В. П. Спиридонов, Суперпозиции когерентных состояний, определяемые суммами Гаусса, *ТМФ*, 2022, том 212, номер 3, 403–413

DOI: 10.4213/tmf10276

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 212, № 3
сентябрь, 2022

 В. П. Спиридонов[*†]

СУПЕРПОЗИЦИИ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СУММАМИ ГАУССА

Описывается семейство квантовых состояний типа кошки Шредингера, задаваемых в виде суперпозиций когерентных состояний гармонического осциллятора с коэффициентами, определяемыми квадратичными суммами Гаусса. Эти состояния возникают как собственные функции понижающих операторов, полученных после канонических преобразований алгебры Гейзенберга–Вейля, ассоциированных с обычным и дробным преобразованиями Фурье. Первый член этого семейства задается хорошо известным когерентным состоянием Юрке–Столера.

Ключевые слова: когерентные состояния, гармонический осциллятор, суммы Гаусса, преобразование Фурье.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10276

Когерентные состояния были построены Шредингером на самом раннем этапе развития квантовой механики [1]. Они образовали базисный объект в квантовой оптике и помогли в изучении многих квантовых систем [2]. Однако в обсуждении знаменитой мысленной возможности иметь суперпозицию состояний живой и мертвой кошки Шредингер [3] не предложил использовать суперпозиции когерентных состояний для экспериментальной реализации этой идеи. Такое замечательное состояние квантовой кошки было предложено Юрке и Столером [4] как результат эволюции во времени когерентных состояний гармонического осциллятора в керровской среде с нелинейной восприимчивостью. Оказывается, что это состояние является только первым членом бесконечного семейства аналогичных суперпозиций, имеющих то же самое теоретико-групповое происхождение. Эти состояния возникают как собственные функции понижающих операторов (операторов уничтожения) после канонических преобразований, связанных с обычным и дробным преобразованиями Фурье. Их коэффициенты суперпозиции определяются квадратичными суммами

Данное исследование выполнено при поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

[*]Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: spiridon@theor.jinr.ru

[†]Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

Гаусса [5] – примечательными теоретико-числовыми аналогами точно вычисляемых интегралов Гаусса.

Симметрии играют критически важную роль при формулировке фундаментальных законов физики и геометрии. Идеальные объекты типа платоновых тел и правильных многоугольников прямым образом связаны с корнями из единицы (решениями алгебраического уравнения $x^n = 1$), поскольку они описывают неприводимые представления любой циклической группы. Даже такая техническая инженерная задача, как обработка сигналов, использует корни из единицы в рамках конечного преобразования Фурье дискретизированных сигналов. Квадратичные суммы Гаусса являются красивыми суммами корней из единицы, зависящими от двух дискретных переменных и допускающими точное вычисление. Они нашли известное приложение к описанию эффекта Тальбота [6], [7] – явлению самовоспроизведения изображений в классической оптике. Другое интересное применение этих сумм позволяет факторизовать целые числа с помощью реальных физических экспериментов [8]. Суммы Гаусса возникают также в теории q-ортогональных многочленов [9], имеющих много физических приложений, однако их связь с суперпозициями когерентных состояний, рассмотренными ранее в работе [10], не была распознана в то время.

Квантовый гармонический осциллятор является фундаментально важной физической моделью, связанной с алгеброй Гейзенберга–Вейля. Это базовая система с точным описанием всех ее свойств. Первые состояния кошек Шредингера, определяемые четными или нечетными собственными функциями квадрата оператора уничтожения гармонического осциллятора a^2, были построены Додоновым, Малкиным и Манько [11]. Хотя состояние Юрке–Столера [4] также является собственным состоянием a^2, оно включает нетривиальные фазовые множители в суперпозиции, соответствующие повороту на угол $\pi/4$. Такие состояния полезны не только для описания квантово-механических загадок, они важны и для решения технических проблем, таких как прецизионная метрология [12] и квантовая обработка информации [2].

Материал, изложенный в следующих нескольких абзацах, может быть найден в любом учебнике по квантовой механике. Тем не менее мы напомним его здесь для того, чтобы сделать изложение самодостаточным. Для простоты мы работаем в однородной системе обозначений физических единиц $\hbar = \omega = m = 1$. Тогда гамильтониан гармонического осциллятора принимает вид

$$L = \frac{1}{2}(p^2 + x^2), \qquad [x, p] = xp - px = i, \qquad i^2 = -1. \tag{1}$$

Стандартная факторизация этой квадратичной комбинации операторов координаты x и импульса p выглядит следующим образом:

$$L = a^+a + \frac{1}{2}, \qquad a^+ = \frac{-ip + x}{\sqrt{2}}, \quad a = \frac{ip + x}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Операторы L, a, a^+ образуют алгебру Гейзенберга–Вейля:

$$[a, a^+] = 1, \qquad [L, a] = -a, \qquad [L, a^+] = a^+. \tag{3}$$

Основное состояние осциллятора $|0\rangle$, или вакуум, определяется как нормированная нулевая мода a: $a|0\rangle = 0$, $\langle 0|0\rangle = 1$. Оно очевидно минимизирует энергию системы.

Полная система собственных функций гамильтониана, $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, легко выводится чисто алгебраическим способом:

$$L|n\rangle = \lambda_n|n\rangle, \qquad \lambda_n = n + \frac{1}{2}, \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n\,|0\rangle,$$

с соотношением ортонормированности $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ и следующим действием повышающего a^+ и понижающего a операторов:

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle, \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle.$$

В координатном представлении имеем $x \in \mathbb{R}$ и $p = -id/dx$ с

$$L = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right), \qquad L\psi_n(x) = \lambda_n\psi_n(x),$$

где в собственные функции

$$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle = \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{-x^2/2} \tag{4}$$

входят ортогональные многочлены Чебышёва–Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{-x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{x^2}.$$

Когерентные состояния [2] определяются как собственные функции понижающего оператора a,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \qquad \langle\alpha|\alpha\rangle = 1. \tag{5}$$

Изначально они были определены Шредингером [1] как состояния, для которых минимизируется соотношение неопределенности $\Delta x\Delta p \geqslant 1/2$. Однако это условие минимальности не определяет их однозначно – сжатые состояния также обладают этим свойством [2]. Эквивалентное определение использует действие общего элемента группы Гейзенберга–Вейля на вакуум

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{6}$$

В координатном представлении имеем

$$\psi_\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}}e^{-|\alpha|^2/2-\alpha^2/2+\sqrt{2}\alpha x - x^2/2}. \tag{7}$$

Факторизация (2) является крайне неоднозначной. Можно записать $L = A^+A + 1/2$, где

$$A^+ = \frac{-ip + x}{\sqrt{2}}U(p, x), \qquad A = V(p, x)\frac{ip + x}{\sqrt{2}},$$

с операторами U и V, удовлетворяющими соотношению $UV = 1$. Если мы потребуем, чтобы оператор A был эрмитовым сопряжением оператора A^+, $A = (A^+)^\dagger$, тогда мы имеем $V = U^\dagger$ и $UU^\dagger = 1$. Предположим для простоты, что оператор U унитарен, $U^\dagger = U^{-1}$. Будем считать теперь, что мы имеем каноническое преобразование $[A, A^+] = [a, a^+] = 1$, т. е.

$$U(p,x)^{-1}(p^2+x^2)U(p,x) = p^2 + x^2. \tag{8}$$

Простейшими операторами U, удовлетворяющими этому уравнению, являются оператор четности

$$U = U^\dagger = P, \qquad Px = -xP, \qquad Pp = -pP, \qquad P^2 = 1,$$

и оператор преобразования Фурье [13]

$$[\mathcal{F}^{\pm 1} f](y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm iyx} f(x)\, dx.$$

Оператор $\mathcal{F}$ есть квадратный корень из преобразования четности, $\mathcal{F}^2 = P$, $\mathcal{F}^4 = 1$, генерирующим симплектическое отражение $\mathcal{F}x\mathcal{F}^{-1} = p$, $\mathcal{F}p\mathcal{F}^{-1} = -x$, которое сохраняет коммутационное соотношение $xp - px = i$.

Поскольку определяющие соотношения алгебры (3) сохранены, мы можем применить соотношения (1)–(7) к операторам A и A^+. Рассмотрим когерентные состояния для преобразованного понижающего оператора $A = U^{-1}a$,

$$A|\alpha\rangle_U = \alpha|\alpha\rangle_U, \qquad \text{или} \qquad a|\alpha\rangle_U = \alpha U|\alpha\rangle_U. \tag{9}$$

Как показано в работе [10], для $U = P$ возникает следующее состояние кошки Шредингера:

$$|\alpha\rangle_P = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\pi i/4}|i\alpha\rangle + e^{\pi i/4}|-i\alpha\rangle\right). \tag{10}$$

В координатном представлении $\psi_\alpha^{(P)}(x) = \langle x|\alpha\rangle_P$,

$$\psi_\alpha^{(P)}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} \exp\left(\frac{\alpha^2 - |\alpha|^2 - x^2}{2}\right) \cos\left(\sqrt{2}\alpha x - \frac{\pi}{4}\right).$$

После замены α на $-i\alpha$ мы получаем когерентное состояние Юрке–Столера [4]. Поскольку $A^2 = PaPa = -a^2$, $|\alpha\rangle_P$ является собственной функцией квадрата оператора уничтожения a^2 (четные и нечетные когерентные состояния из работы [11] имеют вид $|\alpha\rangle_\pm \propto |\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle$).

Описанное теоретико-групповое происхождение состояния Юрке–Столера было обнаружено в работе [10] путем выбора $q = -1$ для когерентных состояний q-гармонического осциллятора, построенных в этой работе. Для общих значений $0 < q^2 < 1$ деформация потенциала гармонического осциллятора в этой модели q-осциллятора является очень сложной. Удивительным фактом является то, что оператор уничтожения a_q в этой модели понижает энергию при $\lambda < 0$, но при $\lambda > 0$ для состояний непрерывного спектра a_q является повышающим оператором. И наоборот, оператор рождения a_q^+ повышает энергию при $\lambda < 0$ и понижает ее при $\lambda > 0$. В результате оба оператора a_q и a_q^+, удовлетворяющие соотношению $a_q a_q^+ - q^2 a_q^+ a_q = 1$, имеют нормируемые собственные функции. Соответствующий набор когерентных состояний все еще не исследован с феноменологической точки зрения.

Для $U = \mathcal{F}^{\pm 1}$ определение (9) приводит к интегро-дифференциальным уравнениям

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)\psi_\alpha^{(\mathcal{F}^{\pm 1})}(x) = \frac{\alpha}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ixy} \psi_\alpha^{(\mathcal{F}^{\pm 1})}(y)\, dy, \tag{11}$$

где $x, y \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Собственные функции гамильтониана $|n\rangle$ диагонализуют преобразование Фурье, $\mathcal{F}|n\rangle = i^n|n\rangle$. Из этого факта можно вывести следующее состояние [14]:

$$|\alpha\rangle_{\mathcal{F}} = \frac{1}{2}(|e^{\pi i/4}\alpha\rangle + e^{5\pi i/4}|e^{3\pi i/4}\alpha\rangle + |e^{5\pi i/4}\alpha\rangle + e^{\pi i/4}|e^{7\pi i/4}\alpha\rangle), \tag{12}$$

которое напоминает компас углами поворота α и аналогично состоянию, обсуждавшемуся в работах [12], [15]. Когерентные состояния $|\alpha\rangle_{\mathcal{F}^{-1}}$ получаются из $|\alpha\rangle_{\mathcal{F}}$ простой заменой i на $-i$. В координатном представлении

$$\psi_\alpha^{(\mathcal{F})}(x) = e^{-(|\alpha|^2 + x^2)/2}(e^{-\alpha^2/2}\operatorname{ch}((1+i)\alpha x) + e^{\alpha^2/2 + \pi i/4}\operatorname{sh}((1-i)\alpha x))$$

и $\psi_\alpha^{(\mathcal{F}^{-1})}(x) = (\psi_{\alpha^*}^{(\mathcal{F})}(x))^*$. С математической точки зрения было бы интересно построить решения уравнений (11), лежащие вне гильбертова пространства $L^2(\mathbb{R})$.

Оба описанных выбора оператора U представляют собой частные случаи эволюции гармонического осциллятора во времени,

$$i\frac{d}{dt}\psi(t) = L\psi(t), \qquad \psi(t) = e^{-itL}\psi(0).$$

Для нашей задачи мы возьмем оператор

$$U(\varphi) = e^{-i\varphi(L - 1/2)} \tag{13}$$

с формальным действительным параметром φ. Тогда преобразование

$$U(\varphi)^{-1}xU(\varphi) = x\cos\varphi + p\sin\varphi, \qquad U(\varphi)^{-1}pU(\varphi) = -x\sin\varphi + p\cos\varphi$$

очевидным образом удовлетворяет равенству (8). В терминах операторов a^+ и a имеем

$$a(\varphi) = U(\varphi)^{-1}aU(\varphi) = e^{-i\varphi}a, \qquad a^+(\varphi) = U(\varphi)^{-1}a^+U(\varphi) = e^{i\varphi}a^+.$$

Собственные функции оператора $A = U(\varphi)^{-1}a$ определяются интегро-дифференциальным уравнением

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)\psi_\alpha^{(\varphi)}(x) = e^{-i\varphi(L-1/2)}\psi_\alpha^{(\varphi)}(x) := \sqrt{2}\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y; \varphi)\psi_\alpha^{(\varphi)}(y)\, dy, \tag{14}$$

где ядро $\mathcal{K}$ является аналитическим продолжением ядра Мехлера (функцией Грина или пропагатором). Оно имеет вид [16]

$$\mathcal{K}(x, y; \varphi) = \frac{\mu(\varphi)}{\sqrt{2\pi|\sin\varphi|}} \exp\left[i\frac{(x^2 + y^2)\cos\varphi - 2xy}{2\sin\varphi}\right], \tag{15}$$

где $\mu(\varphi) = e^{i(\varphi/2 - (\pi/4)\operatorname{sgn}(\sin\varphi))}$. Интегральное преобразование, стоящее в правой части равенства (14), в литературе по обработке сигналов [13] называется дробным преобразованием Фурье. Оно совпадает со стандартным преобразованием Фурье при $\varphi = -\pi/2$ и его обратным преобразованием при $\varphi = \pi/2$.

Представляя $|\alpha\rangle_U \equiv |\alpha\rangle_\varphi$ в виде ряда по собственным функциям $|n\rangle$ гамильтониана, можно легко найти нормируемое решение уравнения (14):

$$|\alpha\rangle_\varphi = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\varphi n(n-1)/2} |n\rangle. \tag{16}$$

Для параметра φ в общем положении это есть частный случай неприводимого когерентного состояния Титулаера–Глаубера [17], которое характеризуется заменой коэффициентов $e^{-i\varphi n(n-1)/2}$ на произвольные фазовые множители $e^{i\theta_n}$. Рассмотрим, однако, случаи

$$\varphi = 2\pi \frac{M}{N}, \qquad 0 < M < N, \tag{17}$$

где M и N являются произвольными целыми числами без общих делителей, т. е. $(M, N) = 1$. Тогда $U^N = 1$ и $|\alpha\rangle_\varphi$ сводится к суперпозиции конечного числа состояний $|\alpha\rangle$, которые мы описали выше для $N = 2$, когда $U = P$, и $N = 4$, когда $U = \mathcal{F}^{\pm 1}$. Поскольку при $N > 2$ состояния $|\alpha\rangle_\varphi$ составлены из более чем двух когерентных состояний, иногда они называются котятами Шредингера [18], [15]. Это отличается от терминологии, предложенной в работе [19], в которой термин "котята" использовался для состояний кошки Шредингера с маленькими амплитудами когерентности.

Опишем теперь общее семейство таких состояний котят Шредингера, используя примитивные корни из единицы. При $\varphi = 2\pi M/N$ имеем

$$A^N = (U^{-1}a)^N = e^{-iN(N-1)\varphi/2} a^N = \mu_N a^N, \tag{18}$$

где $\mu_N = -1$ для четных N (M нечетно в этом случае) и $\mu_N = 1$ для нечетных N. В результате необходимо разложить состояние $|\alpha\rangle_\varphi$ по собственным функциям оператора a^N с собственным значением $\mu_N \alpha^N$, т. е.

$$|\alpha\rangle_\varphi = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \, |e^{2\pi i k/N} \alpha\rangle, \qquad N \text{ нечетные},$$

или

$$|\alpha\rangle_\varphi = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \, |e^{2\pi i k/N} e^{\pi i M/N} \alpha\rangle, \qquad N \text{ четные}.$$

Используя разложения в ряды (6) и (16) в обеих частях этих равенств, мы получаем

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k \, e^{(2\pi i/N)kn} = e^{-(\pi i M/N)n(n-1)}, \qquad N \text{ нечетные}, \tag{19}$$

или

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k \, e^{(2\pi i/N)kn} = e^{-(\pi i M/N)n^2}, \qquad N \text{ четные}. \tag{20}$$

В обоих случаях мы имеем дискретное преобразование Фурье [13]. Применяя обратное дискретное преобразование Фурье, находим искомые коэффициенты:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{-\pi i(M\ell(\ell-1)+2k\ell)/N}, \qquad N \text{ нечетные}, \tag{21}$$

или

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{-\pi i(M\ell^2+2k\ell)/N}, \qquad N \text{ четные}. \tag{22}$$

Возникающие суммы известны как квадратичные суммы Гаусса [5], или они могут быть названы дискретными (циклотомическими) тета-функциями Якоби. Поскольку соответствующие коэффициенты периодические, $c_k = c_{k+N}$, все значения этих сумм появляются в разложениях.

Оказывается, что возникающие конечные ряды (21) и (22) могут быть представлены выражениями в замкнутой форме. Во-первых, отметим, что члены ряда периодичны относительно сдвигов $\ell \to \ell + N$. Поэтому эти суммы не меняются, если мы сдвинем индекс суммирования $\ell \to \ell+m$ на произвольное целое число m. Во-вторых, мы определим целое число d как решение уравнения

$$Md = 1 \mod N, \quad d \in \mathbb{Z}.$$

Оно позволяет собрать полные квадраты в показателях экспоненциальных функций под знаком суммирования. Для четных N это дает

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{-\pi i(M/N)((\ell+kd)^2-k^2d^2)} = \frac{1}{N} e^{\pi i(M/N)k^2d^2} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{-\pi i(M/N)\ell^2}.$$

Вычисление оставшейся стандартной суммы Гаусса многократно описано (см., например, [5]). В результате мы получаем следующий общий ответ для произвольного четного N:

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\pi i(M/N)(d^2k^2-N/4)} \left(\frac{N}{M}\right), \tag{23}$$

где $\left(\frac{N}{M}\right)$ обозначает символ Лежандра–Якоби. Для произвольных целых чисел $a, b > 0$, $(a,b) = 1$, и разложения в произведение простых чисел $b = p_1 \cdots p_k$ имеем $\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \cdots \left(\frac{a}{p_k}\right)$, где $\left(\frac{a}{p_i}\right) = 1$, если существует целое число x такое, что $a = x^2 \mod p_i$, и $\left(\frac{a}{p_i}\right) = -1$, если такого целого числа x нет.

Для произвольного нечетного N и четного M имеем

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \exp\left\{-\pi i \frac{M}{N} \left[\left(\ell + d\left(k - \frac{M}{2}\right)\right)^2 - d^2\left(k - \frac{M}{2}\right)^2\right]\right\} = \\ &= \frac{1}{N} \exp\left[\pi i \frac{M}{N} d^2 \left(k - \frac{M}{2}\right)^2\right] \sum_{\ell=0}^{N-1} \exp\left(-\pi i \frac{M}{N} \ell^2\right). \end{aligned}$$

Снова применяя значение стандартной суммы Гаусса для нечетного знаменателя N [2], мы получаем

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left[\pi i \left(d^2 \left(k - \frac{M}{2}\right)^2 \frac{M}{N} + \frac{N-1}{4}\right)\right] \left(\frac{M}{N}\right). \tag{24}$$

Наконец, когда оба целых числа N и M являются нечетными, мы имеем

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1}(-1)^\ell \exp\left\{-\pi i\frac{M}{N}\left[\left(\ell + d\left(k+\frac{N-M}{2}\right)\right)^2 - d^2\left(k+\frac{N-M}{2}\right)^2\right]\right\} =$$
$$= (-1)^{d(k+(N-M)/2)}\frac{1}{N}\exp\left[\pi i\frac{M}{N}d^2\left(k+\frac{N-M}{2}\right)^2\right]\sum_{\ell=0}^{N-1}(-1)^\ell e^{-\pi i(M/N)\ell^2}.$$

Вычисление оставшейся чистой суммы Гаусса со знакопеременными членами описано в книге [20]. В результате получаем

$$c_k = \frac{(-1)^{d(k+(N-M)/2)}}{\sqrt{N}}\exp\left\{\pi i\left(d^2\left(k+\frac{N-M}{2}\right)^2\frac{M}{N}+\frac{N-1}{4}\right)\right\}\left(\frac{M}{N}\right). \tag{25}$$

Подстановка полученных явных выражений для c_k в соотношения (19) и (20) опять приводит к квадратичным суммам Гаусса. Очевидно, что вся приведенная схема расчетов напоминает вычисление обычных гауссовых интегралов.

Теперь мы можем явно описать состояния котят Шредингера для $N = 3$:

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle_{2\pi/3} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{-\pi i/6}|\alpha\rangle + e^{-\pi i/6}|e^{2\pi i/3}\alpha\rangle + e^{\pi i/2}|e^{4\pi i/3}\alpha\rangle),\\
|\alpha\rangle_{4\pi/3} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{\pi i/6}|\alpha\rangle + e^{-\pi i/2}|e^{2\pi i/3}\alpha\rangle + e^{\pi i/6}|e^{4\pi i/3}\alpha\rangle).
\end{aligned} \tag{26}$$

Полное семейство пентагональных состояний котят Шредингера, возникающих при $N = 5$, имеет вид

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle_{2\pi/5} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{-\pi i/5}|\alpha\rangle + e^{-\pi i/5}|e^{2\pi i/5}\alpha\rangle + e^{\pi i/5}|e^{4\pi i/5}\alpha\rangle -\\
&\quad - |e^{6\pi i/5}\alpha\rangle + e^{\pi i/5}|e^{8\pi i/5}\alpha\rangle),\\
|\alpha\rangle_{4\pi/5} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{-2\pi i/5}|\alpha\rangle + |e^{2\pi i/5}\alpha\rangle + e^{-2\pi i/5}|e^{4\pi i/5}\alpha\rangle +\\
&\quad + e^{2\pi i/5}|e^{6\pi i/5}\alpha\rangle + e^{2\pi i/5}|e^{8\pi i/5}\alpha\rangle),\\
|\alpha\rangle_{6\pi/5} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{2\pi i/5}|\alpha\rangle + e^{-2\pi i/5}|e^{2\pi i/5}\alpha\rangle + e^{-2\pi i/5}|e^{4\pi i/5}\alpha\rangle +\\
&\quad + e^{2\pi i/5}|e^{6\pi i/5}\alpha\rangle + |e^{8\pi i/5}\alpha\rangle),\\
|\alpha\rangle_{8\pi/5} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{\pi i/5}|\alpha\rangle + e^{-\pi i/5}|e^{2\pi i/5}\alpha\rangle - |e^{4\pi i/5}\alpha\rangle +\\
&\quad + e^{-\pi i/5}|e^{6\pi i/5}\alpha\rangle + e^{\pi i/5}|e^{8\pi i/5}\alpha\rangle).
\end{aligned} \tag{27}$$

Гексагональные когерентные состояния (схожие с бензольными состояниями, обсуждавшимися в работе [21]) возникают при $N = 6$, мы пропускаем их явное рассмотрение для краткости.

Как и в стандартном случае, эволюция в обычном времени всех построенных когерентных состояний имеет вид

$$|\alpha, t\rangle_\varphi := e^{-itL}|\alpha\rangle_\varphi = e^{-it/2}|e^{-it}\alpha\rangle_\varphi,$$

что может быть строго доказано с помощью функции Грина (15). Суперпозиции, описанные выше, могут быть сгенерированы эволюцией по времени φ состояния $|\alpha\rangle$ в керровской среде [4], [18], соответствующей следующему формальному оператору:

$$G(\varphi) = \exp\left\{\frac{i}{2}\varphi\left(L-\frac{1}{2}\right)\left(L-\frac{3}{2}\right)\right\}, \qquad G(\varphi)^\dagger = G(\varphi)^{-1}. \tag{28}$$

Имеем $|\alpha\rangle_\varphi = G(\varphi)^{-1}|\alpha\rangle$ и автоморфизм алгебры Гейзенберга–Вейля

$$A(\varphi) = G(\varphi)^{-1} a G(\varphi) = U(\varphi)^{-1} a. \tag{29}$$

Действительно, дифференцирование первых двух членов равенств (29) по φ приводит к соотношению

$$\frac{dA(\varphi)}{d\varphi} = -\frac{i}{2}G(\varphi)^{-1}\left[\left(L-\frac{1}{2}\right)\left(L-\frac{3}{2}\right), a\right]G(\varphi) = i\left(L-\frac{1}{2}\right)A(\varphi).$$

Интегрирование этого уравнения дает правое равенство в (29). Однако строгое определение $G(\varphi)$ как интегрального оператора, действующего в подходящем функциональном пространстве, подобного (14), неизвестно. Аналогичный недостаток имеет место для всех выборов функции $U = e^{iP_k(L)}$, где $P_k(L)$ является произвольным многочленом L степени $k > 1$ с действительными коэффициентами. Повторяя приведенную выше процедуру при $k > 1$, можно построить суперпозиции когерентных состояний, коэффициенты которых определяются суммами Гаусса более высокого порядка, не допускающими точного вычисления.

Общая идея построения конечных суперпозиций канонических когерентных состояний была высказана давно [22], [23]. Суперпозиции, генерируемые оператором эволюции в керровской среде (28) при дробных временах $\varphi = 2\pi M/N$, были рассмотрены в работах [18], [24]. Однако соответствующие состояния отличаются от описанных выше, поскольку число компонент в суперпозиции в два раза больше, чем имеется в нашем случае. Правильный подсчет был произведен в работе [25], но в ней был рассмотрен только случай $M = 1$ и явный вид коэффициентов суперпозиций (23)–(25) не был получен.

Интересная физическая картина возникает из следующего наблюдения. Рациональные числа M/N образуют всюду плотное множество точек на интервале $[0, 1]$. Поскольку мера Лебега этого множества равна нулю, вероятность того, что случайное число, взятое из этого интервала, является рациональным, равна нулю. Поэтому на самом деле ни одна из вышеприведенных суперпозиций не может быть точно воспроизведена в экспериментах со средой Керра. Возможна только некоторая приблизительная реализация. Трудно сохранить квантовую когерентность состояний $|\alpha\rangle_\varphi$ на расстояниях, соответствующих половине интервала возрождения (полупериоду) $\varphi = \pi$, при котором должно образоваться состояние Юрке–Столера. Однако предположим, что точность определения положения равна $\delta\varphi \approx \pi/(2k+1)$ для некоторого достаточно большого целого числа k. Тогда невозможно отличить когерентное состояние Юрке–Столера от состояния с $M = k$ и $N = 2k + 1$. И такая картина превалирует и дальше: чем выше точность измерений, тем более сложные суперпозиции состояний будут регистрироваться вблизи зафиксированной точки.

С математической точки зрения функция (16), имеющая следующий явный вид в координатном представлении:

$$\langle x|\alpha\rangle_\varphi = \frac{e^{-(|\alpha|^2+x^2)/2}}{\pi^{1/4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} \left(\frac{\alpha}{q\sqrt{2}}\right)^n \frac{H_n(x)}{n!}, \qquad q = e^{-i\varphi/2}, \tag{30}$$

содержит информацию о всех квадратичных суммах Гаусса, подобно тета-функциям Якоби на естественной границе сходимости. Поэтому это должна быть весьма интересная теоретико-числовая функция, заслуживающая дальнейшего исследования. Например, описанные суммы Гаусса подчиняются закону квадратичной взаимности [5], [20], связывающему коэффициенты c_k для $\varphi = M/N$ с коэффициентами при $\varphi = N/M$, физический смысл которого пока еще неясен. Поскольку это свойство связано с модулярным преобразованием для тета-функций, можно предположить, что функция $\langle x|\alpha\rangle_\varphi$ обладает модулярными свойствами для произвольных φ. Фрактальный характер функции (30) проявляется также в следующем наблюдении. Если представить множитель q^{n^2} как интеграл от экспоненциальной функции n, то сумма по n вычисляется в замкнутом виде, но это приводит к расходящемуся интегралу.

Принимая во внимание те практические приложения, которые были найдены для состояний кошек Шредингера [2], [11], [12], [15], [19], [21], ожидается, что описанные суперпозиции когерентных состояний, интерференционные коэффициенты которых являются фазовыми множителями, связанными с правильными многоугольниками, найдут определенные интересные экспериментальные применения.

Благодарности. Автор благодарен П. К. Паниграхи за стимулирующее приглашение прочесть лекцию на Школе QIQT-2021 (Калькутта, июль 2021) и А. С. Жеданову за полезное обсуждение сумм Гаусса.

Конфликт интересов. Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] E. Schrödinger, “Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik”, *Die Naturwissenschaften*, **14**:28 (1926), 664–666.

[2] C. C. Gerry, P. L. Knight, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.

[3] E. Schrödinger, “Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik”, *Naturwissenschaften*, **23**:48 (1935), 807–812.

[4] B. Yurke, D. Stoler, “Generating quantum mechanical superpositions of macroscopically distinguishable states via amplitude dispersion”, *Phys. Rev. Lett.*, **57**:1 (1986), 13–16.

[5] B. C. Berndt, R. J. Evans, K. S. Williams, *Gauss and Jacobi Sums*, John Wiley and Sons, New York, 1998.

[6] M. V. Berry, S. Klein, “Integer, fractional and fractal Talbot effects”, *J. Modern Optics*, **43**:10 (1996), 2139–2164.

[7] C. R. Fernández-Pousa, “On the structure of quadratic Gauss sums in the Talbot effect”, *J. Opt. Soc. Am. A*, **34**:5 (2017), 732–742.

[8] M. Mehring, K. Müller, I. Sh. Averbukh, W. Merkel, W. P. Schleich, “NMR experiment factors numbers with Gauss sums”, *Phys. Rev. Lett.*, **98**:12 (2007), 120502, 4 pp., arXiv: quant-ph/0609174.

[9] V. Spiridonov, A. Zhedanov, “Zeros and orthogonality of the Askey–Wilson polynomials for q a root of unity”, *Duke Math. J.*, **89**:2 (1997), 283–305, arXiv: q-alg/9605034.

[10] V. Spiridonov, “Universal superpositions of coherent states and self-similar potentials”, *Phys. Rev. A*, **52**:3 (1995), 1909–1935, arXiv: quant-ph/9601030.

[11] V. V. Dodonov, I. A. Malkin, V. I. Man’ko, “Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator”, *Physica*, **72**:3 (1974), 597–618.

[12] W. H. Zurek, “Sub-Planck structure in phase space and its relevance for quantum decoherence”, *Nature*, **412**:6848 (2001), 712–717.

[13] R. J. Marks II, *Handbook of Fourier Analysis and Its Applications*, Oxford University Press, Oxford, 2009.

[14] В. П. Спиридонов, “Автомодельные потенциалы в квантовой механике и когерентные состояния”, *ЭЧАЯ*, **52**:2 (2021), 530–561, arXiv: 2009.02360.

[15] Arman, G. Tyagi, P. K. Panigrahi, “Photon added cat state: phase space structure and statistics”, *Optics Lett.*, **46**:5 (2021), 1177–1180, arXiv: 2011.00990.

[16] A. C. McBride, F. H. Kerr, “On Namias’s fractional Fourier transforms”, *IMA J. Appl. Math.*, **39**:2 (1987), 159–175.

[17] U. M. Titulaer, R. J. Glauber, “Density operators for coherent fields”, *Phys. Rev.*, **145**:4 (1966), 1041–1050.

[18] R. Tanaś, “Nonclassical states of light propagating in Kerr media”, *Theory of Nonclassical States of Light*, eds. V. V. Dodonov, V. I. Man’ko, Francis and Taylor, London, 2003, 277–318.

[19] A. Ourjoumtsev, R. Tualle-Brouri, J. Laurat, Ph. Grangier, “Generating optical Schrödinger kittens for quantum information processing”, *Science*, **312**:5770 (2006), 83–86.

[20] K. Chandrasekharan, *Introduction to Analytic Number Theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **148**, Springer, New York, 1968.

[21] U. Roy, S. Ghosh, P. K. Panigrahi, D. Vitali, “Sub-Planck-scale structures in the Pöschl–Teller potential and their sensitivity to perturbations”, *Phys. Rev. A*, **80**:5 (2009), 052115, 8 pp., arXiv: 0904.0488.

[22] Z. Bialynicka-Birula, “Properties of the generalized coherent state”, *Phys. Rev.*, **173**:5 (1968), 1207–1209.

[23] D. Stoler, “Generalized coherent states”, *Phys. Rev. D*, **4**:8 (1971), 2309–2312.

[24] Ts. Gantsog, R. Tanaś, “Discrete superpositions of coherent states and phase properties of elliptically polarized light propagating in a Kerr medium”, *Quantum Opt.*, **3**:1 (1991), 33–48.

[25] K. Tara, G. S. Agarwal, S. Chaturvedi, “Production of Schrödinger macroscopic quantum-superposition states in a Kerr medium”, *Phys. Rev. A*, **47**:6 (1993), 5024–5029.

Поступила в редакцию 1.03.2022,
после доработки 1.03.2022,
принята к публикации 9.03.2022