Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. N. Pavlenko, V. V. Vinokur, Теоремы существования для уравнений с некоэрцитивными разрывными операторами,
Vestnik Chelyabinsk. Gos. Univ., 2002, Issue 6, 104–113

https://www.mathnet.ru/eng/vchgu163

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.85
December 16, 2025, 15:41:10

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С НЕКОЭРЦИТИВНЫМИ РАЗРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В.Н. Павленко, В.В. Винокур *
Челябинский государственный университет

В гильбертовом пространстве рассматриваются уравнения с некоэрцитивным оператором, равным сумме линейного фредгольмова отображения нулевого индекса и компактного оператора (вообще говоря, разрывного). С помощью регуляризации и теории топологической степени устанавливается существование решений, которые являются точками непрерывности оператора уравнения.

Ключевые слова: *разрывные нелинейности, некоэрцитивные операторы, регуляризация, степень отображения.*

1. Введение

В гильбертовом пространстве H рассматриваются уравнения вида

$$Au + Tu = f, \tag{1.1}$$

где $A : H \to H$ — линейное фредгольмово отображение нулевого индекса, что означает замкнутость области значений $R(A)$ оператора A, конечномерность ядра $\ker A$ и равенство размерностей $\ker A$ и $\ker A^*$; оператор $T : H \to H$ (возможно, разрывный) компактен и удовлетворяет условию

$$Tu/\|u\| \to 0 \text{ при } \|u\| \to +\infty, \tag{1.2}$$

$f \in H$. Дополнительно предполагается, что оператор A принадлежит классу $(S)_+$ [1], то есть для произвольной последовательности $(u_n) \subset H$ из $u_n \rightharpoonup u_0$ и

$$\limsup_{n\to\infty} (Au_n, u_n - u_0) \le 0 \tag{1.3}$$

следует сильная сходимость (u_n) к u_0 в H.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Последовательность $(u_k) \subset H$ будем называть *A-последовательностью*, если $\|u_k\| \to \infty$, $\|u_k\|^{-1} \cdot u_k \to v \in \ker A$.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 97-01-00-444).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Будем говорить, что для элемента $f \in H$ в уравнении (1.1) *выполнено условие (i)*, если существует линейный изоморфизм M между $\ker A$ и $\ker A^*$ такой, что для любой A-последовательности $(u_k) \subset H$ имеет место хотя бы одно из неравенств

$$\limsup_{k\to\infty} (Tu_k, Mv) > (f, Mv)\,, \tag{1.4}$$

$$\liminf_{k\to\infty} (Tu_k, Mv) < (f, Mv)\,. \tag{1.5}$$

При сделанных выше предположениях относительно A и T, если f в уравнении (1.1) удовлетворяет условию (i), то с помощью регуляризации уравнения (1.1) и теории топологической степени для многозначных компактных векторных полей устанавливается существование $u \in H$, удовлетворяющего включению

$$f - Au \in STu, \tag{1.6}$$

где ST — секвенциальное замыкание оператора T [2]: для любого $u \in H$ множество STu совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества слабо предельных точек для последовательностей вида Tu_n, $u_n \to u$. Найдены условия на точки разрыва оператора T, при выполнении которых включение (1.6) влечет для u справедливость равенства (1.1) и непрерывность T в точке u.

Для уравнений с разрывными операторами проблема существования решений, на которых оператор уравнения непрерывен, изучалась в совместных работах М. А. Красносельского с его учениками А. В. Покровским и А. В. Лусниковым [3 – 5] для уравнений с монотонными отображениями в полуупорядоченных пространствах и работах В. Н. Павленко [6 – 9] методом монотонных операторов, а в [10 – 12] — вариационным методом. В отличие от перечисленных исследований в данной работе не предполагается ни монотонность, ни квазипотенциальность, ни коэрцитивность оператора уравнения.

2. Теорема существования

Пусть Q — отображение из гильбертова пространства H в H.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Элемент $u \in H$ называется *сильно регулярной точкой* для оператора Q, если существует $h \in H$ такой, что

$$\limsup_{v\to 0} (Q(u+v), h) < 0. \tag{2.1}$$

Замечание 2.1. Если для некоторого $h \in H$ $\liminf_{v \to 0} (Q(u+v), h) > 0$, то u — сильно регулярная точка отображения $-Q$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Элемент $u \in H$ назовем *точкой разрыва* оператора Q, если найдется последовательность $(u_n) \subset H$, сильно сходящаяся к u, и вектор $y \in H$ такие, что (Qu_n, y) не сходится к (Qu, y), то есть u не является точкой деминепрерывности оператора Q.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть выполнены условия:*

1) *линейный оператор $A : H \to H$ фредгольмов, нулевого индекса и принадлежит классу $(S)_+$;*

2) *отображение $T : H \to H$ компактно и удовлетворяет условию (1.2);*

3) *для элемента $f \in H$ выполнено условие (i).*

Тогда найдется $u_0 \in H$, удовлетворяющее включению (1.6). Если дополнительно предположить, что точки разрыва оператора $Qu = Au + Tu - f$ сильно регулярны, то u_0 — решение уравнения (1.1) и точка непрерывности оператора T.

ЛЕММА 2.1. *Предположим, что отображение $T : H \to H$ компактно, f удовлетворяет условию (i) с неравенством (1.4) или (1.5) и выполнено условие 1 теоремы 2.1. Тогда для произвольной A-последовательности (u_k) и последовательности (g_k), $g_k \in STu_k$, выполняется неравенство*

$$\limsup_{k \to \infty} (g_k, Mv) > (f, Mv)\,, \tag{2.2}$$

или, соответственно,

$$\liminf_{k \to \infty} (g_k, Mv) < (f, Mv)\,, \tag{2.3}$$

где ST — секвенциальное замыкание оператора T, M — линейный изоморфизм между $\ker A$ *и* $\ker A^*$.

Доказательство леммы 2.1. Множество

$$T_s(u) = \{z \in H : \exists (u_k) \subset H \text{ такая, что } u_k \to u, \quad Tu_k \to z\}$$

в силу компактности оператора T совпадает с множеством

$$T_s(u) = \{z \in H : \exists (u_k) \subset H, \text{ для которой } u_k \to u, \quad Tu_k \rightharpoonup z\}\,.$$

Поэтому STu совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой $\overline{\text{co}}\ T_s(u)$ множества $T_s(u)$. Пусть $(u_k) \subset H$ — A-последовательность и $g_k \in T_s(u_k)$. По определению $T_s(u)$ найдутся последовательности $u_{nk} \to u_k$ $(k \in \mathbb{N})$ такие, что $Tu_{nk} \to g_k$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется $n(k) \in \mathbb{N}$, для которого $\|u_{n(k)k} - u_k\| < k^{-1}$ и

$$\|Tu_{n(k)k} - g_k\| < k^{-1}\,. \tag{2.4}$$

Так как $\|u_{n(k)k}\| \geq \|u_k\| - \|u_{n(k)k} - u_k\| \geq \|u_k\| - \dfrac{1}{k}$, то $\|u_{n(k)k}\| \to +\infty$. Из неравенств

$$1 - \frac{\|u_k - u_{n(k)k}\|}{\|u_{n(k)k}\|} \leq \frac{\|u_k\|}{\|u_{n(k)k}\|} \leq 1 + \frac{\|u_k - u_{n(k)k}\|}{\|u_{n(k)k}\|}$$

и равенства

$$\frac{u_{n(k)k}}{\|u_{n(k)k}\|} = \frac{u_{n(k)k} - u_k}{\|u_{n(k)k}\|} + \frac{u_k}{\|u_k\|} \cdot \frac{u_k}{\|u_{n(k)k}\|}$$

следует сильная сходимость $u_{n(k)k}/\|u_{n(k)k}\|$ к v. Согласно свойству (i)

$$\limsup_{k\to\infty}(T(u_{n(k)k}), Mv) > (f, Mv) \qquad \left(\liminf_{k\to\infty}(T(u_{n(k)k}), Mv) < (f, Mv)\right).$$

Отсюда и из (2.4) получим

$$\limsup_{k\to\infty}(g_k, Mv) = \limsup_{k\to\infty}(T(u_{n(k)k}), Mv) > (f, Mv) \tag{2.5}$$

$$\left(\liminf_{k\to\infty}(g_k, Mv) = \liminf_{k\to\infty}(T(u_{n(k)k}), Mv) < (f, Mv)\right). \tag{2.6}$$

Таким образом доказано, что для любой A-последовательности $(u_k) \in H$ и последовательности (g_k) с $g_k \in T_s(u_k)$ верно (2.5) (соответственно (2.6)).

Фиксируем A-последовательность $(u_k) \subset H$ и докажем существование таких $k_0 \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, что для любого $k > k_0$ при произвольном выборе $g_k \in T_s(u_k)$ имеет место неравенство

$$(g_k, Mv) > (f, Mv) + \varepsilon \quad \Big((g_k, Mv) < (f, Mv) - \varepsilon\Big).$$

Допустим противное, тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ найдутся номер $n(k) \in \mathbb{N}$ и элемент $g_{n(k)} \in T_s(u_{n(k)})$, для которых верно неравенство

$$(g_{n(k)}, Mv) \leq (f, Mv) + \frac{1}{k} \quad \left((g_{n(k)}, Mv) \geq (f, Mv) - \frac{1}{k}\right),$$

что влечет

$$\limsup_{k\to\infty}(g_{n(k)}, Mv) \le (f, Mv) \qquad \left(\liminf_{k\to\infty}(g_{n(k)}, Mv) \ge (f, Mv)\right).$$

Но это противоречит доказанному выше неравенству (2.5) ((2.6)) применительно к последовательностям $(u_{n(k)})$ и $(g_{n(k)})$.

Пусть дана A-последовательность $(u_k) \subset H$ и $g_k \in \text{co}\, T_s(u_k)$. Тогда $g_k = \sum\limits_{j=1}^{n(k)} \alpha_{jk} g_{jk}$, $g_{jk} \in T_s(u_k)$, $\alpha_{jk} \ge 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{n(k)} \alpha_{jk} = 1$. Как показано выше, существуют $k_0 \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для любого $k > k_0$

$$(g_{jk}, Mv) > (f, Mv) + \varepsilon \quad \Big((g_{jk}, Mv) < (f, Mv) - \varepsilon\Big), \quad j = 1, \dots, n(k).$$

Поэтому для произвольного $k > k_0$

$$(g_k, Mv) = \sum_{j=1}^{n(k)} \alpha_{jk}(g_{jk}, Mv) > (f, Mv) + \varepsilon \quad \Big((g_k, Mv) < (f, Mv) - \varepsilon\Big).$$

Отсюда

$$\limsup_{k\to\infty}(g_k, Mv) \ge (f, Mv) + \varepsilon, \tag{2.7}$$

$$\liminf_{k\to\infty}(g_k, Mv) \le (f, Mv) - \varepsilon. \tag{2.8}$$

Пусть, наконец, дана A-последовательность $(u_k) \subset H$ и $g_k \in STu_k = \overline{\text{co}}\, T_s(u_k)$. Тогда для любого натурального k существует последовательность $(g_{nk}) \subset \text{co}\, T_s(u_k)$ такая, что $g_{nk} \to g_k$ при $n \to \infty$. Выше было установлено существование $k_0 \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, для которых

$$(g_{nk}, Mv) > (f, Mv) + \varepsilon \ \ \forall k > k_0 \quad \Big((g_{nk}, Mv) < (f, Mv) - \varepsilon \ \ \forall k > k_0\Big),$$

что немедленно влечет (2.7) ((2.8)). Лемма 2.1 доказана.

ЛЕММА 2.2. *Пусть отображение $Q : H \to H$ локально ограничено и для некоторых $u, h \in H$ выполняется неравенство (2.1). Тогда для любого $y \in SQu$ верно неравенство*

$$(y, h) < 0, \tag{2.9}$$

где SQ — секвенциальное замыкание оператора Q.

Доказательство леммы 2.2. Пусть $Q_w(u) = \{z \in H : \exists (u_k) \subset H$ такая, что $u_k \to u$, $Tu_k \rightharpoonup z\}$, тогда $SQu = \overline{\text{co}}\, Q_w(u)$. Из (2.1) следует существование положительных ε и δ таких, что

$$(Q(u+v), h) < -\varepsilon \tag{2.10}$$

для любого $v \in H$ с $\|v\| < \delta$. Если $y \in Q_w(u)$, то найдется последовательность $(u_k) \subset H$, сильно сходящаяся к u, для которой $Qu_k \rightharpoonup y$. Отсюда и из (2.10) следует неравенство $(y, h) \leq -\varepsilon$. Пусть $y \in \operatorname{co} Q_w(u)$. Тогда $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k y_k$, $y_k \in Q_w(u)$, $\alpha_k \geq 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$. Поэтому

$$(y, h) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (y_k, h) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (-\varepsilon) = -\varepsilon. \tag{2.11}$$

Наконец, если $y \in SQu$, то существует последовательность $(y_n) \subset \operatorname{co} Q_w(u)$, сильно сходящаяся к y. Так как в силу (2.11) $(y_n, h) \leq -\varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то в пределе при $n \to \infty$ получим $(y, h) \leq -\varepsilon$. Лемма 2.2 доказана полностью.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть P — ортопроектор H на $\ker A$, $C = MP$, M — линейный изоморфизм между $\ker A$ и $\ker A^*$ из условия (i). Тогда если $v \in \ker A$, то

$$(Cv, Mv) = (MPv, Mv) = (Mv, Mv) = (v, v) = \|v\|^2. \tag{2.12}$$

Рассмотрим оператор $B_\varepsilon = A + \varepsilon C$, $\varepsilon \neq 0$, и установим его непрерывную обратимость. Заметим, что $R(C) = \ker A^*$ и пространство H равно сумме ортогональных замкнутых подпространств $R(A)$ и $\ker A^*$. Поэтому равенство $B_\varepsilon u = 0$ влечет $u \in \ker A$ и $Cu = 0$, что в силу (2.12) возможно только для $u = 0$. Следовательно, отображение B_ε инъективно. Пусть $v \in H$. Покажем, что уравнение

$$B_\varepsilon u = v \tag{2.13}$$

имеет решение. Элемент v однозначно представим в виде $v = v_1 + v_2$, где $v_1 \in R(A)$, $v_2 \in \ker A^*$, и уравнение (2.13) эквивалентно системе

$$\begin{cases} Au = v_1 \\ \varepsilon Cu = v_2 \,. \end{cases} \tag{2.14}$$

Так как $v_2 \cdot \varepsilon^{-1} \in \ker A^*$, а $R(C) = \ker A^*$, то существует $u_2 \in \ker A$, для которого $\varepsilon C u_2 = v_2$. Из принадлежности $v_1 \in R(A)$ следует существование $y \in H$ такого, что $Ay = v_1$. Пусть $u_1 = y - Py$, тогда $u_1 \in R(A)$ и $Au_1 = v_1$. Элемент $u = u_1 + u_2$ удовлетворяет (2.14). Таким образом, сюръективность B_ε установлена. Согласно теореме Банаха об обратном операторе, отображение B_ε непрерывно обратимо. Отсюда следует существование постоянной $K_\varepsilon > 0$ такой, что

$$\|B_\varepsilon u\| \geq K_\varepsilon \|u\| \quad \forall u \in H \,. \tag{2.15}$$

Рассмотрим включение

$$-B_\varepsilon u \in STu - f, \tag{2.16}$$

где ST — секвенциальное замыкание T, $\varepsilon \neq 0$ фиксировано, $f \in H$. Оно равносильно включению

$$u \in B_\varepsilon^{-1}(f - STu) \equiv \Phi_\varepsilon(u)\,. \tag{2.17}$$

В силу (1.2) найдется $R > 0$ такое, что $\|Tu\| \leq 2^{-1} \cdot K_\varepsilon \cdot \|u\|$, если $\|u\| \geq R$, и $2^{-1} \cdot K_\varepsilon(R+1) > \|f\|$. Отсюда по определению секвенциального замыкания для любого $u \in H$ с $\|u\| = R+1$ и произвольного $g \in STu$ имеем $\|g\| \leq 2^{-1} \cdot K_\varepsilon \cdot (R+1)$, и потому

$$\|B_\varepsilon u + g - f\| \geq \|B_\varepsilon u\| - \|g\| - \|f\| \geq K_\varepsilon(R+1) -$$

$$- 2^{-1}K_\varepsilon(R+1) - \|f\| = 2^{-1}K_\varepsilon(R+1) - \|f\| > 0\,. \tag{2.18}$$

Последнее равносильно тому, что на сфере $S_{R+1} = \{u \in H \mid \|u\| = R+1\}$ отображение Φ_ε не имеет неподвижных точек. Кроме того, Φ_ε на шаре $U_{R+1} = \{u \in H \mid \|u\| \leq R+1\}$ компактно [13], то есть его значения — непустые компактные выпуклые множества, Φ_ε полунепрерывно сверху на U_{R+1} и $R(\Phi_\varepsilon) = \bigcup\{\Phi_\varepsilon(x) \,:\, x \in U_{R+1}\}$ предкомпактно в H. Действительно, значения ST — непустые компактные выпуклые множества, отображение ST замкнуто [14] и многозначный оператор ST переводит ограниченные множества в предкомпактные (наличие перечисленных свойств у ST гарантирует полунепрерывность сверху этого отображения [15]), а линейный оператор B_ε^{-1} непрерывен. Таким образом, $I - \Phi_\varepsilon$ — многозначное компактное векторное поле из $C(S_{R+1}, U_{R+1}, 0)$ [13], I — тождественный оператор в H. Отображение $h_\varepsilon(u,t) = (1-t)(u - \Phi_\varepsilon(u)) + tu$, $t \in [0,1]$, есть гомотопия в $C(S_{R+1}, U_{R+1}, 0)$ [13]. В противном случае для некоторого $t \in (0,1)$ найдется $u \in S_{R+1}$, для которого $0 \in h_\varepsilon(u,t)$, то есть существует $g \in STu$ такое, что

$$u = (1-t)B_\varepsilon^{-1}(f-g) \Longleftrightarrow B_\varepsilon u + (1-t)(g-f) = 0\,.$$

С другой стороны, в силу (2.18)

$$\|B_\varepsilon u + (1-t)(g-f)\| \geq \|B_\varepsilon u\| + (1-t)\|g-f\| \geq \|B_\varepsilon u\| - \|g\| - \|f\| > 0\,.$$

Получено противоречие. Так как $h_\varepsilon(u,0) = u - \Phi_\varepsilon(u)$, $h_\varepsilon(u,1) = u$, то векторные поля $I - \Phi_\varepsilon$ и I гомотопны в $C(S_{R+1}, U_{R+1}, 0)$. Последнее влечет равенство топологических степеней [13]

$$d(U_{R+1}, 0, I - \Phi_\varepsilon) = d(U_{R+1}, 0, I) = 1.$$

Отсюда следует существование $u \in U_{R+1}$, удовлетворяющего включению $u \in \Phi_\varepsilon(u)$ [13]. Таким образом, для любого $\varepsilon \neq 0$ включение (2.16) имеет решение.

Предположим, что элемент $f \in H$ удовлетворяет условию (i). Возьмем числовую последовательность $\varepsilon_k \to 0+$, если в условии (i) фигурирует неравенство (1.4), и $\varepsilon_k \to 0-$ при наличии в условии (i) неравенства (1.5). Как показано выше, для любого натурального k найдутся $u_k \in H$ и $g_k \in STu_k$ такие, что

$$Au_k + \varepsilon_k Cu_k + g_k = f\,. \tag{2.19}$$

Покажем, что последовательность (u_k) ограничена в H. Допустим противное, тогда существует подпоследовательность (u_{nk}) последовательности (u_k), для которой $\|u_{nk}\| \to +\infty$. Будем далее обозначать ее (u_k). Рассмотрим последовательность $v_k = \|u_k\|^{-1} \cdot u_k$. Тогда $\|v_k\| = 1$ и, следовательно, из (v_k) можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Обозначим эту подпоследовательность (v_k), а ее слабый предел — v. Поделим обе части (2.19) на $\|u_k\|$. Получим

$$Av_k = -\varepsilon_k Cv_k - \frac{g_k}{\|u_k\|} + \frac{f}{\|u_k\|} \to 0$$

при $k \to +\infty$, поскольку $\|Cv_k\| \leq \|v_k\|$ и в силу (1.2) $g_k \cdot \|u_k\|^{-1} \to 0$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} (Av_k, v_k - v) = 0$. Так как оператор A принадлежит классу $(S)_+$, то из последнего равенства вытекает сходимость $v_k \to v$. Поскольку $Av_k \to Av$, то $v \in \ker A$. В силу предположения (i) и леммы 2.1 выполняется неравенство (2.2) ((2.3)). С другой стороны, из (2.19) имеем

$$(g_k, Mv) = (f, Mv) - \varepsilon_k (Cu_k, Mv) - (Lu_k, Mv) = (f, Mv) - \varepsilon_k \cdot \|u_k\| \cdot (Cv_k, Mv)$$

(Lu_k и Mv ортогональны!). Отсюда следует, что

$$\limsup_{k\to\infty} (g_k, Mv) \leq (f, Mv) \quad \left(\liminf_{k\to\infty} (g_k, Mv) \geq (f, Mv)\right),$$

поскольку согласно (2.12)

$$\lim_{k\to\infty} (Cv_k, Mv) = (Cv, Mv) = \|v\|^2 = 1.$$

Полученное неравенство противоречит (2.2) ((2.3)). Ограниченность последовательности (u_k) установлена. Не теряя общности, можно считать, что $u_k \rightharpoonup u$, $g_k \to g$ (последнее следует из компактности T). Докажем сильную сходимость (u_k) к u. Из (2.19) заключаем о сильной сходимости (Au_k) к $f - g$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} (Au_k, u_k - u) = 0$. Отсюда и из принадлежности A

к классу $(S)_+$ следует, что $u_k \to u$. Так как $g_k \to g$ и отображение ST замкнуто [14], то $g \in STu$. Переходя в (2.19) к пределу при $k \to \infty$, получим

$$Au + g = f, \tag{2.20}$$

что равносильно включению (1.6).

Если дополнительно предположить, что точки разрыва оператора $Av + Tv - f$ регулярны, то точка u, удовлетворяющая уравнению (2.20) с $g \in STu$, есть точка непрерывности оператора T. В противном случае найдется $h \in H$, для которого выполняется неравенство (2.1) и согласно лемме 2.2 $(Au+g-f, h) < 0$, что противоречит (2.20). Для точки непрерывности u оператора T значение STu совпадает с Tu, и в этом случае (1.6) совпадает с (1.1). Теорема 2.1 доказана полностью.

Список литературы

1. **Скрыпник И.В.** *Нелинейные дифференциальные уравнения высшего порядка* // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Соврем. пробл. математики. 1990. Т. 37. С. 3 – 87.
2. **Павленко В.Н.** *О существовании полуправильных решений первой краевой задачи для уравнения параболического типа с разрывной нелинейностью* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 3. С. 520 – 526.
3. **Красносельский М.А., Покровский А.В.** *Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями* // ДАН СССР. 1976. Т. 226, № 3. С. 506 – 509.
4. **Красносельский М.А., Покровский А.В.** *Об эллиптических уравнениях с разрывными нелинейностями* // ДАН СССР. 1995. Т. 342, № 6. С. 731 – 734.
5. **Красносельский М.А., Лусников А.В.** *Правильные неподвижные точки и устойчивые инвариантные множества монотонных операторов* // Функцион. анализ и приложения. 1996. Т. 30, вып. 3. С. 34 – 46.
6. **Павленко В.Н.** *Существование решений у нелинейных уравнений с разрывными монотонными операторами* // Вестн. Моск. ун–та. Математика. Механика. 1973. № 6. С. 21 – 29.
7. **Павленко В.Н.** *Нелинейные уравнения с разрывными операторами в банаховых пространствах* // Укр. мат. журн. 1979. Т. 31, № 5. С. 569 – 572.
8. **Павленко В.Н.** *Существование решений нелинейных уравнений с разрывными полумонотонными операторами* // Укр. мат. журн. 1981. Т. 33, № 4. С. 547 – 551.
9. **Павленко В.Н.** *Метод монотонных операторов для уравнений с разрывными нелинейностями* // Изв. вузов. Математика. 1991. № 6. С. 38 – 44.
10. **Павленко В.Н.** *Теоремы существования для эллиптических вариационных неравенств с квазипотенциальными операторами* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 8. С. 1397 – 1402.
11. **Павленко В.Н.** *Полуправильные решения эллиптических вариационных неравенств с разрывными нелинейностями* // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 2. С. 230 – 235.
12. **Павленко В.Н.** *Вариационный метод для уравнений с разрывными операторами.* // Вестн. Челяб. ун–та. Сер. 3. Математика. Механика. 1994. № 1(2). С. 87 – 95.

13. **Ma T.W.** *Topological degree for set valued compact vector fields in locally convex spaces* // Rozprawy Mat. 1972. Vol. 92. P. 3 – 47.
14. **Павленко В.Н.** *Управление сингулярными распределенными системами параболического типа с разрывными нелинейностями* // Укр. мат. журн. 1994. Т. 46, № 6. С. 729 – 736.
15. **Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.** Введение в теорию многозначных отображений Воронеж: Изд–во Воронеж. ун–та, 1986.

SUMMARY

Of concern are the equations with non-coercitive operator that is sum of linear Fredholm zero index reflection with compact (possibly discontinuous) operator in Hilbert space. Using the regularization and topological degree theory existence of solutions, which are continuity points of the equation operator is established.