А. В. Малышев, Метод Морделла взаимных решеток в геометрии чисел, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1973, том 33, 97–115

А.В.Малышев

МЕТОД МОРДЕЛЛА ВЗАИМНЫХ РЕШЕТОК В ГЕОМЕТРИИ ЧИСЕЛ

<u>I. Введение.</u> Предлагаемая статья посвящена методу оценки снизу критического определителя n -мерного звездного тела, сводящему эту задачу к оценке критических определителей снизу его $(n-1)$-мерных сечений. Здесь и далее определения основных понятий геометрии чисел см. [I6] или [I7]. Метод оказывается особенно эффективным в случае, когда рассматриваемое звездное тело имеет большую группу автоморфизмов.

Впервые в совершенно отчетливой форме этот метод был применен Коркиным и Золотаревым [2] для сведения оценки критического определителя четырехмерного шара к уже известной в то время оценке критического определителя трехмерного шара (авторы пользовались другой, эквивалентной терминологией - понятием арифметического минимума положительной квадратичной формы). Однако основы метода просматриваются у Эрмита [I] и даже в некоторых исследованиях Гаусса.

Систематически метод взаимных решеток был применен Морделлом [3-7] к ряду специальных звездных тел с большой группой автоморфизмов, причем им была подчеркнута общность метода. Аналогичные приложения метода были даны Оппенгеймом [8-I0]. В случае неавтоморфных звездных тел метод использовался Мюллендером [II] и Дэвенпортом [I2]. Бо́льшая часть этих исследований собрана и развита Касселсом [I6], гл. X , § 3.

Первая попытка общей формулировки метода была сделана Армитажем [I3]. Наиболее общие результаты, относящиеся к этому методу, принадлежат Леккеркеркеру [I4] (см. также [I7], § 36). В зависимости от того, имеет ли рассматриваемое звездное тело большую группу автоморфизмов или нет, он формулирует две общих теоремы, частные случаи которых покрывают все известные приложения метода Морделла. Интересное дополнение к исследованиям Леккеркеркера было сделано в заметке Мюллендера [I5].

Предлагаемая статья преследует две цели. Во-первых, нами предлагаются (п.п.2-6) обобщения теорем Леккеркеркера [I4] (включая уточнение Мюллендера [I5]); эти обобщения выводятся из общей просто доказываемой леммы. Попутно обсуждается вопрос об обобщении полученных теорем (п.п.7,8 и I0). Рассмотрены (п.9.) некоторые приложения общих теорем метода, в частности, приложения, развивающие соответствующие рассмотрения Армитажа [I3]. Во-вторых, мы имеем в виду дать обзор с единой точки зрения всех известных результатов по рассматриваемому методу Морделла. Автор надеется, что статьи [I-I5], цитированные в списке литературы, составляют все оригинальные исследования, относящиеся к методу Морделла взаимных решеток. Основное содержание статей [I-I5], по крайней мере, в части метода, охватывается нашей работой.

2. <u>Основная лемма</u>. Пусть $\mathcal{L}$ – n-мерное звездное тело конечного типа с критическим определителем $\Delta(\mathcal{L})$; здесь и далее предполагаем, что начало координат O является одним из центров рассматриваемого звездного тела $\mathcal{L}$. Известно [I6, I7], что оно обладает хотя бы одной критической решеткой Λ, т.е. такой $\mathcal{L}$-допустимой решеткой Λ, что $d(\Lambda)=\Delta(\mathcal{L})$.

Пусть Λ^* – решетка, взаимная с Λ. Рассмотрим любой ненулевой вектор b^* решетки Λ^* и плоскость $P(b^*)$, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору b^*. Совокупность точек $L(b^*)=\Lambda\cap P(b^*)$ образует $(n-1)$-мерную решетку определителя $d(L(b^*))$. При этом

$$d(\Lambda)=\frac{d(L(b^*))}{|b^*|}. \tag{I}$$

Если Λ - критическая решетка тела $\mathcal{L}$, $d(\Lambda)=\Delta(\mathcal{L})$, то равенство (I) перепишется следующим образом:

$$\Delta(\mathcal{L})=\frac{d(L(b^*))}{|b^*|} \tag{2}$$

для любого $b^*\in\Lambda$, $b^*\neq 0$.

Рассмотрим множество $C(b^*)=\mathcal{L}\cap P(b^*)$. Это есть $(n-1)$-мерное звездное тело с критическим определителем $\Delta_{n-1}(C(b^*))$, для которого решетка $L(b^*)$ является допустимой. Поэтому

$$d(L(b^*))\geq\Delta_{n-1}(C(b^*)). \tag{3}$$

Сопоставляя (2) и (3) и принимая во внимание произвольность ненулевого вектора $b^*\in\Lambda^*$, мы приходим к следующей почти тривиальной лемме, из которой будут получены все остальные предложения и которая в силу этого может считаться самой общей формулировкой метода Морделла.

<u>Лемма I.</u> *Пусть $\mathcal{L}$ - звездное тело конечного типа. Тогда для любой критической решетки Λ тела $\mathcal{L}$*

$$\Delta(\mathcal{L})\geq\sup_{\substack{b^*\in\Lambda^*\\ b^*\neq 0}}\frac{\Delta_{n-1}(C(b^*))}{|b^*|}, \tag{4}$$

где Λ^* - решетка взаимная с решеткой Λ, а $C(b^*)=\mathcal{L}\cap P(b^*)$ - сечение тела $\mathcal{L}$ плоскостью $P(b^*)$, проходящей через начало координат o перпендикулярно вектору b^*.

3. Первая общая теорема метода Морделла. Пусть $\mathcal{L}$ -звездное тело и пусть $\vartheta_{\mathcal{L}}$ - множество всех точек $z\neq 0$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, для которых выполняется неравенство

$$|z|\leq \Delta_{n-1}(C(z)), \tag{5}$$

где $C(z)$ - сечение тела $\mathcal{L}$ плоскостью $P(z)$, проходящей через начало координат перпендикулярно вектору z, а $\Delta_{n-1}(C(z))\leq +\infty$ - его $(n-1)$-мерный критический определитель; в множество $\vartheta_{\mathcal{L}}$ дополнительно включаем точку $z=0$.

Теорема I. Пусть $\mathcal{L}$ - звездное тело в $\mathbb{R}^n$ конечного типа; $\vartheta_{\mathcal{L}}$ - множество, определяемое условием (5). Тогда

$$\Delta(\mathcal{L})\geq \{\Delta(\vartheta_{\mathcal{L}})\}^{\frac{1}{n-1}}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть Λ - одна из критических решеток тела $\mathcal{L}$, Λ^* - решетка, взаимная с Λ. Тогда по неравенству (4)

$$\Delta(\mathcal{L})\geq \sup_{\substack{b^*\in\Lambda^*\\ b^*\neq 0}} \frac{\Delta_{n-1}(C(b^*))}{|b^*|}=$$

$$=\left\{\inf_{\substack{b^*\in\Lambda^*\\ b^*\neq 0}} \frac{|b^*|}{\Delta_{n-1}(C(b^*))}\right\}^{-1}=\{m(G,\Lambda^*)\}^{-1}, \tag{7}$$

где $G(z)$ - обобщенная лучевая функция, определяемая равенством

$$G(z)=\frac{|z|}{\Delta_{n-1}(C(z))}, \text{ если } z\neq 0;\quad G(0)=0.$$

Множество точек z с условием

$$G(z)\leq 1$$

совпадает с множеством $\vartheta_{\mathcal{L}}$. По следствию из теоремы предыдущей заметки [I8] этого Сборника

$$m(G, \Lambda^*) = \{\Delta(\mathcal{V}_{\mathcal{L}})\}^{-\frac{1}{n}} \{d(\Lambda^*)\}^{\frac{1}{n}}. \tag{8}$$

Так как

$$d(\Lambda^*) = \{d(\Lambda)\}^{-1} = \{\Delta(\mathcal{L})\}^{-1},$$

то неравенство (8) можно переписать следующим образом

$$m(G, \Lambda^*) \leq \{\Delta(\mathcal{V}_{\mathcal{L}})\}^{-\frac{1}{n}} \{\Delta(\mathcal{L})\}^{-\frac{1}{n}}. \tag{9}$$

В силу (7) и (9)

$$\Delta(\mathcal{L}) \geq \{\Delta(\mathcal{V}_{\mathcal{L}})\}^{\frac{1}{n}} \{\Delta(\mathcal{L})\}^{\frac{1}{n}},$$

откуда и следует неравенство (6).

Теорема I доказана.

Используя соотношение [I8] между постоянной Эрмита обобщенной лучевой функции и критическим определителем соответствующего звездного множества, мы можем преобразовать теорему I в предложение, обобщающее "вторую теорему" Леккеркеркера [I3].

<u>Следствие.</u> Пусть $F(x)$ – лучевая функция от n переменных; $\gamma(F)$ – ее постоянная Эрмита. Пусть

$$G(z) = \begin{cases} \{\gamma_{n-1}(C(z))\}^{n-1}|z|, & \text{если } z \neq 0, \\ 0, & \text{если } z = 0, \end{cases} \tag{10}$$

где $\gamma_{n-1}(G(z))$ – $(n-1)$-мерная постоянная Эрмита множества $C(z) = \mathcal{L} \cap P(z)$ (точнее – постоянная Эрмита соответствующей лучевой функции). Тогда

$$\{\gamma(F)\}^{n-1} \leq \gamma(G). \tag{11}$$

Если G – обычная лучевая функция, то мы приходим ко второй теореме Леккеркеркера [I3]. В общем случае G – обобщенная лучевая функция, и неравенства (6) и (II) равносильны.

4. <u>Вторая общая теорема метода Морделла.</u> Другой вариант метода Морделла содержится в следующем предложении.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{L}$ – звездное тело конечного типа. Тогда для любой критической решетки Λ тела $\mathcal{L}$

$$\{\Delta(\mathcal{L})\}^{n-2} \geq \inf_{\substack{b^* \in \Lambda^*,\ b^* \neq 0 \\ b_0 = \lambda_{b^*} b^*,\ 0 < \lambda_{b^*} \leq +\infty \\ b_0 \in \text{гр.}\, \mathcal{L}}} \left\{ \frac{\Delta_{n-1}(C(b^*))}{|b_0|} \right\}^n, \tag{12}$$

где точная нижняя граница берется по всем ненулевым векторам b^* решетки Λ^*, взаимной с Λ; $b_0 = \lambda_{b^*} b^*$, $0 < \lambda_{b^*} \leq +\infty$, – точка границы тела $\mathcal{L}$ (мы не исключаем случая $\lambda_{b^*} = +\infty$, полагая тогда $|b_0| = +\infty$).

Доказательство. Если для некоторого $b^* \in \Lambda^*$, $b^* \neq 0$, $\lambda_{b^*} = +\infty$, $|b_0| = +\infty$, то так как $\Delta_{n-1}(C(b^*)) > 0$, правая часть неравенства (12) обращается в нуль и оно тривиально.

Поэтому пусть далее для всех $b^* \in \Lambda^*$, $b^* \neq 0$, $0 < \lambda_{b^*} < +\infty$, $0 < |b_0| < +\infty$. По лемме 1 для любой критической решетки Λ и любого ненулевого вектора $b^* \in \Lambda^*$

$$\Delta(\mathcal{L}) \geq \frac{\Delta_{n-1}(C(b^*))}{|b^*|}. \tag{13}$$

Пусть $F = F(x)$ – лучевая функция, отвечающая телу $\mathcal{L}$. Тогда $F(b_0) = 1$, $|b_0| = \lambda_{b^*} |b^*|$, а потому

$$1 = F(b_0) = F(\lambda_{b^*} b^*) = \lambda_{b^*} F(b^*) = \frac{|b_0|}{|b^*|} F(b^*),$$

$$|b^*| = |b_0| F(b^*). \tag{14}$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой ненулевой вектор $b_\varepsilon^* \in \Lambda^*$, что

$$F(b_\varepsilon^*) \leq \gamma(F)\{d(\Lambda^*)\}^{\frac{1}{n}} + \varepsilon = \{\Delta(\mathcal{L})\}^{-\frac{1}{n}} \{d(\Lambda)\}^{-\frac{1}{n}} + \varepsilon =$$

$$= \{\Delta(\mathcal{L})\}^{-\frac{2}{n}} + \varepsilon. \tag{15}$$

В силу (13), (14), (15) для $b^* = b^*_\varepsilon$, $b_0 = b_0^{(\varepsilon)}$

$$\Delta(\mathcal{L}) \geqslant \frac{\Delta_{n-1}(C(b_\varepsilon^*))}{(b_0^{(\varepsilon)})(\{\Delta(\mathcal{L})\}^{-2/n}+\varepsilon)},$$

$$\{\Delta(\mathcal{L})\}^{1-\frac{2}{n}}+\varepsilon\,\Delta(\mathcal{L}) \geqslant \frac{\Delta_{n-1}\,(C(b_\varepsilon^*))}{|b_0^{(\varepsilon)}|} \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\substack{b^*\in\Lambda^* \\ b^*\neq 0}} \left\{ \frac{\Delta_{n-1}(C(b^*)}{|b_0|} \right\}.$$

Так как $\Delta(\mathcal{L}) < +\infty$, а $\varepsilon > 0$ - произвольно,то из этого неравенства выводим, что

$$\{\Delta(\mathcal{L})\}^{1-\frac{2}{n}} \geqslant \inf_{\substack{b^*\in\Lambda^* \\ b^*\neq 0}} \left\{ \frac{\Delta_{n-1}\,(C(b^*))}{|b_0|} \right\},$$

откуда и следует неравенство (I2).

Теорема 2 доказана.

5. <u>Лемма об автоморфизмах</u>. Формулировка и применение теоремы 2 существенно упрощаются, если звездное тело $\mathcal{L}$ (или - что то же - соответствующая лучевая функция) обладает большой группой автоморфизмов. Линейное однородное преобразование $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^n$ называется автоморфизмом тела $\mathcal{L}$, если $\mathcal{A}\mathcal{L} = \mathcal{L}$, где $\mathcal{A}\mathcal{L}$ - совокупность точек $\mathcal{A}x$, где $x \in \mathcal{L}$. Ясно, что преобразование $\mathcal{A}$ не вырождено; его определитель равен ± 1 . Совокупность всех автоморфизмов тела $\mathcal{L}$ образует группу.

<u>Лемма 2</u>. *Пусть $\mathcal{L}$ - звездное тело; P_0 - такая $(n-1)$-мерная плоскость, проходящая через начало координат, что $C_0 = \mathcal{L} \cap P_0$ - $(n-1)$-мерное звездное тело конечного типа; p_0 - прямая, проходящая через начало координат перпендикулярно плоскости P_0; b_0 - точка границы $\mathcal{L}$, лежащая на прямой p_0. Пусть P - некоторая $(n-1)$-мерная плоскость, проходящая через начало координат, причем $(n-1)$-мерное звездное тело $C = \mathcal{L} \cap P$ имеет конечный тип. Пусть*

существует автоморфизм $\mathcal{A}$ тела $\mathcal{L}$, переводящий P в P_0, $P_0 = \mathcal{A}P$, и пусть взаимное преобразование $\mathcal{A}^*$ также является автоморфизмом тела $\mathcal{L}$. Тогда на границе тела $\mathcal{L}$ найдется точка b, $|b| < +\infty$, так что вектор b перпендикулярен плоскости P и

$$\frac{\Delta_{n-1}(C)}{|b|} = \frac{\Delta_{n-1}(C_0)}{|b_0|}, \tag{16}$$

где $\Delta_{n-1}(C)$ и $\Delta_{n-1}(C_0)$ – критические определители $(n-1)$-мерных звездных тел C и C_0.

Доказательство. Пусть

$$b = (\mathcal{A}^*)^{-1} b_0, \qquad b_0 = \mathcal{A}^* b.$$

Так как $\mathcal{A}^*$ – автоморфизм $\mathcal{L}$, то b лежит на границе $\mathcal{L}$. Поэтому так как $P_0 = \mathcal{A}P$ и $b_0 \perp P_0$, то $b \perp P$. По предположению, $\mathcal{A}$ – автоморфизм тела $\mathcal{L}$; поэтому

$$C_0 = \mathcal{A} C.$$

Пусть α – коэффициент увеличения площади $(n-1)$-мерной области в P при преобразовании ее автоморфизмом $\mathcal{A}$ в соответствующую область плоскости P_0. Так что, в частности,*)

$$\frac{\Delta_{n-1}(C_0)}{\Delta_{n-1}(C)} = \alpha. \tag{17}$$

Так как $\mathcal{A}$ – преобразование, не меняющее n-мерный объем, то

$$\frac{|b_0|}{|b|} = \frac{|\mathcal{A}^* b|}{|b|} = \alpha. \tag{18}$$

Равенства (17) и (18) приводят к (16).

Лемма 2 доказана.

6. Метод Морделла для автоморфного тела. Преобразуем теорему 2 для звездного тела $\mathcal{L}$ с большой группой автоморфизмов.

---

*) Действительно, C-звездное тело; оно имеет критическую решетку L; тогда $\mathcal{A}L = L_0$ – критическая решетка тела C_0. Поэтому $\Delta_{n-1}(C_0) = d_{n-1}(L_0) = \alpha d_{n-1}(L) = \alpha \Delta_{n-1}(C)$. Рассуждение можно вести и несколько иначе: рассматривать C-допустимую решетку L, C_0-допустимую решетку $L_0 = \mathcal{A}L$, а затем переходить к пределу. Второй вариант рассуждений удобен для обобщений.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{L}$ - звездное тело конечного типа и пусть $\Gamma=\{\mathcal{A}\}$ - его группа автоморфизмов. Пусть фиксировано некоторое семейство $\Pi_0=\{P_0\}$ $(n-1)$-мерных плоскостей и семейство прямых $\pi_0=\{p_0\}$, проходящих через начало координат, так что каждой плоскости $P_0 \in \Pi_0$ взаимно однозначно отвечает прямая $p_0=p_0^{(P_0)} \in \pi_0$, перпендикулярная P_0. Пусть выполняются следующие условия:

1^0. Для каждой плоскости $P_0 \in \Pi_0$ множество $C_0=C_0^{(P_0)}=\mathcal{L}\cap P_0$ имеет конечный $(n-1)$-мерный тип; для каждой прямой $p_0 \in \pi_0$ отрезок $\mathcal{L}\cap p_0$ конечен.

2^0. Если некоторая плоскость P, проходящая через начало координат, такова, что тело $C=C^{(P)}=\mathcal{L}\cap P$ имеет конечный $(n-1)$-мерный тип, то найдутся плоскость $P_0 \in \Pi_0$ и автоморфизм $\mathcal{A} \in \Gamma$, для которых

$$P_0=\mathcal{A}P.$$

3^0. Если $\mathcal{A}\in\Gamma$, то и взаимное преобразование $\mathcal{A}^*\in\Gamma$. Тогда на каждой прямой $p_0 \in \pi_0$ найдется точка $b_0=b_0^{(P_0)}$, лежащая на границе $\mathcal{L}$, $b_0^{(P_0)} \perp P_0$, так что

$$\{\Delta(\mathcal{L})\}^{n-2} \geqslant \inf_{P_0\in\Pi_0}\left\{\frac{\Delta_{n-1}(\mathcal{L}\cap P_0)}{|b_0^{(P_0)}|}\right\}^n. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть Λ - некоторая критическая решетка тела $\mathcal{L}$; Λ^* - решетка, взаимная Λ. Если $b^*\in\Lambda^*$, $b^*\neq 0$, то $C(b^*)=\mathcal{L}\cap P(b^*)$ - тело конечного типа, ибо $L(b^*)=\Lambda\cap P(b^*)$ есть $(n-1)$-мерная решетка, допустимая для $C(b^*)$. Поэтому найдутся $P_0\in\Pi_0$ и $\mathcal{A}\in\Gamma$, для которых $P_0=\mathcal{A}P(b^*)$. Тогда по лемме 2 на прямой, определяемой вектором b^*, найдется точка b_0, $|b_0|<+\infty$, лежащая на границе $\mathcal{L}$, для которой

$$\frac{\Delta_{n-1}(C(b^*))}{|b_0|}=\frac{\Delta_{n-1}(\mathcal{L}\cap P_0)}{|b_0^{(P_0)}|}.$$

Неравенство (I9) следует теперь из неравенства(I2).

Теорема 3 доказана.

Наиболее важным случаем теоремы 3 является тот, когда Π_0 содержит лишь конечное число плоскостей P_0 (в частности, одну). В этом случае теорема 3 может быть сформулирована следующим образом.

<u>Следствие I.</u> Пусть в условиях теоремы 3 $\Pi_0=(P_0^{(1)},\dots,P_0^{(k)})$. Тогда

$$\{\Delta(\mathcal{L})\}^{n-2} \geqslant \min_{1\leq i\leq k}\left\{\frac{\Delta_{n-1}(\mathcal{L}\cap P_0^{(i)})}{|b_0^{(i)}|}\right\}^n, \tag{20}$$

где $b_0^{(i)}$ – некоторая точка границы $\mathcal{L}$, причем вектор $b_0^{(i)}$ перпендикулярен $P_0^{(i)}$.

<u>Следствие 2.</u> Пусть $\mathcal{L}$ – звездное тело конечного типа с группой автоморфизмов Γ. Пусть фиксированы $(n-1)$-мерная плоскость P_0 и прямая p_0, проходящие через начало координат, причем p_0 перпендикулярна P_0. Пусть

I°. $\Delta_{n-1}(\mathcal{L}\cap P_0)<+\infty$; $|\mathcal{L}\cap p_0|<+\infty$;

2°. если для некоторой плоскости P, проходящей через начало координат, $\Delta_{n-1}(\mathcal{L}\cap P)<+\infty$, то найдется $\mathfrak{A}\in\Gamma$, для которого $P_0=\mathfrak{A}P$;

3°. если $\mathfrak{A}\in\Gamma$, то и $\mathfrak{A}^*\in\Gamma$.

Тогда найдется точка b_0 прямой p_0, лежащая на границе $\mathcal{L}$, для которой

$$\{\Delta(\mathcal{L})\}^{n-2} \geqslant \left\{\frac{\Delta_{n-1}(\mathcal{L}\cap P_0)}{|b_0|}\right\}^n. \tag{2I}$$

Как обычно, теорема 3, следствия I и 2 могут быть сформулированы в терминах постоянной Эрмита. Например, следствие 2 может быть переформулировано следующим образом.

<u>Следствие 3.</u> Пусть $F=F_{\mathcal{L}}$ – лучевая функция тела $\mathcal{L}$ и в обозначениях следствия 2:

I°. $\gamma_{n-1}(\mathcal{L}\cap P_0)>0$; $|\mathcal{L}\cap p_0|<+\infty$;

2^0. если $\gamma_{n-1}(\mathcal{L}\cap P)>0$, то найдется $\mathcal{A}\in\Gamma$, для которого $P_0=\mathcal{A}P$;
3^0. если $\mathcal{A}\in\Gamma$, то и $\mathcal{A}^*\in\Gamma$.

Тогда если G – лучевая функция $(n-1)$-мерного тела $C_0=\mathcal{L}\cap P_0$, то для некоторого b_0, лежащего на границе $\mathcal{L}$ и перпендикулярного P_0

$$\{\gamma(F)\}^{n-2}\leq|b_0|\{\gamma_{n-1}(G)\}^{n-1}. \tag{22}$$

Неравенство (22) равносильно неравенству (2I). Это становится ясным, если воспользоваться известным соотношением между критическим определителем и постоянной Эрмита (см., например, [I8]).

Вместо условия $I^0_{2)}$: $|\mathcal{L}\cap p_0|<+\infty$ в следствиях 2 и 3 теоремы 3 можно предполагать (Леккеркеркер [I4]), что множество векторов $b\neq 0$, для которых $\Delta_{n-1}(\mathcal{L}\cap P(b))=+\infty$ (т.е. $\gamma_{n-1}(\mathcal{L}\cap P(b))=0$), не является всюду плотным в $\mathbb{R}^n$. Ибо тогда найдется такой бесконечный конус ϑ с вершиной в начале координат, что если $b\in\vartheta$, $b\neq 0$, то $C(b)=\mathcal{L}\cap P(b)$ – тело конечного $(n-1)$-мерного типа. Поэтому или для некоторого $b\in\vartheta$, $b\neq 0$, прямая, определяемая вектором b, при пересечении с $\mathcal{L}$ дает конечный отрезок – и мы приходим к условиям I^0 следствий 2 и 3 – или для всех $b\in\vartheta$, $b\neq 0$, $b\in\mathcal{L}$, $\vartheta\subset\mathcal{L}$, $+\infty=\Delta(\vartheta)\leq\Delta(\mathcal{L})$, что противоречит предположению о конечности типа $\mathcal{L}$.

Неравенства теоремы 3 и следствий I–3 можно записать "в проекциях". Например, следствие 3 формулируется так.

Следствие 4. Пусть для некоторого i, $1\leq i\leq n$, координатная плоскость*) $x_i=0$ не содержит прямой p_0; $\beta_0^{(i)}$ – i-тая координата вектора b_0; $C_0^{(i)}$ – проекция C_0 на плоскость $x_i=0$; $G^{(i)}$ – лучевая функция $(n-1)$-мерного звездного тела $C_0^{(i)}$. Тогда в условиях следствия 3

$$\{\gamma(F)\}^{n-2}\leq|\beta_0^{(i)}|\{\gamma_{n-1}(G^{(i)})\}^{n-1}. \tag{23}$$

Неравенство (23) равносильно неравенству (22), ибо

$$\left\{\frac{\gamma_{n-1}(G_0)}{\gamma_{n-1}(G_0^{(i)})}\right\}^{n-1}=\frac{\Delta_{n-1}(C_0^{(i)})}{\Delta_{n-1}(C_0)}=\frac{|\beta_0^{(i)}|}{|b_0|}. \tag{24}$$

*) Можно брать и любую фиксированную, не обязательно координатную, плоскость.

Равенство (24) позволяет, конечно, переписать и теорему 3 со следствиями I и 2 "в проекциях".

Для приложений удобен следующий частный случай теоремы 3 (точнее – следствия I), являющийся обобщением теоремы Армитажа [13].

Следствие 5. Пусть $F=F(x)=F(x_1,\ldots,x_n)$ – лучевая функция, $\gamma(F)>0$; $e^{(1)},\ldots,e^{(k)}$ – некоторый набор векторов вида

$$e^{(i)}=(e_1^{(i)},\ldots,e_n^{(i)}),\quad e_j^{(i)}=0 \text{ или } 1 \ (j=1,\ldots,n;\ i=1,\ldots,k),$$

причем $F(e^{(i)})\neq 0$. Пусть G_i – $(n-1)$-мерная лучевая функция, получаемая из F наложением связи

$$\sum_{\substack{j\\ e_j^{(i)}=1}} x_j=0 \tag{25}$$

и пусть $\gamma_{n-1}(G_i)>0$ $(i=1,\ldots,k)$. Пусть $\Gamma=\{\mathfrak{A}\}$ – группа автоморфизмов функции F, $F(\mathfrak{A}x)=F(x)$, причем: (а) если $\mathfrak{A}\in\Gamma$, то и $\mathfrak{A}^*\in\Gamma$; (б) для всякой точки $a\in\mathbb{R}^n$ найдутся $\mathfrak{A}\in\Gamma$ и i, $1\leq i\leq k$, так что $\mathfrak{A}a=\lambda e^{(i)}$, $\lambda>0$. Тогда

$$\{\gamma(F)\}^{n-2}\leq \max_{1\leq i\leq k}\frac{\{\gamma_{n-1}(G_i)\}^{n-1}}{F(e^{(i)})}. \tag{26}$$

7. О "гипотезе" Мюллендера. В работе [15] следствие 2 теоремы 3 (точнее – некоторое его обобщение, см.п.8) сформулировано следующим образом.

Следствие 2 ($\mathcal{M}$). Пусть $\mathcal{L}$ – звездное тело конечного типа с группой автоморфизмов Γ. Пусть k – целое число, $1\leq k\leq n-1$; P_0 – k-мерное линейное подпространство $\mathbb{R}^n$, Q_0 – $(n-k)$-мерное линейное подпространство $\mathbb{R}^n$, причем P_0 и Q_0 ортогональны. Пусть:

1°. $\Delta_k(\mathcal{L}\cap P_0)<+\infty$; $\Delta_{n-k}(\mathcal{L}\cap Q_0)<+\infty$; здесь Δ_k и Δ_{n-k} – соответственно k-мерный и $(n-k)$-мерный критические определители;

2°. если P – k-мерное подпространс т в о $\mathbb{R}^n$ и $\Delta_\kappa(\mathcal{L}\cap P)<+\infty$, т о н а й д е т с я $\mathcal{A}\in\Gamma$, д л я к о т о р о г о $\mathcal{A}P=P_0$;

3°. е с л и $\mathcal{A}\in\Gamma$, т о и $\mathcal{A}^*\in\Gamma$.

Т о г д а е с л и

$$\kappa=n-1, \tag{27}$$

т о

$$\{\Delta(\mathcal{L})\}^{2\kappa-n}\geqslant\left\{\frac{\Delta_\kappa(\mathcal{L}\cap P_0)}{\Delta_{n-\kappa}(\mathcal{L}\cap Q_0)}\right\}^n. \tag{28}$$

В связи с этой формулировкой естественно возникает "г и п о т е з а *) $(\mathcal{M})$": следствие 2. $(\mathcal{M})$ справедливо без предположения (27). В таком виде "гипотеза $(\mathcal{M})$" заведомо не верна даже в том простейшем случае, когда $\mathcal{L}$ – n-мерный шар. Действительно, тогда неравенство (28) запишется следующим образом:

$$(\gamma_n)^{2\kappa-n}\leqslant\frac{(\gamma_\kappa)^\kappa}{(\gamma_{n-\kappa})^{n-\kappa}}, \tag{29}$$

где γ_n – постоянная Эрмита для формы второй степени $F(x)=x_1^2+\ldots+x_n^2$.

Но известно (см., например, Леккеркеркер [I7], стр.3I8), что

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_1=1,\quad \gamma_2=\sqrt{\tfrac{4}{3}},\quad \gamma_3=\sqrt[3]{2},\quad \gamma_4=\sqrt{2},\\ &\gamma_5=\sqrt[5]{8},\quad \gamma_6=\sqrt[6]{\tfrac{64}{3}},\quad \gamma_7=\sqrt[7]{64},\quad \gamma_8=2.\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Поэтому при $n\leqslant 8$ неравенство (29) справедливо тогда и только тогда, когда:

$$\left.\begin{aligned}&\text{I) } n=2 \text{ — для всех } \kappa,\ \text{т.е. для } \kappa=1;\\ &\text{2) } n=3 \text{ — если } \kappa=2;\\ &\text{3) } n=4 \text{ — для всех } \kappa,\ 1\leqslant\kappa\leqslant3;\\ &\text{4) } n=5 \text{ — если } \kappa=2,\ 4;\\ &\text{5) } n=6 \text{ — если } \kappa=3,\ 4,\ 5;\\ &\text{6) } n=7 \text{ — если } \kappa=4,\ 5,\ 6;\\ &\text{7) } n=8 \text{ — для всех } \kappa,\ 1\leqslant\kappa\leqslant7.\end{aligned}\right\} \tag{3I}$$

---

*) Следует подчеркнуть, что в явном виде Мюллендер [I5] эту гипотезу не выдвигал. Однако см. его замечание (ii).

Ясно, что для того, чтобы при некотором n и $1 \le t < \frac{n}{2}$ неравенство (29) было справедливо и при $k=t$ и при $k=n-t$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(\gamma_n)^{2k-n}(\gamma_{n-k})^{n-k}=(\gamma_k)^k. \tag{32}$$

Равенство (32) тривиально при n-четном и $k=\frac{n}{2}$. В связи с таблицей (31) напрашивается предположение о том, что равенство типа (32) возможно только для $n=2^s$, где s - любое натуральное число, причем в этом случае равенство (32) справедливо для всех индексов k, $1 \le k \le n-1$.

Так как "гипотеза" $(\mathcal{M})$ очевидным образом не верна, то возникает

Проблема $(\mathcal{M})$. Пусть в следствии 2 $(\mathcal{M})$ отброшено предположение (27). При каких условиях (налагаемых на k или другие параметры $(\mathcal{M})$ справедливо неравенство (28)?

8. Обобщение теоремы 3. В формулировке теоремы 3 условие 3[0] можно отбросить, если наряду со звездным телом $\mathcal{L}$ рассмотреть звездное тело ϑ, связанное с $\mathcal{L}$ так, что если $\mathcal{A}$ - автоморфизм тела $\mathcal{L}$, то взаимное преобразование $\mathcal{A}^*$ - автоморфизм тела ϑ. Для простоты сформулируем лишь обобщение (Мюллендер [15]) следствия 2 теоремы 3.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{L}$ и ϑ - звездные тела конечного типа; Γ - группа автоморфизмов тела $\mathcal{L}$, причем если $\mathcal{A} \in \Gamma$, то $\mathcal{A}^*$ - автоморфизм тела ϑ. Пусть P_0 - $(n-1)$-мерная плоскость, p_0 - прямая, проходящие через начало координат и перпендикулярные друг другу. Пусть $\Delta_{n-1}(\mathcal{L}\cap P_0) < +\infty$, $|\vartheta \cap p_0| < +\infty$. Пусть для любой $(n-1)$-мерной плоскости P, проходящей через начало координат, с условием $\Delta_{n-1}(\mathcal{L}\cap P) < +\infty$ найдется $\mathcal{A} \in \Gamma$, для которого $\mathcal{A}P = P_0$. Тогда

$$\{\Delta(\mathcal{L})\}^{n-1} \ge \left\{\frac{\Delta_{n-1}(\mathcal{L}\cap P_0)}{\Delta_1(\vartheta \cap p_0)}\right\}^n \Delta(\vartheta). \tag{33}$$

Доказательство этого предложения является прямым обобщением доказательства теоремы 3 (или ее следствия 2). Вместо неравенства (12) теоремы 2 здесь следует воспользоваться аналогичным образом доказываемым неравенством

$$\{\Delta(\mathcal{L})\}^{n-1} \geqslant \Delta(\vartheta) \inf_{\substack{b^* \in \Lambda \\ b^* \neq 0}} \left\{ \frac{\Delta_{n-1}(C(b^*))}{\Delta_1(\vartheta \cap p_{b^*})} \right\}^n, \tag{34}$$

где Λ – любая критическая решетка тела $\mathcal{L}$; p_{b^*} – прямая, определяемая вектором b^*. Лемма 2 также нуждается в небольшом обобщении: в предположениях и обозначениях теоремы 4

$$\frac{\Delta_{n-1}(\mathcal{L} \cap P)}{\Delta_1(\vartheta \cap p)} = \frac{\Delta_{n-1}(\mathcal{L} \cap P_0)}{\Delta_1(\vartheta \cap p_0)}, \tag{35}$$

где p – прямая, проходящая через начало координат перпендикулярно P. Теорема 4 следует из (34), (35) и ее условий.

Обобщение теоремы 3 в полном объеме и доказательство этого обобщения не представляет затруднений.

9. Приложения. Прежде всего рассмотрим задачу, несколько более общую, чем та, которая изучалась Армитажем [13].

1^0. Пусть $n = n_1 + \ldots + n_k$, где $n_1, \ldots, n_k$ – целые положительные числа, $k \geqslant 1$. Оценим сверху постоянную Эрмита $\gamma(F)$ лучевой функции, заданной на $\mathbb{R}^n$ равенством

$$F = F(x) = F(x_{11}, \ldots, x_{1n_1}, x_{21}, \ldots, x_{kn_k}) = \left\{ \prod_{i=1}^{k} F_i^{n_i} \right\}^{\frac{1}{n}}, \tag{36}$$

где

$$F_i = \left| x_{i1}^2 + \ldots + x_{i r_i}^2 - x_{i, r_i+1}^2 - \ldots - x_{i n_i}^2 \right|^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < r_i \leqslant n_i \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Пусть $J = (j_1, \ldots, j_k)$, где $j_i = 1$ или 2, если $r_i < n_i$; $j_i = 1$, если $r_i = n_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Обозначим

$$y_i^{(J)} = \begin{cases} x_{i1}, & \text{если } j_i = 1, \\ x_{in_i}, & \text{если } j_i = 2. \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Пусть $G_J = G_J(y)$ – лучевая функция на $\mathbb{R}^{n-1}$, определяемая равенством

$$G_J(y) = \begin{cases} F(-y_2^{(J)} - \ldots - y_k^{(J)}, \; x_{12}, \ldots, x_{kn_k}), & \text{если } j_1 = 1; \\ F(x_{11}, \ldots, x_{1n_1-1}, -y_2^{(J)} - \ldots - y_k^{(J)}, x_{21}, \ldots, x_{kn_k}), & \text{если } j_1 = 2 \end{cases}$$

При этом если $\kappa=1$, то считаем $-y_2^{(\gamma)}-\ldots-y_\kappa^{(\gamma)}=0$. Заметим, что для любых вещественных чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_\kappa$ с условием $\lambda_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_\kappa^{n_\kappa}=\pm 1$ преобразование

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\Omega_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_\kappa\Omega_\kappa\end{pmatrix},$$

где Ω_i - произвольный автоморфизм формы F_i $(i=1,\ldots,\kappa)$, является автоморфизмом формы F. Поэтому по следствию 5 теоремы 3

$$\{\gamma(F)\}^{n-2}\leqslant \max_{\mathfrak{J}}\{\gamma_{n-1}(G_{\mathfrak{J}})\}^{n-1}, \tag{37}$$

где максимум берется по всем допустимым векторам $\mathfrak{J}=(j_1,\ldots,j_\kappa)$. В частности:

(а) $\kappa=1$; $F=|x_1^2+\ldots+x_r^2-x_{r+1}^2-\ldots-x_n^2|^{\frac{1}{2}}$.

Тогда неравенство (37) запишется в виде

$$\{\gamma(F)\}^{n-2}\leqslant\begin{cases}\max\{\gamma_{n-1}(G_1),\ \gamma_{n-1}(G_2)\}^{n-1} & \text{,если } r<n;\\ \{\gamma_{n-1}(G_1)\}^{n-1} & \text{,если } r=n;\end{cases} \tag{38}$$

здесь

$$G_1=|x_2^2+\ldots+x_r^2-x_{r+1}^2-\ldots-x_n^2|^{\frac{1}{2}},$$

$$G_2=|x_1^2+\ldots+x_r^2-x_{r+1}^2-\ldots-x_{n-1}^2|^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $\gamma_{n,r}$ - постоянная Эрмита для арифметического минимума формы $f=x_1^2+\ldots+x_r^2-x_{r+1}^2-\ldots-x_n^2$; $\gamma_n=\gamma_{n,n}$. Тогда (38) равносильно следующим неравенствам (Коркин и Золотарев [2], Морделл [6], Оппенгейм [8-10])

$$(\gamma_n)^{n-2}\leqslant(\gamma_{n-1})^{n-1}; \tag{39}$$

$$(\gamma_{n,r})^{n-2}\leqslant\max\{(\gamma_{n-1,r})^{n-1},\ (\gamma_{n,r-1})^{n-1}\}\ \text{,если } r<n. \tag{40}$$

Конечно, эти неравенства можно вывести и непосредственно из теоремы 3 (следствие I).

(б) $\kappa=n$, $F=|x_1\cdot\ldots\cdot x_n|^{\frac{1}{n}}$.

Тогда (Морделл [3-5])

$$\{\gamma(F)\}^{n-2} \leq \{\gamma_{n-1}(G)\}^{n-1}, \tag{41}$$

где

$$G = G(x_2, \ldots, x_n) = |(x_2 + \ldots + x_n) x_2 \cdot \ldots \cdot x_n|^{\frac{1}{n}}.$$

В частности, для $n=3$ неравенство (4I) позволяет найти $\gamma(F)$ и соответствующие критические решетки (Морделл [4]; Касселс [I6], гл. X, § 3).

(в) $n = r + 2s$, $k = r + s$, $F = |x_1 \cdot \ldots \cdot x_r (y_1^2 + z_1^2) \cdot \ldots \cdot (y_s^2 + z_s^2)|^{\frac{1}{n}}$.

И в этом важном для алгебраической теории чисел случае можно записать неравенство (37) (следует различать случаи $r=0$ и $r>0$. В частности, если $n=3$, $F_3 = |x(y^2+z^2)|^{1/3}$, то

$$\gamma(F_3) \leq \{\gamma_2(G)\}^2, \tag{42}$$

где $G = |(y+z)(y^2+z^2)|^{\frac{1}{3}}$. Это неравенство позволяет найти $\gamma(F_3)$ и соответствующие критические решетки (Морделл [4]; Касселс [I6], гл. X , § 3).

(г) Пусть $\mathcal{L}_n$ - звездное тело

$$|x_1|(x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} \leq 1.$$

Тогда по неравенству (37) (переписанному для критических определителей)

$$\{\Delta(\mathcal{L}_n)\}^{n-2} \geq \{\Delta_{n-1}(\mathcal{L}_{n-1})\}^n. \tag{43}$$

Но если $\mathcal{A}$ - автоморфизм тела $\mathcal{L}_{n-1}$, то $\mathcal{A}^*$ - автоморфизм тела $\mathcal{L}'_{n-1}$, определяемого неравенством

$$(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2)(x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2)^{\frac{n-2}{2}} \leq 1.$$

Тогда по теореме 4

$$\{\Delta_{n-1}(\mathcal{L}_{n-1})\}^{n-2} \geq \{\Delta_{n-2}(\mathcal{L}_{n-2})\}^{n-1} \Delta_{n-1}(\mathcal{L}'_{n-1}). \tag{44}$$

Сравнивая (43) и (44), мы получаем (Армитаж [I3]), что

$$\{\Delta(\mathcal{L}_n)\}^{(n-2)^2} \geq \{\Delta_{n-1}(\mathcal{L}'_{n-1})\}^n \{\Delta_{n-2}(\mathcal{L}_{n-2})\}^{n(n-1)}. \tag{45}$$

Оценка (45) имеет приложения в теории одновременных диофантовых приближений – в вопросе об оценке сверху постоянной $c>0$, для которой диофантово неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\theta_i-\frac{p_i}{q}\right)^2<\left(\frac{c}{q}\right)^{\frac{2}{n-1}},$$

где $\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}$ – вещественные числа, имеет бесконечно много решений в целых числах $q>0$, $p_1,\ldots,p_{n-1}$ (см. Армитаж [I3], теорема 3, $n=4$).

2^0. Пусть $n=3$ и

$$F(x)=|x_1^3+x_2^3+x_3^3|^{\frac{1}{3}}.$$

Для каждого вещественного вектора $z=(z_1,z_2,z_3)$ определим функцию

$$G(z)=\gamma_2(\Phi_z),$$

где Φ_z – двумерная лучевая функция

$$\Phi_z=\Phi_z(x_1,x_2)=\left\{(z_3x_1)^3+(z_3x_2)^3-(z_1x_1+z_2x_2)^3\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

Тогда по теореме I (записанной в терминах постоянной Эрмита – см. следствие)

$$\{\gamma(F)\}^2\leq\gamma(G), \tag{46}$$

что приводит к некоторым оценкам для $\gamma(F)$ (Морделл [7]).

3^0. Пусть $n=3$ и

$$F(x)=\left\{|x_1|\max(x_2^2,\ x_3^2)\right\}^{\frac{1}{3}}$$

Для каждого $z=(z_1,z_2,z_3)$ определим функцию

$$G(z)=\gamma_2(\Phi_z),$$

где $\Phi_z=\Phi_z(x_1,x_2)$ – двумерная лучевая функция области

$$|z_2x_2+z_3x_3|\max\{x_2^2,\ x_3^2\}\leq|z_1|.$$

Тогда по теореме I

$$\{\gamma(F)\}^2\leq\gamma(G), \tag{47}$$

что приводит к некоторым оценкам для $\gamma(F)$ (Мюллендер [II], Дэвенпорт [I2]), связанным с одновременными диофантовыми приближениями двух вещественных чисел.

10. Заключительные замечания. I°. Как было показано в п.7, "гипотеза" ($\mathcal{M}$) не верна. Однако ее в какой-то мере можно спасти, если обобщить понятие критического определителя. В случае $F(x)=|x|$ (т.е. в случае единичного шара $\mathcal{L}$) пусть $\Delta_n^{(k)}$ – точная нижняя граница определителей n-мерных решеток Λ, обладающих тем свойством, что ни одна k-мерная подрешетка решетки Λ не имеет определителя, меньшего 1 (т.е. если $L^{(k)}\subset\Lambda$ и $L^{(k)}$ – k-мерная решетка, то $d_k(L^{(k)})\geqslant 1$); в частности, $\Delta_n^{(1)}=\Delta_n=\Delta(\mathcal{L})$. Тогда Мюллендер [15] формулирует следующее предложение.

Теорема 5. Пусть $1\leqslant k\leqslant n-1$. Тогда

$$(\Delta_n)^k \geqslant (\Delta_k)^n (\Delta_n^{(n-k)})^{n-k}. \tag{48}$$

Представляет некоторый интерес определение $\Delta_n^{(k)}(\mathcal{L})$ для произвольного звездного тела $\mathcal{L}$ и доказательство неравенства типа (48) в общем случае. Однако ценность этой проблемы в значительной степени ставится под вопрос тем обстоятельством, что оценка $\Delta_n^{(n-k)}$ вряд ли проще оценки $\Delta_n=\Delta_n^{(1)}$.

2°. Метод Морделла можно применять и для нахождения критических решеток в том случае, когда в (19) или (21) (или (32)) имеет место знак равенства (ср. Касселс [16], гл. X, § 3). Желательно рассмотреть этот вопрос в возможно общей ситуации.

3°. Метод Морделла можно применять и к множествам, не являющимся звездными телами. Например, можно оценить (ср. Касселс [16], гл. X, § 3; Леккеркеркер [14]) критический определитель множества $\mathcal{L}_{n,r}$

$$0<|x_1^2+\ldots+x_r^2-x_{r-1}^2-\ldots-x_n^2|<1.$$

В случае $n=4$, $r=2$ эта оценка позволяет вычислить $\Delta(\mathcal{L}_{n,r})$ (Касселс, цит.соч.).

Мы надеемся посвятить обобщению метода Морделла на звездные множества специальную публикацию.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hermite Ch. Extraits de lettres de M.Ch.Hermite a M.Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres.Premiere lettre. J.reine angew. Math., 1850, 40, 261-278 = Oeuvres.I, 100-121 [см.также: Bachmann P. Die Arithmetik der quadratischen Formen, 2.Abt., 1923, 253-254].

[2] Коркин А.Н., Золотарев Е.И. Sur les formes quadratiques positives quaternaires. Math. Ann., 1872, 5, 581-583, [Соч.Е.И.Золотарева, вып.I, Л., 1931, 66-68].

[3] Mordell L.J. The product of homogeneous linear forms. J.London Math.Soc., 1941, 16, 4-12.

[4] Mordell L.J. The product of three homogeneous linear ternary forms. J.London Math.Soc., 1942, 17, 107-115.

[5] Mordell L.J. The product of n homogeneous forms.

[6] Mordell L.J. Observation on the minimum of positive definite quadratic form in eight variables. J.London Math.Soc., 1944, 19, 3-6.

[7] Mordell L.J. On the minimum of ternary cubic form. J.London, Math.Soc., 1944, 19, 6-12.

[8] Oppenheim A. The minima of indefinite quaternary quadratic forms of signature zero. Proc.Nat.Acad.Sci. USA, 1929, 15, 724-727. [см.также : Oppenheim A. The minima of indefinite quaternary quadratic forms. Ann, of Math.(2), 1931, 32, 271-298].

[9] Oppenheim A. Remark on the minimum of quadratic forms. J.London Math.Soc., 1946, 21, 251-252.

[10] Oppenheim A. Values of quadratic forms, I. Quart.J.Math.(2), 1953, 4, 54-59.

[11] Mullender P. Simultaneous approximation. Ann.of Math.(2), 1950, 52, 417-426.

[12] Davenport H. Simultaneous diophantine approximation. Proc. London Math.Soc. (3), 1952, 2, 406-416.

[13] Armitage J.V. On a method of Mordell in the geometry of numbers. Mathematika, 1955, 2, 132-140.

[14] Lekkerkerker C.G. Eine Mordell'sche Methode in der Geometrie der Zahlen. J.reine angew. Math., 1961, 206, 20-25.

[15] Mullender P. Some remarks on a method of Mordell in the geometry of numbers. Acta arithm., 1964, 9, 301-304.

[16] Cassels J.W.S. An introduction to the geometry of numbers, Berlin, 1959, 268-279, [русск. пер.: Касселс Дж. Введение в геометрию чисел, 1965, 328-340].

[17] Lekkerkerker C.G. Geometry of numbers, Groningen, 1969, 281-286.

[18] Малышев А.В. Замечание о звездном множестве. Этот Сборник, стр. 94-96.