



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Лотов, Асимптотика распределения
супремума последовательных сумм,
Матем. заметки, 1985, том 38, вы-
пуск 5, 668–678

<https://www.mathnet.ru/mzm5579>

Использование Общероссийского математического портала
Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны
с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.170

22 мая 2025 г., 16:37:55



АСИМПТОТИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУПРЕМУМА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СУММ

В. И. Лотов

1. Введение. Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $-\infty < M\xi_1 < 0$. Обозначим $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $S = \sup_{n \geq 0} S_n$, $p = P(S > 0)$, $\eta = \inf \{n: S_n > 0\}$,

$\chi = S_\eta$, $W(x) = P(S \geq x)$, $\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} P(\xi_1 \in dy)$, $\lambda_+ = \sup \{\lambda: \varphi(\lambda) < \infty\}$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая $\lambda_+ > 0$, $\varphi(\lambda_+) \geq 1$. Если $\varphi(\lambda_+) = 1$, то дополнительно будем требовать $\varphi'(\lambda_+) < \infty$. В этих условиях определен единственный корень $q > 0$ уравнения $\varphi(q) = 1$ и при $x \rightarrow \infty$

$$W(x) = \frac{1-p}{qa} e^{-qx} (1 + o(1)), \quad (1)$$

$a = \int_0^{\infty} x e^{qx} P(\chi \in dx, \eta < \infty)$. Если $\varphi(\lambda_+) > 1$ и распределение ξ_1 содержит абсолютно непрерывную компоненту, то $o(1)$ в (1) можно заменить на $o(e^{-\varepsilon x})$ при некотором $\varepsilon > 0$. Эти факты приведены в [1, с. 168]. Доказательство (1) в [1] использует теорему восстановления, и там же указывается на возможность уточнения (1), если воспользоваться оценками остаточного члена в теореме восстановления при тех или иных дополнительных ограничениях. Этому направлению и посвящена настоящая работа. В п. 2 приведены уточнения теоремы из [2] об асимптоти-

ческих разложениях для функции восстановления в той степени общности, которая необходима для дальнейшего. Формулировка основного результата работы об асимптотике $W(x)$ при $\varphi(\lambda_+) > 1$ требует введения большого количества обозначений и потому вынесена в конец п. 3. Случай $\varphi(\lambda_+) = 1$, $\varphi'(\lambda_+) < \infty$ рассмотрен в п. 4.

К исследованию предельного поведения функции $W(x)$, когда $\lambda_+ > 0$, $\varphi(\lambda_+) \geq 1$, приводит, например, рассмотрение асимптотики вероятностей ошибок в последовательном критерии отношения правдоподобия, где, как известно, главные члены определяются распределением супремума последовательных сумм.

2. Асимптотические разложения для функции восстановления. Пусть τ_1, τ_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, $P(\tau_1 \geq 0) = 1$, $f(\lambda) = M e^{\lambda \tau_1}$, $F_n(y) = P(\tau_1 + \dots + \tau_n < y)$, $H(y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y)$ и пусть $f(\beta) < \infty$ при некотором $\beta > 0$. Из представления

$$\int_0^{\infty} e^{\lambda y} dH(y) = (1 - f(\lambda))^{-1}, \quad \operatorname{Re} \lambda < 0$$

ясно, что поведение $H(x)$ при $x \rightarrow \infty$ существенно зависит от наличия в полосе $0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \beta$ нулей функции $u(\lambda) = 1 - f(\lambda)$. Вещественных нулей у функции $u(\lambda)$ при $\operatorname{Re} \lambda > 0$ нет, но в ряде случаев (например, для $f(\lambda) = (e^{\lambda a} - 1)/\lambda a$) в полосе $0 < \operatorname{Re} \lambda \leq \beta$ могут находиться нули с ненулевой мнимой частью. Если λ_j — нуль функции $u(\lambda)$ кратности m_j , то комплексно сопряженное число $\bar{\lambda}_j$ также будет нулем $u(\lambda)$ той же кратности. $F_n^{(0)}(y)$ будет означать сумму дискретной и сингулярной компонент $F_n(y)$, $a_k = M \tau_1^k$, $R(x) = H(x) - \frac{x}{a_1} - \frac{a_2}{2a_1^2}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть при некотором $n \geq 1$

$$\int_0^{\infty} e^{\beta y} dF_n^{(0)}(y) < 1 \quad (2)$$

и функция $u(\lambda)$ в полосе $0 < \operatorname{Re} \lambda \leq \beta$ отлична от нуля всюду, кроме точек $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$, $0 < \operatorname{Re} \lambda_j = \beta_j < \beta$, $\operatorname{Im} \lambda_j = \gamma_j > 0$, m_j — кратность нуля λ_j , $j = 1, \dots, r$. Тогда

$$R(x) = \sum_{j=1}^r e^{-\beta_j x} \sum_{s=0}^{m_j-1} x^s (P_{js} \cos(\gamma_j x) - R_{js} \sin(\gamma_j x)) + \Delta(x),$$

где P_{js} и R_{js} — соответственно вещественная и мнимая части величины

$$\frac{2}{\lambda_j^{m_j-s} s!} \sum_{k=0}^{m_j-s-1} \frac{(-1)^{k-m_j-1} \lambda_j^k f_j^{(k)}(\lambda_j)}{k!},$$

$$f_j(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_j)^{m_j}}{u(\lambda)},$$

$$\Delta(x) = o(x^N e^{-\beta x}), \quad \text{Var } \Delta(y) = o(x^N e^{-\beta x}),$$

$[x, \infty)$

$$N = \max_{1 \leq j \leq r} m_j - 1.$$

Если $u(\lambda) \neq 0$ при $0 < \text{Re } \lambda \leq \beta$ и выполнено (2), то

$$|R(x)| = o(e^{-\beta x}), \quad \text{Var } R(y) = o(e^{-\beta x}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (3)$$

$[x, \infty)$

Асимптотические разложения типа (3) впервые получены в [2], причем без предположения о неотрицательности τ_i и отдельно для решетчатых распределений и распределений с абсолютно непрерывной компонентой. Однако [2] содержит ряд неточностей (некоторые из них можно отнести к разряду опечаток) как в формулировках, так и в доказательствах, что и послужило причиной появления здесь теоремы 1. В частности, приведенные в [2] разложения справедливы только в том случае, когда все нули $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$ ($j = 1, \dots, r$) — простые, хотя в [2] это нигде не оговаривается. Переход к рассмотрению кратных нулей в [2] влечет за собой дополнительные трудности. Как показывает следующий пример (принадлежащий В. А. Топчию), случай кратных нулей возможен. Действительно, функция $u_0(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 2(1-\varepsilon)\lambda + 1 - \varepsilon)^2 / (\lambda - 1)^5$ обладает кратными нулями $1 - \varepsilon \pm i\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}$ и при малых ε (например, при $\varepsilon = 0.05$) функция $1 - u_0(\lambda)$ является преобразованием Лапласа неотрицательной функции. В теореме 1, новой по сравнению с [2], является также оценка вариации остаточного члена.

Асимптотические разложения в теореме 1 можно получить другим, отличным от [2] методом. Приведем его краткое изложение. Пусть

$$v(\lambda) = \frac{u(\lambda)(\lambda - \beta - 1)^m}{\lambda \prod_{j=1}^r (\lambda - \lambda_j)^{m_j} (\lambda - \bar{\lambda}_j)^{m_j}} = \frac{u(\lambda)Q(\lambda)}{\lambda},$$

$$m = 1 + 2 \sum_{j=1}^r m_j. \quad (4)$$

Используя теорему 6 [1, с. 335] и условие (2), нетрудно установить, что при $\text{Re } \lambda \leq \beta$ справедливо представление

$$v^{-1}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{(\lambda-\beta)y} dV(y), \quad (5)$$

где $V(y)$ — функция ограниченной вариации. Пусть

$$\frac{Q(\lambda)}{\lambda} - 1 = \frac{A_0}{\lambda} + \sum_{j=1}^{2r} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{A_{jk}}{(\lambda - \mu_j)^k} \quad (6)$$

— разложение на простые дроби, μ_1, \dots, μ_{2r} — переобозначенная одной последовательностью совокупность $\{\lambda_j, \bar{\lambda}_j, j = 1, \dots, r\}$, n_j — кратность μ_j . Тогда при $\text{Re } \lambda < 0$

$$\frac{1}{u(\lambda)} = \int_0^{\infty} e^{\lambda y} dH(y) = v^{-1}(\lambda) + v^{-1}(\lambda) \left(\frac{Q(\lambda)}{\lambda} - 1 \right), \quad (7)$$

далее подставляем (6) в (7) и, воспользовавшись представлением (5), переходим к сверткам функций в правой части (7). Получаем таким образом

$$\begin{aligned} H(x) = & \int_0^x e^{-\beta y} dV(y) - A_0 \int_0^x \int_0^y e^{-\beta t} dV(t) dy + \\ & + \sum_{j=1}^{2r} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{(-1)^k A_{jk}}{(k-1)!} \int_0^x e^{-\mu_j y} \int_0^y (y-t)^{k-1} e^{(\mu_j-\beta)t} dV(t) dy. \end{aligned} \quad (8)$$

Дальнейшее преобразование этого выражения сводится к распространению интегрирования от 0 до ∞ и оцениванию остатков. Обозначим

$$d_{jk} = [v^{-1}(\lambda)]_{\lambda=\mu_j}^{(k)}, \quad d_{0k} = [v^{-1}(\lambda)]_{\lambda=0}^{(k)},$$

$$\Delta_k(x) = \int_x^{\infty} y^k e^{-\beta y} dV(y),$$

$$\Delta_{jk}(x) = \int_x^{\infty} y^k e^{(\mu_j-\beta)y} dV(y).$$

Тогда из (8) после соответствующих выкладок имеем

$$\begin{aligned} H(x) = & d_{00} - A_0(xd_{00} - d_{01}) + K + \sum_{j=1}^{2r} e^{-\mu_j x} \sum_{s=0}^{n_j-1} x^s Q_{js} + \\ & + B(x) + C(x) - \Delta_0(x) + A_0 x \Delta_0(x) - A_0 \Delta_1(x), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$|\Delta_0(x)| \leq L(x) e^{-\beta x}, \quad L(x) = \text{Var } V(y),$$

$[x, \infty)$

$$|x\Delta_0(x) - \Delta_1(x)| \leq \frac{1}{\beta e} L(x) e^{-\beta x},$$

$$-A_0 d_{00} = a_1^{-1}, \quad A_0 d_{01} = a_2/2a_1^2 - Q'(0) d_{00},$$

$$K = \sum_{j=1}^{2r} \sum_{k=1}^{n_j} A_{jk} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k+l}}{l!} \sum_{s=0}^{k-1-l} \frac{\mu_j^{s+l-k} d_{0, l+s}}{s!} =$$

$$= d_{00} (Q'(0) - 1),$$

$$Q_{js} = \frac{\mu_j^s}{s!} \sum_{k=s+1}^{n_j} \frac{A_{jk}}{\mu_j^k} \sum_{l=0}^{k-1-s} \frac{(-1)^{k+l+1} \mu_j^l d_{jl}}{l!} =$$

$$= \frac{1}{\mu_j^{n_j-s} s!} \sum_{k=0}^{n_j-s-1} \frac{(-1)^{k-n_j-1} \mu_j^k g_j^{(k)}(\mu_j)}{k!},$$

$$g_j(\lambda) = \frac{(\lambda - \mu_j)^{n_j}}{u(\lambda)},$$

$$B(x) = \sum_{j=1}^{2r} \sum_{k=1}^{n_j} A_{jk} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k+l+1}}{l!} \cdot$$

$$\cdot \sum_{s=0}^{k-1-l} \frac{\mu_j^{s+l-k} \Delta_{l+s}(x)}{s!} = (1 - Q'(0)) \Delta_0(x),$$

$$|C(x)| = \left| \sum_{j=1}^{2r} \sum_{k=1}^{n_j} A_{jk} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^{l+k}}{l!} \cdot \right.$$

$$\cdot \left. \sum_{s=0}^{k-1-l} \frac{\mu_j^{s+l-k} x^s e^{-\mu_j x}}{s!} \Delta_{jl}(x) \right| \leq$$

$$\leq L(x) e^{-\beta x} \sum_{j=1}^{2r} \sum_{i=0}^{n_j-1} \frac{|2\mu_j x|^i}{i!} \sum_{k=i+1}^{n_j} \frac{|A_{jk}|}{|\mu_j|^k} \equiv$$

$$\equiv L(x) e^{-\beta x} \sum_{k=0}^N c_k x^k = o(x^N e^{-\beta x}).$$

Подставляя все в (9), получим

$$H(x) = \frac{x}{a_1} + \frac{a_2}{2a_1^2} + \sum_{j=1}^{2r} e^{-\mu_j x} \sum_{s=0}^{n_j-1} Q_{js} x^s + \Delta(x),$$

где

$$|\Delta(x)| \leq L(x) e^{-\beta x} \left(\sum_{k=0}^N c_k x^k + |v(0)| / a_1 \beta e + |Q'(0)| \right).$$

Ясно, что такая же оценка справедлива и для $\text{Var } \Delta(y)$.

$[x, \infty)$

Если $u(\lambda) \neq 0$ при $0 < \operatorname{Re} \lambda \leq \beta$, то

$$|R(x)| \leq K(x) \equiv L_1(x) e^{-\beta x} \left(1 + \frac{\beta + 1}{\beta e}\right),$$

$$\operatorname{Var}_{[x, \infty)} R(y) \leq K(x).$$

Здесь

$$L_1(x) = \operatorname{Var}_{[x, \infty)} V_1(y), \lambda u^{-1}(\lambda) (\lambda - \beta - 1)^{-1} =$$

$$= \int_0^\infty e^{(\lambda - \beta)y} dV_1(y), \operatorname{Re} \lambda \leq \beta.$$

3. Асимптотика функции $W(x)$ при $\varphi(\lambda_+) > 1$. В этом и последующих пунктах предполагается, что распределение ξ_1 содержит абсолютно непрерывную компоненту. Пусть число $\beta > 0$ таково, что $\varphi(q + \beta) < \infty$ (здесь $q > 0$, $\varphi(q) = 1$) и в полосе $q < \operatorname{Re} \lambda \leq q + \beta$ $r(\lambda) \equiv 1 - \varphi(\lambda) \neq 0$ всюду, кроме точек $q + \lambda_j$, $q + \bar{\lambda}_j$, $0 < \beta_j = \operatorname{Re} \lambda_j < \beta$, $\gamma_j = \operatorname{Im} \lambda_j > 0$, $j = 1, \dots, r$. Обозначим m_j кратность нуля λ_j , $w(\lambda) = r(\lambda)(\lambda + 1) \cdot (\lambda - q - \beta - 1) \lambda^{-1} (\lambda - q)^{-1}$. Из теоремы 8 [1, с. 337] следует, что функция $w(\lambda)$ допускает каноническую V -факторизацию $w(\lambda) = w_+(\lambda) w_-(\lambda)$ при $\operatorname{Re} \lambda = 0$ и при $\operatorname{Re} \lambda = q$, а следовательно, и при $0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq q$. Пусть

$$r_+(\lambda) = \frac{w_+(\lambda)(\lambda - q)}{\lambda - q - \beta - 1}, \quad r_-(\lambda) = \frac{\lambda w_-(\lambda)}{\lambda + 1}. \quad (10)$$

Эти функции обеспечивают V -факторизацию $r(\lambda) = r_+(\lambda) r_-(\lambda)$ при $0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq q$, т. е. имеют место представления вида

$$r_+(\lambda) = \int_0^\infty e^{(\lambda - q)y} dW_+(y),$$

$$r_-(\lambda) = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda y} dW_-(y), \quad \operatorname{Var} W_\pm < \infty.$$

Покажем, что $\int_0^\infty e^{\beta y} dW_+(y) < \infty$. Действительно,

$$r_+(\lambda) = \frac{r(\lambda)}{r_-(\lambda)} = \left(1 - \int_{-\infty}^\infty e^{\lambda y} P(\xi_1 \in dy)\right) w^{-1}(\lambda) \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right).$$

Правая часть этого равенства представима при $0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq q + \beta$ в виде $\int_{-\infty}^\infty e^{(\lambda - q - \beta)y} dG(y)$, $\operatorname{Var} G < \infty$, что совпадает при $0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq q$ с $\int_0^\infty e^{(\lambda - q)y} dW_+(y)$, откуда

и следует наше утверждение. Функция $r_-(\lambda)$ при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ обращается в нуль только при $\lambda = 0$ — это следует из (10), поэтому все числа $q + \lambda_j$, $q + \bar{\lambda}_j$ будут нулями кратности m_j функции $r_+(\lambda)$. Пусть $f(\lambda) = 1 - r_+(\lambda + q)$, $\operatorname{Re} \lambda \leq \beta$. Как известно [1, с. 169], факторизация (10) может быть выбрана такой, что $f(\lambda)$ является производящей функцией моментов некоторой случайной величины $\tau > 0$ такой, что $P(\tau \in dy) = e^{qy}P(\chi \in dy, \eta < \infty)$ и, кроме того, $M_{e^{(q+\lambda)S}} = (1-p)(1-f(\lambda))^{-1}$, откуда

$$W(x) = (1-p) \int_x^\infty e^{-qy} dH(y), \quad (11)$$

$H(y)$ — функция восстановления, соответствующая случайной величине τ . Чтобы воспользоваться далее результатом теоремы 1, достаточно потребовать

$$\int_0^\infty e^{(q+\beta)y} \Phi^{(0)}(dy) < 1, \quad (12)$$

где $\Phi^{(0)}$ — сумма дискретной и сингулярной компонент меры $\Phi(A) = P(\chi \in A, \eta < \infty)$. Проверка условия (12) затруднительна, поэтому укажем для него некоторые достаточные условия. Имеем для любого борелевского $A \subset \subset (0, \infty)$ $\Phi^{(0)}(A) \leq \sum_{n=1}^\infty P_n^{(0)}(A)$, где $P_n^{(0)}(A)$ — сумма дискретной и сингулярной компонент распределения $P(S_n \in A)$. Обозначим

$$\varphi_0(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty e^{\lambda y} P_1^{(0)}(dy),$$

$$\left[\int_{-\infty}^\infty e^{\lambda y} dG(y) \right]^A = \int_A e^{\lambda y} dG(y),$$

тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{(q+\beta)y} \Phi^{(0)}(dy) &\leq \sum_{n=1}^\infty \int_{0+}^\infty e^{(q+\beta)y} P_n^{(0)}(dy) = \\ &= \left[\sum_{n=1}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{(q+\beta)y} P_n^{(0)}(dy) \right]^{(0, \infty)} \leq \left[\sum_{n=1}^\infty \Phi_0^n(q + \beta) \right]^{(0, \infty)}. \end{aligned}$$

Поэтому условие

$$\sum_{n=1}^\infty [\Phi_0^n(q + \beta)]^{(0, \infty)} < 1 \quad (13)$$

влечет за собой (12). Если $\varphi_0(q + \beta) < 1$, то (13) превращается в условие

$$[\varphi_0(q + \beta)(1 - \varphi_0(q + \beta))^{-1}]^{(0, \infty)} < 1,$$

для выполнения которого в свою очередь достаточно потребовать $\varphi_0 (q + \beta) < 1/2$. Итак, пусть выполнено (12). Тогда в силу (11) и (3)

$$W(x) = \frac{1-p}{qa_1} e^{-qx} + (1-p) \sum_{j=1}^r \sum_{s=0}^{m_j-1} (P_{js} I_{js}^{(1)}(x) - R_{js} I_{js}^{(2)}(x)) + o(x^N e^{-(q+\beta)x}), \quad (14)$$

величины P_{js} , R_{js} и N определены в теореме 1,

$$a_k = M \tau^k, \quad I_{js}^{(1)}(x) = \int_x^\infty e^{-qu} d(y^s \cos(\gamma_j y) e^{-\beta_j y}),$$

$$I_{js}^{(2)}(x) = \int_x^\infty e^{-qu} d(y^s \sin(\gamma_j y) e^{-\beta_j y}).$$

Интегрируя по частям, получим

$$I_{js}^{(1)}(x) = -x^s \cos(\gamma_j x) e^{-(q+\beta_j)x} + \frac{q}{\gamma_j^{s+1}} \int_{z_j}^\infty y^s \cos y e^{-\alpha_j y} dy,$$

$$I_{js}^{(2)}(x) = -x^s \sin(\gamma_j x) e^{-(q+\beta_j)x} + \frac{q}{\gamma_j^{s+1}} \int_{z_j}^\infty y^s \sin y e^{-\alpha_j y} dy,$$

$$z_j = \gamma_j x, \quad \alpha_j = \frac{q + \beta_j}{\gamma_j}.$$

Пусть

$$E_s(z) = \int_z^\infty y^s \cos y e^{-\alpha y} dy, \quad G_s(z) = \int_z^\infty y^s \sin y e^{-\alpha y} dy, \quad s \geq 0.$$

Тогда

$$E_0(z) = \frac{e^{-\alpha z} (\alpha \cos z - \sin z)}{\alpha^2 + 1}, \quad G_0(z) = \frac{e^{-\alpha z} (\cos z + \alpha \sin z)}{\alpha^2 + 1},$$

для $s \geq 0$

$$E_{s+1}(z) = \frac{z^{s+1} e^{-\alpha z} (\alpha \cos z - \sin z)}{\alpha^2 + 1} + \frac{\alpha(s+1)}{\alpha^2 + 1} E_s(z) - \frac{s+1}{\alpha^2 + 1} G_s(z),$$

$$G_{s+1}(z) = \frac{z^{s+1} e^{-\alpha z} (\cos z + \alpha \sin z)}{\alpha^2 + 1} + \frac{s+1}{\alpha^2 + 1} E_s(z) + \frac{\alpha(s+1)}{\alpha^2 + 1} G_s(z),$$

откуда получаем

$$E_s(z) = e^{-\alpha z} \sum_{k=0}^s z^k (a_{sk} \cos z + b_{sk} \sin z),$$

$$G_s(z) = e^{-\alpha z} \sum_{k=0}^s z^k (c_{sk} \cos z + d_{sk} \sin z),$$

где при всех $s \geq 0$

$$a_{ss} = d_{ss} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1}, \quad c_{ss} = -b_{ss} = \frac{1}{\alpha^2 + 1}, \quad (15)$$

для $0 \leq k \leq s - 1$

$$\begin{aligned} a_{sk} &= \frac{\alpha s}{\alpha^2 + 1} a_{s-1, k} - \frac{s}{\alpha^2 + 1} c_{s-1, k}, \\ b_{sk} &= \frac{\alpha s}{\alpha^2 + 1} b_{s-1, k} - \frac{s}{\alpha^2 + 1} d_{s-1, k}, \\ c_{sk} &= \frac{s}{\alpha^2 + 1} a_{s-1, k} + \frac{\alpha s}{\alpha^2 + 1} c_{s-1, k}, \\ d_{sk} &= \frac{s}{\alpha^2 + 1} b_{s-1, k} + \frac{\alpha s}{\alpha^2 + 1} d_{s-1, k}. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя полученные выражения в (14), можем сформулировать окончательный результат. Обозначим

$$p_{ss}^{(j)} = -1 + g\gamma_j^{-1} a_{ss}^{(j)}, \quad t_{ss}^{(j)} = -1 + g\gamma_j^{-1} d_{ss}^{(j)}, \quad s \geq 0,$$

при $0 \leq k \leq s$

$$g_{sk}^{(j)} = g\gamma_j^{k-s-1} b_{sk}^{(j)}, \quad r_{sk}^{(j)} = g\gamma_j^{k-s-1} c_{sk}^{(j)},$$

при $0 \leq k \leq s - 1$

$$p_{sk}^{(j)} = g\gamma_j^{k-s-1} a_{sk}^{(j)}, \quad t_{sk}^{(j)} = g\gamma_j^{k-s-1} d_{sk}^{(j)},$$

величины $a_{sk}^{(j)}$, $b_{sk}^{(j)}$, $c_{sk}^{(j)}$, $d_{sk}^{(j)}$ ($0 \leq k \leq s$) определены в (15), (16), где для простоты индекс j всюду опущен.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в условиях п. 3 выполнено (12). Тогда при $x \rightarrow \infty$

$$W(x) = \frac{1-p}{qa_1} e^{-qx} + (1-p) \sum_{j=1}^r e^{-(q+\beta_j)x} \sum_{k=0}^{m_j-1} x^k \cdot (C_{jk} \cos(\gamma_j x) + D_{jk} \sin(\gamma_j x)) + \delta(x),$$

где

$$C_{jk} = \sum_{s=k}^{m_j-1} (P_{js} p_{sk}^{(j)} - R_{js} r_{sk}^{(j)}),$$

$$D_{jk} = \sum_{s=k}^{m_j-1} (P_{js} g_{sk}^{(j)} - R_{js} t_{sk}^{(j)}),$$

$$|\delta(x)| \leq (1-p) L(x) e^{-(q+\beta)x} \left(\sum_{k=0}^N c_k x^k + |v(0)|/a_1 \beta e + |Q'(0)| \right),$$

величины $\bar{P}_{js}, \bar{R}_{js}, c_k, N$ и функции $L(x), v(\lambda), Q(\lambda)$ определены в теореме 1, $L(x) = o(1), x \rightarrow \infty$.

Очевидным следствием теоремы 1 и (11) является

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varphi(\lambda_+) > 1$, число $\beta > 0$ таково, что $\varphi(q + \beta) < \infty$, и $r(\lambda) \neq 0$ при $q < \operatorname{Re} \lambda \leq q + \beta$. Тогда если выполнено (12), то

$$\left| W(x) - \frac{1-p}{qa_1} e^{-qx} \right| \leq (1-p) L_1(x) e^{-(q+\beta)x} \left(1 + \frac{\beta+1}{\beta e} \right),$$

функция $L_1(x)$ определена в теореме 1.

4. Пусть теперь $\varphi(\lambda_+) = 1$, т. е. $q = \lambda_+$, и при некотором $\alpha \geq 1$

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{qx} \mathbf{P}(\xi_1 \in dx) < \infty. \quad (17)$$

По-прежнему имеет место (11), откуда [1, с. 169]

$$W(x) = \frac{1-p}{qa_1} e^{-qx} + q(1-p) \int_x^\infty (S(t) - S(x)) e^{-qt} dt, \quad (18)$$

$S(t) = H(t) - t/a_1$. Условие (17) влечет за собой $M\tau^\alpha < \infty$ (см. [3]), откуда вследствие результатов [4]

$$\begin{aligned} S(t) - S(x) - \frac{1}{a_1^2} \int_x^t \int_z^\infty \mathbf{P}(\tau \geq u) du dz = \\ = \begin{cases} o(x^{2(1-\alpha)}), & 1 \leq \alpha < 2, \\ o(x^{-\alpha}), & \alpha \geq 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18) и меняя порядок интегрирования, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\varphi(\lambda_+) = 1$ и при некотором $\alpha \geq 1$ выполнено (17). Тогда при $x \rightarrow \infty$

$$W(x) = \frac{1-p}{qa_1} e^{-qx} \left(1 - \frac{1}{a_1} \int_x^\infty \mathbf{P}(\tau \geq y) (1 - e^{x-y}) dy + \delta_1(x) \right),$$

где

$$\delta_1(x) = \begin{cases} o(x^{2(1-\alpha)}), & 1 \leq \alpha < 2, \\ o(x^{-\alpha}), & \alpha \geq 2. \end{cases}$$

При оценке функции $\int_x^\infty P(\tau \geq y)(1 - e^{x-y}) dy$ полезными могут быть следующие соотношения [3]:

$$k_1 P(\tilde{\xi}_1 \geq y) \leq P(\tau \geq y) \leq k_2 P(\tilde{\xi}_1 \geq y),$$

$$k_2 = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(\tilde{S}_n \leq 0) \right\}, \quad k_1 = k_2 P(\inf_{n \geq 0} \tilde{S}_n = 0),$$

$$\tilde{S}_0 = 0, \quad \tilde{S}_n = \tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_n, \quad M e^{\lambda \tilde{\xi}_i} = M e^{(\lambda+q)\xi_i},$$

случайные величины $\tilde{\xi}_i$ независимы.

Новосибирский государственный
университет им. Ленинского комсомола

Поступило
21.01.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б о р о в к о в А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания.— М.: Наука, 1972.
- [2] V a n d e r G e n u g t e n В. В. Asymptotic expansion in renewal theory.— Compositio Math., 1969, v. 21, p. 331—342.
- [3] Р о г о з и н Б. А. О распределении величины первого перескока.— Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, № 3, с. 498—515.
- [4] Р о г о з и н Б. А. Асимптотика функции восстановления.— Теория вероятн. и ее применен., 1976, т. 21, № 4, с. 689—706.