A. M. Letov, Analytical design of controllers. V. Further development of the problem,
Avtomat. i Telemekh., 1962, Volume 23, Issue 11, 1405–1413

Том XXIII «АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА» № 11

1962

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРОВ. V

ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ ПРОБЛЕМЫ

А. М. ЛЕТОВ

(*Москва*)

Излагается математическая постановка задачи аналитического конструирования и дается некоторое дальнейшее ее развитие.

1. Программируемые движения

В [1] подробно изложена постановка задачи аналитического конструирования регуляторов. Целесообразно кратко повторить это изложение.

В настоящее время резко обозначились два класса задач оптимального управления. К первому из них относятся задачи программирования оптимальных движений. Математически они формулируются так. Пусть даны дифференциальные уравнения объекта управления

$$\dot{x} = X(x, t, \mu), \tag{1.1}$$

определенные в некоторой области $N(x, \mu)$ пространства вектора состояния $x(x_1, \ldots, x_n)$ и скалярной функции μ — функции управления.

В области $N(x, \mu)$ и $0 \leqslant t \leqslant T$ определен вектор обобщенной силы $X(X_1, \ldots, X_m)$, заданы начальные (i) и конечные (f) условия, заданы оптимизирующий функционал

$$\Phi(\mu) = \overline{\Phi}(x, \mu, t) \tag{1.2}$$

и ограничения на фазовые координаты

$$R_k(x_1, \ldots, x_n, \mu, t) \leqslant 0 \quad (k = 1, \ldots, m; m < n). \tag{1.3}$$

В задачах программирования требуется так выбрать функцию управления μ, чтобы удовлетворялись уравнения (1.1), неравенства (1.3), граничные условия i, f и функционал (1.2) достигал экстремума.

Предполагаем, что функции X, Φ, R_k таковы, что допускают существование в N такого решения, которое является единственным, может быть найдено в форме

$$x = x^*[t, (i, f)], \quad \mu = \mu^*[t, (i, f)], \quad t \in [0, T] \tag{1.4}$$

и что он принадлежит к некоторому классу функций. Обычно это бывает класс функции C_1 для x и класс C_1 или C для функции μ.

Решение (1.4) и описывает программу оптимального достижения конечного состояния f при начальном состоянии i. По терминологии А. М. Ляпунова, (1.4) называется невозмущенным движением. Теперь, когда эта программа известна, возникает вопрос о ее осуществимости при автоматическом управлении.

Последнее необходимо в силу того, что начальное состояние i может быть реализовано только с какой-то погрешностью, которая со временем может возрастать.

Положим

$$x_k = x^*_k + \eta_k, \qquad \mu = \mu^* + \xi. \tag{1.5}$$

По терминологии А. М. Ляпунова, координаты η_k, ξ будут описывать возмущенное движение системы. Уравнения движения имеют вид

$$\overset{0}{\eta}_k = \sum_{\alpha} b_{k\alpha}\eta_\alpha + m_k\xi \qquad (k=1,\ldots,n), \tag{1.6}$$

где обозначено

$$b_{k\alpha} = \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_\alpha}\right)^*, \qquad m_k = \left(\frac{\partial X_k}{\partial \mu}\right)^* \qquad (k,\ \alpha = 1,\ \ldots,\ n). \tag{1.7}$$

Знак * означает, что $b_{k\alpha}$, m_k вычисляются для движения (1.4) и они будут, вообще говоря, известными функциями времени, определенными при $t \in [0,\ T]$.

Уравнения (1.6) линейны по отношению к возмущениям η_k, ξ; они определены в области $N(x, \mu)$, и мы допускаем, что они имеют смысл для задачи аналитического конструирования, которую сформулируем позднее.

Возмущения будут стеснены также неравенствами

$$R_k^* + \sum \left(\frac{\partial R_k}{\partial x_j}\right)^* \eta_j + \left(\frac{\partial R_k}{\partial \mu}\right)^* + \xi + \ldots \leqslant 0 \qquad (k=1,\ldots,m). \tag{1.8}$$

2. Постановка задачи аналитического конструирования оптимальных регуляторов

Желая построить регулятор для реализации программы (1.4), будем стремиться к тому, чтобы эта программа была реализована наилучшим образом. Смысл этой оптимальности должен быть точно математически выражен некоторым функционалом, оценивающим меру близости траектории возмущенного движения к движению (1.4).

В общем случае такую меру можно выразить функционалом

$$J_\xi = \alpha \int_0^T W(\eta_1, \ldots, \eta_n, \xi, \dot{\xi}, t)\,dt + \beta F(\eta_1(T), \ldots, \eta_n(T), T).$$

Здесь W, F — положительные функции, α, β — параметры.

При $\beta = 0$ функционал J_ξ описывает меру близости траектории возмущенного движения к программной (1.4); при $\alpha = 0$ функционал описывает меру близости только конечного состояния системы к условиям f (terminal control problems [3, 4]).

Сейчас невозможно дать строгие объяснения по поводу выбора функционала J_ξ.

Но, если такой выбор сделан, на этот функционал следует смотреть как на постулат, определяющий смысл теории оптимального управления, подобно тому как выбор соответствующего постулата определяет смысл и содержание той или иной геометрии [2].

В настоящей статье будем изучать функционал

$$J_\xi = \int_0^T \chi(t)\,W_2\,dt, \tag{2.1}$$

где W_2 — положительная квадратичная форма:

$$W_2 = \sum a_k\eta_k^2 + c\xi^2 \tag{2.2}$$

с заданными неотрицательными весовыми коэффициентами a_k и $c > 0$. Возрастающая функция $\chi(t)$ также задана. Ее характеристичное число

$(-\delta) < 0$ [5]. Ожидается, что чем больше число $\delta > 0$, тем больше точность реализации программного движения (1.4). Выбор этой меры ограничивается требованием сходимости интеграла (2.1). Относительно функций $b_{k\alpha}$, m_k предполагаем, что они непрерывны и ограничены при любом $t \in [0, T]$.

Среди неравенств (1.3) рассмотрим лишь одно $|\mu| \leqslant \bar{\mu}$, где $\bar{\mu}$ — заданное число. Тогда вместо (1.8) будем иметь

$$|\mu^* + \xi| \leqslant \bar{\mu}. \tag{2.3}$$

Движение ξ будет, таким образом, представлять собой дополнительное к программному μ^* движение регулирующего органа, которое необходимо ему задать для погашения возмущений η_k.

Пусть $\eta_{k0} = \eta_k(0)$ — любые числа, принадлежащие N; выберем граничные условия:

при $t = 0$

$$\sum \eta_{k0}^2 \leqslant R^2,$$

при $t = T$ (2.4)

$$\sum \eta_k^2(T) \leqslant r^2,$$

в которых R^2, r^2 — заданные числа.

Эти условия являются естественными для всякого вида переходного процесса; при $T = \infty$, $\eta(\infty) = 0$, ибо $r = 0$.

Требуется найти ограниченную, непрерывную в N функцию

$$\xi = \xi(x, t) \tag{2.5}$$

определяющую закон регулирования, такую, что регулятор, будучи построен по закону (2.5) и присоединен к объекту (1.6), гарантировал бы минимум интеграла (2.1) при граничных условиях (2.4) и при соблюдении ограничения (2.3).

Если регулятор (2.5) будет найден, то система будет состоять из следующих элементов:

1) объекта управления (1.1),
2) программирующего элемента, выдающего программу (1.4),
3) регулятора (2.5).

Программирующий элемент и регулятор (2.5) составят систему автоматического управления.

Такая система управления гарантирует приближенное, автоматическое осуществление программного движения (1.4) и сохранение его экстремальных свойств (1.2), причем точность приближения тем выше, чем меньше J_ξ.

3. Редукция задачи

Формулированная выше неклассическая вариационная задача об аналитическом конструировании может быть упрощена согласно общей идее Ф. А. Валентайна [6] введения новых функций.

Обозначим

$$\xi_1(t) = -\bar{\mu} - \mu^*, \qquad \xi_2(t) = \bar{\mu} - \mu^*, \tag{3.1}$$

и неравенство (2.3) может быть записано так:

$$(\xi_2 - \xi)(\xi - \xi_1) \geqslant 0.$$

Введем новую функцию управления ζ, связанную с ξ следующим равенством. Определим функцию $\varphi(\zeta)$ так, что

$$\varphi(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \zeta \geqslant \xi_2, \\ (\xi_2 - \xi)(\xi - \xi_1) = \zeta^2 & \text{при } \xi_1 \leqslant \zeta \leqslant \xi_2, \\ 0 & \text{при } \zeta \leqslant \xi_1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Отсюда находим

$$\xi = \begin{cases} \xi_2 & \text{при} \quad \zeta \geqslant \xi_2, \\ -\mu^* \pm \sqrt{\mu^2 - \zeta^2} & \text{при} \quad \xi_1 \leqslant \zeta \leqslant \xi_2, \\ \xi_1 & \text{при} \quad \zeta \leqslant \xi_1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Кроме того, редукция задачи касается также и выбора оптимизирующего функционала. Именно, будем рассматривать

$$J_\xi = \int_0^\infty \chi(t)\, W_2(t)\, dt. \tag{3.4}$$

Такая редукция представляет интерес хотя бы по одному тому, что в случае постоянных $b_{k\alpha}$, m_k величина $T = \infty$, число $r^2 = 0$, так что

$$\eta_k(\infty) = 0 \tag{3.5}$$

и настоящая задача обобщает ранее рассмотренную [6, 7] тем, что учитывает степень δ возрастания функции $\chi(t)$.

Если же $b_{k\alpha}$, m_k — суть функции времени, определенные на интервале $[0, T]$, то мы также будем иметь дело с функционалом вида (3.4).

Введем новое независимое переменное

$$\tau = \frac{T}{T - t} - 1. \tag{3.6}$$

Получим

$$J_\xi = \int_0^\infty \chi^*(\tau)\, W_2\, d\tau, \tag{3.7}$$

где обозначено

$$\chi^*(\tau) = \frac{T}{(1+\tau)^2}\, \chi\left(\frac{T\tau}{1+\tau}\right). \tag{3.8}$$

Дифференциальные уравнения задачи будут иметь вид

$$\frac{d\eta_k}{d\tau} = \frac{T}{(1+\tau)^2}\left(\sum_\alpha b_{k\alpha}\eta_\alpha + m_k\xi\right). \tag{3.9}$$

Итак, окончательно задача формулируется следующим образом: в классе гладких $\eta_1, \ldots, \eta_n$ и непрерывных ζ функций требуется найти $\zeta = \zeta(t, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ такую, что

1) удовлетворяются уравнения (1.6) или (3.9),
2) удовлетворяются граничные условия (2.4),
3) функционал (3.4) или (3.7) достигает минимума.

Ограничений на ζ нет.

4. Вывод основных уравнений

Будем пользоваться методом динамического программирования Беллмана.

Допустим, что вместо функционала (3.4) имеем другой

$$J_\zeta = \int_a^\infty \chi W_2 dt, \tag{4.1}$$

где a — положительный параметр [8].

Допустим, что для такого функционала мы нашли решение вида $\zeta(t, \eta_1, \ldots, \eta_n)$. Тогда минимумом интеграла (4.1) по ζ будет некоторая функция $\psi(c_1, \ldots, c_n, a)$, т. е.

$$\psi = \min_{\zeta} \int_a^{\infty} \chi W_2 \, dt, \tag{4.2}$$

где обозначено $c_k = \eta_k(a)$.

Пусть $S > a$. Имеем

$$\psi = \min_{\zeta} \left[\int_a^{a+S} \chi W_2 dt + \psi \left[\eta_1(a+S), \ldots, \eta_n(a+S), a+S \right] \right].$$

Но, если возможно, имеют место разложения:

$$\eta_k(a+S) = c_k + (\dot{\eta}_k)_a S + \ldots,$$

$$\psi[\eta_1(a+S), \ldots, \eta_n(a+S), a+S] = \psi(c_1, \ldots, c_n, a) +$$

$$+ \left\{ \sum_k \left(\sum_\alpha b_{k\alpha} c_\alpha + m_k \varphi(\zeta) \right) \frac{\partial \psi}{\partial c_k} \right\} S + O(S).$$

Поэтому находим при достаточно малом S

$$\psi = \min_{\zeta} \Big[\chi(a) W_2(c_1, \ldots, c_n, \varphi(\zeta)) S + \psi +$$

$$+ \left\{ \sum_k \left(\sum_\alpha b_{k\alpha} c_\alpha + m_k \varphi(\zeta) \right) \frac{\partial \psi}{\partial c_k} \right\} S + \frac{\partial \psi}{\partial a} + O(S) \Big].$$

Или при $S \to 0$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial a} = \chi(a) W_2 + \sum_k \left(\sum_\alpha b_{k\alpha} c_\alpha + m_k \xi \right) \frac{\partial \psi}{\partial c_k},$$

$$0 = \left[\chi(a) \frac{\partial W_2}{\partial \xi} + \sum_k m_k \frac{\partial \psi}{\partial c_k} \right] \frac{\partial \xi}{\partial \zeta}.$$

Но, согласно принципу оптимальности [8], эти уравнения должны иметь место в любой момент времени. Следовательно:

$$\begin{gathered} -\frac{\partial \psi}{\partial t} = \chi(t) W_2 + \sum_k \left(\sum_\alpha b_{k\alpha} \eta_\alpha + m_k \xi \right) \frac{\partial \psi}{\partial \eta_k}, \\ 0 = \left[\chi(t) \frac{\partial W_2}{\partial \xi} + \sum_k m_k \frac{\partial \psi}{\partial \eta_k} \right] \frac{\partial \xi}{\partial \zeta}. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Из последнего уравнения находим три участка кривой: участки I, III — участки насыщения

$$\frac{\partial \xi}{\partial \zeta} = 0, \tag{4.4}$$

участок II — участок линейности функции

$$\xi = -\frac{1}{2c\chi(t)} \sum_k m_k \frac{\partial \psi}{\partial \eta_k}. \tag{4.5}$$

Теперь возможно наметить следующий ход решения задачи.

Первоначально рассмотрим участок II. Нам надлежит найти функцию ψ как решение нелинейного уравнения в частных производных

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} = \chi(t) \sum_k a_k \eta_k^2 + \sum_k \sum_\alpha b_{k\alpha} \eta_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial \eta_\alpha} - \frac{1}{4c\chi(t)} \left(\sum_k m_k \frac{\partial \psi}{\partial \eta_k} \right)^2. \tag{4.6}$$

Тогда уравнение ξ определится по формуле (4.5).

На участках I, III управление достигает насыщения непрерывным образом. Область его существования будет определяться как область непрерывного продолжения функции ψ из линейной зоны в зону насыщения I, III [9] *.

Итак, если функция ψ будет найдена, то решение задачи запишется следующей формулой:

$$\xi = \begin{cases} \xi_2 & \text{при } -\dfrac{1}{2c\chi(t)}\sum m_k \dfrac{\partial\psi}{\partial\eta_k} \geqslant \xi_2, \\ -\dfrac{1}{2c\chi(t)}\sum m_k \dfrac{\partial\psi}{\partial\eta_k} & \text{при } \xi_1 \leqslant -\dfrac{1}{2c\chi(t)}\sum m_k \dfrac{\partial\psi}{\partial\eta_k} \leqslant \xi_2, \\ \xi_1 & \text{при } -\dfrac{1}{2c\chi(t)}\sum m_k \dfrac{\partial\psi}{\partial\eta_k} \leqslant \xi_1. \end{cases} \tag{4.7}$$

5. Формализм решения задачи

Будем искать решение уравнения (4.6) в виде квадратичной формы

$$\psi = \sum_k \sum_j A_{kj}\eta_k\eta_j \quad (A_{kj} = A_{jk}), \tag{5.1}$$

где A_{kj} — неизвестные, вообще говоря, непрерывные и дифференцируемые функции времени.

Легко найти, что уравнению (4.6) можно удовлетворить формой (5.1), если ее коэффициенты A_{kj} выбрать как решения системы совместных дифференциальных уравнений типа Риккати**:

$$\dot{A}_{kj} + \chi(t)\, a_k\delta_{kj} + 2\sum_\alpha b_{\alpha k}A_{\alpha j} - \frac{1}{c\chi(t)}\Big(\sum_\alpha m_\alpha A_{\alpha j}\Big)\Big(\sum_\alpha m_\alpha A_{\alpha k}\Big) = 0$$

$$(k, j = 1, \ldots, n). \tag{5.2}$$

Уравнения (5.2) можно привести к более удобному виду

$$\dot{B}_{kj} + \frac{\dot\chi}{\chi}B_{kj} + 2\sum_\alpha b_{\alpha k}B_{\alpha j} - \frac{1}{c}\Big(\sum_\alpha m_\alpha B_{\alpha j}\Big)\Big(\sum_\alpha m_\alpha B_{\alpha k}\Big) + a_k\delta_{kj} = 0, \tag{5.3}$$

если ввести преобразование переменных

$$A_{kj} = \chi(t)\, B_{kj}. \tag{5.4}$$

Для решения задачи достаточно найти одно любое частное решение уравнений (5.3), при котором функция ψ (5.1) является определенно-положительной.

Отметим здесь простейшие частные случаи, когда это решение может быть найдено. Положим $b_{k\alpha}$, $m_k = \mathrm{const}$, $\chi(t) = \chi(0)\,e^{\delta t}$, где $\chi(0)$, δ — положительные числа. В качестве частного решения уравнений (5.3) можно взять решение системы квадратных уравнений

$$\delta B_{kj} + 2\sum_\alpha b_{\alpha k}B_{\alpha j} + a_k\delta_{kj} = \frac{1}{c}\Big(\sum_\alpha m_\alpha B_{\alpha j}\Big)\Big(\sum_\alpha m_\alpha B_{\alpha k}\Big). \tag{5.5}$$

При $\delta = 0$ уравнения (5.5) совпадают с теми, которые выведены для коэффициентов A_{kj} в [7].

Пусть B^*_{kj} — одно из таких решений (5.5). Тогда функция ψ для линейной зоны определится формулой:

$$\psi = \chi(t)\sum_k\sum_\alpha B^*_{k\alpha}\eta_k\eta_\alpha \tag{5.6}$$

* Возможность непрерывного продолжения ψ должна быть отдельно рассмотрена так, как это сделано в [9].

** См. также [10].

и управление примет вид

$$\xi = -\frac{1}{c}\sum_\alpha\Bigl(\sum_k m_k B^*_{k\alpha}\Bigr)\eta_\alpha = \sum_\alpha p_\alpha\eta_\alpha. \tag{5.7}$$

Оно действительно до того момента времени t и таких значений η_k, при которых значения ξ достигают границы ξ_1 или границы ξ_2.

Действительно, первый и третий участки определяются значениями $\zeta = 0$. Откуда находим следующую формулу:

$$\xi = \begin{cases} \xi_2 & \text{при } \sum p_\alpha\eta_\alpha \geqslant \xi_2, \\ \sum\limits_\alpha p_\alpha\eta_\alpha & \text{при } \xi_1 \leqslant \sum p_\alpha\eta_\alpha \leqslant \xi_2, \\ \xi_1 & \text{при } \sum p_\alpha\eta_\alpha \leqslant \xi_1. \end{cases} \tag{5.8}$$

Рассмотрим пример: $n = 1$, $b_{11} = b$, $m_1 = m$, $a_1 = c$, $A_{11} = A$, $B_{11}{=}B$. Уравнение Риккати для определения B принимает вид

$$\frac{dB}{dt} = \frac{m^2}{c}(B - B_1)(B - B_2), \tag{5.9}$$

где обозначено

$$B_1, B_2 = \frac{\delta + b \pm \sqrt{(b+\delta)^2 + \frac{m^2a}{c}}}{\frac{m^2}{c}}. \tag{5.10}$$

Нашим требованиям удовлетворяет решение

$$B = B_1 = \frac{\delta + b + \sqrt{(b+\delta)^2 + \frac{m^2a}{c}}}{\frac{m^2}{c}}, \tag{5.11}$$

$$k = \sqrt{(b+\delta)^2 + \frac{m^2a}{c}},$$

которое дает уравнение

$$\xi = \begin{cases} \xi_2 & \text{при } -\frac{b+\delta+k}{m}\eta \geqslant \xi_2, \\ -\frac{b+\delta+k}{m} & \text{при } \xi_1 \leqslant -\frac{b+\delta+k}{m}\eta \leqslant \xi_2, \\ \xi_1 & \text{при } -\frac{b+\delta+k}{m} \leqslant \xi_1. \end{cases} \tag{5.12}$$

Из формул (5.3) нетрудно увидеть, что при $\delta = 0$ и $\mu^* = 0$ решение (5.4) совпадает с тем, которое было получено для данного примера в [6, 7]. Последнее, очевидно, будет иметь место и в общем случае.

Уместно заметить, что никакое иное решение для B уравнения (5.9) нас не может удовлетворить. Действительно, общее решение уравнения Риккати имеет вид

$$B = \frac{B_2 - B_1 D e^{\frac{\Delta m^2}{c}t}}{1 - De^{\frac{\Delta m^2}{c}t}}, \quad \Delta = B_2 - B_1, \quad D = \frac{B_0 - B_2}{B_0 - B_1}.$$

При $t \to \infty$ имеем $B(t) \to B_2$, а решение B_2 дает неустойчивую систему.

Таким образом, в зоне линейности управления (5.12) движение объекта подчиняется уравнению

$$\dot{\eta} = -(\delta + k)\,\eta,$$

откуда усматривается смысл введения множителя $\chi(t)$ под знак интеграла (4.1).

Функция ψ, определяющая найденное решение, есть:

$$\psi = \chi(t)\,B\eta^2. \tag{5.13}$$

Чтобы убедиться в справедливости решения (5.8), мы должны убедиться в возможности непрерывного продолжения функции ψ в зону насыщения [9]. Для этой цели рассмотрим линейное уравнение в частных производных

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t} = \chi(t)\,[a\eta^2 + c\xi^2] + (b\eta + m\xi)\frac{d\psi}{d\eta} \quad (\xi = \xi_1 \text{ или } \xi = \xi_2). \tag{5.14}$$

Задача состоит в отыскании поверхности $\psi(\eta, t)$, определяемой уравнением (5.14), которое при

$$\eta = -\frac{m\xi}{b+\delta+k} \quad (\xi = \xi_1, \xi_2) \tag{5.15}$$

проходит через кривую (5.13).

В другом частном случае $b_{k\alpha}$, m_k — суть непрерывные функции $t \in [0, T]$. Как известно [11], с любой наперед заданной степенью точности эти функции можно аппроксимировать многочленами. При этом формальное решение уравнений (5.2) можно искать в виде степенных рядов по t точно так же, как это делается при решении линейных уравнений класса Фукс [12].

Разумеется, это решение следует подвергнуть исследованию на сходимость при всех $t \in [0, T]$, и оно должно удовлетворять критерию Сильвестра знакоопределенности и положительности функции ψ. Определение таких решений и их селекция по критерию Сильвестра могут быть достигнуты на электронных моделях.

Следует также самостоятельно изучить проблему существования решения данной задачи, аналогично тому как это сделано в [13].

6. Возможные обобщения задачи

Ряд возможных обобщений постановки задачи об аналитическом конструировании и полученные по ним результаты приведены в [1]. Мы изложим здесь еще одно такое обобщение, касающееся уравнений объекта

$$\dot{\eta}_k = \sum b_{k\alpha}\eta_\alpha + m_k\xi + f_k(t) \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{6.1}$$

От уравнений (1.6) они отличаются тем, что учитывают постоянно действующие возмущения. В отношении последних мы предполагаем, что это могут быть кусочно-непрерывные функции, ограниченные по модулю:

$$|f_k(t)| \leqslant \overline{f}_k, \quad t \in [0, T]. \tag{6.2}$$

Если $T = \infty$, то в дополнении (6.2) мы предполагаем, что существует такое достаточно большое $t = T^*$, что при $t > T^*$ функции $f_k(t)$ будут исчезать.

Дан функционал

$$J_\xi = \alpha \int_0^T W\,dt + \beta F\,[\eta_1(T), \ldots, \eta_n(T), T], \tag{6.3}$$

неравенство (2.3), граничные условия (2.4).

Задача 1. При заданных $f_k(t)$ требуется найти такую непрерывную и ограниченную в N функцию (2.5), при которой $J(\xi)$ имеет минимум.

Задача 2. Требуется найти такую непрерывную и ограниченную в N функцию (2.5), а также систему функций $f_k(t)$ таких, что J_ξ принимает минимальное значение по ξ и максимальное значение по $f_k(t)$.

Последняя задача есть задача об определении наилучшей стратегии в наихудшем случае «игры» с природой [3].

Математическая проблема. Даны форма (5.1) и дифференциальные уравнения

$$A_{kj} = f_{kj}(A_{11}, \ldots, A_{nn}, t) \qquad (k, j = 1, \ldots, n).$$

Определить область начальных значений $A_{kj}(0)$, а также необходимые и достаточные условия, гарантирующие существование решений A_{kj}, при которых форма (5.1) знакоопределенная, положительная.

Поступила в редакцию
24 апреля 1962 г.

Цитированная литература

1. Красовский Н. Н., Летов А. М. Функции Ляпунова и проблема оптимального регулирования. Труды 1-й Междувузовской конф. по механике и автоматике. Москва, 1962.
2. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Гостехиздат, 1935.
3. Bellman R. Adaptive Control Processes. Princ. Univ. Press, 1961.
4. Mishkin E., Braun L. Adaptive Control Systems. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1961.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1961.
6. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. I, II, III. Автоматика и телемеханика, т. XXI, № 4, 5, 6, 1960.
7. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. IV. Автоматика и телемеханика, т. XXII, № 4, 1961.
8. Беллман Р. Динамическое программирование. Изд-во иностр. лит., 1956.
9. Красовский Н. Н., Летов А. М. К теории аналитического конструирования регуляторов. Автоматика и телемеханика, т. XXIII, № 6, 1962.
10. Kalman R. E. Contributions to the Theory of Optimal Control. Symposium Internacional de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. La Universidad Nacional Autónoma de México y La Sociedad Matemática Mexicana, 1961.
11. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. Гостехиздат, 1954.
12. Гурса Э. Курс математического анализа, т. II, ч. II. Гостехиздат, 1933.
13. Кириллова Ф. М. К задаче об аналитическом конструировании регуляторов. Прикл. матем. и механ., т. 25, вып. 3, 1961.

ANALYTICAL DESIGN OF CONTROLLERS. V
FURTHER DEVELOPMENT OF THE PROBLEM

A. M. LETOV

The mathematical problem of the analytical design is considered. The further development of the problem is treated.