Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Р. Г. Алиев, К вопросу о конкретных критериях для оценок длин докритических промежутков,
Изв. вузов. Матем., 1964, номер 5, 3–7

https://www.mathnet.ru/ivm8636

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.84
19 января 2026 г., 11:30:26

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1964 МАТЕМАТИКА № 5 (42)

Р. Г. Алиев

К ВОПРОСУ О КОНКРЕТНЫХ КРИТЕРИЯХ ДЛЯ ОЦЕНОК ДЛИН ДОКРИТИЧЕСКИХ ПРОМЕЖУТКОВ

Для уравнения

$$L[y] \equiv y^{\mathrm{IV}} - g_3(x)y''' - g_2(x)y'' - g_1(x)y' - g_0(x)y = f(x) \qquad (1)$$

с суммируемыми коэффициентами рассмотрим задачи со следующими краевыми условиями:

$$y(\alpha) = A, \quad y'(\alpha) = B, \quad y''(\alpha) = C, \quad y(\beta) = D, \qquad (2)$$
$$y(\alpha) = A, \quad y(\beta) = B, \quad y'(\beta) = C, \quad y''(\beta) = D, \qquad (3)$$
$$y(\alpha) = A, \quad y'(\alpha) = B, \quad y(\beta) = C, \quad y'(\beta) = D, \qquad (4)$$
$$y(\alpha) = A, \quad y(\gamma) = B, \quad y'(\gamma) = C, \quad y(\beta) = D, \qquad (5)$$
$$y(\alpha) = A, \quad y'(\alpha) = B, \quad y(\gamma) = C, \quad y(\beta) = D, \qquad (6)$$
$$y(\alpha) = A, \quad y(\gamma) = B, \quad y(\beta) = C, \quad y'(\beta) = D, \qquad (7)$$
$$y(\alpha) = A, \quad y(\gamma) = B, \quad y(\delta) = C, \quad y(\beta) = D, \qquad (8)$$

где $\alpha < \gamma < \delta < \beta$.

Введем некоторые определения и обозначения. Функция $r(s)$ аргумента s определяет максимальный промежуток $[s, r(s))$ с началом в точке s, обладающий таким свойством, что при любых $\alpha, \beta \in [s, r(s))$ любая из вышеприведенных краевых задач имеет единственное решение. Назовем $[s, \rho(s))$ докритическим для данной (из вышеприведенных) краевой задачи, если при любых $\alpha, \beta \in [s, \rho(s))$ эта задача имеет единственное решение. Максимальный из докритических промежутков с общим началом s для задачи (1)—(2) обозначим, следуя [3], через $[s, r_{31}(s))$. Через $[s, r_{13}(s))$ обозначим максимальный докритический промежуток для задачи (1)—(3). Аналогичным образом обозначим через $r_{22}(s)$, $r_{121}(s)$, $r_{211}(s)$, $r_{112}(s)$ и $r_{1111}(s)$ правые границы докритических промежутков с левой границей в точке s для задач (1)—(4), (1)—(5), (1)—(6), (1)—(7) и (1)—(8) соответственно.

В статье рассматривается вопрос об оценках значений $r_{31}(s)$, $r_{13}(s)$ и $\min[r_{31}(s), r_{13}(s)]$ для уравнения $L[y] = 0$. Используя эти оценки и теоремы 1—6, 10, 11, 15, 16 работы [4], можно получить оценки для $r_{121}(s)$, $r_{211}(s)$, $r_{112}(s)$. Используя идею теоремы 4 работы [1], докажем следующее утверждение об условии, при котором $[a, b)$ принадлежит промежуткам $[a, r_{31}(a))$ и $[a, r_{13}(a))$.

Теорема 1. *Для того, чтобы $b < r_{31}(a)$ $(b < r_{13}(a))$, необходимо и достаточно, чтобы в треугольнике $a \leqslant s \leqslant x \leqslant b$ $(a \leqslant x \leqslant$*

$\leqslant s \leqslant b$) *существовала такая функция* $W(x, s)$ *с абсолютно непрерывной производной* $\frac{\partial^3}{\partial x^3} W(x, s)$, *что*

а) $\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} W(x, s)\right]_{x=s} = \delta_{k,3}, \quad k = 0, 1, 2, 3;$

б) $W(x, s) > 0, \ L[W(x, s)] \leqslant 0$ *при* $a < s < x < b$
$(W(x, s) < 0, \ L[W(x, s)] \leqslant 0$ *при* $a < x < s < b)$.

Доказательство. Если функция Коши $K(x, s)$ операции $L[y]$ удовлетворяет неравенствам $K(x, s) > 0$ при $a < s < x < b$ и $K(x, s) < 0$ при $a < x < s < b$, то $b < r_{31}(a)$, $b < r_{13}(a)$. Действительно, всякое решение $v(x)$ уравнения $L[y] = 0$, имеющее в точке α трехкратный нуль пропорционально $K(x, \alpha)$. Поэтому сохранение знака функции $K(x, s)$ является условием того, что решение, имеющее в (a, b) трехкратный нуль, более нулей в (a, b) не имеет. Докажем, что условие теоремы необходимо и достаточно для сохранения знака $K(x, s)$. Обозначим $\psi(x, s) = L[W(x, s)]$. По формуле Коши, имеем

$$W(x, s) = K(x, s) + \int_s^x K(x, \tau)\psi(\tau, s)\,d\tau$$

или

$$K(x, s) = \int_s^x \{-\psi(\tau, s)\} K(x, \tau)\,d\tau + W(x, s). \tag{9}$$

Случай 1. $x > s$. Интегральное уравнение Вольтерра (9) имеет положительное ядро $\{-\psi(\tau, s)\}$. Отсюда, в силу неравенства $W(x, s) > 0$ и теоремы об интегральном неравенстве [2] [1], получаем, что $K(x, s) > 0$ при $a < s < x < b$.

Случай 2. $x < s$.

$$K(x, s) = \int_x^s \{-\psi(\tau, s)\} K(x, \tau)\,d\tau + W(x, s).$$

В силу неравенства $W(x, s) < 0$, как и выше, $K(x, s) > 0$ при $a < x < s < b$. Достаточность доказана. Необходимость получим, положив $K(x, s) = W(x, s)$.

Из теоремы 1 непосредственно вытекают

Следствие 1. Для того, чтобы $b < \min[r_{31}(a), r_{13}(a)]$ необходимо и достаточно, чтобы в квадрате $x, s \in (a, b)$ существовала такая

---

[1] Упомянутая теорема состоит в том, что, если в уравнении

$$y(x, s) = \int_s^x G(\tau, s)\, y(x, \tau)\,d\tau + f(x, s)$$

ядро $G(x, s) \geqslant 0$, $f(x, s) \geqslant 0$ $(f(x, s) \leqslant 0)$, то решение $y(x, s) \geqslant 0$ $(y(x, s) \leqslant 0)$. Действительно: $y(x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k(x, s)$, где $N_0(x, s) = f(x, s)$, $N_{k+1}(x, s) = \int_s^x G(\tau, s) N_k(x, \tau)\,d\tau$. Но $G(x, s) \geqslant 0$, $N_0(x, s) \geqslant 0$. Поэтому $N_k(x, s) \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, следовательно, $\sum_{k=0}^{\infty} N_k(x, s) \geqslant 0$.

функция $W(x, s)$ с абсолютно непрерывной третьей производной, что

а) $\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k} W(x, s)\right]_{x=s} = \delta_{k,3} \quad (k=0, 1, 2, 3)$,

б) $W(x, s) > 0, \quad L[W(x, s)] \leqslant 0$ при $a < s < x < b$,

в) $W(x, s) < 0, \quad L[w(x, s)] \leqslant 0$ при $a < x < s < b$.

Следствие 2. Если $r_{22}(a) > \min[r_{31}(a), r_{13}(a)]$, то существование функции $W(x, s)$, удовлетворяющей условиям теоремы 1, необходимо и достаточно для того, чтобы $b < r(a)$.

Справедливость следствия 2, очевидна из того, что, если $r_{22}(a) > \min[r_{31}(a), r_{13}(a)]$, то, по теореме 2 работы [4], $r(a) = \min[r_{31}(a), r_{13}(a)]$.

Следствие 3. Если в уравнении $y^{\mathrm{IV}} = g_2(x)y'' + g_0(x)y$ $g_2(x) \geqslant 0$, $g_0(x) \geqslant 0$, то $r_{31}(a) = \infty$ при любом a.

Справедливость этого утверждения получим, положив $W(x, s) = \frac{(x-s)^3}{3!}$ и применив теорему 1 к рассматриваемому уравнению.

Следствие 4 (теорема сравнения). *Пусть* $g_1(x) \leqslant g(x) \leqslant g_2(x)$ *и данный промежуток* $[a, b)$ *является докритическим относительно задач с краевыми условиями* (2) *и* (3) *для уравнений* $L_1[y] \equiv y^{\mathrm{IV}} - g_1(x)y = 0$, $L_2[y] \equiv y^{\mathrm{IV}} - g_2(x)y = 0$, *т. е.* $b < \min[r_{31}(a), r_{13}(a)]$ *для уравнения* $L_1[y] = 0$ *и уравнения* $L_2[y] = 0$. *Тогда и для* $L[y] \equiv y^{\mathrm{VI}} - g(x)y = 0$ *имеем* $b < \min[r_{31}(a), r_{13}(a)]$.

Доказательство. Пусть $K_1(x, s)$ и $K_2(x, s)$ — функции Коши для уравнений $L_1[y] = 0$, $L_2[y] = 0$ соответственно. Положим

$$W(x, s) = \begin{cases} K_1(x, s) & \text{при } a \leqslant s < x < b, \\ K_2(x, s) & \text{при } a \leqslant x \leqslant s < b. \end{cases}$$

Тогда $W(x, s)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Действительно, для $a \leqslant s < x < b$ имеем $W(x, s) > 0$; $L[W(x, s)] \equiv W^{\mathrm{IV}} - gW = W^{\mathrm{IV}} - g_1 W - \{g - g_1\} W = -\{g - g_1\} K_1(x, s) \leqslant 0$, в силу условия следствия и неравенства $K_1(x, s) > 0$. Точно также для $a \leqslant x \leqslant s < b$ имеем $W(x, s) < 0$, $L[W(x, s)] \equiv W^{\mathrm{IV}} - g_2 W - \{g - g_2\} W = -\{g - g_2\} K_2(x, s) \leqslant 0$. Отсюда и из теоремы 1 вытекает справедливость утверждения следствия.

Теорема 2. *Если* $r_{31}(a) = \min[r_{31}(a), r_{13}(a)]$ *и* $r_{22}(a) > \max[r_{31}(a), r_{13}(a)]$, *то существование в* $[a, b)$ *функции* $v_1(x)$ $(v_2(x))$, *имеющей абсолютно непрерывную третью производную, и обладающей свойствами*

а) $\left[\frac{d^k v_1(x)}{dx^k}\right]_{x=a} = \delta_{k,3} \left(\left[\frac{d^k v_2(x)}{dx^k}\right]_{x=b} = \delta_{k,3}\right) \quad (k=0, 1, 2, 3)$,

б) $v_i(x) > 0$, $L[v_i(x)] \leqslant 0$, $i = 1$ $(i = 2)$ *при* $x \in (a, b)$, *необходимо и достаточно для того, чтобы* $b < \min[r_{31}(a), r_{13}(a)]$.

Для доказательства теоремы предварительно докажем вспомогательную лемму, введя такое определение: Следуя работам [3], [5], обозначим через $k(s)$ первый справа от s нуль функции $K(x, s)$. Таким образом, $K(k(s), s) = 0$. Через $k^*(s)$ обозначим первый слева от s нуль функции $K(x, s)$.

Лемма. *Если* $r_{22}(s) > \max[r_{31}(s), r_{13}(s)]$ *и* $r_{31}(s) = r(s)$, *то* $k(s)$ *и* $k^*(s)$ *монотонны.*

Доказательство. Действительно, если $r_{31}(s) = r(s) < r_{22}(s)$, то, на основании теоремы 15 работы [4], для решений краевой задачи (1)—(2) справедлива теорема о разделении нулей, аналогичная теореме Штурма. С другой стороны, при условии $r_{13}(s) < r_{22}(s)$, на

основании теоремы 16, аналогичное утверждение справедливо и для решений краевой задачи (1)—(3). Отсюда следует справедливость утверждения леммы.

Доказательство теоремы. Необходимость получим, положив $v_1(x)=K(x, a)$ $(v_2(x)=-K(x, b))$.

Достаточность. Допустим, что теорема неверна, т. е. $v_1(x)>0$ в (a, b) $(v_2(x)>0$ в $(a, b))$, но $K(x, s)$ имеет нуль при $a<s<x<b$ $(a<x<s<b)$. Пусть ξ_1 — первый справа нуль $K(x, a)$ в (a, b), если такой нуль существует. Пусть ξ_2 — первый слева нуль $K(x, b)$ в (a, b), если такой существует. Если теорема неверна, то, в силу леммы, существует $\xi_1(\xi_2)$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть ξ_1 существует. Тогда $K(x, s)$ сохраняет знак при $x=\xi_1$, $s\in(a, \xi_1)$ в силу монотонности $k(s)$. По формуле Коши,

$$v_1(x)=K(x, a)+\int_a^x K(x, s)\,L[v_1(s)]\,ds,$$

откуда

$$v_1(\xi_1)-K(\xi_1, a)=\int_a^{\xi_1} K(\xi_1, s)\,L[v_1(s)]\,ds\leqslant 0,$$

т. е. $v_1(\xi_1)\leqslant 0$, что противоречит условию теоремы.

2. Пусть ξ_2 существует. Тогда $K(x, s)$ сохраняет знак при $x=\xi_2$, $s\in(\xi_2, b)$, в силу монотонности $k^*(s)$. По формуле Коши,

$$v_2(\xi_2)-K(\xi_2, b)=\int_b^{\xi_2} K(\xi_2, s)\,L[v_2(s)]\,ds\leqslant 0, \text{ т. е. } v_2(\xi_2)\leqslant 0.$$

Полученное противоречие доказывает достаточность условий теоремы.

Замечание. Если $Q(x)\leqslant 0$, то для уравнения $y^{\mathrm{IV}}=Q(x)\,y$, на основании теоремы 2 работы [6], $r_{22}(s)=\infty$. Из теоремы 2 непосредственно вытекает

Следствие. Если $r_{31}(a)=\min[r_{31}(a), r_{13}(a)]$ и $r_{22}(a)>\max[r_{31}(a), r_{13}(a)]$, то существование в $[a, b)$ пары функций $v_1(x)$ и $v_2(x)$, имеющих абсолютно непрерывную третью производную и обладающих свойством

а) $\left[\dfrac{d^k v_1(x)}{dx^k}\right]_{x=a}=\left[\dfrac{d^k v_2(x)}{dx^k}\right]_{x=b}=\delta_{k,3}$ $(k=0, 1, 2, 3)$,

б) $v_1(x)>0$ при $x\in(a, b)$, $v_2(x)>0$ при $x\in(a, b)$,

в) $L[v_i(x)]\leqslant 0$ при $x\in(a, b)$, $i=1, 2$,

необходимо и достаточно для того, чтобы $b<\min[r_{31}(a), r_{13}(a)]$.

Для частного, но весьма распространенного в приложениях уравнения вида

$$y^{\mathrm{IV}}-[g(x)\,y]'-q(x)\,y=0, \tag{10}$$

в силу самосопряженности, имеем $r_{31}(s)=r_{13}(s)$. Для оценки $r_{22}(s)$ здесь можно воспользоваться теоремой сравнения Л. Д. Николенко [7], утверждающей, что, если в промежутке $[a, b)$ нетривиальное решение уравнения (10) не имеет пары нулей кратности выше первой, то таким же свойством обладают решения уравнения

$$y^{\mathrm{IV}}-[g_1(x)\,y]'-q_1(x)\,y=0,$$

если в $[a, b)$ выполняются неравенства $g_1(x)\leqslant g(x)$, $q_1(x)\leqslant q(x)$.

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить руководителей Ижевского семинара Н. В. Азбелева и З. Б. Цалюка за предложенную задачу и помощь в работе.

г. Казань

Поступило
4 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк. О задаче Чаплыгина. УМЖ, т. 10, № 1, 1958.
2. Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк. Об интегральных неравенствах, 1. Матем. сб., т. 56 (98) : 3, 1962.
3. Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк. К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка. Матем. сб., т. 51(93) : 4, 1960.
4. Р. Г. Алиев. К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения четвертого порядка. Итоговая науч. аспирантск. конф. за 1962 год (тезисы докладов), стр. 123—127. Изд. Казанск. ун-та, 1963.
5. Н. В. Азбелев. О задаче Чаплыгина (об одном методе оценок). Автореф. докт. диссерт., Казань, 1962.
6. I. Mikusinski. Sur l'équation $x^{(n)} + A(t)x = 0$. Ann. Polon. math., v. 1, № 2, 1955.
7. Л. Д. Николенко. Некоторые критерии неколебательности дифференциального уравнения четвертого порядка. ДАН СССР, т. 114, № 3, 1957.
8. Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк. Заметка о неосцилляции решений дифференциального уравнения n-го порядка. Учен. зап. Удмурт. педин-та, вып. 12, 1958.
9. Е. С. Чичкин. К вопросу о неосцилляции для линейных уравнений четвертого порядка. Изв. вузов, Матем., № 3, 1958.
10. Е. С. Чичкин. Об одной неосцилляционной теореме для самосопряженного дифференциального уравнения 4-го порядка. Изв. вузов, Матем., № 4, 1960.

Р. Г. АЛИЕВ. О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

(аннотация статьи, принятой к печати)

Продолжаются исследования работ Н. В. Азбелева, З. Б. Цалюка (Матем. сб., т. 56 (98) : 4, 1960), Р. Г. Алиева (Итоговая научная аспирантская конференция за 1962 год, Казань, 1962), Р. Г. Алиева, И. Н. Иноземцевой (Тр. Ижевского матем. семинара, вып. 1, 1963), а именно, для линейного уравнения 4-го порядка с суммируемыми коэффициентами рассматриваются некоторые законы распределения нулей. Например, доказаны утверждения, которые в обозначениях, принятых в указанных работах, формулируются (теорема 7) следующим образом: $r(s) = \min[r_{211}(s), r_{112}(s)] = \min[r_{112}(s), r_{121}(s)]$. Если $r_{31}(s) < \min[r_{13}(s), r_{22}(s)]$, то не существует нетривиальное решение уравнения $L[y] = 0$, имеющее в $[s, r_{31}(s)]$ три различных нуля, из которых по крайней мере один является двухкратным (теорема 4). Приводятся аналогичные условия того, что решение не может иметь в данном промежутке четыре различных нуля и пару кратных нулей. (Работа поступила в журнал „Математика" 29.X.1963).