A. V. Luganskaya, Distribution of points of alternance in the approximation of a continuous function by rational fractions, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2001, Number 4, 50–54

Наконец, так как по условию $\overline{v}(A) \neq \mathbf{1}$, то согласно основной лемме $\overline{w}(A_\nabla) = \langle \overline{v}(A), \widetilde{\tau} \rangle \neq \langle \mathbf{1}, \widetilde{\top} \rangle$, т.е. $\langle \mathcal{A}', w \rangle \not\models A_\nabla$. Теорема полностью доказана.

В заключение обсудим полученный результат и сформулируем две не доказанные пока гипотезы. Легко видеть, что функция $\varepsilon(\cdot)$ является *антимонотонной*: если $L \subseteq M$, то $\varepsilon(L) \geqslant \varepsilon(M)$. Аналогичное утверждение имеет место для $\varepsilon^{\mathrm{lin}}(\cdot)$. Установленный в настоящей работе результат $\alpha^{\mathrm{lin}}(\mathbf{E}) = 3$ в совокупности с известными фактами $\alpha^{\mathrm{lin}}(\mathbf{GL}) = 7$ и $\alpha^{\mathrm{lin}}(\mathbf{B}) = \infty$ опровергает антимонотонность функции $\alpha^{\mathrm{lin}}(\cdot)$.

Гипотеза 1. *Функция $\alpha(\cdot)$ не является антимонотонной.*

Гипотеза 2. *Число модальностей с попарно различными логиками над $\mathbf{E}$ конечно: $\alpha(\mathbf{E}) < \infty$.*

Положительное решение второй гипотезы влечет положительное решение первой, поскольку, например, $\mathbf{E} \subset \mathbf{S4}$ и $\alpha(\mathbf{S4}) = \infty$ (см. [2]).

Вычисление характеристик $\varepsilon(L)$ и $\varepsilon^{\mathrm{lin}}(L)$ можно назвать "внутренним" подходом к изучению выразительной силы логики L, поскольку в этом случае отождествляются модальности, одинаковые с точки зрения самой логики L. Напротив, вычисление $\alpha(L)$ и $\alpha^{\mathrm{lin}}(L)$ следует отнести к "внешнему" подходу, ибо отождествляемые при этом модальности различны в логике L, но одинаковы с точки зрения "внешнего наблюдателя", изучающего законы, которым подчиняются эти модальности в логике L.

Пользуясь этой терминологией, полученный результат можно интерпретировать следующим образом. Во-первых, на линейных модальностях "внешний" подход дает существенное уменьшение числа "различных" модальностей: $\alpha^{\mathrm{lin}}(\mathbf{E}) = 3$, в то время как $\varepsilon^{\mathrm{lin}}(\mathbf{E}) = \infty$. Заметим, что пока неизвестен пример логики L, удовлетворяющей условиям $\alpha(L) < \infty$ и $\varepsilon(L) = \infty$ (такой пример можно получить из положительного решения гипотезы 2). Во-вторых, обнаруженное отсутствие свойства антимонотонности функции $\alpha^{\mathrm{lin}}(\cdot)$, а именно $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{B}$ при $3 = \alpha^{\mathrm{lin}}(\mathbf{E}) < \alpha^{\mathrm{lin}}(\mathbf{B}) = \infty$, говорит о том, что логики с "богатыми выразительными возможностями" в смысле "внешнего" подхода находятся не в нижней и не в верхней части решетки всех логик (по включению), а являются промежуточными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zolin E.* Embeddings of propositional monomodal logics // Logic J. IGPL. 2000. **8**, N 6. 861–882.
2. *Золин Е.* Относительная интерпретируемость модальных логик // Фунд. и прикл. матем. 2001. **7**, вып. 1. 47–69.
3. *Boolos G.* Logic of provability. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
4. *Huges G.E., Cresswell M.J.* A new introduction to modal logic. Methuen; London, 1968.
5. *Segerberg K.* An essay in classical modal logic // Philosophical Studies, 13. Uppsala, 1971.

Поступила в редакцию
18.10.2000

УДК 517.518.84

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК АЛЬТЕРНАНСА ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ДРОБЯМИ

А. В. Луганская

Введение. Пусть $C(T)$ — пространство вещественнозначных функций f, определенных и непрерывных на окружности $T = [-\pi, \pi)$. Рассмотрим приближение функции $f \in C(T)$ по норме $\|f\| = \max\limits_{x \in T} |f(x)|$ тригонометрическими рациональными дробями

$$Q_{n,m}(x) = \frac{a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)}{c_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} (c_k \cos kx + d_k \sin kx)}, \qquad a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbf{R}.$$

Множество всех таких дробей обозначим $R_{n,m}$.

Пусть $Q^*_{n,m}(x)$ — дробь наилучшего приближения для функции f, т.е.

$$\left\|f(x) - Q^*_{n,m}(x)\right\| = \inf\{\|f(x) - Q_{n,m}(x)\| : Q_{n,m} \in R_{n,m}\} = E_{n,m}(f).$$

Пусть полиномы в числителе и знаменателе дроби $Q^*_{n,m}$ имеют степени $n-\nu$ и $m-\mu$ соответственно и взаимно просты. Тогда $d = \min\{\nu, \mu\}$ называют дефектом дроби $Q^*_{n,m}$.

Как известно (см., например, [1, гл.7, § 2]), дробь $Q^*_{n,m}$ существует, единственна и характеризуется следующим свойством: существуют такие точки $\{t_k\}_{k=1}^{2n+2m+2-2d} \subset T$, $-\pi \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_{2n+2m+2-2d} < \pi$, в которых разность $f(x) - Q^*_{n,m}(x)$ принимает с чередующимися знаками значения $\pm E_{n,m}(f)$. Точки t_i называются точками альтернанса.

Основной предмет настоящей работы — выявление закономерностей в распределении этих точек при определенном стремлении целочисленной точки $(n,m) \in \mathbf{Z}^2_+$ к бесконечности. Рассмотрим основные виды этого стремления.

1. Значение m фиксировано, $n \to \infty$ (строка таблицы $\mathbf{Z}^2_+$). Ниже будет доказано (теорема 1), что для любой функции $f \in C(T) \setminus \bigcup\limits_n R_{n,m}$ существует бесконечно много натуральных n, для которых число точек альтернанса разности $f - Q^*_{n,m}$ на любом интервале $I \subset T$ равно

$$A_n(f,I) = \frac{|I|}{\pi}n + \underline{\underline{O}}(\sqrt{n \ln n}) \qquad (n \to \infty).$$

При $m = 0$ это утверждение было доказано М. И. Кадецом [2]. Схема нашего доказательства аналогична схеме доказательства теоремы Кадеца в книге [1, гл. 1].

2. Значение n фиксировано, $m \to \infty$ (столбец таблицы $\mathbf{Z}^2_+$). В этом случае не все функции $f \in C(T)$ можно приблизить с любой точностью дробями из $R_{n,m}$ (например, функции, меняющие на T знак более $2n$ раз). Однако, как будет показано в п. 2, аналог теоремы Кадеца имеет место и в этом случае для знакоопределенных функций (теорема 2).

3. Значение $m = n \to \infty$ (диагональ таблицы $\mathbf{Z}^2_+$). Ниже в п. 3 будет показано, что для всех $f \in C(T)$ нельзя ожидать результата, аналогичного теореме Кадеца.

Кроме того, в п. 4 полученные результаты переносятся на случай приближения алгебраическими дробями на отрезке $[-1,1]$.

1. Случай фиксированной степени знаменателя. Рассмотрим приближение функции $f \in C(T)$ тригонометрическими рациональными дробями со степенью знаменателя, не превышающей m. Обозначим соответствующие наилучшие приближения $Q^*_{n,m}$ функции f через Q^*_n, а наименьшее уклонение $E_{n,m}(f)$ — через E_n.

Лемма 1 [1, гл. 1]. *Для любых $\alpha > 1$ и $N \in \mathbf{N}$ найдется такое $n > N$, что справедливо неравенство $E_n - E_{n+1} \geqslant n^{-\alpha}E_n$.*

В силу этой леммы можно ограничиться рассмотрением только таких номеров n, для которых корректно определена величина $\lambda_n = (E_n - E_{n+1})^{-1}$.

Для данного n положим $\lambda_n\left(Q^*_{n+1}(x) - Q^*_n(x)\right) = Q(x)$. Заметим, что степень числителя дроби $Q(x)$ не превосходит $n+m+1$, а степень знаменателя не превосходит $2m$.

Лемма 2. *Дробь $Q(x)$ имеет на окружности T по крайней мере $N = 2m+2n+2-2d$ точек условного альтернанса, т.е. таких точек $\{s_i\}_{i=1}^N$, $-\pi \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_N < \pi$, что $|Q(s_i)| \geqslant 1$, $i = \overline{1,N}$, и $Q(s_i)Q(s_{i+1}) < 0$, $i = \overline{1,N-1}$. (Здесь d — дефект дроби Q^*_n.)*

Доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения для полиномов в [1, гл. 1] (в качестве $\{s_i\}$ надо взять точки $\{t_i\}$ альтернанса разности $f - Q^*_n(x)$).

Через $\alpha(Q,I)$ обозначим количество точек s_i, лежащих на интервале $I \subset T$.

Лемма 3. *Пусть $a = \pi - \frac{|I|}{2}$ и $a_1 \in (0,a)$ таково, что $\|Q\| < (\cos a_1 - \cos a + 1)^k =: L$ для некоторого $k \in \mathbf{N}$. Тогда выполняется следующая оценка:*

$$\alpha(Q,I) \leqslant \frac{|I|}{\pi}n + \frac{2n(a-a_1)}{\pi} + \frac{2ka_1}{\pi} + 4m + 3.$$

Доказательство. 1. Заменой переменной случай произвольного интервала I сводится к случаю $I = [-\pi,\pi) \setminus [-a,a]$, $a > 0$.

2. Будем сравнивать $Q(x) = \frac{b_{n+m+1}(x)}{a_{2m}(x)}$ с тригонометрической рациональной дробью $U(x) = \frac{a_{2m}(x)\sin((n-k)x)(1-\cos a+\cos x)^k}{a_{2m}(x)}$, у которой степень числителя не превосходит $2m+n$, а степень знаменателя — $2m$. Обозначим количество нулей разности $Q(x)-U(x)$ через β. Пусть β_1 из них лежат на интервале I, а β_2 — на интервале $I_1 = (-a_1, a_1)$.

3. Так как степень числителя разности $Q(x)-U(x)$ не превосходит $2m+n$, то $\beta \leqslant 4m+2n$.

4. Оценим β_1. На интервале I имеем $|U(x)| = |(\cos x - \cos a + 1)^k \sin((n-k)x)| < 1$. Кроме того, $|Q(s_i)| \geqslant 1$, поэтому разность $Q-U$ меняет знак между каждыми соседними точками условного альтернанса дроби Q, и $\beta_1 \geqslant \alpha(Q,I)-1$.

5. Оценим β_2. При $x \in I_1$ имеем $|U(x)| = |\sin((n-k)x)|\left|(\cos x - \cos a + 1)^k\right| > |\sin((n-k)x)|L$. В тех точках l_i, где $|\sin((n-k)l_i)| = 1$, выполняется неравенство $|U(l_i)| > L$, а по условию $\|Q\| < L$, т.е. $|U(l_i)| > \|Q\|$. Поскольку U меняет знак между каждыми соседними точками l_i, получаем $\beta_2 \geqslant \mathrm{card}(\{l_i\} \bigcap I_1) - 1 \geqslant \frac{n-k}{2\pi}|I_1| - 2$.

6. Таким образом, из вышесказанного имеем

$$\alpha(Q,I) - 1 + \frac{|I_1|}{\pi}(n-k) - 2 \leqslant \beta_1 + \beta_2 \leqslant \beta \leqslant 4m+2n,$$

$$\alpha(Q,I) \leqslant 4m+2n+3 - \frac{|I_1|}{\pi}n + \frac{|I_1|}{\pi}k = 4m+2n+3 - \frac{n}{\pi}(2\pi - |I| - 2(a-a_1)) + \frac{k}{\pi}2a_1 =$$

$$= \frac{|I|}{\pi}n + \frac{2n(a-a_1)}{\pi} + \frac{2ka_1}{\pi} + 4m + 3.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in C(T) \setminus \bigcup_n R_{n,m}$ и любого $N \in \mathbf{N}$ найдется такое $n > N$, что число точек альтернанса разности $f - Q_n^*$ на всяком интервале $I \subset T$ равно*

$$A_n(f,I) = \frac{|I|}{\pi}n + \underline{\underline{O}}(\sqrt{n \ln n}), \quad n \to \infty. \tag{1}$$

Доказательство. 1. Заметим, что формулу (1) достаточно доказать для интервалов вида $I = [-\pi,\pi) \setminus [-a,a]$, где $a \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Действительно, если формула доказана для какого-то промежутка, то она верна и для его дополнения; если она доказана для каждого из двух непересекающихся промежутков, то она верна и для их объединения. Поскольку либо сам интервал I, либо его дополнение представляется в виде объединения не более чем двух непересекающихся промежутков длины от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, то достаточно уметь доказывать формулу для промежутков I такой длины. При этом достаточно рассмотреть случай симметричного промежутка $I = [-\pi,\pi) \setminus [-a,a]$ (см. п. 1 доказательства леммы 3, у нас $a \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$).

2. Для доказательства формулы (1) достаточно установить неравенство

$$A_n(f,I) \leqslant \frac{|I|}{\pi}n + \underline{\underline{O}}(\sqrt{n \ln n}), \tag{2}$$

так как если формула (2) верна для любого интервала $I = [-\pi,\pi) \setminus [-a,a]$, $a \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, то она верна (после замены переменной) и для интервала $\overline{I} = (-a,a)$, и тогда

$$A_n(f,I) \geqslant (2n+2m+1-2d) - A_n(f,\overline{I}) - 2 \geqslant 2n - 1 - \frac{|\overline{I}|}{\pi}n - \underline{\underline{O}}(\sqrt{n \ln n}) = \frac{|I|}{\pi}n + \underline{\underline{O}}(\sqrt{n \ln n})$$

(мы учли, что $d \leqslant m$, а m фиксировано). Таким образом, формула (1) верна для I со знаком $\geqslant$, а значит, для I выполнено условие (1).

3. Из леммы 1 при $\alpha = 2$ получим: для любого $N \in \mathbf{N}$ существует такое $n > N$, что $E_n - E_{n+1} \geqslant n^{-2}E_n$. Будем рассматривать только те n, которые удовлетворяют этому неравенству.

4. Положим $a_1 = a - 6\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$, $k = [\sqrt{n \ln n}] + 1$. Заметим, что $a_1 \in (0,a), k \in [1,n)$,

$$\|Q\| = \|\lambda_n(Q_{n+1}^*(x) - Q_n^*(x))\| \leqslant \lambda_n 2E_n = 2\frac{E_n}{E_n - E_{n-1}} \leqslant 2n^2 < n^3.$$

5. Поскольку $a \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ и $a_1 \to a$, то по теореме Лагранжа при $n \to \infty$ имеем

$$\cos a_1 - \cos a = (a - a_1)\sin\xi \geqslant (a - a_1)(\sin\frac{\pi}{6} + \varepsilon) = (3 + 6\varepsilon)\sqrt{\frac{\ln n}{n}},$$

$$\ln(\cos a_1 - \cos a + 1)^k \geqslant \sqrt{n \ln n}(3\sqrt{\frac{\ln n}{n}}) = 3\ln n = \ln n^3,$$

т.е. $(\cos a_1 - \cos a + 1)^k = L \geqslant n^3 > \|Q\|$. Таким образом, для выбранных n, a_1 и k можно применить лемму 3:

$$A_n(f, I) = \alpha(Q, I) \leqslant \frac{|I|}{\pi}n + \frac{2n(a - a_1)}{\pi} + \frac{2ka_1}{\pi} + 4m + 3;$$

$$\frac{2n(a - a_1)}{\pi} + \frac{2ka_1}{\pi} + 4m + 3 \leqslant \frac{12n\sqrt{\frac{\ln n}{n}}}{\pi} + \frac{2(\sqrt{n\ln n} + 1)(a - 6\sqrt{\frac{\ln n}{n}})}{\pi} + 4m + 3 = \underline{\underline{O}}(\sqrt{n \ln n}).$$

Теорема 1 доказана.

2. Случай фиксированной степени числителя. Рассмотрим приближение функции $f \in C(T)$ тригонометрическими рациональными дробями со степенью числителя, не превышающей n. Обозначим соответствующие наилучшие приближения $Q^*_{n,m}$ функции f через Q^*_m, а наименьшее уклонение $E_{n,m}(f)$ — через E_m.

Как уже говорилось во введении, в этом случае не все функции $f \in C(T)$ можно приблизить с любой точностью дробями из $R_{n,m}$ (например, функции, меняющие на T знак более $2n$ раз). Покажем, что аналог теоремы Кадеца имеет место и в этом случае для знакоопределенных функций (т.е. таких функций $f \in C(T)$, что $f(x) \neq 0$ для любого x).

В силу леммы 1 можно ограничиться рассмотрением только таких номеров m, для которых корректно определена величина $\lambda_m = (E_m - E_{m+1})^{-1}$. Для такого m положим $\lambda_m\left(Q^*_{m+1}(x) - Q^*_m(x)\right) = Q(x)$. Степень числителя дроби $Q(x)$ не превосходит $n + m + 1$, а степень знаменателя не превосходит $2m + 1$.

Лемма 4. *Дробь $Q(x)$ имеет на окружности T по крайней мере $N = 2m + 2n + 2 - 2d$ точек условного альтернанса, т.е. таких точек $\{s_i\}_{i=1}^N$, $-\pi \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_N < \pi$, что $|Q(s_i)| \geqslant 1$, $i = \overline{1, N}$, и $Q(s_i)Q(s_{i+1}) < 0$, $i = \overline{1, N-1}$. (Здесь d — дефект дроби Q^*_m.)*

Через $\alpha(Q, I)$ обозначим количество точек s_i, лежащих на интервале $I \subset T$.

Лемма 5. *Пусть $a = \pi - \frac{|I|}{2}$ и $a_1 \in (0, a)$ таково, что $\|Q\| < (\cos a_1 - \cos a + 1)^k =: L$ для некоторого $k \in \mathbf{N}$. Тогда выполняется следующая оценка:*

$$\alpha(Q, I) \leqslant \frac{|I|}{\pi}m + \frac{2m(a - a_1)}{\pi} + \frac{2ka_1}{\pi} + 4n + 3. \tag{3}$$

Доказательство. 1. Достаточно доказать лемму в случае, когда I имеет вид $I = [-\pi, \pi)\setminus[-a, a]$, $a > 0$.

2. Будем сравнивать $Q(x) = \frac{b_{n+m+1}(x)}{a_{2m+1}(x)}$ с тригонометрической рациональной дробью

$$U(x) = \frac{\sin((m-k)x)(1 - \cos a + \cos x)^k Q^*_m Q^*_{m+1}}{AB} = \frac{\sin((m-k)x)(1 - \cos a + \cos x)^k c_{2n}(x)}{ABa_{2m+1}(x)},$$

где $A = \|Q^*_m\|, B = \|Q^*_{m+1}\|$. Степень числителя этой дроби не превосходит $m + 2n$, а степень знаменателя — $2m + 1$. Обозначим количество нулей разности $Q(x) - U(x)$ через β. Пусть β_1 из них лежат на интервале I, а β_2 — на интервале $I_1 = (-a_1, a_1)$.

3. Так как степень числителя разности $Q(x) - U(x)$ не превосходит $m + 2n$, то $\beta \leqslant 2m + 4n$.

4. Оценим β_1. На интервале I имеем $|U(x)| \leqslant |(\cos x - \cos a + 1)^k \sin((m-k)x)|\frac{\|Q^*_m\|\|Q^*_{m+1}\|}{AB} < 1$. Кроме того, $|Q(s_i)| \geqslant 1$, поэтому разность $Q - U$ меняет знак между каждыми соседними точками условного альтернанса дроби Q, и $\beta_1 \geqslant \alpha(Q, I) - 1$.

5. Аналогично п. 5 доказательства леммы 3 получаем $\beta_2 \geqslant \frac{m-k}{2\pi}|I_1| - 2$.

6. Аналогично п. 6 доказательства леммы 3 получаем (3).

Теорема 2. *Для любой функции $f \in C(T) \setminus \bigcup_m R_{n,m}$ и любого $M \in \mathbf{N}$ найдется такое $m > M$, что число точек альтернанса разности $f - Q_m^*$ на всяком интервале $I \subset T$ равно*

$$A_m(f, I) = \frac{|I|}{\pi} m + \underline{\underline{O}}(\sqrt{m \ln m}), \qquad m \to \infty.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 и опирается на лемму 4.

3. Случай равенства степеней числителя и знаменателя. В этом случае имеем $4n + 2 - 2d$ точек альтернанса для разности функции f и ее дроби наилучшего приближения $Q_{n,n}^* = Q_n^*$. Поэтому формула, аналогичная формуле (1), должна иметь вид $A_n(f, I) = \frac{|I|}{\pi} 2n + \underline{\underline{O}}(\sqrt{n \ln n})$, $n \to \infty$.

Построим непрерывную функцию f, для которой такое равенство невозможно (идея этого примера принадлежит Е. Д. Лившицу). Возьмем функцию $f \not\equiv 0$, равную нулю на отрезке $I = [\frac{-3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Тогда $\frac{|I|}{\pi} 2n = 3n$, а число точек альтернанса разности $f - Q_n^* = -Q_n^*$ на отрезке I не превосходит $2n + 1$, так как дробь $Q_n^* \not\equiv 0$ на I не может иметь более $2n$ нулей.

4. Алгебраический случай. Из теорем 1 и 2 следует аналогичный результат для приближения функции $f \in C([-1, 1])$ ее алгебраическими рациональными дробями наилучшего приближения $R_{n,m}^*$.

Теорема 3. *Для количества $A_n(f, I)$ (соответственно $A_m(f, I)$) точек альтернанса $f - R_{n,m}^*$ на интервале $I \subset [-1, 1]$ при фиксированной степени знаменателя m (соответственно степени числителя n) справедливы асимптотические равенства*

$$A_n(f, I) = \frac{\mu(I)}{\pi} n + \underline{\underline{O}}(\sqrt{n \ln n}), \ n \to \infty; \ A_m(f, I) = \frac{\mu(I)}{\pi} m + \underline{\underline{O}}(\sqrt{m \ln m}), \ m \to \infty, \tag{4}$$

где $\mu(I) = \int_I \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, а каждый из индексов m и n стремится к бесконечности по некоторой своей подпоследовательности номеров.

Доказательство. После замены $x = \cos t$ функция $f \in C([-1, 1])$ перейдет в функцию $g(t) = f(\cos t) \in C(T)$, алгебраическая дробь $R_{n,m}^*$ — в тригонометрическую дробь $Q_{n,m}^*(t) = R_{n,m}^*(\cos t)$, множество $e \subset [-1, 1]$ с мерой $\mu(e)$ — в множество $e_1 \subset [0, \pi]$ с лебеговой мерой $m(e_1) = \mu(e)$, а каждая точка x альтернанса разности $f - R_{n,m}^*$ — в две точки $\pm \arccos x$ альтернанса разности $g - Q_{n,m}^*$. Поэтому формулы (4) вытекают из теорем 1 и 2.

В заключение автор приносит благодарность П. А. Бородину за постановку задачи и внимание к работе.

Работа поддержана фондом РФФИ, проект № 99-01-00119.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lorentz G.G., van Golitschek M., Makovoz Yu.* Constructive Approximation. Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer, 1996.
2. *Кадец М.И.* О распределении точек максимального уклонения при аппроксимации непрерывных функций многочленами // Успехи матем. наук. 1960. **15**, вып.1. 199–202.

Поступила в редакцию
13.11.2000

УДК 517.538.5

ОБ АППРОКСИМАЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

О. Н. Косухин

1. Введение. В настоящей статье рассматриваются рациональные функции вида $R_n(z) = \sum_{j=1}^{n} 1/(z - a_j)$, где a_j (полюсы функции $R_n(z)$) — некоторые точки комплексной плоскости $\mathbf{C}$, необязательно различные. По предложению Е. П. Долженко такая функция названа *наипростейшей*