УДК 539.3

ФОРМИРОВАНИЕ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

О. Е. Ивашнев, Н. Н. Смирнов

Введение. С целью повышения нефтеотдачи пластов применяется технология формирования трещин гидроразрыва. Для этого в скважину под высоким давлением подается вязкий полимер — жидкость гидроразрыва, которая, надавливая на берега начальной трещины, расширяет ее. Из-за высокого давления в трещине часть жидкости проникает в пласт. В данной работе исследуется процесс роста трещины при закачивании в нее жидкости с учетом ее потерь на просачивание в пористую среду.

Допущения. I. Будем считать, что справедливо следующее соотношение между шириной трещины δ, ее высотой h и длиной L (рис. 1, *а*): $\delta \ll h \ll L$.

Проведем два сечения трещины плоскостью yOz — плоские сечения Перкинса. Ввиду малости изменения ширины трещины в направлении ее длины: $\partial\delta/\partial x \sim \delta/L \ll 1$, будем считать, что упругий материал, попавший в сечение *1*, не передает усилия на материал, попавший в сечение *2* (рис. 1, *а*). Связь между напряжениями и деформациями в сечениях *1*, *2* будем считать такой же, как для однородной в направлении Ox (плоской) трещины, — гипотеза Перкинса [1].

II. Высоту трещины считаем постоянной: $h = \text{const}$.

III. Сжимаемостью и инерцией жидкости пренебрегаем.

IV. При моделировании процесса пропитки нефтенасыщенного пласта жидкостью гидроразрыва применима гипотеза плоских сечений: жидкость гидроразрыва просачивается в пористую среду только по нормали к трещине.

V. Вязкость жидкости, изначально насыщающей пласт, считаем малой в сравнении с вязкостью жидкости гидроразрыва.

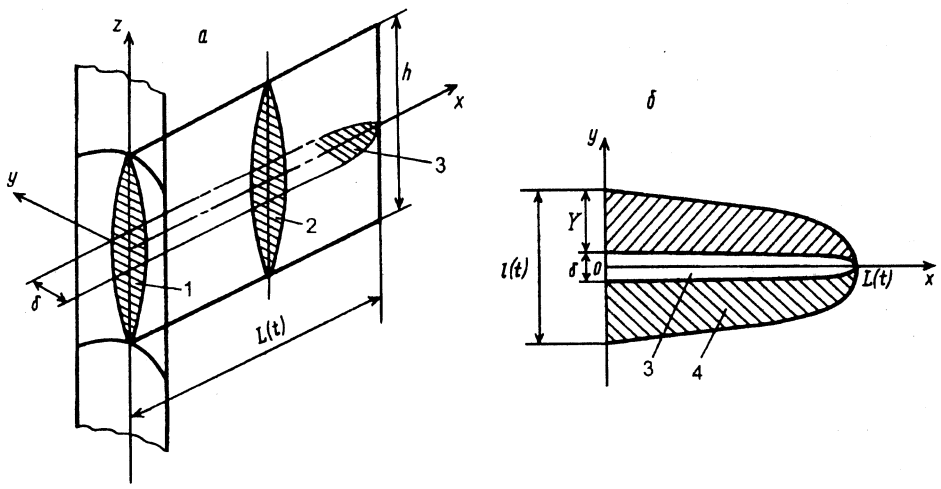

Рис. 1. Общий вид вертикальной трещины (*а*) и сечение в горизонтальной плоскости (*б*): *1*, *2* — плоские сечения Перкинса; *3* — плоское сечение Христиановича [2]; *4* — область прилегающей породы, пропитанная жидкостью гидроразрыва

Математическая постановка задачи. В теории плоских трещин в упругой среде [3] установлена связь между шириной щели и давлением в ней:

$$\delta = 2\,\frac{1-\nu_\sigma}{\mu_\sigma}\,P\sqrt{\frac{h^2}{4}-z^2},$$

где ν_σ — коэффициент Пуассона; μ_σ — модуль сдвига материала; P — превышение давления в трещине над давлением в грунте (избыточное давление).

Проинтегрировав δ по z, получим площадь поперечного сечения трещины

$$F = \frac{\pi}{4}\frac{1-\nu_\sigma}{\mu_\sigma}h^2 P.$$

Отсюда следует связь между избыточным давлением и средней шириной трещины $\delta^* = F/h$:

$$P = b\delta^*, \tag{1}$$

где $b = \dfrac{4\mu_\sigma}{\pi(1-\nu_\sigma)h} = \mathrm{const}$ — постоянный коэффициент. Звездочку, обозначающую среднюю ширину трещины, в дальнейшем опускаем.

Таким образом, в приближении Перкинса трещина "открывается" при нулевом избыточном давлении (в соответствии с (1)). Поэтому на ее носике выполняется условие

$$x = L(t): \quad P = 0. \tag{2}$$

Движение жидкости гидроразрыва в трещине опишем в одномерном приближении. Инерцией, сжимаемостью жидкости и потерей импульса при ее оттоке в пористую среду пренебрегаем:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial (Fu)}{\partial x} = -v\Pi, \tag{3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{12\mu}{\delta^2}u, \tag{4}$$

где u — скорость жидкости вдоль трещины; v — скорость жидкости по нормали к берегам трещины; $\Pi \approx 2h$ — периметр трещины в сечении Перкинса; μ — коэффициент динамической вязкости жидкости гидроразрыва.

Применив метод плоских сечений, фильтрацию жидкости в грунт опишем уравнениями

$$v = v(t), \tag{5}$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial y} = -\frac{\mu}{k}v, \tag{6}$$

где p_r — давление жидкости гидроразрыва в грунте; k — проницаемость грунта.

Условие на границе с трещиной (рис. 1, *б*):

$$y = \delta/2: \quad p_r = P. \tag{7}$$

Условие на границе между жидкостью гидроразрыва и жидкостью, изначально пропитывающей грунт:

$$y = l(t)/2: \quad p_r = 0. \tag{8}$$

Чтобы математическая постановка задачи (1)–(8) была полной, необходимо определить граничное условие в месте сопряжения трещины со скважиной — в сечении $x = 0$. Это условие будет определено позднее при анализе конкретных примеров формирования трещины.

Подставив полученное из (1) выражение ширины трещины через избыточное давление в уравнение (4), выразив в уравнении (3) площадь трещины через ее среднюю ширину и подставив полученное из (4) выражение для скорости в (3), приведем уравнения (3), (4) к виду

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + u\frac{\partial \delta}{\partial x} = K\delta\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta^2\frac{\partial \delta}{\partial x}\right) - 2v, \tag{9}$$

$$u = -K\delta^2\frac{\partial \delta}{\partial x}, \quad K = \frac{b}{12\mu} = \mathrm{const}. \tag{10}$$

Таким образом, процесс эволюции трещины описывается параболическим уравнением (9). Уравнения с переменными коэффициентами такого рода называются квазилинейными. В теории решения квазилинейных уравнений [4] показано, что по области "покоя" $\delta = 0$ сигнал

распространяется с конечной скоростью. Из этого свойства следует конечная скорость роста трещины в данной постановке задачи.

Интегрируя уравнение (6) по глубине зоны пропитки $0 \leqslant y \leqslant Y$ (рис. 1, *б*), учитывая граничные условия (7), (8) и соотношение (1), получим

$$v = \frac{kb}{\mu}\frac{\delta}{Y}. \tag{11}$$

Поскольку скорость пропитки $v = v(t)$, глубина зоны пропитки Y определяется из решения уравнения

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = v. \tag{12}$$

Подставив выражение для v из (11) в уравнения (9) и (12), имеем

$$\frac{\partial Y^2}{\partial t} = 2\frac{kb}{\mu}\delta, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + u\frac{\partial \delta}{\partial x} = K\delta\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta^2\frac{\partial \delta}{\partial x}\right) - 2\frac{kb}{\mu}\frac{\delta}{Y}. \tag{14}$$

Таким образом, получена замкнутая система уравнений (10), (13), (14), которую необходимо дополнить граничным условием в носике трещины

$$x = L(t), \quad \delta = 0 \tag{15}$$

и граничным условием на входе в трещину (в месте сопряжения трещины со скважиной) $x = 0$.

Анализ безразмерных уравнений. Два предельных режима формирования трещины. Введем безразмерные переменные:

$$\bar\delta = \frac{\delta}{\delta^*}, \quad \bar u = \frac{u}{u^*}, \quad \bar x = \frac{x}{L^*}, \quad \bar t = \frac{t}{t^*}, \quad \bar Y = \frac{Y}{y^*},$$

где $\delta^* = P^*/b$ — характерная ширина трещины, P^* — характерное давление на входе; L^* — характерная длина трещины; t^* — характерное время процесса; $u^* = K\dfrac{(\delta^*)^3}{L^*}$, $y^* = \sqrt{\dfrac{kt^*P^*}{\mu}}$ — характерные скорость жидкости вдоль трещины и глубина зоны пропитки соответственно.

Система безразмерных уравнений запишется в виде

$$\begin{gathered} \bar u = -\bar\delta^2\frac{\partial\bar\delta}{\partial\bar x}, \quad \frac{\partial Y^2}{\partial t} = 2\bar\delta, \\ \frac{1}{G}\frac{\partial\bar\delta}{\partial\bar t} + \bar u\frac{\partial\bar\delta}{\partial\bar x} = \bar\delta\frac{\partial}{\partial\bar x}\left(\bar\delta^2\frac{\partial\bar\delta}{\partial\bar x}\right) - \frac{2}{B}\frac{\bar\delta}{\bar Y}, \end{gathered} \tag{16}$$

где $G = u^*t^*/L^*$, $B = \mu y^*u^*/kbL^*$ — безразмерные параметры. Параметр $G \geqslant 1$ характеризует отношение объема жидкости, втекающей в трещину ($h\delta^*u^*t^*$), к объему трещины ($h\delta^*L^*$). Параметр $B \geqslant 1$ характеризует отношение объемного расхода жидкости, втекающей в трещину ($u^*\delta^*h$), к объемному расходу жидкости, уходящей через стенки в пористую среду (v^*L^*h). Характерная скорость фильтрации оценивается из уравнения (11) как $v^* = kP^*/(\mu y^*)$. Из физического смысла параметров G и B ясно, что сумма их обратных величин порядка единицы: $G^{-1} + B^{-1} \sim 1$.

Безразмерное уравнение (16) показывает, что в процессе формирования трещины могут быть выделены два предельных режима: малого и большого протекания в грунт. При малом протекании, когда $B \gg 1$, последним членом уравнения (16) можно пренебречь. На этом режиме фильтрация мало влияет на процесс формирования трещины. При большом протекании, когда $G \gg 1$, может быть отброшен первый член этого уравнения.

Режим малого протекания в грунт. При этом режиме система уравнений, описывающая формирование трещины, состоит из уравнения (10) и уравнения, полученного из (14) при условии $B \gg 1$:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + u\frac{\partial \delta}{\partial x} = K\delta\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta^2\frac{\partial \delta}{\partial x}\right). \tag{17}$$

Найдем все возможные автомодельные решения, удовлетворяющие уравнениям (10), (17) и граничному условию в носике (15). Затем укажем, какому граничному условию в сечении $x = 0$ соответствует каждое из них. Решение задачи ищем в виде

$$\delta(t,x) = t^n D^* D(\xi), \tag{18}$$

$$u(t,x) = t^r U^* U(\xi), \tag{19}$$

где

$$\xi = \frac{x}{E^* t^m}; \tag{20}$$

n, r, m — безразмерные параметры; D^*, U^*, E^* — размерные постоянные; ξ — безразмерная автомодельная переменная.

Подставив решение в виде (18)–(20) в уравнения (10), (17), получим два обыкновенных дифференциальных уравнения относительно автомодельной переменной ξ

$$U = -D^2\frac{dD}{d\xi}, \tag{21}$$

$$D\frac{d}{d\xi}\left(D^2\frac{dD}{d\xi}\right) + (m\xi - U)\frac{dD}{d\xi} - nD = 0, \tag{22}$$

два алгебраических уравнения относительно параметров n, r, m, выполнение которых гарантирует существование автомодельного решения:

$$3n - m - r = 0, \tag{23}$$

$$r - m + 1 = 0, \tag{24}$$

и связи между размерными постоянными

$$(U^*)^2 = K(D^*)^3, \quad E^* = U^*. \tag{25}$$

Вид автомодельной переменной (20) показывает, что трещина растет при $m > 0$ и уменьшается при $m < 0$. Из уравнений (23), (24) следует, что растущая трещина должна подчиняться условиям

$$m > 0, \quad n > -\frac{1}{3}, \quad r > -1. \tag{26}$$

Из набора автомодельных решений, удовлетворяющих условию (26), проанализируем два, которые соответствуют граничным условиям постоянства расхода и постоянства давления на входе в трещину.

Граничное условие в носике трещины следует из уравнения (15). Для всех рассматриваемых задач оно одно и то же:

$$\xi = \xi_0: \quad D = 0, \tag{27}$$

где ξ_0 — координата носика, неопределенный параметр.

Первое решение. Условие постоянства расхода на входе в трещину имеет вид

$$x = 0: \quad u\delta = Q_0/h = \text{const},$$

откуда, переходя к автомодельным переменным (18)–(20), получим граничное условие для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (21), (22)

$$\xi = 0: \quad UD = 1, \tag{28}$$

связь между параметрами n и r

$$n = -r \tag{29}$$

и еще одну связь между размерными постоянными

$$U^* D^* = Q_0/h. \tag{30}$$

Из алгебраических уравнений (23), (24) и (29) находим $n = 1/5$, $r = -1/5$, $m = 4/5$, а из уравнений (25), (30) находим

$$D^* = \left(\frac{Q_0^2}{h^2 K}\right)^{1/5}, \quad U^* = E^* = \frac{Q_0}{D^* h}.$$

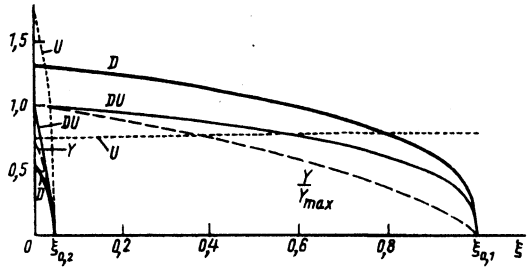

Рис. 2 Автомодельное решение задачи о росте трещины при постоянном расходе на ее входе для предельных режимов малого (ξ_{01}) и большого (ξ_{02}) просачивания жидкости через стенки трещины

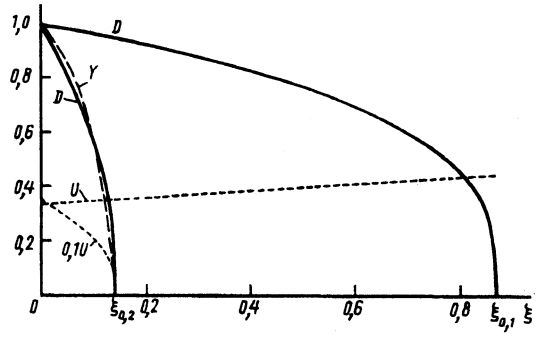

Рис. 3. Автомодельное решение задачи о росте трещины при постоянном давлении на ее входе для предельных режимов малого (ξ_{01}) и большого (ξ_{02}) просачивания жидкости через стенки трещины

Точка $\xi = \xi_0$, где располагается носик трещины $D(\xi_0) = 0$, является особой точкой системы уравнений (21), (22). Разложение $D = (2{,}4\xi_0(\xi_0 - \xi))^{1/3} + \cdots$ дает решение в малой окрестности носика. Решение вдали от особой точки ищем, решая численно краевую задачу. Распределение безразмерных функций автомодельной переменной представлено на рис. 2 в форме зависимостей безразмерных функций D, U, Y от автомодельной переменной ξ. Также на рисунке приведен график безразмерного расхода жидкости DU. Координата носика трещины ξ_{01} соответствует рассматриваемому предельному случаю малого просачивания жидкости в стенки. Видно, что в данной задаче скорость по длине трещины практически не меняется. Решение показывает, что при постоянном расходе трещина растет со временем по закону $L \approx U^* t^{4/5}$, а ее ширина в максимальном сечении увеличивается как $\delta \approx 1{,}33 D^* t^{1/5}$. Подобная асимптотика была также получена в работе [5].

После того как процесс роста трещины описан, можно рассчитать малое протекание жидкости гидроразрыва в грунт. Подставив найденную зависимость ширины трещины $\delta(x,t)$ в уравнение (13) и проинтегрировав получившееся уравнение по времени, определим зависимость глубины пропитки грунта от времени и координаты:

$$Y^2 = 2\frac{kb}{\mu} D^* \int\limits_{t_0}^{t} D\left(\frac{x}{U^* t^{4/5}}\right) t^{1/5}\, dt, \tag{31}$$

где $t_0 = (x/U^*)^{5/4}$ — момент прихода трещины в сечение с координатой x. Глубина пропитки максимальна в сечении $x = 0$. Из уравнения (31) получаем

$$Y_{\max}^2 = 2{,}216\,\frac{kbD^*}{\mu}\, t^{6/5}. \tag{32}$$

С помощью уравнений (31), (32) может быть найдена относительная глубина пропитки

$$\left[\frac{Y}{Y_{\max}}\right]^2 = \frac{3\xi^{3/2}}{2D_{\max}} \int\limits_{\xi}^{1} \frac{D(\xi')}{(\xi')^{5/2}}\, d\xi', \tag{33}$$

где $\xi = x/(U^* t^{4/5})$ — безразмерная длина трещины, $D_{\max} = D(0) \approx 1{,}33$.

Зависимость относительной глубины пропитки $Y/Y_{\max}$ от автомодельной переменной ξ показана на рис. 2.

Отношение максимальной глубины зоны пропитки к длине трещины и отношение ширины трещины к ее длине меняются со временем следующим образом:

$$\frac{\delta_{\max}}{L} = 1{,}33\,\frac{D^*}{U^*}\,t^{-3/5}, \quad \frac{Y_{\max}^2}{L^2} = 2{,}216\,\frac{kbD^*}{\mu(U^*)^2}\,t^{-2/5}.$$

Исключив из этих уравнений время, получим зависимость относительной глубины зоны пропитки от относительной ширины трещины:

$$\frac{Y_{\max}}{L} = C\left(\frac{\delta_{\max}}{L}\right)^{1/3}, \quad C = 2{,}05\sqrt{k}\left(\frac{bh}{\mu Q_0}\right)^{1/3} = \mathrm{const}\,.$$

Второе решение. Условие постоянства давления на входе в трещину имеет вид

$$x = 0: \quad \delta = P_0/b = \mathrm{const},$$

откуда, переходя к автомодельным переменным (18)–(20), получим граничное условие для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (21), (22)

$$\xi = 0: \quad D = 1, \tag{34}$$

найдем параметр

$$n = 0 \tag{35}$$

и выражение для размерной постоянной

$$D^* = P_0/b. \tag{36}$$

Из алгебраических уравнений (23), (24) и (35) получаем

$$r = -1/2, \quad m = 1/2.$$

Из уравнений (25), (36) получаем

$$U^* = E^* = \sqrt{K\left(\frac{P_0}{b}\right)^3}.$$

Разложение решения в степенной ряд в окрестности носика трещины имеет вид $D = (1{,}5\xi_0(\xi_0 - \xi))^{1/3} + \cdots$.

Решая краевую задачу (21), (22), (27), (34), получаем распределение безразмерных функций D и U по длине трещины, показанное на рис. 3, в форме зависимостей безразмерных функций D, U от автомодельной переменной ξ. Координата носика трещины ξ_{01} соответствует рассматриваемому предельному случаю малого просачивания жидкости в стенки. Из рисунка видно, что при постоянном давлении на входе трещина растет со временем по закону $L \approx 0{,}88U^* t^{1/2}$.

Второй предельный случай. Большое протекание в грунт. Рассмотрим случай, когда отношение массы жидкости, втекающей в трещину, к объему трещины намного больше единицы, т.е. большая часть жидкости просачивается в пласт через стенки трещины. Тогда параметр $G \gg 1$ и уравнение (14) примет вид

$$u\,\frac{\partial\delta}{\partial x} = K\delta\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta^2\frac{\partial\delta}{\partial x}\right) - 2\,\frac{kb}{\mu}\,\frac{\delta}{Y}. \tag{37}$$

Система уравнений, описывающая процесс раскрытия трещины во втором предельном случае, состоит из уравнений (10), (13) и (37). Подставив в эти уравнения выражения для ширины трещины и скорости в виде (18), (19), выражение для глубины зоны пропитки в виде

$$y = t^s Y^* Y(\xi), \tag{38}$$

получим три обыкновенных дифференциальных уравнения относительно автомодельной переменной ξ, определенной выражением (20):

$$U = -D^2 \frac{dD}{d\xi}, \tag{39}$$

$$m\xi \frac{dY^2}{d\xi} - 2sY^2 + D = 0, \tag{40}$$

$$U \frac{dD}{d\xi} = D \frac{d}{d\xi}\left(D^2 \frac{dD}{d\xi}\right) - 24 \frac{D}{Y}, \tag{41}$$

три алгебраических уравнения относительно параметров n, r, m и s, выполнение которых гарантирует существование автомодельного решения:

$$3n - m - r = 0, \tag{42}$$

$$2s - 1 - n = 0, \tag{43}$$

$$3n - 2m + s = 0, \tag{44}$$

и связи между размерными постоянными

$$U^* E^* = K(D^*)^3, \quad (Y^*)^2 = 2\frac{kb}{\mu} D^*, \quad \frac{(D^*)^3}{(E^*)^2} = \frac{k}{Y^*}. \tag{45}$$

Вид автомодельной переменной (20) показывает, что трещина растет при $m > 0$ и уменьшается при $m < 0$. Из уравнений (42), (43) получаем, что растущая трещина должна подчиняться условиям

$$m > 0: \quad n > -\frac{1}{7}, \quad r > -\frac{3}{7}, \quad s > \frac{3}{7}.$$

Из набора автомодельных решений проанализируем два, соответствующие граничным условиям постоянства расхода и постоянства давления на входе в трещину.

Первое решение. Условие постоянства расхода на входе дает недостающие граничное условие для системы дифференциальных уравнений (28), связь между показателями степеней (29) и связь между размерными постоянными (30). Из алгебраических уравнений (42)–(44) при условии (29) получаем

$$n = \frac{1}{9}, \quad r = -\frac{1}{9}, \quad m = \frac{4}{9}, \quad s = \frac{5}{9}.$$

Из уравнений (30), (45) находим

$$D^* = \left(\frac{kb^3}{2\mu^3}\right)^{1/9} \left(\frac{12Q_0}{h}\right)^{4/9}, \quad U^* = \frac{Q_0}{D^* h}, \quad Y^* = \sqrt{2\frac{kb}{\mu} D^*}, \quad E^* = \sqrt{\frac{Y^*(D^*)^3}{k}}.$$

Таким образом, задача о распространении трещины свелась к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (39)–(41) при условиях (27), (28). Разложение решения в степенной ряд в окрестности носика трещины имеет вид $D = 4{,}24\xi_0^{1/7}(\xi_0 - \xi)^{3/7} + \cdots$.

Распределение безразмерных функций D, U, Y по длине трещины показано на рис. 2. В рассматриваемом предельном случае большого протекания жидкости в стенки кривые сходятся к точке ξ_{02}, которая характеризует положение носика трещины. В данной задаче, в

отличие от задачи с малым просачиванием в пласт, скорость жидкости вдоль трещины существенно уменьшается по мере удаления от входа и становится равной нулю в носике. Трещина растет со временем как $L \approx 0{,}045E^*t^{4/9}$, ширина ее максимального сечения возрастает как $\delta \approx 0{,}55D^*t^{1/9}$.

Второе решение. Рассмотрим случай роста трещины при условии постоянства давления жидкости гидроразрыва на входе, которое в автомодельных переменных имеет вид (34) и служит граничным условием для системы (39)–(41). Из условия постоянства давления на входе также следует, что показатель степени n равен нулю (29), что позволяет получить из решения системы (42)–(44) следующие значения параметров:

$$n = 0, \quad r = -\frac{1}{4}, \quad m = \frac{1}{4}, \quad s = \frac{1}{2}.$$

Размерные постоянные определяются соотношениями

$$D^* = \frac{P_0}{b}, \quad U^* = \frac{K^{3/4}P_0}{(24)^{1/4}b}, \quad Y^* = 2\,\frac{kbP_0}{\mu b}, \quad E^* = (24K)^{1/4}\left(\frac{P_0}{b}\right)^2.$$

Разложение решения в степенной ряд в окрестности носика трещины имеет вид $D = (19\,756{,}8\xi_0)^{1/7}(\xi_0 - \xi)^{3/7} + \cdots$.

Распределение безразмерных функций D, U, Y по длине трещины представлено на рис. 3 в виде кривых, сходящихся к точке ξ_{02}, которая характеризует положение носика трещины в рассматриваемом предельном случае большого просачивания жидкости гидроразрыва в стенки при условии постоянства давления на входе. Решение показывает, что длина трещины меняется со временем как $L \approx 0{,}14t^{1/4}$.

Автомодельное решение задачи в общем случае. Подставив решение в автомодельной форме (18)–(20), (38) в уравнения (10), (13), (14), получим три обыкновенных дифференциальных уравнения относительно автомодельной переменной ξ:

$$U = -D^2\frac{dD}{d\xi}, \quad m\xi\,\frac{dY^2}{d\xi} - 2sY^2 + D = 0,$$

$$(U - m\xi)\,\frac{dD}{d\xi} + nD = D\,\frac{d}{d\xi}\left(D^2\frac{dD}{d\xi}\right) - 24\,\frac{D}{Y},$$

четыре алгебраических уравнения относительно показателей степеней n, r, m и s, выполнение которых гарантирует существование автомодельного решения:

$$3n - m - r = 0, \tag{46}$$

$$2s - 1 - n = 0, \tag{47}$$

$$3n - 2m + s = 0, \tag{48}$$

$$s = 1, \tag{49}$$

и четыре уравнения, связывающие размерные постоянные:

$$U^*E^* = K(D^*)^3, \quad (Y^*)^2 = 2\,\frac{kb}{\mu}\,D^*, \quad U^* = E^*, \quad \frac{(D^*)^3}{(E^*)^2} = \frac{k}{Y^*}. \tag{50}$$

Таким образом, замена упрощенных уравнений (17), (38) на полное уравнение (14) привела к тому, что получены четыре связи между четырьмя параметрами n, r, m и s. В рассмотренных же выше предельных случаях связей было на одну меньше, чем параметров, что давало возможность варьировать граничные условия на входе в трещину. Поэтому автомодельное решение в общем случае возможно только при единственном граничном условии на входе. Из уравнений (46)–(49) получим $n = r = s = 1$, $m = 2$. Из формы автомодельного решения (19) следует, что во входном сечении трещины должно выполняться условие

$$x = 0: \quad \frac{dP_0}{dt} = \dot{P}_0 = \text{const}. \tag{51}$$

На основании уравнений (50) могут быть определены размерные постоянные

$$D^* = \frac{kb}{288\mu}, \quad U^* = E^* = \frac{1}{(24)^{3/2}}\left(\frac{kb}{12\mu}\right)^2, \quad Y^* = \frac{kb}{12\mu}.$$

Граничное условие на входе (51) в безразмерной форме запишется в виде

$$\xi = 0: \quad D = A,$$

где $A = 288\,\dfrac{\mu\dot{P}_0}{kb^2}$ — безразмерный параметр, характеризующий отношение скорости расширения трещины $\dot{P}_0/b$ к характерной скорости фильтрации. Разложение $D = [6\xi_0(\xi_0 - \xi)]^{1/3} + \cdots$ дает решение в малой окрестности носика.

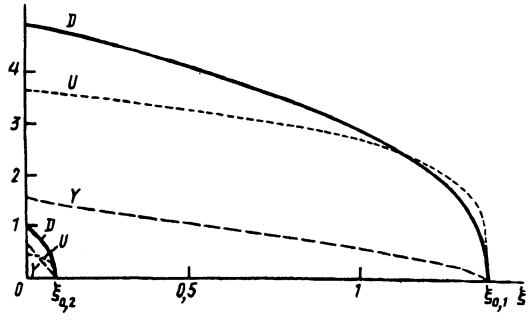

Рис. 4. Автомодельное решение задачи о росте трещины гидроразрыва в общем случае, когда просачивание жидкости через стенки сравнимо с потоком, определяющим раскрытие трещины (ξ_{01} — отношение скорости раскрытия к скорости просачивания $A = 5$; ξ_{02} — $A = 1$)

Вид полученного решения показан на рис. 4 в форме графиков зависимостей D, U и Y от автомодельной переменной ξ для двух значений параметра A. При $A = 5$ носику трещины соответствует точка ξ_{01}, при $A = 1$ — точка ξ_{02}. Скорость жидкости U, которая оставалась практически постоянной по длине трещины при малой фильтрации и уменьшалась до нуля в носике при большой (рис. 2, 3), в данном случае резко падает возле носика трещины, не достигая, однако, нуля.

Заключение. В работе рассмотрен процесс формирования трещины гидроразрыва в пористой среде в рамках квазиодномерной модели, построенной с использованием метода плоских сечений Перкинса [1].

Выделены два предельных режима формирования трещины: с малым и большим просачиванием жидкости гидроразрыва в пласт. Предложены безразмерные критерии их реализации.

Для обоих предельных режимов найдена группа автомодельных решений, позволяющая решить задачу формирования трещины при любом степенном законе изменения параметров на входе. Проанализированы решения, получающиеся при условиях постоянства расхода и давления.

Найдено автомодельное решение задачи в общем случае, когда отток вследствие фильтрации жидкости через пористые стенки трещины сравним с потоком жидкости, определяющим раскрытие трещины. Такое решение реализуется при линейном возрастании давления на входе в трещину.

Авторы признательны за поддержку международной корпорации “Шлюмберже” (грант CRDF-RMO-1229).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Perkins T.K., Kern L.R.* Widths of hydraulic fractures // J. Petrol. Technol., Paper SPE 89. 1961. **13**, N 9. 937–949.
2. *Khristianovich S.A., Zheltov Y.P.* Formation of vertial fractures by means of highly viscous liquid // Proc. Fourth World Petrol. Congress, Rome. 1955. **2**. 579–586.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.
4. *Самарский А.А, Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
5. *Nordgren R.P.* Propagation of a vertical hydraulic fracture // SPE Journal. Paper 7834. 1972. **12**, N 8. 306–314.

Поступила в редакцию
16.06.03