0-3}\mathbf{\Pi}^{(0)}_{k,m}(-1) + c_3\mathbf{\Pi}^{(-1,+1)}_{k,m},
\end{aligned}$$

так как $\mathbf{T}(\pi)^2 = \mathbf{T}(1,\pi^2) + (\mathrm{p}+1)\mathbf{T}(\pi,\pi)$. Нам не нужно следить за элементами $\mathbf{\Pi}^{(-1,+1)}_{k,m}$, следовательно, произведение $\mathbf{T}_-(\pi)\mathrm{s}_{+1}(Q_{l-1})$ дает нам

$$C_{l,\nu}\Bigg(\sum_{j=0}^{l-2}(\mathrm{p}+1)\mathrm{p}^{2\nu-l-j-2+n_0}\, U_{l-j-2,\nu-l+1}\mathbf{\Pi}^{(0)}_{j,\nu-j-2} + \sum_{\delta=-1,+2}\mathrm{p}^{2\nu-l-j+n_0-1-|\delta|}\, U_{l-j-2-|\delta|,\nu-l+1}\,\mathbf{\Pi}^{(0)}_{j,\nu-j-2}(\delta)\Bigg).$$

Чтобы закончить доказательство теоремы в случае $l \leqslant \nu$ остается добавить только часть элемента Q_l, имеющую сигнатуру 0. Для $l > \nu + 1$ мы должны принять во внимание равенства

$$Q_l = Q_{2\nu-l}, \quad Q_{l-1} = Q_{2\nu-l+1}, \quad Q_{l-2} = Q_{2\nu-l+2}$$

в (4.19) (для $l = \nu + 1$ мы имеем $Q_{(\nu+1)-2} = Q_{\nu-1}$ в (4.19)) и использовать те же самые тождества, что и в случае $l \leqslant \nu$. Теорема доказана.

§5. Группа Якоби

Обозначим через V' n-мерное векторное пространство над локальным полем k и через S' — квадратичную форму на V'. Зафиксируем максимальную $\mathfrak{o}$-целую решетку L' в V'.

Группой Гейзенберга H размерности $2n$ для квадратичной формы S' называется центральное расширение аддитивной группы $n \times 2$-матриц

$$H_{n,2} = \{[x, y, z] : x, y \in V', \ z \in \mathrm{k}\}$$

с умножением определенным следующим образом:

$$[x, y, z] \cdot [x_1, y_1, z_1] = [x + x_1, y + y_1, z + z_1 + \tfrac{1}{2}(S'(x, y_1) - S'(y, x_1))].$$

Подгруппа $Z = \{\,[0, 0, z] : z \in \mathrm{k}\,\}$ является центром группы $H_{n,2}$ и

$$H_{n,2}/Z \simeq V' \times V'.$$

Ортогональная группа $G(S')$ квадратичной формы S' действует слева на группе $H_{n,2}$:

$$U[x, y, z] = [Ux, Uy, z].$$

Группа $SL_2(\mathrm{k})$ действует на векторном пространстве, порожденном векторами x и y, следовательно, имеется правое действие группы $SL_2(\mathrm{k})$ на группе $H_{n,2}$:

$$[x, y, z]A = [(x, y)A, z].$$

Мы можем определить теперь *группу Якоби* G^J как полупрямое произведение групп SL_2, $H_{n,2}$, и $G(S')$. Следовательно,

$$J = \{\,(A, [X, z], U) : A \in SL_2(\mathrm{k}), \ [X, z] \in H_{n,2}, \ U \in G(S')\,\},$$

и в группе G^J выполняется следующее равенство

$$(A, [X, z], U) \cdot (A_1, [X_1, z_1], U_1) = (AA_1, [[X, z]A_1 + U[X_1, z_1]], UU_1).$$

Мы используем следующие обозначения для стандартных элементов группы G^J:

$$[A]_2 = (A, 0, E_n), \quad [U]_n = (E_2, 0, U), \quad [X, z] = (E_2, [X, z], E_n).$$

В этих обозначениях выполняются равенства:

$$[A]_2[U]_n = [U]_n \cdot [A]_2, \quad [A]_2 \cdot [XA, z] = [X, z] \cdot [A]_2, \quad [U]_n \cdot [X, z] = [UX, z] \cdot [U]_n.$$

Центр группы G^J равен $Z_{G^J} = (E_2, [0, z], E_n)$, следовательно, группа G^J не является редуктивной. Определим компактную подгруппу

$$\Gamma^J = SL_2(\mathfrak{o}) \rtimes \Gamma_H \rtimes U(S')$$

группы G^J, равную произведению трех подгрупп $SL_2(\mathfrak{o})$,

$$U(S') = \{\, \gamma \in G(S') : \gamma L' = L' \,\}, \quad \Gamma_H = \{\, [u, v, -\tfrac{1}{2}S'(u, v) + r] : u, v \in L', r \in \mathfrak{o} \,\}.$$

Из определений группы G^J и параболической подгруппы P_2 ортогональной группы $G(S)$ квадратичной формы

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_2 \\ 0 & S' & 0 \\ I_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $S' = S_{\nu-2}$ в обозначениях §2, что G^J — подгруппа группы P_2. Точнее говоря, отображение

$$[A,\, [X, z],\, U] \to [A,\, X, -\tfrac{1}{2}S_{\nu-2}[X] + zJ_2,\, U] \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

является гомоморфным вложением группы G^J в группу P_2 и группы Γ^J в группу U_2 (см. (2.5) и (4.4)). Мы будем отождествлять J-группы с их образами относительно этого вложения.

Группы (G^J, Γ^J) образуют пару Гекке (см. §2), и мы покажем ниже, что кольцо Гекке $\mathcal{H}(\Gamma^J, G^J)$ соответствует некоторому подкольцу кольца $\mathcal{H}(U_2, P_2)$, а именно кольцу

$$\mathcal{SH}(U_2, P_2) = \left\{ \sum_i a_i\, U_2\, [A,\, X, Y,\, B]\, U_2\ ;\ \mu(B) = 1, \det A \in \mathfrak{o}^\times \right\},$$

где мы используем обозначения (2.5) . В (4.2) было определено подкольцо

$$\mathcal{EH}(U_2, P_2) = \left\{ \sum_i a_i\, U_2\, [E_2,\, X, Y,\, B]\, U_2\ ;\ \mu(B) = 1 \right\}$$

кольца $\mathcal{SH}(U_2, P_2)$. Для колец $\mathcal{SH}(U_2, P_2)$ и $\mathcal{H}(\Gamma^J, G^J)$ выполняется лемма о вложении из §1, следовательно, определено вложение

$$\mathrm{Im}\colon\ \mathcal{SH}(U_2, P_2) \to \mathcal{H}(\Gamma^J, G^J).$$

В кольце $\mathcal{H}(\Gamma^J, G^J)$ имеется больше нерегулярных двойных классов, но регулярные диагональные смежные классы в этих кольцах одни и те же.

Можно сказать, что подкольцо $\mathcal{SH}(U_2, P_2)$ является объектом, противоположным подкольцу $\mathcal{C}(U_2, P_2)$. Например, очевидно, что $\mathcal{SH}(U_2, P_2)$ инвариантно относительно антиавтоморфизма $*$ (см. (2.14))

$$\mathcal{SH}(U_2, P_2) = \mathcal{SH}(U_2, P_2)^*.$$

Определим специальный элемент ∇ (см. пример, связанный с группой SL_2 в §1) в $\mathcal{SH}(U_2, P_2)$

$$\nabla = \sum_{r \in \mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o}} U_2[E_2,\, 0,\, rJ_2,\, E] = U_2[E_2, 0, J_2, E]U_2 + U_2[E_2, 0, 0, E]U_2$$

и главный идеал

$$\mathcal{J} = \mathcal{SH}(U_2, P_2) \cdot \nabla.$$

Лемма 5.1. *Идеал $\mathcal{J}$ является двусторонним идеалом кольца $\mathcal{SH}(U_2, P_2)$. Этот идеал инвариантен относительно антиавтоморфизма $*$.*

Доказательство. Мы можем записать произвольный элемент идеала в следующем виде:

$$\mathcal{J} = \left\{ \sum_i a_i \sum_{r \in \mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o}} U_2([A_i,\, X_i, Y_i\,, B_i] \cdot [E_2,\, 0,\, rJ_2,\, E]) \in \mathcal{SH}(U_2, P_2) \right\}.$$

Первое утверждение леммы следует из правила умножения в P_2:

$$[E_2,\, 0,\, rJ_2,\, E] \cdot [A,\, X, Y,\, B] = [A,\, X, Y,\, B] \cdot [E_2, 0, (r \det A)J_2, E],$$

и так как $\det A \in \mathfrak{o}^\times$, то для любого $H \in \mathcal{SH}(U_2, P_2)$ выполняется $H\nabla = \nabla H$. Второе утверждение леммы следует из тождества $\nabla = \nabla^*$. Лемма доказана.

Предположим для простоты формулировок, что 2 — *единица кольца целых чисел локального поля* k. В этом случае выполняется следующий критерий принадлежности двойного класса к идеалу $\mathcal{J}$.

Лемма 5.2. *Предположим, что двойной класс $U_2HU_2 \in \mathcal{SH}(U_2, P_2)$ не может быть приведен к диагональной форме $U_2HU_2 = U_2[A,\, 0, Z,\, B]U_2$ в случае „хорошей" редукции квадратичной формы S ($\det S_0 \in \mathfrak{o}^\times$), или не может быть приведен к виду*

$$U_2HU_2 = U_2[A,\, X, Z,\, B]U, \qquad A = \begin{pmatrix} \pi^a & 0 \\ 0 & \pi^{-a} \end{pmatrix}, \qquad X = (x_1, x_2),$$

где $x_1 \in L_0^{(-1)}$ и $x_2 \in \pi^{-a}L_0^{(-1)}$, в общем случае. Тогда этот двойной класс принадлежит идеалу $\mathcal{J}$

$$U_2HU_2 \in \mathcal{J}.$$

Доказательство. Возьмем элемент $H = [A, 0, 0, B] \cdot [E_2, X, Z, E] \in P_2$ с $A = \operatorname{diag}(\pi^a, \pi^{-a})$ и $B = \operatorname{diag}(\pi^{b_3} \dots \pi^{b_\nu}, E_{n_0}, \pi^{-b_\nu} \dots \pi^{-b_3})$ и определим

$$\gamma(M) = [E_2,\, M,\, -\tfrac{1}{2}S_{\nu-2}[M],\, E] \in U_2 \quad \text{с } M = (m_1, m_2) \in L_{\nu-2} \times L_{\nu-2},$$

и предположим, что

$$m_1 \in L_{\nu-2} \cap \pi^a B^{-1} L_{\nu-2} \quad \text{и} \quad m_2 \in L_{\nu-2} \cap \pi^{-a} B^{-1} L_{\nu-2}.$$

Тогда выполняется

$$\gamma(-M) \cdot H \cdot \gamma(M) = H \cdot [E_2,\, 0,\, rJ_2,\, E], \tag{5.1}$$

где $X = (x_1, x_2)$ и $r = ({}^t m_1 S_{\nu-2} x_2 - {}^t x_1 S_{\nu-2} m_2) J_2$. Если по крайней мере одна компонента (x_1, x_2) удовлетворяет условиям

$$x_1 \notin L^\sharp_{\nu-2} \cup \pi^a B^{-1} L^\sharp_{\nu-2}, \quad \text{или} \quad x_2 \notin L^\sharp_{\nu-2} \cup \pi^{-a} B^{-1} L^\sharp_{\nu-2}, \tag{5.2}$$

где $L^\sharp_{\nu-2}$ — решетка, двойственная к решетке $L_{\nu-2}$, тогда можно выбрать m_1 и m_2 так, что элемент r в тождестве (5.1) не будет целым. Следовательно, для элементов H с таким X

$$U_2 H U_2 = \mathbf{p}^{-1} \sum_i \sum_{r \in \mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o}} U_2 H_i \cdot [E_2,\, 0,\, rJ_2,\, E] \in \mathcal{J}.$$

В нашем случае (см. §2)

$$L^\sharp = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant \nu-2} \mathfrak{o} e_i \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant \nu-2} \mathfrak{o} e'_{\nu-2-i} \oplus S_0^{-1} L_0 = L^{(reg)}_{\nu-2} \oplus L_0^{(-1)}.$$

Предположим, что условие (5.2) выполнено. Если $x_i = x_i^{(reg)} + x_i^{(-1)}$, тогда $x_i^{(reg)} \neq 0$ (это доказывает лемму в случае хорошей редукции) или $x_1 \neq x_1^{(-1)}$, $x_2 \neq x_2^{(-1)}$. Лемма доказана.

Кольцо $\mathcal{SH}(U_2, P_2)$, как и кольцо $\mathcal{H}(U_2, P_2)$, не является коммутативным и обладает делителями нуля. Например, $\nabla^2 = \mathbf{p}\nabla \Rightarrow \nabla(\nabla - \mathbf{p}) = 0$. Для двух элементов

$$\mathbf{T}_0(\pi) = U_2 \operatorname{diag}(\pi, \pi^{-1}, E_{2(\nu-2)+n_0}, \pi, \pi^{-1}) U_2 \tag{5.3}$$

и

$$\Xi = \mathbf{\Pi}^{(0)}_{0,\nu-2}(-1) = \sum_{\substack{X \in L_0^{(-1)}/L_0 \\ \operatorname{rank}_{\mathfrak{p}}(\pi X) = 1}} U_2[E_2,\, X,\, -\tfrac{1}{2}S_{\nu-2}[X],\, E]$$

мы имеем $\mathbf{T}_0(\pi) \cdot \Xi \neq \Xi \cdot \mathbf{T}_0(\pi)$.

В силу леммы 5.1 мы можем определить фактор-кольца

$$\begin{aligned} \mathcal{SH}^J &= \mathcal{SH}(U_2, P_2)\,/\,\mathcal{J}, \\ \mathcal{EH}^J &= \mathcal{EH}(U_2, P_2)\,/\,\mathcal{J} \cap \mathcal{EH}(U_2, P_2) \subset \mathcal{SH}^J. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Мы назовем эти новые кольца *кольцами Гекке-Якоби.* Антиавтоморфизм $*$ индуцирует антиавтоморфизмы колец $\mathcal{SH}(U_2, P_2)$ и $\mathcal{EH}(U_2, P_2)$, которые мы будем обозначать через $*$.

Лемма 5.3. *Для ортогональной группы с хорошей редукцией* ($\det S \in \mathfrak{o}^\times$) *кольцо* $\mathcal{SH}^J$ *является коммутативным. Если ранг* $m_0 = \dim_{k_\mathfrak{p}} L_0^{-1}/L_0$ *нерегулярной части формы* S *равен* 1 (*см. замечание* 1 *после леммы* 3.1), *то кольцо* $\mathcal{EH}^J$ *является коммутативным.*

Доказательство. Пусть форма S имеет хорошую редукцию. В силу леммы 5.2, любой двойной класс, не принадлежащий идеалу $\mathcal{J}$, имеет вид

$$H = U_2[A,\ X, Y,\ B]U_2 \qquad \text{с} \quad X = 0,\ \ Y = {}^t r J_2.$$

Если $r = 0$, то $H^* = H$, так как элементы $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}) A \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$ и $U^{(\nu-2)} B U^{(\nu-2)}$ колец Гекке общей линейной группы и ортогональной группы ранга $\nu-2$ инвариантны относительно $*$. Если r не принадлежит $\mathfrak{o}$, то тогда

$$[\alpha]_2^{-1}[A,\ 0, rJ_2,\ B][\alpha] = [A,\ 0, \epsilon r J_2,\ B] \qquad \left(\alpha = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

и выполняется следующее тождество:

$$H = \frac{1}{\mathfrak{p}-1}\Bigl(\sum_{\epsilon \in \mathfrak{o}^\times/\mathfrak{p}} U_2[A,\ 0, \epsilon r J_2,\ B]U_2 - U_2[A,\ 0, 0,\ B]U_2\Bigr). \tag{5.5}$$

Следовательно, $H = H^*$. Мы доказали, что *элементы кольца* $\mathcal{SH}^J$ *инвариантны относительно антиавтоморфизма* $*$, и, в частности,

$$H_1 \cdot H_2 = (H_1 \cdot H_2)^* = (H_2)^* \cdot (H_1)^* = H_2 \cdot H_1.$$

Предположим теперь, что квадратичная форма S имеет плохую редукцию и $m_0 = 1$. В этом случае произвольный двойной класс имеет форму

$$H = U_2[E_2,\ 0, rJ_2,\ B]U_2 \quad \text{или} \quad H = U_2[E_2,\ X, -\tfrac{1}{2}S_{\nu-2}[X] + rJ_2,\ B]U_2,$$

где $X = (x_1, x_2) \in L_0^{(-1)} \times L_0^{(-1)} = \pi^{-1}(\mathfrak{o} \times \mathfrak{o})$. Если $r = 0$, то

$$H^* = U_2[E_2,\ -X, -\tfrac{1}{2}S_{\nu-2}[X],\ B]U_2 = U_2[\,E_2,\ +X, -\tfrac{1}{2}S_{\nu-2}[X],\ B\,]U_2.$$

Если $r \neq 0$, то для $m_0 = 1$ вектор X может быть приведен к виду $(0, x_2)$ при помощи умножения на элементы из U_2, и опять выполняется тождество типа (5.5).

Следовательно, мы доказали, что *любой двойной класс в* $\mathcal{EH}^J$ — $*$*-инвариантен*, и что такой класс равен, с точностью до константы ± 1, диагональному классу или классу вида $U_2[E_2, X, -\frac{1}{2}S_{\nu-2}[X], B]U_2$. Лемма доказана.

Применяя метод, использованный в случае ортогональной группы, можно доказать стандартные результаты о структуре кольца $\mathcal{SH}^J$ в регулярном случае.

Лемма 5.4. *В случае хорошей редукции кольцо* $\mathcal{SH}^J$ *порождено элементами*

$$J(\mathbf{T}_0(\pi)) \quad \text{и} \quad \mathbf{\Pi}_{i,j}^J = J(\mathbf{p}^{-i}\mathbf{\Pi}_{i,j}^{(0)}(0)),$$

где $\mathbf{T}_0(\pi)$ *и* $\mathbf{\Pi}_{i,j}^{(0)}(0)$ *определены в* (5.3), (4.11) (*см. также* (3.2)), *которые являются алгебраически независимыми.*

Структура коммутативного кольца $\mathcal{EH}^J$ в случае $m_0 = 1$ немного более сложная. В лемме 5.3 мы доказали, что любой двойной класс из $\mathcal{EH}^J$ эквивалентен регулярному диагональному классу или классу типа $U_2[E, X, -\frac{1}{2}S_{\nu-2}[X], B]U_2$, где X не сводится к нулю. Используя те же самые рассуждения, что и в доказательстве леммы 3.1 для группы P_2, мы получаем

$$\begin{aligned} &U_2[E, X, -\tfrac{1}{2}S_{\nu-2}[X], B]U_2 \\ &= \sum_{\substack{Z\in BL_{\nu-2}/L_{\nu-2} \\ \gamma\in B^{-1}U^{(\nu-2)}B\backslash U^{(\nu-2)}}} \left\{U_2[E, BZ+X, -\tfrac{1}{2}S_{\nu-2}[X] - \tfrac{1}{2}S_{\nu-2}[Z], B]\cdot[E_2, 0, 0, \gamma]\right\} \\ &= \Xi\cdot[E_2, 0, 0, B]. \end{aligned}$$

Тождество

$$(\Xi+1)^2 = \mathbf{p}^2$$

вытекает из

$$\begin{aligned} &\sum_{X\in L_0^{(-1)}/L_0} [E_2, X, -\tfrac{1}{2}S_{\nu-2}[X], E]\cdot \sum_{Y\in L_0^{(-1)}/L_0} [E_2, Y, -\tfrac{1}{2}S_{\nu-2}[Y], E] \\ &\quad = \sum_{Z,X\in L_0^{(-1)}/L_0} [E_2, Z, -\tfrac{1}{2}S_{\nu-2}[Z] + \tfrac{1}{2}({}^t z_1 S_{\nu-2}x_2 - {}^t z_2 S_{\nu-2}x_1), E] \underset{\mathcal{J}}{\equiv} \mathbf{p}^2. \end{aligned}$$

Следовательно, в нерегулярном случае кольцо Гекке-Якоби является расширением полиномиального кольца.

В качестве следствия из построенной теории мы получаем следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{H}(\mathrm{GL}_2) \arrow[d, "\pm"'] & & \mathcal{H}(\mathrm{SL}_2)^J \arrow[d, "\mathrm{in}"'] \\ \mathcal{H}(U,G) \arrow[r, "\mathrm{Im}"] & \mathcal{H}(U_2,P_2) & \mathcal{SH}(U_2,P_2) \arrow[l, "\mathrm{in}"'] \arrow[r, "J"] & \mathcal{SH}^J \\ & & \mathcal{EH}(U_2,P_2) \arrow[u, "\mathrm{in}"'] \arrow[r, "J"] & \mathcal{EH}^J, \arrow[u, "\mathrm{in}"'] \end{tikzcd}$$

где Im и $\pm$ — вложения, определенные в (2.6) и в лемме 2.4, J обозначает стандартный эпиморфизм

$$J\colon \mathcal{SH}(U_2, P_2) \to \mathcal{SH}(U_2, P_2)/\mathcal{J} = \mathcal{SH}^J$$

кольца Гекке в кольцо Гекке-Якоби (см. (5.4)), in — вложение колец. В лемме 5.4 мы показали, что в регулярном случае кольцо Гекке-Якоби совпадает с произведением двух подколец

$$\mathcal{SH}(U_2, P_2) = \mathcal{EH}(U_2, P_2) \times \mathcal{H}(\mathrm{SL}_2)^J.$$

В теоремах 2 и 3 из §4 были получены разложения стандартного многочлена Гекке $Q(t)$ в кольце $\mathcal{H}(U_2, P_2)$ параболической подгруппы, и было доказано, что коэффициенты ядра $K(t)$ принадлежат подкольцу $\mathcal{EH}(U_2, P_2)$. Следовательно, можно вычислить их J-образы в кольце Гекке-Якоби $\mathcal{EH}^J$. Мы докажем сейчас, что J-образ многочлена $K(t)$ равен стандартной локальной дзета-функции группы Якоби Γ^J.

Теорема 5. *Предположим, что ортогональная группа $G(S)$ имеет хорошую редукцию, тогда стандартный многочлен Гекке $Q(t)$, определенный в* (3.1)*, имеет разложение*

$$Q(t) = Q_{-}^{GL_2}(\mathbf{p}^{-(A+\nu)}\, t) \cdot K(t) \cdot Q_{+}^{GL_2}(\mathbf{p}^{-(A+\nu)}\, t).$$

Первый и второй члены являются $\pm$-вложениями многочленов Гекке $Q^{GL_2}(t) = 1 - T(\pi)t + \mathbf{p}T(\pi,\pi)t^2$. J-образ многочлена $K(t)$ вычисляется по следующей формуле:

$$K(t) = \sum_{i=0}^{2\nu-2} (-1)^i K_i t^i \underset{\mathcal{J}}{\equiv} (1 - \mathbf{p}^{-n_0} t^2) \sum_{i=0}^{2(\nu-2)} (-1)^i Q_{i,\nu-2}^J\, (\mathbf{p}^{-1} t)^i,$$

где для $0 \leqslant i \leqslant \nu - 2$,

$$Q_{i,\nu-2}^J = \mathbf{p}^{-iA + \langle \nu-2-i\rangle - \langle \nu-2\rangle} \sum_{k=0}^{i} U_{i-k,\nu-2-i} \Pi_{k,\nu-2-k}^J$$

(*ср. с формулой для* $Q_i^{(\nu-2)}$ *из леммы* 3.1), *и*

$$\Pi_{k,\nu-2-k}^J = J(\mathbf{p}^{-k} \Pi_{k,\nu-2-k}^{(0)}(0))$$

— образующие кольца $\mathcal{EH}(U_2, P_2)$ (*см. лемму* 5.4);
а для $i > \nu - 2$ *мы полагаем*

$$Q_{i,\nu-2}^J = Q_{i-\nu-2,\nu-2}^J.$$

Доказательство. В силу теоремы 3 выполняется тождество

$$J(K_i) = \mathbf{p}^{-iA+\langle\nu-i\rangle-\langle\nu\rangle} \sum_{j=0}^{i} J(\mathbf{\Pi}^{(0)}_{j,\nu-j-2})\big[\, U_{i-j,\nu-i} - U_{i-j-2,\nu-i} - (\mathbf{p}+1)\mathbf{p}^{2\nu-i-j-2+n_0}U_{i-j-2,\nu-i+1} + \mathbf{p}^{4\nu-2i-2j+2n_0-3}\, U_{i-j-4,\nu-i+2}\,\big],$$

и мы должны доказать только, что

$$K_i \underset{\mathcal{J}}{\equiv} \mathbf{p}^{-i}Q^{J}_{i,\nu-2} - \mathbf{p}^{-i-n_0+2}Q^{J}_{i-2,\nu-2}.$$

Обе части последнего равенства содержат одни и те же элементы $J(\mathbf{\Pi}^{(0)}_{j,\nu-j-2})$, поэтому если мы сравним коэффициенты при этих элементах, то получим, что последнее равенство эквивалентно равенству

$$U_{i-j,\nu-i} - U_{i-j-2,\nu-i} - (\mathbf{p}+1)\mathbf{p}^{2\nu-i-j-2+n_0}U_{i-j-2,\nu-i+1} + \mathbf{p}^{4\nu-2i-2j+2n_0-3}U_{i-j-4,\nu-i+2} = \mathbf{p}^{i-j}U_{i-j,\nu-i-2} - \mathbf{p}^{2\nu-i-j-1}U_{i-2-j,\nu-i-2}.$$

После замены индексов суммирования и тривиальных преобразований мы получаем

$$\mathbf{p}^{s}U_{s,\delta} = U_{s,\delta+2} + \mathbf{p}^{2\delta+s+3}U_{s-2,\delta+2} - \mathbf{p}^{2\delta+s+n_0+2}(\mathbf{p}+1)U_{s-2,\delta+3} + \mathbf{p}^{4\delta+2s+2n_0+5}U_{s-4,\delta+4}, \tag{5.6}$$

где $U_{s,\delta}$ — коэффициенты из леммы 3.1. В случае хорошей редукции мы получаем $n_0 = l_0$ и $\lambda_v(bbp) = 0$ для $v > 0$ в формуле леммы 3.1. Следовательно, $U_{s,\delta} \neq 0$ только для $v = 2l$. Для таких v выполняется следующая формула

$$U_{s,\delta} = (-1)^l \sum_{t=0}^{l} (-1)^t \mathbf{p}^{t(n_0+\delta+t-1)} \frac{(\mathbf{p}^{\delta+t+1}-1)\dots(\mathbf{p}^{\delta+s}-1)}{\varphi_t(\mathbf{p})\varphi_{l-t}(\mathbf{p}^2)},$$

где

$$\varphi_v(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}-1)\dots(\mathbf{p}^v-1), \qquad \varphi_0(\mathbf{p}) = 1.$$

Члены в правой части (5.6) имеют общий множитель, следовательно, эта часть (5.6) равна

$$(-1)^l \sum_{t=0}^{l}(-1)^t \mathbf{p}^{t(n_0+\delta+t-1)} \frac{(\mathbf{p}^{\delta+t+3}-1)\dots(\mathbf{p}^{\delta+2l}-1)}{\varphi_t(\mathbf{p})\varphi_{l-t}(\mathbf{p}^2)} \times \Big\{\mathbf{p}^{2t}(\mathbf{p}^{\delta+2l+2}-1)(\mathbf{p}^{\delta+2l+1}-1) - (\mathbf{p}^{\delta+2l+3}-1)(\mathbf{p}^{2l-2t}-1)\mathbf{p}^{2t} - \mathbf{p}^{\delta+2l+t+1}(\mathbf{p}^{\delta+2l+1}-1)(\mathbf{p}^{t}-1) + \mathbf{p}^{2\delta+4l+3}(\mathbf{p}^{t}-1)(\mathbf{p}^{t-1}-1)\Big\}.$$

Заметим, что компонента в скобках равна $\mathbf{p}^{2l}(\mathbf{p}^{\delta+t+1}-1)(\mathbf{p}^{\delta+t+2}-1)$, следовательно, мы доказали (5.6) и равенства для коэффициентов K_i с $0 \leqslant i \leqslant \nu-2$. В случае $i > i-2$ доказательство аналогично.

§6. Разложения многочленов Гекке в общем случае

В этом параграфе мы докажем общую теорему, которая объясняет существование разложений локальных дзета-функций, описанных в §3 и §4. Общая теорема даст нам и другие возможные приложения, например, разложение дзета-функции спинорного типа для классических групп. Для этого нам нужна более подробная информация о структуре кольца Гекке параболической подгруппы P_m.

Зафиксируем, как и в §2, произвольную максимальную решетку нормы $\mathfrak{P}^\ell$ и параболическую подгруппу P_m. Мы полагаем

$$\mathrm{IG} = \{\, g \in G : gL \subset L \,\}$$

и называем элемент $H = \sum a_i U_P h_i$ целым, если $h_i \in \mathrm{IG}$ для всех h_i. Через

$$\mathcal{GH}(U_m, P_m)$$

мы обозначаем подкольцо всех целых элементов в $\mathcal{H}(U_m,\, P_m)$. Согласно теореме об элементарных делителях, для любого $A \in GL_m(\mathcal{K})$ мы можем определить $\mathfrak{P}$-порядок $\mathrm{d}(A)$ матрицы A

$$\mathrm{d}(A) = \max_j d_j, \quad \text{если} \quad GL_m(\mathfrak{O})\, A\, GL_m(\mathfrak{O}) = GL_m(\mathfrak{O})\,\mathrm{diag}(\Pi^{d_1}, \dots, \Pi^{d_m})GL_m(\mathfrak{O}).$$

Существует проекция кольца $\mathcal{H}(U_m,\, P_m)$ на коммутативную область целостности $\mathcal{C}(U_m, P_m)$.

Лемма 6.1. *Для произвольного целого элемента* $H \in \mathcal{GH}(U_m, P_m)$

$$H = \sum_i a_i\, U_m h_i = \sum_i a_i\, U_m[\, A_i, X_i, Z_i, B_i\,] \ \ (\textit{см. обозначения } (2.5))$$

произведение $\Lambda_m^d H$ *принадлежит подкольцу* $\mathcal{C}(U_m, P_m)$ *для произвольного* $d \geqslant \max_i d(A_i)$.

Доказательство. Произвольный элемент h_i отображает решетку L в себя, следовательно,

$$h_i \in \begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & \mathfrak{P}^{-\ell} \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & \mathfrak{P}^{-\ell} \\ \mathfrak{P}^{l} & \mathfrak{P}^{l} & \mathfrak{O} \end{pmatrix}.$$

В частности, $X_i \in (\mathfrak{P}^{-\ell} L_{\nu-m})^m$. Матрица $A_i^{-1}\Pi^d$ — целая, следовательно, $X_i A_i^{-1}\Pi^d \in (\mathfrak{P}^{-\ell} L_{\nu-m})^m$ и X-часть элемента $\Lambda_m^d h_i$ может быть приведена к нулю:

$$\Lambda_m^d U_m h_i = U_m\,[\,\Pi^{-d} A_i\ ,\ 0\ ,\ \overline{\Pi}^d Z + \varepsilon \overline{\Pi}^d S_{\nu-m}[X_i] + \widetilde{Z}\Pi^{-d} A_i\ ,\ B_i\,],$$

где $\widetilde{Z} = Z_{X_i \Pi^{-d} A_i}$ (см. лемму 2.1). По определению решетки L

$$X_i \Pi^{-d} A_i \in M_{2(\nu-m)+n_0}(\mathfrak{P}^{-\ell}),$$

следовательно, мы можем привести к нулю Z-часть последнего элемента при помощи левого умножения на матрицу $[E, 0, *, E] \in U_m$. Это доказывает лемму.

Лемма 6.2. *Пусть* $m = \nu$, *тогда для любых* $H = U_\nu D U_\nu \in \mathcal{GH}(U_\nu, P_\nu)$ *и* $d \geqslant \mu(D)$ *произведение* $\Pi^d H$ *принадлежит кольцу* $\mathcal{C}(U_\nu, P_\nu)$.

Доказательство. Для доказательства леммы нам потребуется система представителей из левых классов элемента

$$H(n) = \sum_{UDU, \operatorname{ord}_{\mathfrak{p}} \mu(D)=n} UDU,$$

где сумма берется по всем различным левым смежным классам. Мы будем придерживаться обозначений (2.7) и напомним, что e обозначает индекс ветвления поля $\mathcal{K}$ над k, и $\mathfrak{f}$ — индекс (2.3). Согласно результатам [H–S] (леммы 1–3), справедливо

$$H(n) = \sum_{\substack{0 \leqslant d_1 \leqslant \ldots d_\nu \leqslant \mathfrak{f}en \\ \phi \in GL_\nu(\mathfrak{O}) \backslash GL_\nu(\mathfrak{O}) D(\mathbf{d}) GL_\nu(\mathfrak{O})}} \sum_{Z \in Z(\mathbf{d})} \sum_{X \in X(\mathbf{d})} U \begin{pmatrix} \mu_0(\mathfrak{a})^n I_\nu \left(D^*(\mathbf{d})\right)^{-1} I_\nu & -I_\nu (S_0 X D^{-1}(\mathbf{d}))^* \mathfrak{a}^n & I_\nu (Z + Z_X) \\ 0 & \mathfrak{a}^n & X \\ 0 & 0 & D(\mathbf{d}) \end{pmatrix} \tilde{\phi}. \quad (6.1)$$

Множества, по которым ведется суммирование, определены следующим образом:

$$X(d) = \left\{ X = (x_1, \ldots, x_\nu) \in M_{n_0, \nu}(\mathcal{K}) \colon \quad x_i \in L_0^{(d_i - \ell)} / L_0^{(2d_i - \ell)} \right\},$$

где $L_0^{(\delta)}$ — решетка (2.1),

$$Z(\mathbf{d}) = \left\{ Z = (z_{ij}) \in M_\nu(\mathcal{K}) \colon \begin{array}{l} \bar{z}_{ii} \Pi^{d_i} \in T^{(d_i - \ell)} / T^{(2d_i - \ell)} \\ z_{ij} \in \mathfrak{P}^{-\ell} / \mathfrak{P}^{d_j - \ell} \quad \text{для } i > j \\ \bar{z}_{ji} \Pi^{d_j} + \varepsilon \overline{\Pi}^{d_i} z_{ij} = 0 \end{array} \right\},$$

при этом

$$T^{(\delta)} = \mathfrak{P}^\delta \cap \operatorname{Ker} \operatorname{tr}_\varepsilon$$

и $\operatorname{tr}_\varepsilon$ — ε-след из (2.2). Элемент Z_X принадлежит $M_\nu(\mathfrak{P}^{-\ell})$ и удовлетворяет тождеству

$$Z_X^* D(\mathbf{d}) + \varepsilon D(\mathbf{d})^* Z_X + S_0[X] = 0$$

(такой элемент существует для $X \in X(\mathbf{d})$), а $\tilde{\phi} = \operatorname{diag}(I_\nu (\phi^*)^{-1} I_\nu, E_{n_0}, \phi)$.

Легко проверить, что $\pi T^{(\delta)} = T^{(\delta + e)}$ и $\mathfrak{a} L_0^{(\ell)} = L_0^{(\ell + e\mathfrak{f})}$. Как следствие получаем

$$\pi^{n\mathfrak{f}} (\bar{z}_{ii} \Pi^{d_i}) \in T^{(d_i - \ell + ne\mathfrak{f})} \subset T^{(2d_i - \ell)}, \qquad \pi^{n\mathfrak{f}} z_{ij} \in \mathfrak{P}^{ne\mathfrak{f} - \ell} \subset \mathfrak{P}^{d_i - \ell},$$
$$\mathfrak{a}^n x_i \in L_0^{(ne\mathfrak{f} + d_i - \ell)} \subset L_0^{(2d_i - \ell)},$$

и мы можем привести X- и Z-части любого левого класса в произведении $\Pi \cdot H(n)$ к нулю. Тем самым мы получаем элемент из $\mathcal{C}(U_\nu, P_\nu)$. Лемма доказана.

Две предыдущие леммы дают нам следующее описание кольца $\mathcal{C}(U_m, P_m)$.

Лемма 6.3. *Кольцо* $\mathcal{C}(U_m, P_m)$ *совпадает с централизатором элемента* Λ_m *(или* Π*, если* $m = \nu$*) в* $\mathcal{H}(U_m,\, P_m)$*:*

$$\mathcal{C}(U_m, P_m) = \{\, H \in \mathcal{H}(U_m,\, P_m) \,:\, H\Lambda_m = \Lambda_m H \,\}.$$

Доказательство. Так как кольцо $\mathcal{C}(U_m, P_m)$ коммутативно (см. лемму 2.3) и Λ_m содержится в нем, то $\mathcal{C}(U_m, P_m)$ содержится в централизаторе. Возьмем элемент H, коммутирующий с элементом Λ_m. Для достаточно большого натурального d

$$H\Lambda_m^d = \Lambda_m^d H = \sum_i a_i\, U_m[A_i,\, 0,\, 0,\, B_i] \in \mathcal{C}(U_m, P_m).$$

Правое умножение на Λ_m^d не очень сильно изменяет элемент H:

$$U_m[A, X, Z, B] \cdot \Lambda_m = U_m[A\Pi^{-1}, X\Pi^{-1}, Z\Pi^{-1}, B];$$

следовательно, мы не сможем привести к нулю X- и Z-части левых смежных классов в правой части последнего равенства, если это было невозможно для класса $U_m[A, X, Z, B]$. Это доказывает, что $H \in \mathcal{C}(U_m, P_m)$. В случае элемента Π доказательство аналогично.

Лемма 6.4. *Для образующих* $\Pi_{k,\nu-k}$ *выполняется следующее включение:*

$$\Lambda_m \Pi_{k,\nu-k} \in \mathcal{DM}(U_m, P_m).$$

Доказательство. Для $k + l = \nu - 1$ положим

$$\Pi_{k,l}(h, z + z_h) = U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h^* S_l & 0 & z + z_h \\ & \overline{\Pi}^{-1} E_k & 0 & 0 & 0 \\ & & E_{2l+n_0} & 0 & h \\ & & & \Pi E_k & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} U_1,$$

где $\quad {}^t h = ({}^t h_1, {}^t h_0, {}^t h_2), \qquad h_1, h_2 \in M_{l,1}(\mathcal{K}), \qquad h_0 \in L_0 \otimes \mathcal{K},$

$$z \in \operatorname{Ker} \operatorname{tr}_\varepsilon, \qquad \operatorname{tr}_\varepsilon(z_h) = -S_l[h],$$

и в случае ортогональной группы с $n_0 = 0$ мы должны учесть те же самые дополнения, что и в определении образующих кольца Гекке (см. (3.2), (3.3)).

Как и в лемме 3.3 мы можем доказать, что образующие $\Pi_{k,\nu-k}$ следующим образом раскладываются в параболическом расширении $\mathcal{H}(U_1, P_1)$:

$$\Pi_{k,\nu-k} = \Pi^-_{k-1,\nu-k} + \Pi^+_{k,\nu-k-1} + \Pi_{k,\nu-k}(0,0)$$

$$+ \sum_{\substack{h_0 \in L_0^{(-l-1)}/L_0^{(-l)} \\ z \in T^{(-l-1)}/T^{(-l)} \\ (h_0, z) \neq (0,0)}} \Pi_{k-1,\nu-k}(h_0, z + z_{h_0}) \tag{6.2}$$

$$+ \sum_{\substack{h \in \Pi^{-l-1} L_{\nu-k+1}/\Pi^{-l} L_{\nu-k+1} \\ S_{\nu-k+1}[h] \in \operatorname{tr}_\varepsilon(\mathfrak{P}^{-l-1}) \\ z \in T^{(-l-1)}/T^{(-l)} \\ h = (h_1, h_0, h_2) \neq (0, h_0, 0)}} \Pi_{k-2,\nu-k+1}(h, z + z_h), \tag{6.3}$$

где решетка $T^{(\delta)}$ определена в (6.1), „$\pm$“ — стандартное вложение из леммы 2.4, а суммирование в (6.2) и (6.3) ведется только по различным двойным классам.

Элементы $\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Pi}^-_{k-1,l}$, $\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Pi}^+_{k-1,l}$ и $\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Pi}_{k,l-1}(0,0)$ принадлежат $\mathcal{DM}(U_1,P_1)$, так как это — $\mathcal{C}(U_1,P_1)$-модуль. На самом деле первый и третий элементы принадлежат кольцу $\mathcal{C}(U_1,P_1)$. Для элементов (6.2) и (6.3) выполняется следующее более сильное включение:

$$I=\mathbf{\Lambda}_1\cdot\mathbf{\Pi}_{k,l}(h,z+z_h)\in\mathcal{C}(U_1,P_1)\subset\mathcal{DM}(U_1,P_1).$$

Используя определение группы U_1, мы получаем, что элемент I равен сумме левых смежных классов типа

$$C=U_1\begin{pmatrix}\overline{\Pi} & * & * & * & \overline{\Pi}(z'+z'_h)\\ 0 & \overline{\Pi}^{-1}E_k & 0 & 0 & x\\ & & E_{2l+n_0} & 0 & h'\\ & & & \Pi E_k & 0\\ 0 & & & & \Pi^{-1}\end{pmatrix}\operatorname{diag}(1,\,\psi,\,1),$$

где

$$x\in(\mathfrak{P}^{-\ell}/\mathfrak{P}^{1-\ell})^k\quad\text{и}\quad\psi\in U^{(k+l)}\setminus U^{(k+l)}\operatorname{diag}(\overline{\Pi}^{-1}E_k,\,E_{2l+n_0},\,\Pi E_k)U^{(k+l)}.$$

В обозначениях (2.5) выполняется равенство

$$[1,-{}^t(({}^tx,0,0)+(0,{}^th',0))\Pi,\ \overline{\Pi}z_h\Pi,\ E]\cdot C=[\Pi^{-1},0,\overline{\Pi}(z+z_h-\varepsilon\overline{z}'_h),\mathbf{D}_{k,l}].$$

Так как в (6.2) и (6.3) $z,\ z_h\in\mathfrak{P}^{-\ell-1}$, то можно привести к нулю z-часть последнего элемента. Это доказывает утверждение леммы для $m=1$.

Используя это вычисление последовательно для различных размерностей, мы можем доказать лемму для $m=2,3,\dots$.

Предыдущие три леммы справедливы для любой параболической подгруппы P_m с $1\leqslant m\leqslant\nu$. Для следующих трех значений $m=1,2$ or ν элементы $\mathbf{\Lambda}_m$ и $\mathbf{\Pi}$ имеют следующее важное свойство: эти элементы являются в некотором смысле алгебраическими элементами некоммутативного расширения $\mathcal{H}(U_m,P_m)\supset\mathcal{H}(U,G)$. Точнее, для этих значений m элементы $\mathbf{\Lambda}_m$ и $\mathbf{\Pi}$ — левые корни многочленов над кольцом $\mathcal{H}(U,G)$.

Мы определим три многочлена от t над кольцом $\mathbb{Q}[x_0^{\pm1},x_1^{\pm1},\dots,x_\nu^{\pm1}]$ степени 2ν, $2\nu(\nu-1)$ и 2^ν:

$$q_\nu^{(1)}[t]=\prod_{i=0}^{\nu}(1-\mathrm{p}^{-A}x_i{}^{-1}\,t)(1-\mathrm{p}^{A}x_i\,t),$$

$$q_\nu^{(2)}[t]=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant\nu}(1-\mathrm{p}^{-2A}x_i^{-1}x_j^{-1}\,t)(1-x_i^{-1}x_j\,t)(1-x_ix_j^{-1}\,t)(1-\mathrm{p}^{2A}x_ix_j\,t),$$

$$q_\nu^{(\nu)}[t]=(1-x_0\,t)\prod_{k=1}^{\nu}\prod_{i_1\leqslant\dots\leqslant i_k}(1-(\mathrm{p}^{kA}x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_k})^{\mathrm{ef}}\,x_0\,t),$$

где константы A, $\mathfrak{f}$ определены в (2.8) и (2.3), e — индекс ветвления $\mathcal{K}$ над k. Коэффициенты многочленов принадлежат кольцу $\mathbb{Q}^{W_\nu}[x_0^{\pm 1},\dots,x_\nu^{\pm 1}]$, следовательно, существуют три многочлена $Q_\nu^{(1)}[t]$, $Q_\nu^{(2)}[t]$ и $Q_\nu^{(\nu)}[t]$ над $\mathcal{H}(U,G)$, Φ_ν-образы которых равны соответственно $q_\nu^{(1)}[t]$, $q_\nu^{(2)}[t]$ и $q_\nu^{(\nu)}[t]$, точнее,

$$Q_\nu^{(m)}[t]=\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i\,Q_{i,\nu}^{(m)}\,t^i \quad \text{и} \quad q_\nu^{(m)}[t]=\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i\,\Phi_\nu(Q_{i,\nu}^{(m)})\,t^i.$$

Многочлен $Q_\nu^{(1)}[t]$ соответствует стандартному представлению двойственной (в смысле Ленглендса) группы G^L, $Q_\nu^{(2)}[t]$ отвечает кососимметрическому квадрату $\bigwedge^2$ стандартного представления, а $Q_\nu^{(\nu)}[t]$ — спинорному представлению.

Теорема 6. *Элементы* Λ_1, Λ_2 *и* Π, *с точностью до некоторых простых множителей, являются левыми корнями многочленов* $Q_\nu^{(1)}[t]$, $Q_\nu^{(2)}[t]$ *и* $Q_\nu^{(\nu)}[t]$. *Точнее говоря, справедливы равенства*

$$\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i\Lambda_1^i\,(\mathbf{p}^{-A}\mathbf{q}^{-\nu})^i\,Q_{i,\nu}^{(1)}=0, \tag{6.4}$$

$$\sum_{j\geqslant 0}(-1)^j\Lambda_2^j\,(\mathbf{p}^{-2A}\mathbf{q}^{-2\nu+1})^j\,Q_{j,\nu}^{(2)}=0, \tag{6.5}$$

$$\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\,\Pi^k\left(\mathbf{p}^{-e\mathfrak{f}\nu A}\mathbf{q}^{-e\mathfrak{f}\nu(\nu+1)/2}\Delta^{-\mathfrak{f}}\right)^k\,Q_{k,\nu}^{(\nu)}=0, \tag{6.6}$$

где Δ *— элемент, определенный в* (2.12), *— является обратимым элементом кольца Гекке* $\mathcal{H}(U,G)$.

Доказательство. Из определения сферического отображения (см. §2) вытекают следующие равенства:

$$\Phi_\nu(\Lambda_1)=\mathbf{q}^\nu x_\nu^{-1},\qquad \Phi_\nu(\Lambda_2)=\mathbf{q}^{2\nu-1}x_{\nu-1}^{-1}x_\nu^{-1},\qquad \Phi_\nu(\Pi)=x_0,$$
$$\Phi(\Delta)=\mathbf{q}^{-e\nu(\nu+1)/2}x_0^{2/\mathfrak{f}}\,(x_1\cdot\ldots\cdot x_\nu)^e.$$

Сферический Φ-образ левой части (6.4) (соответственно (6.5)-(6.6)) равен нулю. Следовательно, достаточно доказать, что левая часть принадлежит модулю $\mathcal{DM}(U_m,P_m)$, так как ограничение отображения Φ на этот модуль — инъективно (см. лемму 2.2).

В лемме 3.1 были получены формулы для коэффициентов многочлена $Q_\nu^{(1)}[t]$ в виде линейных функций образующих $\Pi_{k,l}$ кольца Гекке. Согласно лемме 6.4, все слагаемые в (6.4) принадлежат модулю $\mathcal{DM}(U_1,P_1)\cdot$, следовательно, (6.4) доказано.

Компоненты коэффициента $Q_{n,\nu}^{(\nu)}$ являются слагаемыми элемента $H(n)$ (см. (6.1)). В частности, все члены, входящие в сумму (6.6), принадлежат кольцу $\mathcal{C}(U_\nu,P_\nu)$ в силу леммы 6.3, что доказывает тождество (6.6).

Для завершения доказательства теоремы нам потребуется следующий результат о представлении коэффициентов многочлена $q_\nu^{(2)}(t)$.

Лемма 6.5. *Запишем коэффициенты* $q_{l,\nu}^{(2)}$ *многочлена* $q_\nu^{(2)}(t)$ *как многочлен от коэффициентов* $q_{j,\nu}^{(1)}$ *(W-симметрические функции) стандартного многочлена* $q_\nu^{(1)}[t]$

$$q_{l,\nu}^{(2)} = F(q_{1,\nu}^{(1)}, \ldots, q_{\nu,\nu}^{(1)}) = \sum_i b_l \prod_{j=1}^{\nu} (q_{j,\nu}^{(1)})^{a_{ij}}.$$

Тогда выполняется следующая оценка степени компонент этого представления

$$a_{i1} + 2(a_{i2} + \cdots + a_{i\nu}) \leqslant l + 1.$$

Доказательство. Утверждение леммы имеет чисто комбинаторную природу. Если мы перепишем многочлен $F(q_{1,\nu}^{(1)}, \ldots, q_{\nu,\nu}^{(1)})$ как многочлен по переменным $x_1, \ldots, x_\nu$, то сумма степеней переменных x_1 и x_2 (или любых двух других переменных), входящих в любой моном, меньше или равна $l + 1$. Это дает оценку леммы.

Коэффициенты стандартного многочлена Гекке $Q^{(1)}(t)$ равны линейной форме от образующих $\Pi_{k,m}$ (см. лемму 3.1 для ортогональной и теорему 2 работы [G1] для произвольной классической группы). В силу леммы 6.1 и леммы 6.4 произведение $\Lambda_2^2\Pi_{k,m}$ принадлежит коммутативному кольцу $\mathcal{C}(U_2, P_2)$, а произведение $\Lambda_2\Pi_{k,m}$ — $\mathcal{C}(U_2, P_2)$-модулю $\mathcal{DM}(U_2, P_2)$. Применяя аналог леммы 4.1 для произвольной классической группы, легко доказать, что для первого элемента $\Pi_{1,\nu-1}$ выполняется более строгое включение

$$\Lambda_2\Pi_{1,\nu-1} \in \mathcal{C}(U_2, P_2).$$

В случае коэффициентов многочлена $Q^{(2)}(t)$ это дает нам следующие включения:

$$\Lambda_2 Q_{1,\nu}^{(1)} \in \mathcal{C}(U_2, P_2), \quad \Lambda_2^2 Q_{i,\nu}^{(1)} \in \mathcal{C}(U_2, P_2), \quad \Lambda_2 Q_{i,\nu}^{(1)} \in \mathcal{DM}(U_2, P_2).$$

Вместе с утверждением леммы 6.5 это доказывает включение

$$\Lambda_2^l \cdot Q_{l,\nu}^{(2)} \in \mathcal{DM}(U_2, P_2).$$

Теорема 6 полностью доказана.

Применяя теорему 6, мы можем получить следующий общий результат о разложении многочленов Гекке над кольцами Гекке, обобщающий теорему Андрианова о разложении многочленов Гекке в случае симплектической группы Sp_ν и ее параболической подгруппы P_ν (см. §3 [A1]). Ниже мы следуем методу из [A1].

Теорема 7. *Предположим, что* m *принимает одно из трех значений* $1, 2,$ *или* ν. *Пусть дан многочлен* $P(t) = \sum_{i=0}^N P_i t^i$ *над кольцом Гекке* $\mathcal{H}(U, G)$ *классической* *группы* G *ранга* ν. *Предположим, что многочлен* $\Phi_\nu(P(t)) = \sum_{i=0}^N \Phi_\nu(P_i)\,t^i$ *раскладывается в произведение двух многочленов* $f(t)$ *и* $g(t)$

$$\Phi_\nu(P(t)) = \left(\sum_{i=0}^{N_1} f_i\,t^i\right)\left(\sum_{i=0}^{N_2} g_j\,t^j\right)$$

и что все коэффициенты f_i *лежат в образе* $\Phi_\nu(\,\mathcal{C}(U_m, P_m)\,)$:

$$f_i = \Phi_\nu(F_i), \quad F_i \in \mathcal{C}(U_m, P_m) \quad \text{и} \quad f_0 = 1.$$

Тогда все коэффициенты g_j *принадлежат образу* $\Phi_\nu(\,\mathcal{A}(U_m, P_m)\,)$ *модуля*

$$\mathcal{A}(U_m, P_m) = \mathcal{C}(U_m, P_m)\cdot \mathcal{H}(U, G) \subset \mathcal{H}(U_m,\, P_m).$$

(Напомним, что мы отождествляем кольцо Гекке $\mathcal{H}(U, G)$ *максимально компактной группы* U *с его вложением в кольцо* $\mathcal{H}(U_m,\, P_m)$*). Более того, для произвольных* G_i *в* $\mathcal{A}(U_m, P_m)$ *таких, что* $\Phi_\nu(G_i) = g_i$, *выполняется следующее разложение многочлена* $P(t)$:

$$P(t) = \left(\sum_{i=0}^{N_1} F_i\,t^i\right)\left(\sum_{i=0}^{N_2} G_j\,t^j\right).$$

Разложения многочленов Гекке, построенные в §3–4, — это частные случаи разложений теоремы 7. Это следует из того, что коэффициенты многочленов

$$(1 - \mathbf{p}^{-A-\nu}\Lambda_1) \qquad \text{и} \qquad Q_-^{GL_2}(t) = 1 - \mathbf{T}_-(\pi)\,t + \mathbf{p}\Lambda_2\,t^2$$

в теоремах 1 и 3 принадлежат кольцу $\mathcal{C}(U_m, P_m)$.

Прежде чем доказывать теорему 7, мы сформулируем важное свойство определенного в этой теореме модуля $\mathcal{A}(U_m, P_m)$.

Лемма 6.6. *Ограничение сферического гомоморфизма* Φ *на модуль* $\mathcal{A}(U_m, P_m)$ *инъективно. Более того, кольцо Гекке параболической подгруппы* $\mathcal{H}(U_m,\, P_m)$, *рассматриваемое как векторное пространство, совпадает с прямой суммой двух подпространств*:

$$\mathcal{H}(U_m,\, P_m) = \mathcal{A}(U_m, P_m) \bigoplus \mathit{Ker}\,\Phi.$$

Доказательство. Обозначим через $\widetilde{\Lambda}$ элемент Λ_1, Λ_2 или Π и через $\widetilde{Q}_{\nu,i}^{(m)}$ для $m = 1, 2, \nu$ коэффициенты $Q_{\nu,i}^{(m)}$ с дополнительными числовыми множителями, как в тождествах (6.4)-(6.6). Мы можем переписать эти тождества в виде

$$\widetilde{\Lambda}^a = \sum_i (-1)^{i+1}\,\widetilde{\Lambda}^{i+a}\widetilde{Q}_{\nu,i}^{(m)} \tag{6.7}$$

для произвольного a $ge0$. Это соотношение может быть использовано для построения рекурсивной последовательности „отрицательных степеней“ элемента

$\widetilde{\Lambda}$: если $\widetilde{\Lambda}^{-b}$ уже определен, то $\widetilde{\Lambda}^{-b-1}$ определяется соотношением (6.7). Элементы $\widetilde{\Lambda}^{-b}$ обладают хорошими свойствами. Например, используя коммутативность колец $\mathcal{C}(U_m, P_m)$ и $\mathcal{H}(U, G)$, можно доказать индукцией по $-b$, что для любых $H \in \mathcal{H}(U, G)$ и $a \geqslant 0$ со свойством $\widetilde{\Lambda}^a H \in \mathcal{C}(U_m, P_m)$, выполняется равенство

$$\widetilde{\Lambda}^a H \widetilde{\Lambda}^{-b} = \widetilde{\Lambda}^{a-b} H.$$

В частности, $\widetilde{\Lambda}^a \widetilde{\Lambda}^{-b} = \widetilde{\Lambda}^{a-b}$. Опять используя коммутативность колец и указанные выше равенства, мы получаем, что для любого $A \in \mathcal{A}(U_m, P_m)$ $\widetilde{\Lambda}^a A \widetilde{\Lambda}^{-a} = H$ для достаточно больших a. Это дает новое описание модуля $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}(U_m, P_m) = \left\{A \in \mathcal{H}(U_m, P_m) : \quad \widetilde{\Lambda}^a A \widetilde{\Lambda}^{-a} = A \quad \text{для достаточно больших } a\right\},$$

так как по определению (6.7) $\widetilde{\Lambda}^{-a} \in \mathcal{A}(U_m, P_m)$.

Ограничение сферического отображения Φ на кольцо $\mathcal{C}(U_m, P_m)$ инъективно (см. лемму 2.2), $\widetilde{\Lambda}^a \widetilde{\Lambda}^{-a} = 1$ для любого a и $\Phi(\widetilde{\Lambda}^{-a}) = \Phi(\widetilde{\Lambda})^{-a} \neq 0$, поэтому $\Phi(A) \neq 0$. Это доказывает первое утверждение леммы. Для доказательства второго достаточно отметить, что в представлении $X = \widetilde{\Lambda}^a X \widetilde{\Lambda}^{-a} + \left(X - \widetilde{\Lambda}^a X \widetilde{\Lambda}^{-a}\right)$ согласно леммам 6.1 и 6.2 первое слагаемое принадлежит $\mathcal{A}(U_m, P_m)$, а второе слагаемое принадлежит $\operatorname{Ker}\Phi$ для достаточно больших a. Лемма доказана.

Отметим, что три модуля $\mathcal{C}(U_m, P_m)$, $\mathcal{A}(U_m, P_m)$ и $\operatorname{Ker}\Phi$ могут быть определены только в терминах элемента $\widetilde{\Lambda}$. Для $\mathcal{C}(U_m, P_m)$ это сделано в лемме 6.3, для $\mathcal{A}(U_m, P_m)$ это сделано в доказательстве леммы 6.5, а для третьего модуля можно легко доказать, что

$$\operatorname{Ker}\Phi = \left\{X \in \mathcal{H}(U_m, P_m) : \widetilde{\Lambda}^a X = 0 \quad \text{для достаточно больших } a\right\}.$$

Доказательство теоремы 7. Предположим, что все F_i принадлежат коммутативной области целостности $\mathcal{C}(U_m, P_m)$. Так как Φ инъективно на $\mathcal{C}(U_m, P_m)$, то $F_0 = 1$. Обозначим через A_k коэффициенты формального степенного ряда $F(t)^{-1}$. Тогда справедливо

$$g(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \Phi_\nu(A_k) t^k\right)\left(\sum_{i=0}^{N} \Phi_\nu(P_i) t^i\right) = \left(\sum_{j=0}^{N_2} \Phi_\nu\Big(\sum_{k+i=j} A_k P_i\Big) t^j\right),$$

что доказывает первое утверждение теоремы. Так как Φ инъективно на $\mathcal{A}(U_m, P_m)$, то для любых $G_j \in \mathcal{A}(U_m, P_m)$ таких, что $g_j = \Phi_\nu G_j$, выполняется

$$\sum_{i+j=k} F_i G_j \in \mathcal{A}(U_m, P_m) \quad \text{и} \quad P_k = \sum_{i+j=k} F_i G_j.$$

Теорема доказана.

Список литературы

[A1] Andrianov A. N., *Quadratic forms and Hecke operators*, Grundlehren der math. Wissenschaften, 286, Springer, Berlin etc., 1987.

[A2] Andrianov A. N., *Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus* 2, Russian Math. Survey **29** (1974), 45–116.

[Br] Bruhat F., *Sur les representations des groupes classical $\wp$-adiques*, Amer. J. Math. **83** (1961), 321–338, 343–368.

[E] Eichler M., *Quadratische Formen und Orthogonal Gruppen*, Grundlehren der math. Wissenschaften, 63, Springer, Berlin, etc., 1952.

[E–Z] Eichler M., Zagier D., *The theory of Jacobi forms*, Progress in Math., 55, Birkhauser, Boston, etc., 1985.

[F] Freitag E., *Siegelsche Modulfunktionen*, Grundlehren der math. Wissensch., 254, Springer Verlag, Berlin, etc., 1983.

[G1] Гриценко В. А., *Разложения многочленов Гекке классических групп*, Мат. сб. **137** (1988), 328–351; English transl. in Math. USSR Sbornik **65** (1990), **65** (1990), 333–356.

[G2] Гриценко В. А., *Параболическое расширение кольца Гекке полной линейной группы,* 1, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **154** (1986), 35–46; English transl. in J. Soviet Math. **43** (1988), 2533-2539.

[G3] Гриценко В. А., *Параболическое расширение кольца Гекке полной линейной группы,* 2, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **183** (1990), 56–77.

[G4] Гриценко В. А., *Функции Якоби и Эйлеровы произведения для Эрмитовых модулярных форм*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **183** (1990), 77–123.

[G5] Гриценко В. А., *Функции Якоби n-переменных*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **168** (1988), 32–45; English transl. in J. Soviet Math. **53** (1991), 243–252.

[G6] Gritsenko V. A., *Dirichlet series with Euler product in the theory of modular forms with respect to the orthogonal groups*, Publication LOMI E–11–87, Nauka, Leningrad, 1987.

[G7] Гриценко В. А., *Дзета-функция степени шесть для Эрмитовых модулярных форм рода два*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **154** (1986), 46-66; English transl. in J. Soviet Math. **43** (1988), 2540-2553.

[G8] Гриценко В. А., *Действие модулярных операторов на коэффициентах Фурье-Якоби модулярных форм*, Мат. сб. **119** (1982), 248–277; English transl. in Math. USSR Sbornik **47** (1984), 237–268.

[G9] Гриценко В. А., *Пространство Маасса для $SU(2,2)$. Кольца Гекке и дзета-функции*, Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова **183** (1990), 68–77; English transl. in Proc. Steklov Inst. of Math. **183** (1991), 75-86.

[G10] Gritsenko V. A., *Induction in the theory of zeta-functions*, Preprint 91-097, University Bielefeld, 1991.

[G11] Gritsenko V. A., *Modular forms and moduli spaces of abelian and $K3$ surfaces*, Preprint, University Göttingen, 1993.

[G12] Gritsenko V. A., *Andrianov (Spin) L-function and Rankin-Selberg convolution*, Preprint, University Heidelberg, 1993.

[H–S] Hina T., Sugano T., *On the local Hecke series of some classical groups over $\wp$-adic fields*, J. Math. Soc. Japan **35** (1983), 133–152.

[K–S] Kohnen W., Skoruppa N.-P., *A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of degree two*, Invent. Math. **95** (1989), 449–476.

[L] Langlands R. L., *Euler products*, Yale Univ. Press, 1971.

[M] Murase A., *L-functions attached to jacobi forms of degree n. Part* 1. *The basic identity*, J. reine angew. Mathem. **401** (1989), 122–156.

[O] Oda T., *On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature* $(2, n-2)$, Math. Ann. **231** (1977), 97–144.

[P-S-R] Piatetski-Shapiro I., Rallis S., *L-functions for the classical groups*, Explicit construction of automorphic L-function, Lecture Notes Math. 1254, Springer Verlag, Berlin, etc., 1987.

[S] Satake I., *Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $\wp$-adic fields*, IHES Publ. Math. **18** (1963), 229–293.

[Sh1] Shimura G., *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971.

[Sh2] Shimura G., *On modular correspondence for $Sp(n, \mathbb{Z})$ and their congruence relations*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **49** (1963), 824–828.

[Sh3] Shimura G., *Arithmetic of unitary groups*, Ann. of Math. **79** (1964), 369–409.

[Sh4] Shimura G., *On the holomorphy of certain Dirichlet series*, Proc. London Math. Society **31** (1975), 79–98.

[Su] Sugano T., *On Dirichlet series attached to holomorphic cusp forms on* $\mathrm{SO}(2, q)$, Automorphic Forms and Number Theory, Advanced Studied in Pure Math. 7, Springer Verlag, Berlin, etc., 1985, pp. 333–362.

Поступило 18 января 1993 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27