Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

О. М. Фоменко, Распределение значений коэффициентов Фурье модулярных форм веса 1,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 1996, том 226, 196–227

https://www.mathnet.ru/znsl3730

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.80
18 мая 2025 г., 06:19:23

О. М. Фоменко

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ ВЕСА 1

§ 0. Введение

В статье рассматриваются различные вопросы распределения значений коэффициентов Фурье модулярных форм веса 1 на полиномиальных последовательностях натуральных чисел.

Примем для простоты, что

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n z}$$

– $SL(2,\mathbb{Z})$-параболическая форма целого веса k. Еще во времена Гекке и Харди была получена оценка

$$\sum_{n\leqslant x} |a(n)|^2 \ll x^k, \tag{1}$$

из которой немедленно следует:

$$\sum_{n\leqslant x} |a(n)| \ll x^{(k+1)/2}. \tag{2}$$

Лишь недавно в некоторых случаях оценка (2) была улучшена; для случая

$$\varphi(z) = \Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n z}$$

($SL(2,\mathbb{Z})$-параболическая форма веса 12, открытая Рамануджаном) Эллиотт, Морено и Шахиди [1] доказали:

$$\sum_{n\leqslant x} |\tau(n)| \ll x^{13/2}(\log x)^{-1/18} \tag{3}$$

Работа выполнена частично при финансовой поддержке следующих фондов: РФФИ (грант No. 94-01-00913) и ISF (Grant No. R2V300).

(о других результатах см. в §1). Что касается (1), то Ранкин [2] и Сельберг [3] показали (в более общей ситуации, см. §5), что

$$\sum_{n\leqslant x}|a(n)|^2=c(\varphi)x^k+O\big(x^{k-2/5}\big),\quad c(\varphi)>0. \tag{4}$$

Рассмотрим параболическую форму

$$S(z;f)=\sum_{n=1}^{\infty}s(n;f)e^{2\pi inz},$$

входящую в тета-ряд положительно определенной примитивной бинарной квадратичной (п.п.б.к.) формы f (см. (7) ниже). Первый параграф работы связан с получением аналога (3) для случая формы $S(z;f)$ (теорема 1):

$$\sum_{n\leqslant x}|s(n;f)|\ll\frac{x}{(\log x)^{1/3}},$$

а последний – со следующим уточнением (4) для случая $S(z;f)$ (теорема 10):

$$\sum_{n\leqslant x}s(n,f)^2=cx+O\big(x^{1/2+\varepsilon}\big),\quad c>0.$$

Метод доказательства теоремы 10 связан с усилиями ряда математиков по решению проблемы Ю. В. Линника о скалярном произведении L-функций Гекке полей алгебраических чисел (см. [4*)–8]); методы этих авторов отличны от метода "свертки Ранкина", использованного в [9] также для изучения проблемы Ю. В. Линника.

Способ доказательства теоремы 1 применяется в §2 для уточнения известной теоремы Бернайса [10] о количестве $B(x;f)$ натуральных чисел $n\leqslant x$, представимых п.п.б.к. формой f. Нами в основных случаях найдена константа в главном члене и дана явная оценка остаточного члена в этой теореме, чего ранее, видимо, сделано не было (теорема 4; замечание 3). Наиболее интересным и новым нам казалось наблюдение, что почти все числа, представимые родом п.п.б.к. форм, представляются каждым классом этого рода (следствие 1 теоремы 3). Однако в работе Б. М. Бредихина и Ю. В. Линника [11] было явно построено множество чисел, которое представимо каждой формой рода п.п.б.к. форм и которое,

*) В приведенном в [4] результате о распределении целых точек на четырехмерном конусе остаточный член неоправданно занижен.

как недавно заметила Е. П. Голубева [12], составляет почти все числа, представимые родом. Обсуждение и уточнение результата Б. М. Бредихина и Ю. В. Линника см. в работе [12].

В §§3,4 изучается распределение делителей специального вида в полиномиальных последовательностях. В частности, оценивается сверху сумма

$$\sum_{n\leqslant x} r_2(f(n)),$$

где $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $r_2(n) = \sum\limits_{x_1^2+x_2^2=n} 1$, и выявляются законы распределения делителей предписанного вида (1 и произведения только простых вида $p = 4k+1$ или 1 и произведения только простых вида $p = 4k-1$) в полиномиальных последовательностях $\{f(n), n \leqslant x\}$ (для определенных классов полиномов $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$). Трудности здесь вполне аналогичны. Сами законы (в тех случаях, которые поддаются исследованию) говорят о симметрии в распределнии указанных типов делителей в полиномиальных последовательностях (с нарушением ее лишь в исключительных случаях, например, для круговых полиномов $\Phi_m(x)$, $4|m$; общий случай абелевых полиномов с предположением “$4|a$” (см, теорему 5) требует дальнейшего изучения).

Исследование достаточно содержательно может быть проведено для абелевых полиномов. Что касается полиномов $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ с неабелевой группой Галуа, то здесь содержательные результаты могут быть получены лишь в очень немногих случаях, поскольку вопрос упирается в нерешенную проблему вычисления величины $\#\{\alpha \in F_p \mid f(\alpha) = 0\}$.

Доказательства наших результатов в §§1–4 базируются, в частности, на оценках среднего значения мультипликативных функций от полиномов, содержащихся в работах [13, 14].

Настоящая работа посвящена двум выдающимся математикам – Юрию Владимировичу Линнику (1915–1972) и Марку Борисовичу Барбану (1935–1968). Первому в 1995 году исполнилось бы 80 лет, второму – 60.

§ 1. Сумма модулей коэффициентов Фурье параболических форм веса 1

Гекке [15] получил следующий результат: пусть $k \geqslant 1$ и $Q \geqslant 1$ – целые числа. Тогда для каждой параболической формы веса k

и ступени Q

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n z/Q}$$

справедлива оценка ($x \to \infty$)

$$\sum_{n \leqslant x} |a(n)| = O\big(x^{(k+1)/2}\big). \tag{5}$$

Сравнительно недавно появились работы об L-функциях, связанных с симметрическими степенями автоморфных представлений группы $GL(2, A_Q)$ (см., например, Шахиди [16]). Опираясь на эти исследования, Ранкин [17, 18] в некоторых случаях сумел улучшить оценку Гекке (5). Приведем результат из [18]. Пусть

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n z}$$

– новая форма веса k для полной модулярной группы. Тогда

$$\sum_{n \leqslant x} |a(n)| \ll \frac{x^{(k+1)/2}}{(\log x)^{\delta}}, \tag{6}$$

где $\delta = (8 - 3\sqrt{6})/10 = 0.065153\ldots$.

В настоящем параграфе мы получим оценку, сходную с (6), для случая параболической формы, входящей в тета-ряд п.п.б.к. формы. Пусть $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ – п.п.б.к. форма дискриминанта $d = b^2 - 4ac$. Пусть $\Delta = -d/4$, если $2|b$; $\Delta = -d$, если $2 \nmid b$. Пусть $\Theta(z; f)$ – тета-ряд формы f. По общей теории

$$\Theta(z; f) = E(z; f) + S(z; f), \tag{7}$$

где $E(z; f)$ – ряд Эйзенштейна, ассоциированный с тета-рядом, $S(z; f)$ – параболическая форма, входящая в тета-ряд. Переходя от равенства (7) к равенству соответствующих коэффициентов Фурье, имеем

$$r(n; f) = e(n; f) + s(n; f). \tag{7'}$$

По результату Гекке (5)

$$\sum_{n \leqslant x} |s(n; f)| \ll x.$$

Для уточнения этой оценки применим представление $s(n; f)$ в форме, уже использованной в работах [19, 20]. Пусть C, R и O –

соответственно класс, род и множество всех п.п.б.к. форм дискриминанта d, которым принадлежит форма $f(x_1, x_2)$. Для упрощения изложения будем считать дискриминант d фундаментальным. Из теории квадратичных форм известно, что между классами C п.п.б.к. форм дискриминанта d и классами $\widetilde{C}$ идеальных чисел мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ существует взаимно однозначное соответствие. Введем обозначения:

$$w = \begin{cases} 6 & \text{при} \quad d = -3, \\ 4 & \text{при} \quad d = -4, \\ 2 & \text{при} \quad d < -4. \end{cases}$$

Пусть

$$r(n; f) = \sum_{n = f(x_1, x_2)} 1;$$

$$r(n; R) = \sum_{\substack{n = \varphi(x_1, x_2), \\ \varphi \in R}} 1,$$

где $\varphi \in R$ означает, что φ пробегает полную систему представителей классов форм, принадлежащих R. Введем также величину, которая нам потребуется ниже:

$$r(n; O) = \sum_{\substack{n = \varphi(x_1, x_2), \\ \varphi \in O}} 1.$$

Имеем

$$r(n; f) = w \sum_{\substack{n = N(\alpha),\ \alpha \in \widetilde{C}, \\ 0 \leqslant \arg \alpha < 2\pi / w}} 1, \tag{8}$$

$$r(n; R) = w \sum_{\substack{n = N(\alpha),\ \alpha \in \widetilde{R}, \\ 0 \leqslant \arg \alpha < 2\pi / w}} 1,$$

где $\widetilde{R}$ – род идеальных чисел, которому принадлежит класс $\widetilde{C}$.

Пусть h, h_0, h_1 – число всех классов идеальных чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, число классов в роде, число родов соответственно (те же обозначения будут употребляться для форм). Имеем $h = h_0 h_1$.

Преобразуем правую часть (8) с помощью характеров группы классов идеальных чисел:

$$r(n; f) = \frac{w}{h} \sum_{\chi} \overline{\chi}(\widetilde{C}) \sum_{\substack{n = N(\alpha), \\ 0 \leqslant \arg \alpha < 2\pi / w}} \chi(\alpha). \tag{9}$$

Во внешней сумме справа в (9) выделим главный характер χ_1 и квадратичные характеры χ_2 (если h четно); остальные характеры обозначим через χ_3. Как следует из теоремы Гаусса об удвоении, значения квадратичных характеров одинаковы на фиксированном роде, поэтому

$$\frac{w}{h}\overline{\chi}_1(\widetilde{C}) \sum_{\substack{n=N(\alpha),\\ 0\leqslant \arg\alpha<2\pi/w}} \chi_1(\alpha) + \frac{w}{h}\sum_{\chi_2}\overline{\chi}(\widetilde{C}) \sum_{\substack{n=N(\alpha),\\ 0\leqslant \arg\alpha<2\pi/w}} \chi_2(\alpha) = $$
$$= \frac{1}{h_0} r(n; R) = e(n; f).$$

Тем самым, можно получить следующее представление коэффициента Фурье $s(n;f)$ интересующей нас параболической формы (см. (7′)):

$$s(n;f) = \frac{w}{h}\sum_{\chi_3}\overline{\chi}_3(\widetilde{C}) \sum_{\substack{n=N(\alpha),\\ 0\leqslant \arg\alpha<2\pi/w}} \chi_3(\alpha). \tag{10}$$

Введем обозначение

$$\sum_{\substack{n=N(\alpha),\\ 0\leqslant \arg\alpha<2\pi/w}} \chi_3(\alpha) = \sigma(n,\chi_3) = \sigma(n).$$

Если $n = N(\alpha)$ – норма идеального числа, то каноническое разложение n на простые рациональные числа имеет вид

$$n = p_1^{a_1}\dots p_{r_1}^{a_{r_1}} q_1^{2b_1}\dots q_r^{2b_{r_2}}\dots l_1^{e_1}\dots l_{r_3}^{e_{r_3}}, \tag{11}$$

где числа $p = N(\rho) = \rho\overline{\rho}$ – нормы простых идеальных чисел первой степени, q – простые идеальные числа второй степени (они сами – рациональные числа), $N(q) = q^2$; l – делители дискриминанта d, $\mathfrak{l}^2 = l$, $N(\mathfrak{l}) = l$.

А. И. Виноградов [19] ввел следующую мультипликативную функцию $\lambda(n)$: если n имеет вид (11), то положим

$$\lambda(n,\chi_3) = \lambda(n) = \prod_{i=1}^{r_1}\lambda\left(p_i^{a_i}\right),$$

где

$$\lambda(p^a) = \left|1 + \sum_{\nu=1}^{a}\chi_3^{2\nu}(\rho)\right|,$$
$$\lambda(q^{2b}) = 1 \ \ (b = 0,1,2,\dots),$$
$$\lambda(l^e) = 1 \ \ (e = 0,1,2,\dots).$$

Если n в своем разложении (11) содержит хотя бы одну степень простого числа, которая не является нормой идеального числа, то положим $\lambda(n) = 0$. Легко показать, что $\lambda(n) = \lambda(n, \chi_3) = |\sigma(n, \chi_3)|$ и что $\lambda(n) \leqslant d(n)$ (число делителей n).

Нам потребуется следующая лемма (см. [14]).

Лемма 1. *Пусть $t(n)$ мультипликативна, $t(n) \geqslant 0$, $t(p^k) \ll k^{c_1}$, $k = \overline{1,\infty}$ (p простое), $f(m) = \sum\limits_{i=0}^{l} a_i m^i$ – неприводимый (над кольцом целых) полином, $(a_1, a_2, \dots, a_l) = 1$, $|a_i| \ll x^{c_2}$, тогда*

$$\sum_{n\leqslant x} t(f(n)) \ll x\big(\log\omega(D)\big)^{c_3} \exp\left(\sum_{p\leqslant x} \frac{L(p)(t(p)-1)}{p}\right).$$

Здесь D – дискриминант многочлена $f(m)$; $\omega(D) = \sum\limits_{p|D} 1$; $L(a)$ – число решений сравнения $f(m) \equiv 0 \pmod a$, $0 \leqslant m < a$; l, c_1, c_2 – константы, c_3 – постоянная, зависящая лишь от l, c_1, c_2.

Нам будет необходима также следующая лемма [21].

Лемма 2. *В обозначениях и предположениях леммы 1 при $x \to \infty$*

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{L(p)}{p} = \log\log x + C + o(1),$$

где C – константа.

Применяя леммы 1 и 2, получаем

$$\sum_{n\leqslant x} \lambda(n) \ll \frac{x}{\log x} e^{\sum\limits_{p\leqslant x} \lambda(p)/p},$$

где до конца доказательства $p = N(\rho)$ – норма простых идеальных чисел первой степени. Очевидно,

$$\lambda^2(p) = |1 + \chi_3^2(\rho)|^2 = 2 + 2\,\mathrm{Re}\,\chi_3^2(\rho).$$

Имеем

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{\lambda(p)}{p} = \gamma \log\log x + O(1),$$

где ($m > 0$ – целое с условиями $m|h$, $m \geqslant 3$)

$$\gamma = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} \left|\cos \frac{2\pi l}{m}\right| \leqslant \frac{2}{3}.$$

При этом мы воспользовались следующей асимптотической формулой, вытекающей из результатов Гекке,

$$\sum_{\substack{N(\rho)\leqslant x,\ \rho\in\widetilde{C},\\ 0\leqslant\arg\rho<2\pi/w}} \frac{1}{N(\rho)} = \frac{1}{h}\log\log x + O(1).$$

Поэтому

$$\sum_{n\leqslant x}\lambda(n) \ll \frac{x}{(\log x)^{1/3}}.$$

Последняя оценка вместе с формулой (10) приводит к следующей теореме, которая на самом деле верна для п.п.б.к. форм произвольного дискриминанта $d<0$.

Теорема 1. *Пусть*

$$S(z;f)=\sum_{n=1}^{\infty} s(n;f)e^{2\pi i n z}$$

– параболическая форма, входящая в тета-ряд п.п.б.к. формы f (см. (7)). Тогда

$$\sum_{n\leqslant x}|s(n;f)| \ll \frac{x}{(\log x)^{1/3}}.$$

Замечание 1. Можно показать, что для каждой п.п.б.к. формы $f(x_1,x_2)$ дискриминанта $d=-23$ (с числом классов форм $h=3$) имеет место асимптотика ($x\to\infty$)

$$\sum_{n\leqslant x}|s(n;f)| \sim C\frac{x}{(\log x)^{1/3}},$$

$C>0$ – константа.

Замечание 2. Как известно, в случае п.п.б.к. форм $f(x_1,x_2)$ величины $e(n;f)$ и $s(n;f)$ довольно часто имеют один и тот же порядок; например, в естественных предположениях для конечной части P_1 всех простых чисел $e(p;f)=-s(p;f)$, $p\in P_1$. Это является причиной того, что проблема представимости натуральных чисел индивидуальной п.п.б.к. формой не решена. Покажем, однако, что в среднем $e(n;f)$ "больше", чем $|s(n;f)|$. Действительно, пусть $R(x)$ – множество целых чисел $n\leqslant x$, представимых родом R. В силу очевидных неравенств $-e(n;f)\leqslant s(n;f)\leqslant (h-1)e(n;f)$, достаточно рассмотреть средние значения на множестве $R(x)$ Известно (см. §2 ниже), что

$$\#\{R(x)\} \asymp \frac{x}{\sqrt{\log x}}.$$

Поэтому

$$\{\text{среднее значение} \quad e(n;f) \ \text{ на } \ R(x)\} \asymp (\log x)^{1/2}.$$

По теореме 1

$$\{\text{среднее значение} \quad |s(n;f)| \ \text{ на } \ R(x)\} \ll (\log x)^{1/6}.$$

Методом доказательства теоремы 1 можно получить и такой результат (для простоты берем простейший полином второй степени x^2+a).

Теорема 2. *Сохраним обозначения теоремы* 1, *пусть* $\chi_d(n)$ – *характер поля* $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

1) *Если* $\left(\frac{-a}{n}\right)$ *и* $\chi_d(n)$ – *эквивалентные характеры, то*

$$\sum_{n\leqslant x} |s(n^2+a;f)| \ll x(\log x)^{1/3}.$$

2) *Если* $\left(\frac{-a}{n}\right)$ *и* $\chi_d(n)$ – *неэквивалентные характеры, то*

$$\sum_{n\leqslant x} |s(n^2+a;f)| \ll \frac{x}{(\log x)^{1/3}}.$$

Поведение $|s(n;f)|$ на других полиномиальных последовательностях здесь не рассматривается, поскольку ниже будет изучена сходная задача для функции $r_2(n)$.

§ 2. Теорема Бернайса

В 1908 году Ландау [22] получил следующий результат:

пусть $B(x)$ – количество целых положительных $n \leqslant x$, которые могут быть представлены в виде $n = x_1^2 + x_2^2$, где x_1, x_2 – целые. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}\sqrt{\log x}\,B(x) = b,$$

где b – положительная явно вычисляемая константа.

В книге о Рамануджане [23] Харди заметил, что для $B(x)$ можно получить асимптотическое разложение

$$B(x) = \frac{bx}{\sqrt{\log x}}\left(1 + \frac{c}{\log x} + \frac{d}{\log^2 x} + \dots\right). \tag{12}$$

Джеймс [24] доказал следующую теорему:

пусть $B'(x;O)$ означает количество целых положительных $n \leqslant x$, которые могут быть представлены п.п.б.к. формами заданного дискриминанта d, причем $(n, 2\Delta) = 1$. Тогда $(x \to \infty)$

$$B'(x;O) = b'(O)x/\big(\log x\big)^{1/2} + O\big(x/\log x\big), \tag{13}$$

где $b'(O)$ – положительная константа, выражение для которой дается.

Полл [25] убрал ограничение $(n, 2\Delta) = 1$ и получил аналогичную асимптотическую формулу с явно подсчитанной постоянной $b(O)$ в главном члене:

$$B(x;O) = b(O)x/\big(\log x\big)^{1/2} + O\big(x/\log x\big).$$

Отметим, что при доказательстве своего результата Полл опирался на формулу Джеймса (13).

В дальнейшем Хойпель [26] и, наконец, Р. М. Кауфман [27] заменили остаточный член в формуле Полла асимптотическим разложением (см. также [28, 29]), получив полный аналог (12).

Значительно труднее перенести результат Ландау на индивидуальную форму. Впервые это сделал в своей диссертации [10] Бернайс. Поскольку эта публикация нам недоступна, сформулируем результат Бернайса по книге Диксона ([30], p. 49):

пусть $f(x_1, x_2)$ – п.п.б.к. форма дискриминанта d. Тогда количество $B(x;f)$ целых положительных чисел $n \leqslant x$, представимых формой $f(x_1, x_2)$, удовлетворяет асимптотическому соотношению $(x \to \infty)$

$$B(x;f) \sim \frac{b_d x}{(\log x)^{1/2}},$$

где константа b_d зависит лишь от дискриминанта d.

В работе [31] Одони дал свое доказательство результата Бернайса в форме

$$B(s;f) = A(f)x(\log x)^{-1/2}\big\{1 + O\big((\log x)^{-B(f)}\big)\big\}, \quad B(f) > 0.$$

Метод Одони, по-видимому, не позволяет вычислить константу $A(f)$ и не дает информации о $B(f)$. Мы не знаем работ, в которых вычислялась бы константа в главном члене, кроме статьи [32], где делается попытка решить задачу для случая формы $x_1^2 + bx_2^2$.

Наконец, следует указать на статью [11] Б. М. Бредихина и Ю. В. Линника, о которой подробнее сказано в §0.

В настоящем параграфе мы даем доказательство теоремы Бернайса, позволяющее подсчитать константу в главном члене и оценить показатель степени в остаточном члене. Величина $r(n;f)$ зависит не от индивидуальной формы f, а от класса C, которому принадлежит f. Поэтому вместо $r(n;f)$ нам удобно иногда писать $r(n;C)$. Наряду с величинами $B(x;O)$ и $B(x;C) = B(x;f)$ будем рассматривать величину $B(x;R) = \#\{R(x)\}$, количество целых положительных $n \leqslant x$, представимых родом форм R. Будем рассматривать также сходные величины $B'(x;C)$, $B'(x;R)$, $B'(x;O)$ (последнюю мы уже ввели выше) с дополнительным условием $(n, 2\Delta) = 1$.

Известно, что если d – фундаментальный дискриминант и n представляется формой $f(x_1, x_2)$, то род R формы f единственный, который представляет n. Если же d – нефундаментальный дискриминант, то в случае $(n, 2\Delta) > 1$ n может представляться несколькими родами R, R', R'', ..., причем, как доказано в [33],

$$r(n;R) = r(n;R') = r(n;R'') = \dots .$$

Обозначим количество родов форм дискриминанта d, представляющих n, через $\varkappa(n)$.

Теорема 3. *Пусть $f(x_1, x_2)$ – п.п.б.к. форма дискриминанта d, $f \in C \subset R \subset O$. Пусть A – некоторое множество натуральных чисел, содержащееся в $R(x)$. Тогда*

$$\sum_{n\in A} \varkappa(n)\frac{r(n;C)}{r(n;O)} = \frac{1}{h_0}\cdot \#A + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2/3}}\right).$$

Для доказательства нам потребуется следующая лемма [34].

Лемма 3. *Пусть $f(x_1, x_2)$ – п.п.б.к. форма дискриминанта d, $f \in O$. Пусть $n = 2^\alpha m$ $(2 \nmid m)$, $\Delta = 2^\varkappa \Delta_1$ $(2 \nmid \Delta_1)$, $p^\beta \| n (p > 2), p^l \| \Delta$, $u = \prod_{\substack{p|n,\\ p\nmid 2\Delta}} p^\beta$.*

Тогда

$$r(n;O) = w\chi_2^* \prod_{\substack{p|d\\ p>2}} \chi_p^* \sum_{\nu|u} \left(\frac{d}{\nu}\right),$$

где w – число единиц формы $f(x_1, x_2)$, а величины χ_2^* и χ_p^* вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \chi_2^* &= 2^{\alpha/2} && \textit{при} \quad \alpha \leqslant \varkappa, \quad 2|\alpha, \\ &= 2^{(\varkappa-1)/2} && \textit{при} \quad \alpha > \varkappa, \quad 2 \nmid \varkappa, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{\varkappa/2} \quad \textit{при} \quad \alpha > \varkappa, \quad 2|\varkappa, \quad \Delta_1 \equiv 1 \pmod 4,\\
&= 3 \cdot 2^{\varkappa/2} \quad \textit{при } 2|d, \ \alpha > \varkappa, \ 2|\alpha, \ 2|\varkappa, \ \Delta_1 \equiv 3 \pmod 8,\\
&= (\alpha - \varkappa - 1)2^{\varkappa/2} \quad \textit{при} \quad 2|d, \ \alpha > \varkappa, \ 2|\varkappa, \ \Delta_1 \equiv 7 \pmod 8,\\
&= \alpha + 1 \quad \textit{при} \quad 2 \nmid d, \ \Delta \equiv 7 \pmod 8,\\
&= 1 \quad \textit{при} \quad 2 \nmid d, \ \Delta \equiv 3 \pmod 8,\\
&= 0 \quad \textit{в остальных случаях};\\
\chi_p^* &= p^{\beta/2} \quad \textit{при} \quad \beta < l, \ 2|\beta,\\
&= p^{(l-1)/2} \quad \textit{при} \quad \beta \geqslant l, \ 2 \nmid l,\\
&= p^{l/2} + p^{l/2-1} \quad \textit{при} \quad \beta \geqslant l, \ 2|l, \ 2|\beta, \ \left(\frac{-\Delta_1}{p}\right) = -1,\\
&= (\beta - l + 1)\left(p^{l/2} - p^{l/2-1}\right) \quad \textit{при} \quad \beta \geqslant l, \ 2|l, \ \left(\frac{-\Delta_1}{p}\right) = 1,\\
&= 0 \quad \textit{в остальных случаях.}
\end{aligned}
$$

При доказательстве теоремы 3 мы сначала рассмотрим случай фундаментального дискриминанта d. Тогда

$$r(n;O) = w \sum_{\nu|n} \chi_d(\nu),$$

где $\chi_d(\nu)$ – характер поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. В §1 мы получили равенство

$$r(n;C) = \frac{1}{h_0} r(n;R) + O\biggl(\sum_{\chi_3} \lambda(n)\biggr).$$

Теперь мы используем равенство (здесь и ниже берутся те n, для которых выражения имеют смысл)

$$\frac{r(n;C)}{r(n;O)} = \frac{1}{h_0} \frac{r(n;R)}{r(n;O)} + O\biggl(\sum_{\chi_3} \frac{\lambda(n)}{r(n;O)}\biggr).$$

Для доказательства теоремы достаточно оценить сумму

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\lambda(n)}{r_0(n)},$$

где $r_0(n) = \sum\limits_{\nu|n} \chi_d(\nu)$. Применяя лемму 1, получаем, как и при доказательстве теоремы 1,

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\lambda(n)}{r_0(n)} \ll \frac{x}{\log x} e^{\sum\limits_{p \leqslant x} \frac{\lambda(p)}{2p}},$$

где $p = N(\rho)$ – нормы простых идеальных чисел первой степени поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Повторяя дальнейшие рассуждения из §1, получаем нужную оценку

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\lambda(n)}{r_0(n)} \ll \frac{x}{(\log x)^{2/3}},$$

откуда следует справедливость теоремы 3 в рассматриваемом частном случае.

Перейдем к случаю любого дискриминанта $d < 0$. Обозначим через Ω произведения степеней тех простых чисел, которые входят в 2Δ. Разобъем отрезок натуральных чисел $[1, x]$ на части:

$$[1, x] = \bigcup_{\Omega} I_\Omega,$$

где I_Ω состоит из произведений вида Ωu, Ω постоянно, u пробегает множество чисел $\Omega u \in [1, x]$. На множестве I_Ω величины χ_2^*, χ_p^* постоянны (см. лемму 3). Оценка суммы

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\lambda(n)}{r(n; O)} \tag{14}$$

сводится к исследованию сумм

$$\sum_{n \in I_\Omega} \frac{\lambda(n)}{r(n; O)},$$

а последние оцениваются точно так же, как оценивалась сумма (14) в случае фундаментальных дискриминантов. В остальном доказательство не меняется. Теорема 3 доказана.

Следствие 1. *В прежних обозначениях имеем* $(x \to \infty)$

$$B(x; C) = B(x; R) + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2/3}}\right).$$

Для доказательства достаточно применить теорему 3 к множеству $A = A_0$, состоящему лишь из тех $n \in R(x)$, которые не представимы C.

Остается получить асимптотическую формулу для $B(x; C)$ с главным членом в виде функции от x. Для этого выведем из теоремы 3 еще одно следствие.

Следствие 2. *В прежних обозначениях имеем* $(x \to \infty)$

$$B'(x; C) = B'(x; R) + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2/3}}\right).$$

Для величины $B'(x;R)$ асимптотическую формулу можно получить, вводя в схему Джеймса [24] родовые характеры. Мы не будем приводить доказательство, поскольку оно в значительной степени повторяет работу [24], сформулируем лишь полученный результат: при $x \to \infty$

$$B'(x;R) = \frac{1}{h_1}\frac{b'(O)x}{(\log x)^{1/2}} + O\left(\frac{x}{\log x}\right), \tag{15}$$

где константа $b'(O)$ вычислена Джеймсом (см. (13)).

Следствие 2 и (15) дают:

$$B'(x;C) = \frac{1}{h_1}\frac{b'(O)x}{(\log x)^{1/2}} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2/3}}\right). \tag{16}$$

Формулу для $B(x;R)$ можно получить, используя формулу (15) подобно тому как Полл [25] выводил формулу для $B(x;O)$ из формулы для $B'(x;O)$. Сравнительно просто рассматривается случай фундаментальных дискриминантов. При этом, естественно, необходимы условия представимости чисел родом форм (см., например, [33]). В результате получаем формулу ($x \to \infty$)

$$B(x;R) = \frac{b(R)x}{(\log x)^{1/2}} + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

в которой константа $b(R)$ одинакова для всех родов $R \subset O$, откуда следует соотношение: $b(R) = \frac{1}{h_1}\, b(O)$. Сформулируем полученный результат.

Теорема 4. *В случае фундаментального дискриминанта* $d < 0$ *имеем формулу* ($x \to \infty$)

$$B(x;C) = \frac{1}{h_1}\frac{b(O)x}{(\log x)^{1/2}} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{2/3}}\right), \tag{17}$$

где $b(O)$ *– константа Полла. В случае произвольного дискриминанта* $d < 0$ *имеет место формула* (16), *где* $b'(O)$ *– константа Джеймса.*

Замечание 3. В случае произвольного дискриминанта $d < 0$ имеет место формула, аналогичная (17), однако константа в главном члене имеет более сложный вид и здесь не приводится.

§ 3. Распределение значений $r_2(n)$

Пусть $d(n)$ – число целых положительных делителей целого положительного n и пусть $f(n)$ – полином от x с целыми коэффициентами, неприводимый над $\mathbb{Z}$. Для простоты положим $f(n) > 0$ для

$n = 1, 2, 3, \ldots$. Эрдеш [21] показал, что существуют положительные константы $\lambda_i = \lambda_i(f)$ $(i = 1, 2)$ такие, что

$$\lambda_1 x \log x \leqslant \sum_{n \leqslant x} d(f(n)) \leqslant \lambda_2 x \log x.$$

В случае $f(x) = ax^2 + bx + c$ Скауфилд [35] получил асимптотическую формулу $(x \to \infty)$

$$\sum_{n \leqslant x} d(f(n)) = A_1(f) x \log x + O\big(x \log\log x\big). \tag{18}$$

Одновременно в случае $b^2 - 4ac = -\mu^2$ им доказана асимптотическая формула $(x \to \infty)$

$$\sum_{n \leqslant x} r_2(f(n)) = A_2(f) x \log x + O\big(x \log\log x\big). \tag{19}$$

Холи [36] сумел довести результат (18) до

$$\sum_{n \leqslant x} d(f(n)) = A_1(f) x \log x + B_1(f) x + O\big(x^{8/9} \log^3 x\big). \tag{20}$$

Одновременно он улучшил асимптотику (19), а в случае $b\text{–}4ac \neq -\mu^2$ его результат имеет вид

$$\sum_{n \leqslant x} r_2(f(n)) = A_3(f) x + O\big(x^{8/9} \log^3 x\big). \tag{21}$$

Позднее В. А. Быковский [37] довел показатель 8/9 в (20) до 2/3.

Аналог результата Эрдеша для $r_2(n)$ в случае неприводимого полинома $f(x)$ степени $\geqslant 3$ пока не получен. Не получены даже оценка снизу или нетривиальная оценка сверху.

В настоящем параграфе мы докажем нетривиальную оценку сверху для суммы

$$\sum_{n \leqslant x} r_2\big(f(n)\big) \tag{22}$$

в случае неприводимых полиномов $f(x)$ специального вида степени $\geqslant 3$. Все рассматриваемые ниже полиномы обладают свойствами: $f(n) > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, кроме, может быть, конечного числа; в суммах типа (22) берутся только те n, для которых $f(n) > 0$. "Нетривиальность" оценки означает, что она лучше следующей оценки, которая получается из результата Эрдеша:

$$\sum_{n \leqslant x} r_2\big(f(n)\big) \ll x \log x. \tag{23}$$

За некоторыми исключениями (см. случай "$a = 4A$" теоремы 5) доказанная нами оценка имеет вид

$$\sum_{n \leqslant x} r_2(f(n)) \ll x$$

и, по-видимому, неулучшаема по порядку (а для соответствующих квадратичных полиномов в точности неулучшаема, ср. с (21)). В исключительных случаях наша оценка совпадает с "тривиальной" оценкой (23) и также, по-видимому, неулучшаема по порядку (а для соответствующих квадратичных полиномов в точности неулучшаема, ср. с (19)).

Замечание 4 Пусть $\varphi(x_1, x_2)$ – п.п.б.к. форма фундаментального дискриминанта d, принадлежащая роду форм R_φ. Встает вопрос о переносе асимптотики (21) на случай суммы

$$\sum_{n \leqslant x} r\big(f(n); \varphi\big).$$

Ограничимся частным случаем $f(x) = x^2 + a$, где $\left(\frac{-a}{n}\right)$ и $\chi_d(n)$ – неэквивалентные характеры. В силу теоремы 2 ($x \to \infty$)

$$\sum_{n \leqslant x} r\big(n^2 + a; \varphi\big) = \frac{1}{h_0} \sum_{n \leqslant x} r\big(n^2 + a; R_\varphi\big) + O\left(\frac{x}{(\log x)^{1/3}}\right).$$

Разбивая значения n из $[1, x]$ на прогрессии так, как это было сделано в работе [38], а затем применяя метод Холи, получим ($x \to \infty$)

$$\sum_{n \leqslant x} r\big(n^2 + a; R_\varphi\big) = Cx + O\left(x^{8/9+\varepsilon}\right),$$

откуда

$$\sum_{n \leqslant x} r\big(n^2 + a; \varphi\big) = \frac{1}{h_0} Cx + O\left(\frac{x}{(\log x)^{1/3}}\right).$$

Отметим, что подобное рассуждение на примере иной и более сложной задачи впервые применила Е. П. Голубева [39].

Возвращаясь к оценке суммы (22), будем предполагать, что $f(x)$ – неприводимый полином степени m с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Пусть $Spl\{f(x)\}$ – множество всех простых p таких, что $f(x) \mod p$ разлагается в произведение различных линейных полиномов над полем из p элементов F_p. Для оценки суммы (22) будем применять лемму 1; нам потребуется полная информация о величине

$$L(p) = \#\big\{\alpha \in F_p \big| f(\alpha) = 0\big\}.$$

К сожалению, вычисление этой величины в настоящее время проведено лишь в некоторых случаях. Сначала рассмотрим абелевы полиномы (т.е. полиномы с абелевой группой Галуа). В абелевом случае можно вычислить $L(p)$, поскольку из теории полей классов над $\mathbb{Q}$ следует: множество $Spl\{f(x)\}$ может быть описано конгруэнциальными условиями по модулю, зависящему от $f(x)$, в том и только в том случае, если полином $f(x)$ абелев (см. [40]). Точная форма первой половины этого результата дается законом взаимности Артина (над $\mathbb{Q}$):

пусть $K/\mathbb{Q}$ – конечное абелево расширение с группой Галуа $G = Gal(K/\mathbb{Q})$ и пусть Γ – подгруппа группы $\mathbb{Q}^*$, порожденная простыми, неразветвленными в K. Тогда символ Артина дает сюръективный групповой гомоморфизм $\sigma : \Gamma \to G$, ядро которого содержит лучевую группу Γ_a, $a = p_1^{e_1} \dots p_s^{e_s}$, где $p_1, \dots, p_s$ – разветвленные в K простые и $e_i \geqslant 1$.

Из этого закона можно вывести [40], что $Spl(f)$ с точностью до конечного числа исключений состоит из простых в прогрессиях

$$\{p = ak + l_1, p = ak + l_2, \dots, p = ak + l_f\},$$

причем одна из прогрессий имеет вид $\{p = ak + l_i, l_i = 1\}$; будем считать, что $l_1 = 1$.

Пусть $r_2^*(n) = \frac{1}{4} r_2(n)$. Леммы 1 и 2 сводят оценку суммы (22) к исследованию суммы

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{L(p) r_2^*(p)}{p}.$$

Будем рассматривать отдельно три случая: 1) $a = 4A$; 2) $a = 2A$, $A = 2A_1 + 1$; 3) $a = 2A + 1$. Рассмотрим случай 1). Разобъем простые числа в указанных прогрессиях на два класса (в случае необходимости переобозначив номера прогрессий):

$$\{p = 4Ak + 1, p = 4Ak + l_2, \dots, p = 4Ak + l_{f_0}\},$$
$$\{p = 4Ak + l_{f_0+1}, p = 4Ak + l_{f_0+2}, \dots, p = 4Ak + l_f\} \quad (1 \leqslant f_0 \leqslant f).$$

Все числа $1, l_2, \dots, l_{f_0}$ имеют вид 1, $l_2 = 4L_2 + 1, \dots, l_{f_0} = 4L_{f_0} + 1$; все числа $l_{f_0+1}, l_{f_0+2}, \dots, l_f$ имеют вид $l_{f_0+1} = 4L_{f_0+1} - 1$, $l_{f_0+2} = 4L_{f_0+2} - 1, \dots, l_f = 4L_f - 1$ (конечно, $l_f = 4L_f + 1$, если $f_0 = f$). На простых первого класса $r_2^*(p) = 2$, на простых второго класса $r_2^*(p) = 0$. Имеем ($x \to \infty$)

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{L(p) r_2^*(p)}{p} = 2m \cdot \frac{1}{\varphi(a)} \cdot f_0 \log\log x + O(1),$$

но $\frac{f}{\varphi(a)} = \frac{1}{m}$, поэтому правая часть равенства равна

$$2\frac{f_0}{f}\log\log x + O(1),$$

откуда

$$\sum_{n\leqslant x} r_2\big(f(n)\big) \ll x\big(\log x\big)^{2f_0/f-1}.$$

Переходим к случаю 2). У наших прогрессий $\{2Ak+1, 2Ak+l_2, \dots, 2Ak+l_f\}$ $1, l_2, \dots, l_{f_0}$ имеют вид $4L_i+1$ $(i=1,2,\dots,f_0)$, а $l_{f_0+1}, l_{f_0+2}, \dots, l_f$ имеют вид $4L_i-1$ $(i=f_0+1,\dots,f)$. Простые в наших прогрессиях разделим на два типа; тип I характеризуется условием $k=2k_1$, а тип II – условием $k=2k_1+1$. В соответствии с этим сумма по простым разделится следующим образом:

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{L(p)r_2^*(p)}{p} = \sum\nolimits^{(I)}_{p\leqslant x}\frac{L(p)r_2^*(p)}{p} +$$
$$+\sum\nolimits^{(II)}_{p\leqslant x}\frac{L(p)r_2^*(p)}{p} + O(1) = \sum\nolimits^{(I)} + \sum\nolimits^{(II)} + O(1).$$

Применяя теперь рассуждения, использованные в случае 1), имеем $(x\to\infty)$

$$\sum\nolimits^{(I)} = \frac{f_0}{f}\log\log x + O(1),$$
$$\sum\nolimits^{(II)} = \frac{f-f_0}{f}\log\log x + O(1),$$

откуда

$$\sum_{n\leqslant x} r_2\big(f(n)\big) \ll x.$$

Случай 3), хотя и сложнее первых двух, но довольно прост; мы опускаем доказательство и приводим лишь результат:

$$\sum_{n\leqslant x} r_2\big(f(n)\big) \ll x.$$

Сформулируем полученную теорему.

Теорема 5. *Пусть $f(x)$ – неприводимый полином степени m с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом* 1. *Предполагается, что этот полином абелев. Пусть $\{ak+l_i\}$ $(i=1,2,\dots,f)$ – прогрессии, простые числа p в которых составляют (с точностью* *до конечного множества)* $Spl(f)$. *В случае* $a = 4A$ *пусть* f_0 - *количество прогрессий вида* $\{4Ak + 4L_i + 1\ (i = 1, 2, \dots, f_0)\}$ *(имеем* $1 \leqslant f_0 \leqslant f$*), тогда*

$$\sum_{n\leqslant x} r_2(f(n)) \ll x(\log x)^{2f_0/f-1}.$$

Если же $4 \nmid a$, *то*

$$\sum_{n\leqslant x} r_2(f(n)) \ll x.$$

Замечание 5. 1) Для квадратичных полиномов практически всегда $f = 2f_0$ и лишь в исключительных (легко описываемых) случаях $f = f_0 = 1$. В общем (абелевом) случае при $a = 4A$ еще требуется дополнительное исследование.

2) Интересный пример применения теоремы 5 – круговые полиномы. Пусть $\Phi_m(x)$ – m-ый круговой полином. Известно, что

$$Spl(\Phi_m(x)) = \{p \equiv 1 \pmod m\}.$$

В случае $m = 4M$

$$\sum_{n\leqslant x} r_2(\Phi_m(n)) \ll x \log x \tag{24}$$

(в частности, для $\Phi_4(x) = x^2 + 1$ оценка (24) неулучшаема по порядку); для всех m, $4 \nmid m$,

$$\sum_{n\leqslant x} r_2(\Phi_m(n)) \ll x \tag{25}$$

(в частности, для $\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$ оценка (25) неулучшаема по порядку).

Переходим к полиномам с неабелевой группой Галуа. Для них известно не много результатов о виде $L(p)$ ([41–44]). Мы рассмотрим сумму (22) в двух следующих случаях: $f(x)$ – кубический полином весьма общего вида или $f(x) = x^4 - m$. Начнем с первого случая.

Пусть $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{Z})$ – неприводимый полином, поле разложение K которого есть расширение Галуа над $\mathbb{Q}$ с $G = Gal(K/\mathbb{Q}) \cong S_3$ (симметрическая группа порядка 3) и содержит мнимое квадратичное поле $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, где $-D$ – дискриминант k. Пусть

$$L(s, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}$$

– L-функция Артина, ассоциированная с двумерным комплексным неприводимым представлением

$$\rho : Gal(K/\mathbb{Q}) \to GL_2(\mathbb{C})$$

с кондуктором N, где $D|N$. Тогда представление $\det\rho$ группы G, определенное посредством $(\det\rho)(g) = \det\rho(g)$, индуцирует характер Дирихле $(-D/*)$. Определим функцию $S(z)$ посредством

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{2\pi i n z}.$$

Из теории Гекке-Вейля следует, что $S(z)$ является нормализованной новой формой веса 1и характера $(-D/*)$ на группе $\Gamma_0(N)$. Койке [42] доказал следующий результат:

пусть M – произведение всех простых чисел, появляющихся в a, b, c, и пусть p – любое простое такое, что

$$p \nmid MN; \tag{*}$$

тогда имеем

$$L(p) = a(p)^2 - \left(\frac{-D}{p}\right). \tag{26}$$

Койке доказал также, что для $p \nmid MN$

$$\begin{cases} a(p) = 0 & \iff (-D/p) = -1, \\ a(p) = 2 \quad \text{или} \quad -1 & \iff (-D/p) = 1. \end{cases} \tag{27}$$

Для оценки суммы (22) применим лемму 1. Лемма 1 и (26) показывают, что необходимо оценить сумму ($(*)$ в знаке суммы означает, что выполняется условие $(*)$)

$$\sum_{p\leqslant x}^{(*)} \frac{L(p)r_2^*(p)}{p} = \sum_{p\leqslant x}^{(*)} \frac{a^2(p) + a^2(p)(-1/p) - (-D/p) - (D/p)}{p}.$$

Предположим сначала, что $(-D/n)$ и $\chi_4(n) = (-1/n)$ – неэквивалентные характеры. Тогда $(x \to \infty)$

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{(D/p)}{p} = O(1);$$

кроме того,

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{(-D/p)}{p} = O(1).$$

Из свойств свертки Ранкина хорошо известно (см., например, [45]), что ($x \to \infty$)

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{a^2(p)}{p} = \log\log x + O(1);$$

Наконец, рассмотрим сумму

$$I = \sum_{p \leqslant x} \frac{a^2(p)(-1/p)}{p}.$$

В работе [46] уже изучались L-функции типа

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2(n)\chi_4(n)}{n^s}.$$

Известно, что в точке $s = 1$ функция $L(s)$ регулярна; по доказанному в [46] $L(1) > 0$. Теперь по известной схеме получаем оценку $I = O(1)$. Отсюда при сделанных предположениях имеем

$$\sum_{n \leqslant x} r_2(f(n)) \ll x. \tag{28}$$

Рассмотрим теперь случай эквивалентных характеров $(-D/n)$ и $\chi_4(n)$; пусть $-D = -4$ (такой случай реально возможен). Тогда (D/n) эквивалентен главному характеру; с другой стороны, в силу (27) для $p \nmid MN$

$$a^2(p)(-1/p) = a^2(p),$$

и результат (28) сохраняется. Тем самым доказана

Теорема 6. *Пусть*

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \in \mathbb{Z})$$

– неприводимый полином, поле разложения которого K есть расширение Галуа над $\mathbb{Q}$ с $Gal(K/\mathbb{Q}) \cong S_3$ и содержит мнимое квадратичное поле. Тогда

$$\sum_{n \leqslant x} r_2(f(n)) \ll x.$$

Переходим к сумме

$$\sum_{n \leqslant x} r_2(f(n)), \ f(x) = x^4 - m. \tag{29}$$

Предполагаем, что $m > 0$ – неквадратное целое число, $m = \prod_p p^{e(p)}$, $0 \leqslant e(p) \leqslant 3$. Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{m})$ – поле, порожденное $\sqrt{-1}$ и $\sqrt[4]{m}$ над $\mathbb{Q}$. Тогда K является расширением Галуа над $\mathbb{Q}$ степени 8 и его группа Галуа $G = Gal(K/\mathbb{Q})$ изоморфна диэдральной группе D_4 порядка 8. Пусть σ и ρ – образующие G, определенные посредством соотношений

$$\sigma(\sqrt[4]{m}) = \sqrt{-1}\sqrt[4]{m}, \quad \sigma(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1};$$
$$\rho(\sqrt[4]{m}) = \sqrt[4]{m}, \qquad \rho(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}.$$

Пусть ψ –двумерное комплексное неприводимое представление группы G, определенное посредством

$$\psi(\sigma) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \quad \psi(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда представление $\det\psi$ группы G, заданное соотношением $(\det\psi)(g) = \det\psi(g)$, индуцирует характер Дирихле $\chi_4(n)$. Пусть

$$L(s,\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$$

– L-функция Артина, ассоциированная с ψ; N – кондуктор ψ. Из теории Гекке-Вейля следует, что функция

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{2\pi i n z}$$

является нормализованной новой формой веса 1 и характера $\chi_4(n)$ на группе $\Gamma_0(N)$. Ишии [43] доказал следующий результат:

пусть m_0 – бесквадратная часть m, тогда для простого p с условием

$$p \nmid N \tag{**}$$

имеем

$$L(p) = 1 + a(p) + (m_0/p). \tag{30}$$

Ишии доказал также, что

$$\begin{cases} p \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow a(p) = 2 \text{ или } -2 \text{ или } 0, \\ p \equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow a(p) = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Для оценки суммы (29) применим лемму 1. Лемма 1 и (30) показывают, что необходимо оценить сумму ((**) в знаке суммы означает, что выполняется условие (**))

$$\sum_{p\leqslant x}^{(**)} \frac{L(p)r_2^*(p)}{p} =$$

$$= \sum_{p\leqslant x}^{(**)} \frac{1+(-1/p)+a(p)+a(p)(-1/p)+(m_0/p)+(-m_0/p)}{p}.$$

В силу наших предположений (m_0/n) не может быть тривиальным характером. По результату (31) имеем $a(p)(-1/p) = a(p)$. Известно, что в точке $s = 1$ функция $L(s,\psi)$ регулярна, а Ранкин [2] показал, что $L(1,\psi) > 0$. Поэтому $(x \to \infty)$

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{a(p)}{p} = O(1).$$

Кроме того, при $x \to \infty$

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \log\log x + O(1).$$

Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 6. Итак, нами доказана

Теорема 7. *Пусть $m > 0$ – неквадратное число, $m = \prod_p p^{e(p)}$, где $0 \leqslant e(p) \leqslant 3$. Тогда*

$$\sum_{n\leqslant x} r_2(n^4 - m) \ll x.$$

§ 4. Среднее число делителей специального вида

В настоящем параграфе мы ненадолго оставим основной объект нашего исследования – коэффициенты Фурье модулярных форм веса 1 и перейдем к изучению поведения некоторых мультипликативных и аддитивных функций, связанных с делителями чисел, на полиномиальных последовательностях. При этом в процессе решения задачи появляются те же суммы по простым, что и при изучении распределения значений $r_2(n)$ в §3, но теперь можно получить более точные результаты – определить порядок или даже асимптотику для соответствующих сумм значений этих функций.

Рассмотрим сначала аналоги функции $d(n)$. Пусть $d^{(1)}(n)$ – мультипликативная функция такая, что

$$d^{(1)}(2^a) = 1,\ \ a = 0,1,2,\ldots;$$
$$d^{(1)}(p^a) = d(p^a),\ \text{ если } p \equiv 1 \pmod 4 \text{ и } a = 0,1,2,\ldots;$$
$$d^{(1)}(p^a) = 1,\ \text{ если } p \equiv -1 \pmod 4 \text{ и } a = 0,1,2,\ldots.$$

Аналогично, пусть $d^{(-1)}(n)$ – мультипликативная функция такая, что

$$d^{(-1)}(2^a) = 1,\ \ a = 0,1,2,\ldots;$$
$$d^{(-1)}(p^a) = 1,\ \text{ если } p \equiv 1 \pmod 4 \text{ и } a = 0,1,2,\ldots;$$
$$d^{(-1)}(p^a) = d(p^a),\ \text{ если } p \equiv -1 \pmod 4 \text{ и } a = 0,1,2,\ldots.$$

Изучим суммы

$$I^{(1)} = \sum_{n\leqslant x} d^{(1)}\big(f(n)\big) \quad \text{и} \quad I^{(-1)} = \sum_{n\leqslant x} d^{(-1)}\big(f(n)\big)$$

где полином $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Вместо леммы 1 будем использовать следующий частный случай результата М. Б. Барбана [13], который сформулируем в виде леммы.

Лемма 4. *Пусть $t(n)$ – мультипликативная функция и удовлетворяет следующим условиям:*

$$t(p^k) = O\big(k^{c_1}\big),\ \ t\big(p^{k+1}\big) \geqslant t(p^k)\ \ (k = \overline{0,\infty}).$$

Тогда для любого неприводимого полинома $f(n)$ имеет место соотношение ($L(p)$ имеет прежний смысл)

$$\sum_{n\leqslant x} t\big(f(n)\big) \asymp x e^{\sum\limits_{p\leqslant x} \frac{L(p)(t(p)-1)}{p}};$$

знак $f_1 \asymp f_2$ означает $c_2 < \frac{f_1}{f_2} < c_3$, причем константы c_2, c_3 зависят лишь от функции $t(n)$, полинома $f(n)$, но не зависят от x.

Мы объединим аналоги теорем 5–7 для $d^{(1)}(n)$ и $d^{(-1)}(n)$ в виде следующего результата, доказательство которого сходно с доказательством этих теорем с заменой леммы 1 на лемму 4.

Теорема 8. *Пусть выполняются предположения теорем 5–7 и сохраняются использованные там обозначения. Если $f(x)$ – абелев полином с предположением "$a = 4A$" (см. теорему 5), то*

$$I^{(1)} \asymp x\big(\log x\big)^{f_0/f},$$
$$I^{(-1)} \asymp x\big(\log x\big)^{1-f_0/f}.$$

Для абелевых полиномов $f(x)$ с предположением "$4 \nmid a$" из теоремы 5 и для полиномов, рассмотренных в теоремах 6 и 7, имеем

$$I^{(1)} \asymp x(\log x)^{1/2}, \quad I^{(-1)} \asymp x(\log x)^{1/2}.$$

Замечание 6. 1) Для полинома $f(x) = ax + b$ обобщением метода Ландау [22] можно получить асимптотику

$$I^{(1)} = C^{(1)} x \log^{1/2} x + O\big(x(\log x)^{-1/2}\big),$$
$$I^{(-1)} = C^{(1)} x \log^{1/2} x + O\big(x(\log x)^{-1/2}\big)$$

2) Для m-го кругового полинома $\Phi_m(x)$ имеем: если $4|m$, то

$$I^{(1)} \asymp x \log x, \quad I^{(-1)} \asymp x;$$

если $4 \nmid m$, то

$$I^{(1)} \asymp x \log^{1/2} x, \quad I^{(-1)} \asymp x \log^{1/2} x.$$

Переходим теперь к рассмотрнеию сильно аддитивных функций. Аддитивной арифметической функцией $g(n)$ называется функция, удовлетворяющая условию: для $(n_1, n_2) = 1$ $g(n_1 n_2) = g(n_1) + g(n_2)$. Если к тому же $g(p^r) = g(p)$ для каждого простого $p \geqslant 2$ и каждого целого $r \geqslant 1$, то $g(n)$ называется сильно аддитивной функцией. Примером такой функции является $\omega(n) = \prod_{p|n} 1$ – количество различных простых делителей n.

Пусть $f(x)$ – примитивный неприводимый полином с целыми коэффициентами, причем предполагаем, что $f(n) > 0$ для всех $n > 0$, кроме, может быть, конечного числа. Туран [47] доказал, что $(x \to \infty)$

$$\sum_{n \leqslant x} \omega\big(f(n)\big) = x \log\log x + O(x).$$

Шварц [48] обобщил этот результат; мы сформулируем это обобщение в виде леммы.

Лемма 5. *Пусть арифметическая функция $F(n)$ сильно аддитивна и $F(p) = O(1)$; пусть сумма (в которой $L(p)$ имеет прежний смысл)*

$$\Psi(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{L(p)F(p)}{p} \to \infty,$$

если $x \to \infty$. Тогда при $x \to \infty$

$$\sum_{p \leqslant x} F\big(f(n)\big) \sim x \cdot \Psi(x).$$

Введем теперь две сильно аддитивные функции $\omega^{(1)}(n)$ и $\omega^{(-1)}(n)$. Пусть $\omega^{(1)}(n)$ – сильно аддитивная функция такая, что

$$\begin{aligned}
&\omega^{(1)}(2) = 0;\\
&\omega^{(1)}(p) = 1, \text{ если } p \equiv 1 \pmod 4;\\
&\omega^{(1)}(p) = 0, \text{ если } p \equiv -1 \pmod 4.
\end{aligned}$$

Пусть $\omega^{(-1)}(n)$ – сильно аддитивная функция такая, что

$$\begin{aligned}
&\omega^{(-1)}(2) = 0;\\
&\omega^{(-1)}(p) = 0, \text{ если } p \equiv 1 \pmod 4;\\
&\omega^{(-1)}(p) = 1, \text{ если } p \equiv -1 \pmod 4.
\end{aligned}$$

С помощью леммы 5 и наших предшествующих результатов можно легко доказать следующую теорему.

Теорема 9. *Пусть выполняются предположения теорем 5–7 и сохраняются использованные там обозначения. Если $f(x)$ – абелев полином с предположением "$a = 4A$" из теоремы 5, то при $x \to \infty$*

$$K^{(1)} = \sum_{n \leqslant x} \omega^{(1)}(f(n)) = x \log\log x \left(\frac{f_0}{f} + o(1)\right),$$
$$K^{(-1)} = \sum_{n \leqslant x} \omega^{(-1)}(f(n)) = x \log\log x \left(\left(1 - \frac{f_0}{f}\right) + o(1)\right),$$

причем если $f_0 = f$, то $K^{(-1)} \ll x$.

Для абелевых полиномов $f(x)$ с предположением "$4 \nmid a$" из теоремы 5 и для полиномов, рассмотренных в теоремах 6 и 7, имеем ($x \to \infty$)

$$K^{(1)} = x \log\log x \left(\frac{1}{2} + o(1)\right),$$
$$K^{(-1)} = x \log\log x \left(\frac{1}{2} + o(1)\right).$$

§ 5. Уточнение оценки Ранкина–Сельберга в случае параболических форм веса 1

В §1 мы уже приводили оценку Гекке (5) для суммы модулей коэффициентов Фурье параболической формы целого веса. Эта оценка была выведена Гекке из следующего результата (см. [15]).

Пусть $k \geqslant 1$ и Q – целые числа, тогда для каждой параболической формы веса k и ступени Q

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{2\pi n z/Q}$$

справедлива оценка ($x \to \infty$)

$$\sum_{n \leqslant x} |a(n)|^2 = O(x^k).$$

Несколько ранее для $SL(2,\mathbb{Z})$-параболической формы веса 12

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n z}$$

Харди [49] получил более точный результат: существуют константы $A > 0$ и $B > 0$ такие, что

$$An^{12} < \sum_{m=1}^{\infty} \tau^2(m) < Bn^{12}.$$

В 1939 году Ранкин [2], придумав замечательный метод, доказал, что неравенство Гекке можно заменить асимптотической формулой

$$\sum_{n \leqslant x} |a(n)|^2 = Cx^k + O\left(x^{k-\frac{2}{5}}\right), \tag{32}$$

где $C > 0$. Результат Ранкина верен для Γ'-параболических форм вещественного веса $k > 0$, где Γ' является конгруэнц-подгруппой группы $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ (или содержит такую подгруппу). Несколько позднее результат Ранкина был переоткрыт Сельбергом [3]. С тех пор асимптотика (32) не была уточнена, хотя есть все основания считать, что остаточный член в ней может быть улучшен. По поводу соответствующего Ω-результата сошлемся на статью А. Б. Воронецкого [50].

В настоящем параграфе мы покажем, что для параболической формы $S(z; f)$, входящей в тета-ряд п.п.б.к. формы f (см. (7)), остаток в (32) может быть улучшен до $O(x^{1/2+\varepsilon})$.

Пусть $L_M(s,\chi)$ означает L-функцию Гекке поля алгебраических чисел M, где χ – гроссенхарактер в M:

$$L_M(s,\chi) = \sum_{A} \chi(A) N_{M/\mathbb{Q}} A^{-s} \quad (\operatorname{Re} s > 1),$$

A пробегает все целые идеалы в M. Известно, что эта функция имеет голоморфное продолжение на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ (исключая полюс в точке $s=1$, если χ – главный характер). Пусть $k=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле дискриминанта $d<0$, $L_k(s,\chi_i)$ – L-функция Гекке поля k с гроссенхарактером χ_i ($i=1,2$),

$$L_k(s,\chi_i)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(\chi_i)}{n^s},$$

где

$$a_n(\chi_i)=\sum_{N_{k/\mathbb{Q}}A=n}\chi_i(A).$$

Скалярное произведение

$$L_k(s,\chi_1)*L_k(s,\chi_2)$$

L-функций Гекке $L_k(s,\chi_1)$ и $L_k(s,\chi_2)$ (мы ограничимся лишь рассматриваемым частным случаем) вводится равенством

$$L_k(s,\chi_1)*L_k(s,\chi_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(\chi_1)a_n(\chi_2)}{n^s}\quad(\operatorname{Re}s>1).$$

По поводу аналитического продолжения и свойств этого ряда см. [4–9].

Рассмотрим п.п.б.к. формы $f_1(x_1,x_2)$, $f_2(x_1,x_2)$ фундаментального дискриминанта d. Пусть h – число классов идеалов поля k; $\mathfrak{c}_1$ и $\mathfrak{c}_2$ – классы идеалов поля k, соответствующие формам f_1 и f_2. Основа дальнейших рассуждений – очевидное тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n;f_1)r(n;f_2)}{n^s}=$$
$$=\frac{w^2}{h^2}\sum_{\chi_1}\sum_{\chi_2}\overline{\chi}_1(\mathfrak{c}_1)\overline{\chi}_2(\mathfrak{c}_2)L_k(s,\chi_1)*L_k(s,\chi_2),\tag{33}$$

где $\sum\limits_{\chi_j}$ ($j=1,2$) – суммирование по характерам группы классов идеалов поля k. Из работ [4–8] следует, что скалярные произведения в (33) можно выразить через L-функции Гекке:

$$L_k(s,\chi_1)*L_k(s,\chi_2)=\frac{L_k(s,\chi^{(1)})L_k(s,\chi^{(2)})}{L_{\mathbb{Q}}(2s,\chi^{(0)})}\tag{34}$$

(в удобной форме этот результат изложен в [8]).

Если $\chi_1 = \chi_2$ – главный характер или квадратичный характер, то из подробного вида правой части (34), приведенного в [8], следует, что скалярное произведение

$$L_k(s, \chi_1) * L_k(s, \chi_2)$$

имеет в точке $s = 1$ полюс второго порядка; в остальных случаях это скалярное произведение в точке $s = 1$ либо регулярно либо имеет полюс первого порядка.

Обозначим ряд слева в (33) через $Z(s)$. Используем формулу обращения для рядов Дирихле (см. [51]). Полагая $b = 1 + 1/\log x$, $T = x^{1/2+\varepsilon}$, имеем $(s = \sigma + it)$

$$\sum_{n \leqslant x} r(n; f_1) r(n; f_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} Z(s) x^s x^{-1} ds + O\big(x^{1/2+\varepsilon}\big) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{w^2}{h^2} \sum_{\chi_1} \sum_{\chi_2} \overline{\chi}_1(\mathfrak{c}_1) \overline{\chi}_2(\mathfrak{c}_2) \times \tag{35}$$

$$\times \int\limits_{b-iT}^{b+iT} L_k(s, \chi_1) * L_k(s, \chi_2) x^s s^{-1} ds + O\big(x^{1/2+\varepsilon}\big).$$

Известны следующие результаты (см. [52]): при $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$ $(j = 1, 2)$

$$L_k\big(s, \chi^{(j)}\big) \ll \big(|t| + 2\big)^{1-\sigma+\varepsilon}; \tag{36}$$

$$\frac{1}{T} \int\limits_0^T \big|L_k\big(\frac{1}{2} + it, \chi^{(j)}\big)\big|^2 dt \ll \log^4 T. \tag{37}$$

Перенося в каждом интеграле в (35) прямую интегрирования влево на половинную прямую $s = \frac{1}{2} + it$, мы проходим (возможный) полюс в точке $s = 1$. Используя формулу (34), мы оцениванием затем интегралы по вертикальному и горизонтальным отрезкам контура с помощью (36), (37) и получаем следующий результат:

$$\sum_{n \leqslant x} r(n; f_1) r(n; f_2) = c_1 x \log x + c_2 x + O\big(x^{1/2+\varepsilon}\big). \tag{38}$$

Небольшое вычисление, использующее, в частности, теорему Гаусса об удвоении, показывает, что если f_1 и f_2 принадлежат одному роду, то константа $c_1 = c_1(d) > 0$ и зависит лишь от d. (Если же f_1 и f_2 принадлежат разным родам, то, очевидно, левая часть (38) есть нуль при любом x).

Отсюда с учетом теоремы Зигеля о родовом тета-ряде получается следующая

Теорема 10. *Пусть*

$$S(z;f)=\sum_{n=1}^{\infty}s(n;f)e^{2\pi inz}$$

– ненулевая параболическая форма, входящая в тета-ряд п.п.б.к. формы f фундаментального дискриминанта d (см. (7)). Тогда

$$\sum_{n\leqslant x}s(n;f)^2=cx+O\big(x^{1/2+\varepsilon}\big),$$

где $c>0$.

Литература

1. Elliott P. D. T. A., Moreno C. J., Shahidi F. *On the absolute value of Ramanujan's τ-function.* — Math. Ann. **266**, No. 4 (1984), 507–511.
2. Rankin R. A. *Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions.* I. *The zeros of the function $\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)n^{-s}$ on the line* $\operatorname{Re}s=\frac{13}{2}$. II. *The order of the Fourier coefficients of the integral modular forms.* — Proc. Cambridge Phil. Soc. **35**, No. 3 (1939), 351–356; 357–372.
3. Selberg *Bemerkungen über eine Dirichletsche Reihe, die mit der Theorie der Modulformen nahe verbunden ist.* — Arch. Math. Naturvid. **43**, No. 4 (1940), 47–50; Selberg A. Collected papers. Vol. I. Berlin etc., 1989, 38–41 .
4. Виноградов А. И. *О продолжимости в левую полуплоскость скалярного произведения L-рядов Гекке с характерами величины.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. **29**, No. 2 (1965), 485–492.
5. Kurokawa N. *On the meromorphy of Euler products. Part* I. *Artin type.* Tokyo Inst. Techn. Preprint (1977).
6. Kurokawa N. *On the meromorphy of Euler products.* — Proc. Japan Acad. **54A**, No. 6 (1978), 163–166.
7. Kurokawa N. *On Linnik's problem.* — Proc. Japan Acad. **54A**, No. 6 (1978), 167–169.
8. Moroz B. Z. *Scalar product of L-functions with Grössencharacters: its meromorphic continuation and natural boundary.* — J. reine und angew. Math. **332** (1982), 99–117.
9. Фоменко О. М. *Продолжимость на всю плоскость и функциональное уравнение скалярного произведения L-рядов Гекке двух квадратичных полей.* — Тр. Мат. ин-та АН СССР **128** (1972), 232–241.
10. Bernays P. *Über die Darstellung von positiven, ganzen Zahlen durch die primitiven, binären quadratischen Formen einer nicht-quadratischen Diskriminante.* Diss. Göttingen, 1912.
11. Бредихин Б. М., Линник Ю. В. *Асимптотика и эргодические свойства решений обобщенного уравнения Харди–Литтлвуда.* — Мат. сб. **71**, No. 2 (1966), 145–161; Ю. В. Линник. Избранные труды. Теория чисел. L-функции и дисперсионный метод. Л., 1980, 299–316 .
12. Голубева Е. П. *О представлении больших чисел бинарными квадратичными формами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1995), 60–64.

15 Заказ 227

13. Барбан М. Б. *Мультипликативные функции от* $^{\Sigma}R$*-равнораспределенных последовательностей.* — Изв. АН Уз. ССР. Сер. физ.-мат. наук, No. 6 (1964), 13–19.
14. Барбан М. Б., Вехов П. П. *Суммирование мультипликативных функций от полиномов.* — Мат. заметки **5**, No. 6 (1969), 669–680.
15. Hecke E. *Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung.* I. — Math. Ann. **114** (1937), 1–28; Hecke E. Mathematische Werke. Göttingen, 1983, 644–671 .
16. Shahidi F. *On certain L-functions.* — Amer. J. Math. **103**, No. 2 (1981), 297–355.
17. Rankin R. A. *A family of newforms.* — Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. **10** (1985), 461–467.
18. Rankin R. A. *Sums of powers of cusp form coefficients.* II. — Math. Ann. **272**, No. 4 (1985), 593–600.
19. Виноградов А. И. *Общее уравнение Харди–Литтлвуда.* — Мат. заметки **1**, No. 2 (1967), 189–197.
20. Голубева Е. П. *Асимптотика числа целых точек на некоторых эллипсоидах.* — Мат. заметки **11**, No. 6 (1972), 625–634.
21. Erdös P. *On the sum* $\sum\limits_{k=1}^{x} d(f(k))$. — J. London Math. Soc. **27**, No. 1 (1952), 7–15.
22. Landau E. *Über die Einteilung der positiven ganzen Zahlen in vier Klassen nach der Mindestzahl der zu ihren additiven Zusammensetzung erforderlichen Quadrate.* — Arch. Math. und Physik, (3) **13**, No. 4 (1908), 305–312.
23. Hardy G. H. *Ramanujan.* Cambridge, 1940.
24. James R. D. *The distribution of integers represented by quadratic forms.* — Amer. J. Math. **60**, No. 3 (1938), 737–744.
25. Pall G. *The distribution of integers represented by binary quadratic forms.* — Bull. Amer. Math. Soc. **49**, No. 6 (1943), 447–449.
26. Heupel W. *Die Verteilung der ganzen Zahlen, die durch quadratische Formen dargestellt werden.* — Arch. Math. **19**, No. 2 (1968), 162–166.
27. Кауфман Р. М. *Асимптотическая формула для числа целых чисел, представимых бинарнами квадратичными формами.* — Уч. зап. Влад. гос. пед. ин-та. Сер. мат. **38**, No. 2 (1971), 46–56.
28. Luthar I. S. *A generalization of a theorem of Landau.* — Acta Arithm. **12**, No. 3 (1967), 223–228.
29. Постников А. Г. *Введение в аналитическую теорию чисел.* М., 1971.
30. Dickson L. E. *History of theory of numbers.* Vol. III. N. Y., 1934.
31. Odoni R. W. K. *On norms of integers in a full module of an algebraic number field and the distribution of values of binary integral quadratic forms.* — Mathematika **22**, No. 2 (1975), 108–111.
32. Shanks D., Schmid L. P. *Variations of a theorem of Landau.* I. — Math. Comp. **20**, No. 96 (1966), 551–569.
33. Вепхвадзе Т. В. *Об арифметическом смысле сингулярного ряда положительных бинарных квадратичных форм.* — Тр. Тбилис. мат. ин-та **40** (1974), 60–77.
34. Pall G. *The structure of the number of representations function in a positive binary quadratic form.* — Math. Zeit. **36** (1933), 321–343.
35. Scourfield E. J. *The divisors of a quadratic polynomial.* — Proc. Glasgow Math. Ass. **5**, No. 1 (1961), 8–20.

36. Hooley C. *On the number of divisors of quadratic polynomials.* — Acta Math. **110**, No. 1–2 (1963), 97–114; Математика. Период. сб. переводов иностранных статей. **12**, No. 5 (1968), 3–18 .
37. Быковский В. А. *Спектральные разложения некоторых автоморфных функций и их теоретико-числовые приложения.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **134** (1984), 15–33.
38. Фоменко О. М. *Суммы трех квадратов в мнимых квадратичных полях.* — Алгебра и анализ **3**, No. 5 (1991), 190–212.
39. Голубева Е. П. *Асимптотическое распределение целых точек, принадлежащих заданным классам вычетов, на гиперболоидах специального вида.* — Мат. сб. **123**, No. 4 (1984), 510–533.
40. Wyman B. F. *What is a reciprocity law?* — Amer. Math. Monthly **79** (1972), 571–586.
41. Hiramatsu T. *Higher reciprocity law and modular forms of weight one.* — Comm. Math. Univ. Sancti Pauli **31**, No. 1 (1982), 75–85.
42. Koike M. *Higher reciprocity law, modular forms of weight 1 and elliptic curves.* — Nagoya Math. J. **98** (1985), 109–115.
43. Ishii N. *Cusp forms of weight one, quadratic reciprocity and elliptic curves.* — Nagoya Math. J. **98** (1985), 117–137.
44. Hiramatsu T., Ishii N. *Quartic residuacity and cusp forms of weight one.* — Comm. Math. Univ. Sancti Pauli **34**, No. 1 (1985), 91–103.
45. Moreno C. J. *The Hoheisel phenomenon for generalized Dirichlet series.* — Proc. Amer. Math. Soc. **40**, No. 1 (1973), 47–51.
46. Голубева Е. П., Фоменко О. М. *Значения рядов Дирихле, ассоциированных с модулярными формами, в точках* $s = 1/2, 1$. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **134** (1985), 117–137.
47. Turan P. *Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan.* — J. London Math. Soc. **11** (1936), 125–133.
48. Schwarz W. *Über die Summe* $\sum_{n\leqslant x} \varphi(f(n))$ *und verwandte Probleme.* — Monatsh. Math. **66**, No. 1 (1962), 43–54.
49. Hardy G. H. *Note on Ramanujan's arithmetical function* $\tau(n)$. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **23** (1927), 675–680.
50. Воронецкий А. Б. *Аналог теоремы Харди для коэффициентов Фурье параболических форм.* – В сб.: Автоморфные функции и теория чисел. Ижевск, 1987, 56–64 .
51. Ivić A. *The Riemann zeta-function.* New York etc., 1985.
52. Булота К. *О Z-функциях Гекке и распределении простых чисел мнимого квадратичного поля.* — Литовский мат. сб. **4**, No. 3 (1964), 309–328.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@ pdmi.ras.ru

Поступило 17 ноября 1995 г.