

УДК 517.9

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МОНОДРОМИИ

Н. Б. Медведева

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия  
Южно-Уральский государственный университет  
(национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия  
medv@csu.ru

Вычисляется асимптотический ряд преобразования монодромии монодромной особой точки векторного поля на плоскости в случае, когда его диаграмма Ньютона состоит из одного невырожденного ребра. Применяется метод раздутия особенностей по диаграмме Ньютона. Выдвигается гипотеза о существовании алгоритма вычисления коэффициентов отображений соответствия и преобразования монодромии, не содержащего операции предельного перехода. Эта гипотеза доказана в случае одного невырожденного ребра диаграммы Ньютона, а также для первых двух коэффициентов асимптотики отображения соответствия в первом квадранте плоскости (а также преобразования монодромии) в случае, когда диаграмма Ньютона векторного поля состоит из двух невырожденных ребер.

**Ключевые слова:** монодромная особая точка, раздутие особенностей, фокус, центр, преобразование монодромии, диаграмма Ньютона.

### Введение

Особая точка аналитического векторного поля на вещественной плоскости является *монодромной* [1], если для неё определено преобразование монодромии  $\Delta(\rho)$ , переводящее некоторую кривую с вершиной в особой точке (полутрансверсаль) в себя вдоль траекторий векторного поля. Точное определение монодромной особой точки дано в [1]. Монодромная особая точка аналитического векторного поля является либо фокусом, либо центром.

Аналогично определяются монодромный сложный цикл и преобразование монодромии сложного цикла — объединения конечного числа особых точек и неодноточечных траекторий, входящих в эти особые точки при  $t \rightarrow \pm\infty$  [2].

Аналогично преобразованию монодромии определяется отображение соответствия одной полутрансверсали с вершиной на монодромном сложном цикле в другую полутрансверсаль [2]. Преобразование монодромии сложного цикла может быть разбито в суперпозицию отображений соответствия. Сложные циклы возникают, например, из особых точек при раздутии особенностей.

Пусть  $\rho$  — параметр на полутрансверсали с вершиной в монодромной особой точке,  $\Delta^*(\rho)$  — преобразование монодромии. Если  $\Delta^*(\rho) \equiv \rho$ , то особая точка — центр. Доказано [1; 3], что при подходящем выборе полутрансверсали  $\Delta(\rho) = C_1\rho + o(\rho)$  при  $\rho \rightarrow 0$ ,  $C_1 > 0$ . Неравенство  $\ln C_1 \neq 0$  является достаточным условием того, чтобы особая точка была фокусом.

В работе [4] вычислена величина  $\ln C_1$  для монодромной особой точки произвольного аналитического векторного поля. Результат формулируется в терминах диаграмм Ньютона векторных полей, возникающих в процессе раздутия особенностей.

В [5] показано, что в некоторых классах векторных полей с монодромной особой точкой  $\ln C_1 \equiv 0$ , то есть преобразование монодромии имеет асимптотику  $\Delta^*(\rho) = \rho + o(\rho)$ . Таким образом, чтобы получить достаточное условие фокуса и построить границу устойчивости в таком классе, необходимо было вычислять второй член асимптотики преобразования монодромии.

В статьях [6] и [7] вычисляется второй член асимптотики преобразования монодромии так называемого  $\Gamma$ -невырожденного векторного поля в случае, когда его диаграмма Ньютона  $\Gamma$  состоит из двух чётных рёбер.

В работе [8] построены два члена асимптотики преобразования монодромии векторного поля с монодромной особой точкой, имеющего диаграмму Ньютона  $\Gamma$ , состоящую из одного чётного ребра и принадлежащего несколько более широкому классу, чем класс  $\Gamma$ -невырожденных векторных полей. Также в [8] вычислен второй член асимптотики преобразования монодромии векторного поля, имеющего диаграмму Ньютона  $\Gamma$ , состоящую из двух рёбер при нарушении условий  $\Gamma$ -невырожденности.

Вычисляя асимптотику отображений соответствия так, как это делается в статьях [6] и [7], мы можем, составляя их композиции, вычислить коэффициенты асимптотического разложения преобразования монодромии и в случае любого числа рёбер.

В работах [9] и [10] предлагаются алгоритмы вычисления коэффициентов асимптотического ряда преобразования монодромии с помощью методов раздутия особенностей, специфических для случая одного ребра диаграммы Ньютона. В настоящей статье преобразование монодромии исследуется с помощью другого метода раздутия, связанного с диаграммами Ньютона, который является удобным для исследования монодромных особых точек с любыми диаграммами Ньютона и любыми вырождениями.

Для вычисления коэффициентов асимптотики преобразования монодромии применяется метод раздутия по диаграмме Ньютона, предложенный в [5; 11]. Стоит он в следующем. Окрестность начала координат разбивается на секторы, соответствующие рёбрам и вершинам диаграммы Ньютона. Соответственно этому разбиению преобразование монодромии разбивается в композицию отображений соответствия для секторов.

В каждом секторе делается своя степенная замена переменных, в результате чего сектор превращается в прямоугольник. Тем самым векторное поле из окрестности особой точки переносится в окрестность замкнутой инвариантной кривой, а отображения соответствия для секторов превращаются в отображения соответствия для прямоугольников. В прямоугольниках, соответствующих рёбрам, асимптотика отображения соответствия вычисляется легко с помощью решения уравнений в вариациях вдоль инвариантной фазовой кривой. В прямоугольниках, соответствующих вершинам, для вычисления асимптотики отображения соответствия необходимо привести векторное поле к нормальной форме и построить первый интеграл.

Как предусмотрено методом раздутия особенностей, границы прямоугольников, полученных после раздутия, зависят от малых параметров  $\varepsilon$  и  $\delta$  (в случае диаграммы Ньютона, состоящей из одного ребра, только от одного параметра  $\varepsilon$ ), поэтому

и предварительные выражения для коэффициентов асимптотических разложений отображений соответствия в каждом квадранте плоскости также от них зависят, хотя на самом деле коэффициенты этих асимптотических разложений не зависят от  $\varepsilon$  и  $\delta$  в силу единственности асимптотического разложения. Поэтому, чтобы получить окончательные выражения для коэффициентов, делается предельный переход при  $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$ , что является технически сложной задачей. Асимптотическое разложение преобразования монодромии получается как композиция асимптотических разложений отображений соответствия для всех четырёх квадрантов. Как уже отмечалось в [12], актуальной задачей в наше время является построение алгоритма вычисления коэффициентов преобразования монодромии (отображений соответствия), не содержащего операции предельного перехода.

Имеются достаточные основания для того, чтобы выдвинуть следующую *гипотезу*: каждому ребру диаграммы Ньютона можно сопоставить некоторый ряд, коэффициенты которого вычисляются рекуррентно и выражаются через интегралы Адамара [13] от функций, выражаемых через компоненты разложения векторного поля на квазиоднородные многочлены, а каждой вершине — некоторое простое отображение, например степенное, таким образом, что коэффициенты формального ряда композиции этих формальных отображений будут совпадать с коэффициентами асимптотического ряда отображения соответствия для первого квадранта.

Эта гипотеза доказана ранее для случая одного ребра диаграммы Ньютона, а в случае двух рёбер она фактически доказана в работах [6] и [7] для первых двух коэффициентов асимптотики преобразования монодромии. Ниже мы убедимся в этом для двух случаев из числа рассмотренных в работах [6] и [7]. Вычисление интегралов Адамара, о которых идёт речь выше, может быть поручено электронно-вычислительной машине, тем самым и весь алгоритм вычисления любого конечного числа коэффициентов асимптотического разложения преобразования монодромии может быть реализован на компьютере.

## 1. Диаграмма Ньютона

Дадим некоторые определения, связанные с диаграммой Ньютона [1; 5; 9].

В окрестности точки ноль на плоскости рассмотрим аналитическое векторное поле (росток векторного поля), которое определяет динамическую систему

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y). \quad (1)$$

**Определения.** 1. Рассмотрим тейлоровские разложения

$$yX(x, y) = \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij}x^i y^j, \quad xY(x, y) = \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij}x^i y^j. \quad (2)$$

*Носителем* системы (1), а также соответствующего ей векторного поля называется множество таких пар  $(i, j)$ , что  $(a_{ij}, b_{ij}) \neq (0, 0)$ . Вектор  $(a_{ij}, b_{ij})$  называется *векторным коэффициентом* точки носителя  $(i, j)$ .

2. Рассмотрим множество  $\bigcup_{(i,j)} \{(i, j) + \mathbb{R}_+^2\}$ , где  $\mathbb{R}_+^2$  — положительный квадрант, объединение берётся по всем точкам  $(i, j)$ , принадлежащим носителю. Граница выпуклой оболочки этого множества состоит из двух открытых лучей и ломаной, которая может состоять и из одной точки. Эта ломаная называется *диаграммой Ньютона* системы (1), а также соответствующего ей векторного поля. Звенья ломаной называются *рёбрами* диаграммы Ньютона, а их концы — её *вершинами*.

3. Показателем ребра диаграммы Ньютона называется положительное рациональное число, равное тангенсу угла между ребром и осью ординат.

4. Рассмотрим ребро  $\ell$  диаграммы Ньютона системы (1) с показателем  $\alpha = m/n$ , где  $m/n$  — несократимая дробь. Члены разложения (2) сгруппируем таким образом, что

$$yX(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x, y), \quad xY(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(x, y),$$

где

$$X_k(x, y) = \sum_{ni+mj=k+k_0} a_{ij}x^i y^j, \quad Y_k(x, y) = \sum_{ni+mj=k+k_0} b_{ij}x^i y^j -$$

квазиоднородные полиномы степени  $k + k_0$  с весами  $n$  и  $m$  переменных  $x$  и  $y$  соответственно,  $k_0 > 0$ . Обозначим  $F_k(x, y) = nY_k(x, y) - mX_k(x, y)$ .

5. Известно [5], что для любого квазиоднородного полинома  $R(x, y)$  с весами  $n$  и  $m$  переменных  $x$  и  $y$  ( $m/n$  — несократимая дробь) справедливо разложение  $R(x, y) = Ax^{s_1}y^{s_2} \prod_i (y^n - b_i x^m)^{k_i}$ , где  $b_i$  — различные ненулевые комплексные числа,  $k_i \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0$ . Многочлен вида  $y^n - b_i x^m$ ,  $b_i \neq 0$ , называется *простым делителем* полинома  $R(x, y)$ .

6. Ребро  $\ell$  диаграммы Ньютона векторного поля называется *невырожденным*, если многочлен  $F_0(x, y)$  не имеет вещественных простых делителей. В противном случае ребро называется *вырожденным*.

## 2. Раздутие особенности в случае одного ребра

Пусть векторное поле  $V$  с монодромной особой точкой  $(0, 0)$  имеет диаграмму Ньютона, состоящую из одного невырожденного ребра с показателем  $m/n$  (несократимая дробь) и имеющую по одной вершине на каждой координатной оси.

В случае диаграммы Ньютона, состоящей из одного ребра с показателем  $\alpha = m/n$ , метод раздутия по диаграмме Ньютона состоит в следующем. Рассмотрим пересечение малой окрестности нуля в плоскости переменных  $(x, y)$  с двумя секторами —

$$S_0 = \left\{ \frac{1}{\varepsilon} x^\alpha \leq y < \delta_1, x > 0 \right\} \quad \text{и} \quad S_1 = \left\{ \frac{1}{\varepsilon} x^\alpha \geq y > 0, 0 < x < \delta_2 \right\},$$

где  $\varepsilon, \delta_1, \delta_2$  — положительные числа.

В секторе  $S_0$  делается замена переменных

$$x = z^n w, \quad y = z^m, \tag{3}$$

в результате чего он превращается в прямоугольник

$$P_0 = \left\{ 0 < w \leq \varepsilon^{1/\alpha}, 0 < z < \delta_1^{1/m} \right\}.$$

Аналогично в секторе  $S_1$  делается замена

$$x = z^n, \quad y = z^m w, \tag{4}$$

и он превращается в прямоугольник  $P_1 = \left\{ 0 < w \leq 1/\varepsilon, 0 < z < \delta_2^{1/n} \right\}$  (см. рис. на с. 64). Замены переменных сопровождаются делением на подходящие степени переменных. Прямоугольники  $P_0$  и  $P_1$  склеиваются с помощью функций перехода сторонами, которые соответствуют границе между секторами  $S_0$  и  $S_1$ . Более

подробно процесс раздутия описан в [11]. Для того чтобы исследовать векторное поле в другом квадранте, его отражают в первый квадрант и проделывают ту же процедуру.

Из условия, что многочлен  $F_0(x, y)$  не имеет вещественных простых делителей (невыврожденность ребра), и из того, что диаграмма Ньютона векторного поля имеет по одной вершине на каждой координатной оси, следует, что векторные поля, полученные после раздутия и определённые в окрестностях сторон  $z = 0$  прямоугольников  $P_0, P_1$ , не имеют особых точек на стороне  $z = 0$  соответствующего прямоугольника [11].

В результате замены (3) и деления на некоторую степень  $z$  получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -z(Y_0(w, 1) + zY_1(w, 1) + \dots) \\ \dot{w} &= w(F_0(w, 1) + zF_1(w, 1) + \dots), \end{aligned} \quad (5)$$

которой соответствует уравнение

$$\frac{dz}{dw} = z \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(w), \quad (6)$$

где

$$\Psi_0(w) = \frac{-Y_0(w, 1)}{wF_0(w, 1)}; \quad \Psi_1(w) = \frac{F_1(w, 1)Y_0(w, 1) - F_0(w, 1)Y_1(w, 1)}{wF_0^2(w, 1)},$$

$$\Psi_k(w) = \frac{Q_k(w)}{wF_0(w, 1)^{k+1}},$$

$Q_k(w)$  — однородный многочлен степени  $k + 1$  с целыми коэффициентами от  $X_0(w, 1), \dots, X_k(w, 1), Y_0(w, 1), \dots, Y_k(w, 1)$ , каждый моном которого содержит по крайней мере одно  $Y_j(w, 1), j \in \{0, \dots, k\}$ . Поскольку все  $Y_j(x, y)$  делятся на  $x$ , то  $Y_0(w, 1)$  и все  $Q_k$  делятся на  $w$ , поэтому  $\Psi_k(w)$  непрерывны при  $w = 0$ .

В результате замены (4) и деления на некоторую степень  $z$  получаем систему

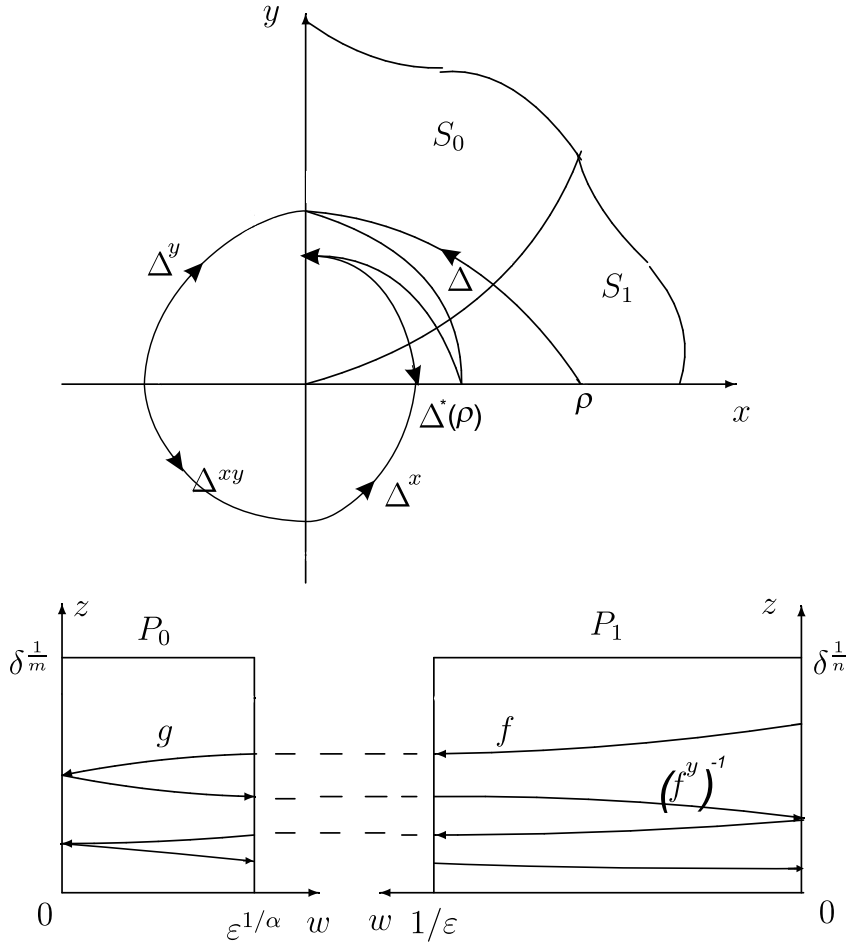
$$\begin{aligned} \dot{z} &= z(X_0(1, w) + zX_1(1, w) + \dots), \\ \dot{w} &= w(F_0(1, w) + zF_1(1, w) + \dots), \end{aligned}$$

которой соответствует уравнение  $\frac{dz}{dw} = z \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(w)$ , где

$$\Phi_0(w) = \frac{X_0(1, w)}{wF_0(1, w)}; \quad \Phi_1(w) = \frac{F_0(1, w)X_1(1, w) - F_1(1, w)X_0(1, w)}{wF_0^2(1, w)},$$

$$\Phi_k(w) = \frac{P_k(w)}{wF_0(1, w)^{k+1}},$$

$P_k(w)$  — однородный многочлен степени  $k + 1$  с целыми коэффициентами от  $X_0(1, w), \dots, X_k(1, w), Y_0(1, w), \dots, Y_k(1, w)$ , каждый моном которого содержит по крайней мере одно  $X_j(1, w), j \in \{0, \dots, k\}$ . Поскольку все  $X_j(x, y)$  делятся на  $y$ , то  $X_0(1, w)$  и все  $P_k$  делятся на  $w$ , поэтому  $\Phi_k(w)$  непрерывны при  $w = 0$ .



Раздутие особенности в случае одного ребра

### 3. Отображения соответствия

Рассмотрим отображения соответствия вдоль траекторий векторных полей, полученных после замен (3) и (4):  $f$  отображает некоторую окрестность нуля на стороне  $\{w = 0\}$  прямоугольника  $P_1$  в его сторону  $\{w = 1/\varepsilon\}$  вдоль траекторий векторного поля, полученного после замены (4);  $g$  отображает некоторую окрестность нуля на стороне  $\{w = \varepsilon^{1/\alpha}\}$  прямоугольника  $P_0$  в его сторону  $\{w = 0\}$  вдоль траекторий векторного поля, полученного после замены (3) (см. рис. выше). Координату  $z$  на стороне  $\{w = 0\}$  прямоугольника  $P_1$  обозначим  $\rho$ , координату  $z$  на стороне  $\{w = 0\}$  прямоугольника  $P_0$  обозначим  $\eta$ .

Пусть  $z(w, \rho)$  — решение уравнения (5), удовлетворяющее начальному условию  $z(0, \rho) = \rho$ . Будем искать его в виде разложения в сходящийся степенной ряд по начальному условию

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(w) \rho^{k+1}, \quad (7)$$

где  $C_0(0) = 1$ ,  $C_k(0) = 0$  при  $k \geq 1$ .

Подставляя (7) в уравнение (6) и сравнивая коэффициенты в левой и правой частях при одинаковых степенях  $\rho$ , получим уравнения относительно  $C_k(w)$ :

$$C'_0(w) = C_0(w)\Phi_0(w),$$

$$C'_1(w) = C_1(w)\Phi_0(w) + \Phi_1(w)C_0^2(w),$$

$$C'_2(w) = C_2(w)\Phi_0(w) + \Phi_2(w)C_0^3(w) + 2C_1(w)\Phi_1(w)C_0(w),$$

...

$$C'_k(w) = C_k(w)\Phi_0(w) + R_k(w),$$

где  $R_k(w)$  выражается через  $C_0(w), \dots, C_{k-1}(w), \Phi_1(w), \dots, \Phi_k(w)$ .

Обозначим  $\tilde{R}_k(w) = R_k(w)C_0^{-1}(w)$ . Функции  $\tilde{R}_k(w)$  непрерывны при  $w \geq 0$ . Последовательно решая эти уравнения, получаем

$$C_0(w) = \exp \int_0^w \Phi_0(\xi) d\xi,$$

$$C_1(w) = C_0(w) \int_0^w \Phi_1(\xi) C_0(\xi) d\xi = C_0(w) \int_0^w \tilde{R}_1(\xi) d\xi, \dots,$$

$$C_k(w) = C_0(w) \int_0^w \tilde{R}_k(\xi) d\xi.$$

Таким образом, отображение соответствия  $z = f(\rho)$  имеет разложение

$$z = a_0 \rho \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \rho^k \right),$$

где

$$a_0 = C_0 \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) = \exp \int_0^{1/\varepsilon} \Phi_0(\xi) d\xi, \quad a_k = \int_0^{1/\varepsilon} \tilde{R}_k(\xi) d\xi.$$

Аналогично отображение соответствия  $\eta = g(z)$  имеет разложение

$$g(z) = b_0 z \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \right), \quad (8)$$

где

$$b_0 = \exp \int_{\varepsilon^{1/\alpha}}^0 \Psi_0(\xi) d\xi, \quad b_k = \int_{\varepsilon^{1/\alpha}}^0 \tilde{Q}_k(\xi) d\xi,$$

где функция  $\tilde{Q}_k(\xi)$  определяется аналогично  $\tilde{R}_k(\xi)$ , только вместо  $\Phi_k$  во всех выражениях нужно поставить  $\Psi_k$ ,  $\tilde{Q}_k(\xi)$  непрерывна при  $\xi \geq 0$ .

Согласно формулам замен переменных (3) и (4) координата  $z$  на стороне  $w = \varepsilon^{1/\alpha}$  прямоугольника  $P_0$  и координата  $z$  на стороне  $w = 1/\varepsilon$  прямоугольника  $P_1$  различаются множителем  $\varepsilon^{-1/m}$ . Рассматривая на стороне  $w = 1/\varepsilon$  прямоугольника  $P_1$  координату  $\varepsilon^{-1/m}z$ , отображение  $f$  можно переписать так:

$$f(\rho) = \tilde{a}_0 \rho \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \rho^k \right), \quad \tilde{a}_0 = \varepsilon^{-1/m} a_0. \quad (9)$$

Рассмотрим отображение соответствия  $\Delta$ , отображающее положительную полукрестность нуля на оси  $x$  в положительную полукрестность нуля на оси  $y$  вдоль траекторий исходного векторного поля в направлении против часовой стрелки. На оси  $x$  рассмотрим параметр  $\rho = x^{1/n}$ , а на оси  $y$  параметр  $\eta = y^{1/m}$ . Тогда  $\Delta$  является композицией  $\eta = \Delta(\rho) = g \circ f(\rho)$ .

Подставляя (9) в (8), получим

$$\Delta(\rho) = c_0 \rho \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \rho^k \right), \quad (10)$$

где

$$c_0 = \tilde{a}_0 b_0, \quad c_1 = a_1 + b_1 \tilde{a}_0, \quad c_k = a_k + P_k(\tilde{a}_0, a_1, \dots, a_{k-1}, b_1, \dots, b_k), \quad (11)$$

$P_k$  — многочлен от указанных переменных, каждый моном которого содержит множителем хотя бы одно из  $b_i, i \in \{1, \dots, k\}$ .

Поскольку отображение соответствия  $\Delta$  не зависит от  $\varepsilon$ , то коэффициенты разложения (10) также не зависят от  $\varepsilon$ , поэтому равны пределам самих себя при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Найдём эти пределы.

Поскольку  $b_i$  выражаются через интегралы от функций, непрерывных в нуле, то при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $b_0 \rightarrow 1, b_k \rightarrow 0, k \geq 1$ .

Отсюда  $c_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1/m} a_0$ . Поскольку  $\Phi_0(\xi) = -\frac{1}{m\xi} + \Phi(\xi)$ , где  $\Phi(\xi) = O(1/\xi^{n+1})$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ , то

$$\begin{aligned} c_0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1/m} \exp \int_0^{1/\varepsilon} \Phi_0(\xi) d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1/m} \exp \int_0^{1/\varepsilon} \left( -\frac{1}{m\xi} + \Phi(\xi) \right) d\xi = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp \left( \int_0^1 \Phi_0(\xi) d\xi + \int_1^{1/\varepsilon} \Phi(\xi) d\xi \right) < \infty. \end{aligned}$$

Поскольку существует предел

$$\ln c_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1/\varepsilon} \Phi_0(\xi) d\xi - \frac{1}{m} \ln \varepsilon,$$

то  $\ln c_0$  совпадает с интегралом Адамара от функции  $\Phi_0(\xi)$  (см. п. 5 и [13]):

$$\ln c_0 = \left| \int_0^{\infty} \Phi_0(\xi) d\xi \right|,$$

следовательно,

$$c_0 = \exp \left| \int_0^{\infty} \Phi_0(\xi) d\xi \right|. \quad (12)$$

Далее из равенств (11) и предельных соотношений для  $b_k$  получаем, что

$$c_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_k = \int_0^{\infty} \tilde{R}_k(\xi) d\xi, \quad k \geq 1. \quad (13)$$

Для построения разложения в ряд преобразования монодромии сделаем следующую процедуру. Пусть  $S^x, S^y$  — отражения плоскости  $(x, y)$  относительно осей  $x$  и  $y$  соответственно,  $S^{xy} = S^x \circ S^y$ . Образы векторного поля  $V$  при отражениях  $S^x, S^y, S^{xy}$  обозначим  $V^x, V^y, V^{xy}$  соответственно. Рассмотрим в первом квадранте

эти четыре векторных поля и применим к каждому из них описанный выше процесс раздутия особенности. Отображения, аналогичные  $\Delta$  для случая отражённых векторных полей  $V^x, V^y, V^{xy}$ , будем обозначать  $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_{xy}$  соответственно.

Рассмотрим преобразование монодромии  $\Delta^*$ , отображающее положительную полуокрестность нуля на оси  $x$  в себя вдоль траекторий исходного векторного поля в направлении против часовой стрелки. На оси  $x$  рассмотрим параметр  $\rho = x^{1/n}$ . Тогда  $\Delta^*$  является следующей композицией:

$$\Delta^*(\rho) = (\Delta^y)^{-1} \circ \Delta^{xy} \circ (\Delta^x)^{-1} \circ \Delta(\rho). \quad (14)$$

Вычисляя разложение отображений соответствия  $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_{xy}$  по формулам (10), (12), (13) и составляя суперпозицию (14), получим разложение в ряд преобразования монодромии.

#### 4. Случай двух рёбер

Пусть векторное поле  $V$  с монодромной особой точкой  $(0, 0)$  имеет диаграмму Ньютона  $\Gamma$ , состоящую из двух невырожденных рёбер  $\ell$  и  $\tilde{\ell}$  с показателями  $\alpha = m/n$  и  $\tilde{\alpha} = \tilde{m}/\tilde{n}$  ( $\tilde{\alpha} > \alpha$ ;  $m/n$  и  $\tilde{m}/\tilde{n}$  — несократимые дроби) и имеющую по одной вершине на каждой координатной оси, пусть  $(a, b)$  — векторный коэффициент вершины  $c$ , соединяющей ребра  $\ell$  и  $\tilde{\ell}$ , и пусть

$$\lambda = \frac{nb - ma}{\tilde{n}b - \tilde{m}a} < 1.$$

Ребру  $\ell$  поставим в соответствие набор функций  $\Phi_k, \Psi_k$ , которые определены в п. 2. Аналогичные функции для ребра  $\tilde{\ell}$  будем обозначать  $\tilde{\Phi}_k, \tilde{\Psi}_k$ .

Составим формальный ряд

$$g(\rho) = b_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \rho^k \right), \quad (15)$$

где

$$b_0 = \exp \left[ \int_0^{\infty} \Psi_0(\xi) d\xi \right], \quad b_k = \left[ \int_0^{\infty} \tilde{Q}_k(\xi) d\xi \right], \quad k \geq 1,$$

$\tilde{Q}_k(\xi)$  определяются в п. 3, и поставим его в соответствие ребру  $\ell$ .

Аналогично составим формальный ряд

$$f(\rho) = a_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \rho^k \right), \quad (16)$$

с коэффициентами

$$a_0 = \exp \left[ \int_0^{\infty} \tilde{\Phi}_0(\xi) d\xi \right], \quad a_k = \left[ \int_0^{\infty} \tilde{R}_k(\xi) d\xi \right], \quad k \geq 1,$$

и поставим его в соответствие ребру  $\tilde{\ell}$ ,  $\tilde{R}_k(\xi)$  определяются как в п. 3 для ребра  $\tilde{\ell}$ .

Вершине  $c$  поставим в соответствие отображение  $\varphi(\rho) = \rho^\lambda$ . Теперь рассмотрим два первых члена формального разложения композиции  $f^{-1} \circ \varphi \circ g$ :

$$f^{-1} \circ \varphi \circ g(\rho) = a_0^{-1} b_0^\lambda \rho^\lambda (1 - a_1 a_0^{-1} b_0^\lambda \rho^\lambda + o(\rho^\lambda)). \quad (17)$$

В [7] показано, что отображение соответствия  $\Delta$ , переводящее положительную полуокрестность нуля на оси  $y$  в ось  $x$ , имеет вид (на оси  $y$  берётся параметр  $\rho = y^{\frac{1}{m}}$ , на оси  $x$  — параметр  $x^{\frac{1}{n}}$ )

$$\Delta(\rho) = E_0\rho^\lambda(1 + E_1\rho^\lambda + o(\rho^\lambda)), \quad (18)$$

где  $E_0 = A_0B_0$ ,  $E_1 = A_0B_0I$ ,  $A_0 = \exp \left[ \int_{+\infty}^0 \tilde{\Phi}_0(\xi) d\xi \right]$ ,  $B_0 = \exp \lambda \left[ \int_0^{+\infty} \Psi_0(\xi) d\xi \right]$ ,

$$I = \left[ \int_{+\infty}^0 \frac{\tilde{\Phi}_1(w)}{w} \exp \int_0^w \frac{\tilde{\Phi}_0(\xi)}{\xi} d\xi dw \right].$$

Сравнивая (17) и (18), видим, что  $A_0 = a_0^{-1}$ ,  $B_0 = b_0^\lambda$ ,  $E_1 = A_0B_0I = -a_1a_0^{-1}b_0^\lambda$ , то есть эти разложения совпадают.

Таким образом, гипотеза в данном случае доказана для первых двух коэффициентов.

Теперь обратимся к случаю  $\lambda = 1$ , который был рассмотрен в [6]. Дополнительно предположим, что выполняется условие  $\tilde{m}n - \tilde{n}m = 1$ . Рёбрам  $\ell$  и  $\tilde{\ell}$  поставим в соответствие ряды (15) и (16) аналогично предыдущему случаю. Вершине  $c$  поставим в соответствие отображение  $\varphi(\rho) = \rho(1 + c^*\rho \ln \rho)$ , где константа  $c^*$  определена в [6]. В [6] доказано, что

$$\Delta(z) = E_0z^\lambda(1 + E_1\rho \ln \rho + o(\rho \ln \rho)), \quad (19)$$

где  $E_0 = A_0B_0$ ,  $E_1 = c^*B_0$ ;  $A_0$  и  $B_0$  определены, как выше.

Теперь рассмотрим два первых члена формального разложения композиции  $f^{-1} \circ \varphi \circ g$ :

$$f^{-1} \circ \varphi \circ g(\rho) = a_0^{-1}b_0\rho(1 + c^*b_0\rho \ln \rho + o(\rho \ln \rho)). \quad (20)$$

Очевидно, что разложения (19) и (20) совпадают. В данном случае гипотеза также доказана на уровне первых двух членов разложения.

## 5. Добавление: интеграл Адамара

В [13] дано определение конечной части расходящегося интеграла от функции со степенной особенностью в конечной точке вещественной прямой. Впоследствии такие величины получили название интегралов Адамара. Основываясь на идеях [13], дадим определение интеграла Адамара на бесконечном промежутке.

1. Пусть  $A(x)$  — вещественно-аналитическая на промежутке  $[a, +\infty)$  функция, имеющая в точке бесконечность устранимую особенность,  $a > 0$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $p \geq 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Тогда интеграл

$$\int_a^{+\infty} x^{p-\alpha} A(x) dx \quad (21)$$

является, вообще говоря, расходящимся.

**Определение.** Конечной частью интеграла (21), или интегралом Адамара от функции  $f(x) = x^{p-\alpha} A(x)$ , называется

$$\left[ \int_a^{+\infty} x^{p-\alpha} A(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \int_a^t x^{p-\alpha} A(x) dx + t^{p-\alpha+1} B(t) \right) \right], \quad (22)$$

где  $B(t)$  — любая функция, которая удовлетворяет условиям:

а) рассматриваемый предел существует;

б) функция  $B\left(\frac{1}{x}\right)$  имеет по крайней мере  $p+1$  производную при  $x=0$ .

**Предложение.** Значение интеграла Адамара (22) не зависит от выбора функции  $B(x)$ , удовлетворяющей условиям а) и б).

*Доказательство.* Пусть

$$A(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_p}{x^p} + \frac{\Psi_{p+1}(x)}{x^{p+1}}, \quad B(t) = b_0 + \frac{b_1}{t} + \dots + \frac{b_p}{t^p} + \frac{\Phi_{p+1}(t)}{t^{p+1}},$$

где  $\Psi_{p+1}(x)$  и  $\Phi_{p+1}(t)$  ограничены на бесконечности. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_a^t x^{p-\alpha} A(x) dx + t^{p-\alpha+1} B(t) = \\ &= \sum_{t=0}^p a_t \int_a^t x^{p-\alpha-t} dx + \int_a^t \frac{\Psi_{p+1}(x)}{x^{\alpha+1}} dx + \sum_{t=0}^p b_t t^{p-\alpha+1-t} + \frac{\Phi_{p+1}(t)}{t^\alpha} = \\ &= \sum_{t=0}^p \frac{a_t}{p-\alpha+1-t} t^{p-\alpha+1-t} - \sum_{t=0}^p \frac{a_t a^{p-\alpha+1-t}}{p-\alpha+1-t} + \int_a^t \frac{\Psi_{p+1}(x)}{x^{\alpha+1}} dx + \sum_{t=0}^p b_t t^{p-\alpha+1-t} + \frac{\Phi_{p+1}(t)}{t^\alpha} \end{aligned}$$

имеет конечный предел, если положить

$$b_k = -\frac{a_k}{p-\alpha+1-k}. \quad (23)$$

Этот предел равен

$$\int_a^{+\infty} \frac{\Psi_{p+1}(x)}{x^{\alpha+1}} dx - \sum_{k=0}^p \frac{a_k a^{p-\alpha+1-k}}{p-\alpha+1-k}$$

и очевидно не зависит от выбора функции  $B(x)$ , удовлетворяющей условию (23).  $\square$

2. Пусть  $A(x)$  — как в предыдущем пункте. Рассмотрим интеграл вида

$$\int_a^{+\infty} x^p A(x) dx \quad (24)$$

при  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $p \geq -1$ . Пусть

$$A(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{p+1}}{x^{p+1}} + \frac{\Psi_{p+2}(x)}{x^{p+2}}, \quad B(t) = b_0 + \frac{b_1}{t} + \dots + \frac{b_{p+1}}{t^{p+1}} + \frac{\Phi_{p+2}(t)}{t^{p+2}},$$

где  $\Psi_{p+2}(t)$ ,  $\Phi_{p+2}(t)$  ограничены на бесконечности,  $B_1(t) = b_1^0 + O\left(\frac{1}{t^\beta}\right)$ ,  $\beta > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \int_a^t x^p A(x) dx + t^{p+1} B(t) + B_1(t) \ln t = \\ &= \sum_{t=0}^{p+1} a_t \int_a^t \frac{dx}{x^{t-p}} + \int_a^t \frac{\Psi_{p+2}(x)}{x^2} dx + \sum_{t=0}^{p+1} \frac{b_t}{t^{t-p-1}} + \frac{\Phi_{p+2}(t)}{t} + \left( b_1^0 + O\left(\frac{1}{t^\beta}\right) \right) \ln t = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=0}^p \frac{a_t}{t-p-1} \frac{1}{t^{t-p-1}} - \sum_{t=0}^p \frac{a_t}{t-p-1} \frac{1}{a^{t-p-1}} + a_{p+1} \ln t - a_{p+1} \ln a + \\
&+ \int_a^t \frac{\Psi_{p+2}(x)}{x^2} dx + \sum_{t=0}^p \frac{b_t}{t^{t-p-1}} + b_{p+1} + \frac{\Phi_{p+2}(t)}{t} + \left( b_1^0 + O\left(\frac{1}{t^\beta}\right) \right) \ln t \longrightarrow A_0 + b_{p+1},
\end{aligned}$$

если выбрать  $b_k = -\frac{a_k}{k-p-1}$ ,  $k = 0, \dots, p$ ,  $b_1^0 = -a_{p+1}$ , причём, величина

$$A_0 = -\sum_{k=0}^p \frac{a_k}{k-p-1} \frac{1}{a^{k-p-1}} - a_{p+1} \ln a + \int_a^{+\infty} \frac{\Psi_{p+2}(x)}{x^2} dx$$

определяется только функцией  $A(x)$ .

Число  $b_{p+1}$  зависит от выбора ряда  $B(x)$ . Предел будет определён однозначно, если  $b_{p+1} = 0$  или, что то же самое, разложение  $x^{p+1}B(x)$  не содержит нулевой степени  $x$ .

Таким образом, можно дать следующее определение.

**Определение.** Конечной частью интеграла (24), или интегралом Адамара от функции  $f(x) = x^p A(x)$ ,  $p \geq -1$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ , называется

$$\left| \int_a^{+\infty} x^p A(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \int_a^t x^p A(x) dx + t^{p+1} B(t) + B_1(t) \ln t \right) \right|,$$

где  $B(t)$  и  $B_1(t)$  — любые функции, удовлетворяющие следующим условиям:

- а) рассматриваемый предел существует;
- б)  $B\left(\frac{1}{x}\right)$  имеет по крайней мере  $p+2$  производных в точке  $x=0$ ;
- в)  $B_1(t) = b_1^0 + O\left(\frac{1}{t^\beta}\right)$ ,  $\beta > 0$ ;
- г) разложение  $t^{p+1}B(t)$  не содержит нулевой степени  $t$ .

## Список литературы

1. **Арнольд, В. И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения–1 / В. И. Арнольд, Ю. С. Ильяшенко // Итоги науки и техники. Сер.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — 1985. — Т. 1. — С. 7–149.
2. **Ильяшенко, Ю. С.** Мемуар Дюлака «О предельных циклах» и смежные вопросы локальной теории дифференциальных уравнений / Ю. С. Ильяшенко // Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 40, № 6. — С. 41–78.
3. **Медведева, Н. Б.** Главный член преобразования монодромии монодромной особой точки линеен / Н. Б. Медведева // Сиб. мат. журн. — 1992. — Т. 33, № 2. — С. 116–124.
4. **Медведева, Н. Б.** Достаточное условие фокуса для монодромной особой точки / Н. Б. Медведева, Е. В. Мазаева // Тр. Моск. мат. об-ва. — 2002. — Т. 63. — С. 87–114.
5. **Березовская, Ф. С.** Асимптотика преобразования монодромии особой точки с фиксированной диаграммой Ньютона / Ф. С. Березовская, Н. Б. Медведева // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1991. — Вып. 15. — С. 156–177.
6. **Воронин, А. С.** Устойчивость монодромных особых точек с фиксированной диаграммой Ньютона / А. С. Воронин, Н. Б. Медведева // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер.: Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 3. — С. 34–49.
7. **Воронин, А. С.** Асимптотика преобразования монодромии в случае двух чётных рёбер диаграммы Ньютона / А. С. Воронин, Н. Б. Медведева // Вестн. Челяб. гос. ун-та. — 2011. — № 27 (242). — Сер.: Математика. Механика. Информатика. — Вып. 14. — С. 12–26.

8. **Воронин, А. С.** Асимптотика преобразования монодромии в некоторых классах монодромных ростков / А. С. Воронин, Н. Б. Медведева // Изв. РАН. Сер. мат. — 2013. — Т. 77, вып. 2. — С. 35–52.
9. **Брюно, А. Д.** Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений / А. Д. Брюно. — М. : Наука, 1979. — 254 с.
10. **Варин, В. П.** Отображения последования для некоторых полиномиальных систем дифференциальных уравнений / В. П. Варин // Мат. сб. — 2004. — Т. 195, № 7. — С. 3–20.
11. **Медведева, Н. Б.** Об аналитической разрешимости проблемы различения центра и фокуса / Н. Б. Медведева // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2006. — Т. 254. — С. 11–100.
12. **Медведева, Н. Б.** Об аналитической неразрешимости проблемы устойчивости на плоскости / Н. Б. Медведева // Успехи мат. наук. — 2013. — Т. 68, вып. 5 (413). — С. 147–176.
13. **Адамар, Ж.** Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. — М. : Наука, 1978. — 352 с.

Поступила в редакцию 01.09.2014

После переработки 01.02.2016

#### Сведения об авторе

**Медведева Наталия Борисовна**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной математики, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; профессор кафедры дифференциальных и стохастических уравнений, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: medv@csu.ru.

---

*Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 1. P. 59–72.*

## ASYMPTOTIC EXPANSION OF A MONODROMY MAP

**N. B. Medvedeva**

*Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*

*South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia*

*medv@csu.ru*

In the paper we compute the asymptotic series of the monodromy transformation of a monodromic singular point of a vector field in the plane when its Newton diagram consists of a single non-degenerate edge. The method of a resolution of singularities via Newton diagram is applied. A hypothesis about the existence of an algorithm for calculating the coefficients of correspondence maps and monodromy transformation containing no operation limit is put forward. This conjecture has been proved in the case of a single non-degenerate edge of the Newton diagram, as well as for the first two coefficients in the asymptotic expansion of the correspondence map in the first quadrant of the plane (as well as the monodromy transformation) in the case where the Newton diagram of the vector field consists of two non-degenerate edges.

**Keywords:** *monodromic singular point, resolution of singularities, focus, center, monodromy transformation, Newton diagram.*

## References

1. **Arnol'd V.I., Il'yashenko Yu.S.** Obyknovennye differentsial'nye uravneniya–1. [Ordinary differential equations–1]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennyye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniya*. [Results of science and technology. Contemporary problems of mathematics. Fundamental directions], 1985, vol. 1, pp. 7–149. (In Russ.).
2. **Il'yashenko Yu.S.** Dulac's memoir «On limit cycles» and related problems of the local theory of differential equations. *Russian Mathematical Surveys*, 1985, vol. 40, no. 6, pp. 1–50.
3. **Medvedeva N.B.** Principal term of the monodromy transformation of a monodromic singular point is linear. *Siberian Mathematical Journal*, 1992, vol. 33, no. 2, pp. 280–288.
4. **Medvedeva N.B., Mazaeva E.V.** Dostatochnoye usloviye fokusa dlya monodromnoy osoboy tochki [Focus sufficient condition for a monodromic singular point]. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva* [Transactions of the Moscow Mathematical Society], 2002, vol. 63, pp. 87–114. (In Russ.).
5. **Berezovskaya F.S., Medvedeva N.B.** Asimptotika preobrazovaniya monodromii osoboy tochki s fiksirovannoy diagrammoy N'yutona [Monodromy transformation asymptotics of a singular point with a fixed Newton diagram]. *Trudy seminar imeni I.G. Petrovskogo* [Transactions of Petrovskiy workshop], 1991, iss. 15, pp. 156–177. (In Russ.).
6. **Voronin A.S., Medvedeva N.B.** Ustoychivost' monodromnykh osobykh toчек s fiksirovannoy diagrammoy N'yutona [Stability of monodromic singular points with a fixed Newton diagram]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternyye nauki* [Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Sciences], 2009, iss. 3, pp. 34–49. (In Russ.).
7. **Voronin A.S., Medvedeva N.B.** Asimptotika preobrazovaniya monodromii v sluchaye dvukh chytotnykh ryober diagrammy N'yutona [Asymptotics of the monodromy transformation in the case of two even edges in the Newton diagram]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Chelyabinsk State University. Mathematics. Mechanics. Informatics], 2011, no. 27 (242), pp. 12–26. (In Russ.).
8. **Voronin A.S., Medvedeva N.B.** Asymptotics of the monodromy transformation in certain classes of monodromy germs]. *Izvestiya: Mathematics*, 2013, vol. 77, iss. 2, pp. 253–270.
9. **Bryuno A.D.** *Lokal'nyy metod nelineynogo analiza differentsial'nykh uravneniy* [Local method of nonlinear analysis for differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1979. (In Russ.).
10. **Varin V.P.** Poincaré map for some polynomial systems of differential equations. *Sbornik: Mathematics*, 2004, vol. 195, no. 7, pp. 917–934.
11. **Medvedeva N.B.** On the analytic solvability of the problem of distinguishing between center and focus. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2006, vol. 254, no. 1, pp. 7–93.
12. **Medvedeva N.B.** On analytic insolubility of the stability problem on the plane. *Russian Mathematical Surveys*, 2013, vol. 68, no. 5, pp. 923–950.
13. **Hadamard J.** *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Mineola, New York, Dover Publications, 2003.

*Article received 01.09.2014*

*Corrections received 01.02.2016*