

УДК 92:51

НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ ЛУЗИН ¹⁾**(к девяностолетию со дня рождения)**

Николай Николаевич Лузин родился 9 декабря (27 ноября) 1883 г. в г. Томске.

Окончив частную школу, он был принят в Томскую губернскую гимназию. В старших классах гимназии Н. Н. Лузин много читал. Особенно увлекали его книги по чистой философии. Математику же до самых последних лет учебы Н. Н. Лузин недолюбливал. Недолюбливал потому, что царившая тогда система преподавания ее была построена на механической памяти: требовалось безукоризненное заучивание формулировок теорем и точное воспроизведение доказательств. Для Лузина это было мукой. Его занятия по математике в гимназии шли все хуже и хуже, так что отец был вынужден взять для него «репетитора». К счастью, им оказался весьма талантливый студент только что открывшегося тогда в г. Томске Политехнического института. Этот студент произвел на Н. Н. Лузина сильнейшее впечатление тем, что показал ему математику не как систему механического заучивания, а как систему рассуждений, направляемую живым воображением.

В 1901 г. по окончании гимназии Н. Н. Лузин поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета.²⁾ Выбор этот обусловлен желанием Николая Николаевича со временем стать инженером, для чего необходим был солидный математический фундамент. (Излагается по автобиографии Н. Н. Лузина.)

В 1906 г. Н. Н. Лузин окончил Московский университет. В 1910 г. сдал магистерские экзамены и, прочитав две пробные лекции, — одну по собственному выбору, вторую по назначению факультета, — получил звание приват-доцента Московского университета по кафедре чистой математики. В том же году по ходатайству университета был командирован в Гёттинген и Париж для совершенствования в математических науках. В Гёттингене Н. Н. Лузин

¹⁾ При окончательном редактировании статьи мною были учтены ценные советы и замечания, которые сделали по прочтении рукописи статьи П. С. Александров, Б. В. Алешин, И. Я. Верченко, Б. В. Гнеденко, В. К. Гольцман, Ф. А. Кабаков, Л. В. Келдыш, А. Ф. Лапко, В. С. Люкшин, Л. А. Люстерник, А.³⁾ А. Ляпунов, Д. Е. Меньшов, Н. М. Нагорный, П. С. Новиков, С. И. Новоселов, Е. Д. Соломенцев, Б. С. Сотсков, Л. Н. Сретенский, П. Л. Ульянов, В. С. Федоров.

Всем указанным выше лицам я выражаю глубокую благодарность.

написал и по настоянию профессора Э. Ландау опубликовал свою первую работу «Über eine Potenzreihe» (Об одном степенном ряде) в 1911 г., т. е. 28 лет.

Возвратившись в Москву в 1914 г. Николай Николаевич приступил к чтению основных и факультативных курсов лекций в Московском университете. Из слушателей его факультативных курсов быстро образовался кружок, объединенный интересом к проблемам теории функций, — основа будущей Московской математической школы. Одновременно с чтением лекций Николай Николаевич работал над диссертацией «Интеграл и тригонометрический ряд». Она была напечатана в Москве в 1915 г. [1] и представлена к защите на степень магистра чистой математики. Защита состоялась весной 1916 г., причем Николаю Николаевичу была присуждена степень доктора чистой математики [2]. Присвоение сразу ученой степени доктора не имело места в течение предшествовавших 60 лет.

В 1917 г. Советом факультета и Советом университета Николай Николаевич был избран профессором Московского университета по кафедре чистой математики, в 1927 г. — членом-корреспондентом Академии наук СССР, а в 1929 г. — действительным членом Академии наук СССР, сначала по кафедре философии [3], а затем по кафедре чистой математики. После избрания в действительные члены Николай Николаевич до самой смерти (28 февраля 1950 г.) работал в институтах АН СССР [4] — [7].

Основная научная деятельность Н. Н. Лузина протекала в области теории функций. После работ Г. Кантора в развитии теории функций и множеств выделяются две ветви: метрическая и дескриптивная. Метрическая ветвь изучает те свойства множеств и функций, которые связаны с понятием меры множества и интеграла, тогда как в дескриптивной части ставится вопрос лишь о структурных свойствах этих объектов без привлечения понятия меры множества.

В метрической теории функций детально изучаются основные понятия математического анализа, такие, как предел, функция, производная, интеграл, ряд.

Первые научные работы Николая Николаевича относятся к метрической теории функций [8]. Они посвящены изучению в самом общем случае сходимости тригонометрических и степенных рядов и свойств функций, изображаемых ими. Им были построены примеры степенного ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю, и, однако, расходящегося всюду на границе круга сходимости, а также тригонометрического ряда, коэффициенты которого стремятся к нулю и который расходится почти всюду. Николай Николаевич получил очень важный результат о строении измеримых функций, ставший одной из основ, на которой строится вся метрическая теория функций. Он установил, что всякая измеримая функция становится непрерывной, если надлежащим образом изменить ее на множестве сколь угодно малой меры. Это свойство функций получило название *C*-свойства Лузина.

Кроме того, Н. Н. Лузин доказал, что для всякой конечной измеримой функции $f(x)$ существует такая непрерывная функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$ почти всюду, т. е. за исключением множества меры нуль.

Николай Николаевич показал, что эти результаты имеют непосредственное применение в одной из важнейших задач математического анализа — задаче Дирихле. В обобщенной постановке, принадлежащей Н. Н. Лузину, эта задача формулируется следующим образом: Для заданной на единичной окружности измеримой функции $f(\theta)$ требуется найти гармоническую внутри единичного круга функцию $u(r, \theta)$, такую, чтобы значения $u(r, \theta)$ при подходе к границе по всем некасательным путям стремились почти всюду на единичной окружности к значениям $f(\theta)$ ([1], стр. 85). В своей диссертации Николай Николаевич дал решение этой задачи для случая, когда заданная измеримая функция $f(\theta)$ конечна почти всюду. Легко видеть, что условие измеримости $f(\theta)$ необходимо в цитированной постановке, а Николай Николаевич сразу же высказал предположение, что необходимо и условие конечности почти всюду. Несколько позже, в 1925 г. Н. Н. Лузиным, совместно с И. И. Приваловым, справедливость этого предположения была полностью доказана. Однако если ослабить условие подхода к границе по всем некасательным путям, ограничиваясь только подходом по радиусам, то, как было показано в той же работе 1925 г., условие конечности почти всюду перестает быть необходимым. Полностью проблема не решена и до настоящего времени.

Вообще, обобщенная задача Дирихле в постановке Н. Н. Лузина оказалась весьма плодотворной. Многочисленные исследователи изучали и изучают эту задачу для областей общего вида, для пространственных областей, при различных вариантах подхода к границе, вопросы единственности в этой задаче и другие проблемы. Эта работа тесно связана с изучением граничных свойств аналитических функций.

Николай Николаевич достиг существенных результатов и в исследовании абсолютной сходимости тригонометрических рядов. Он показал что: 1) если тригонометрический ряд сходится абсолютно на множестве положительной меры или на множестве второй категории, то он сходится абсолютно всюду; 2) если тригонометрический ряд сходится абсолютно в двух точках, расстояние между которыми несоизмеримо с π , то он сходится абсолютно на всюду плотном множестве π , кроме того, сходится почти всюду или расходится почти всюду.

Главные результаты Николая Николаевича по метрической теории функций содержатся в его диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд».

Роль и влияние диссертации Н. Н. Лузина на дальнейшее развитие теории функций невозможно переоценить. Наличие в ней фундаментальных результатов, глубоких методов исследований и принципиальных постановок проблем выдвинули ее в ряд сочинений, с которыми трудно сравнить какую-нибудь диссертацию или монографию того времени. В диссертации Н. Н. Лузина сформулированы задачи и проблемы, решению которых до сих пор посвящаются многочисленные исследования как в СССР, так и за рубежом. Отметим, например, что поставленная в диссертации Н. Н. Лузина проблема о сходимости почти всюду тригонометрического ряда Фурье от функции с интегрируемым квадратом не поддавалась решению 50 лет, несмотря на усилия крупнейших математиков. И лишь в 1965 г. шведский математик Л. Карлесон дал положительный ответ на эту проблему Н. Н. Лузина.

В настоящее время диссертация Н. Н. Лузина переиздана [1]. В комментариях к ней дается освещение дальнейшего развития изложенных в ней вопросов.

В диссертации особо подчеркнута историческая связь между теорией тригонометрических рядов и развитием понятий функции и интеграла. Основной смысл этой работы лучше всего охарактеризовать словами самого автора: «Имеют ли результаты теории функций существенное значение для других дисциплин и прежде всего для классического анализа? Нужно иметь в виду, что при современном состоянии знания метод классического анализа, метод употребления аналитических выражений лежит в основе почти всякой математической дисциплины, поэтому та теория, которая не соприкасается прямо или косвенно с аналитическими выражениями, неизбежно занимает изолированное положение среди других ветвей математики. Поэтому, если не хотят, чтобы теория функций действительного переменного была теорией, замкнутой в себе и не оказывающей влияния на другие математические теории, нужно поставить в связь аналитические выражения, — с одной стороны, определения и понятия теории функций, — с другой стороны» ([1], стр. 50).

Идеи, развитые Николаем Николаевичем в его диссертации, оказали огромное влияние на дальнейшее развитие метрической теории функций. Некоторые из этих идей были применены учениками Н. Н. Лузина в различных смежных областях математики, физики и техники. Например, Николаем Николаевичем доказана теорема, позволяющая по значениям $u(\theta)$ гармонической функции $u(x, y)$ на окружности единичного радиуса эффективно найти на этой окружности значения $v(\theta)$ сопряженной гармонической функции $v(x, y)$. Опираясь на эту теорему, А. И. Некрасову удалось доказать известную теорему о существовании гравитационных волн на поверхности несжимаемой жидкости.

Работы Н. Н. Лузина по теории функций комплексного переменного почти неотделимы от работ по метрической теории функций действительного переменного. Николай Николаевич пишет: «Моя задача, как лица, отдавшего много времени функциям действительного переменного, состояла в формулировании проблем комплексного переменного по типу проблем действительного переменного и разрешения их методами, выработанными в арсенале функций действительного переменного» [9].

Особое внимание Н. Н. Лузина привлекали граничные свойства аналитических функций. Здесь прежде всего надо отметить известную теорему Н. Н. Лузина и И. И. Привалова 1919 г. о том, что множество граничных точек линейной меры нуль есть инвариант при конформном преобразовании друг в друга двух областей со спрямляемыми границами. Такое предположение было высказано еще в 1916 г. В. В. Голубевым в его магистерской диссертации. В более общей постановке, выросшей из исследований В. В. Голубева, Н. Н. Лузина и И. И. Привалова, проблема количественной оценки изменения меры множеств граничных точек при конформном отображении областей со спрямляемыми границами привлекала и привлекает внимание многих выдающихся специалистов по теории функций комплексного переменного.

Классическими в теории аналитических функций являются исследования Н. Н. Лузина и И. И. Привалова граничных свойств единственности аналитических функций. Прежде всего было показано, что аналитическая (и даже мероморфная) функция вполне определяется своими граничными значениями по всем не касательным путям на множестве положительной меры. Иначе говоря, если мероморфная в единичном круге функция $f(z)$ имеет нулевые граничные значения по всем не касательным путям на множестве E положительной меры, то $f(z)$ тождественно равна нулю. Наоборот, Н. Н. Лузин построил пример отличной от тождественного нуля аналитической в единичном круге функции $f(z)$, которая при приближении по радиусам ко всем точкам некоторого множества E полной меры 2π принимает нулевые граничные значения; это множество E в примере Н. Н. Лузина было первой категории по Бэру. Оказалось, что понятие категории существенно в граничных свойствах единственности аналитических функций.

В известном смысле завершающей можно считать следующую знаменитую теорему единственности для радиальных граничных значений из работы Н. Н. Лузина и И. И. Привалова 1925 г.: Пусть E — множество второй категории на некоторой дуге σ единичной окружности, причем E есть приведенное множество (т. е. такое, что каждая его порция на σ имеет положительную меру); если функция $f(z)$, мероморфная внутри единичного круга (или хотя бы в некоторой области, расположенной внутри этого круга и примыкающей к дуге σ), имеет нулевые радиальные граничные значения всюду на E , то $f(z)$ тождественно равна нулю. Иначе говоря, мероморфная функция вполне определяется своими радиальными граничными значениями на приведенном множестве, если только это множество второй категории. Эти классические предложения лежат в основе современной теории граничных свойств аналитических функций.

Н. Н. Лузин обнаружил связь между граничными свойствами аналитических функций в единичном круге и метрикой римановых поверхностей, на которые они отображают круг, установив следующее предложение, известное под именем «локального принципа конечной площади»: Пусть D — любая область внутри единичного круга, примыкающая к некоторой дуге σ

единичной окружности, и $w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ — регулярная функция в единичном круге; в случае, когда площадь римановой поверхности, являющейся образом области D при отображении $w = f(z)$, конечна, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится

почти всюду на дуге σ . В связи с этим предложением Николай Николаевич сформулировал знаменитую «проблему Лузина».

По современной терминологии, точка P единичной окружности называется точкой Лузина функции $f(z)$, если $f(z)$ отображает каждый круг, изнутри касающийся единичной окружности в P , на область бесконечной площади на римановой поверхности функции $w = f(z)$. Гипотеза Н. Н. Лузина 1947 г. состоит в том, что существуют ограниченные аналитические функции в единичном круге такие, что каждая точка P единичной окружности является

для них точкой Лузина. Это предположение Николая Николаевича получило полное подтверждение в 1955 г., но исследования, связанные с этой характерной для него плодотворной постановкой вопроса, продолжаются и в настоящее время.

Перечисленное далеко не исчерпывает того, что сделал Николай Николаевич в метрической теории функций и теории аналитических функций.

Однако с 1917 г. основные интересы Николая Николаевича переключаются на дескриптивную теорию множеств.

В первом десятилетии XX века французские математики Борель, Бэр и Лебег установили большое значение для математического анализа класса множеств, названных борелевскими множествами или B -множествами. Эти множества получаются повторным применением к отрезкам операций счетного суммирования и счетного пересечения.

Все математические конструкции предыдущей эпохи были в основном ограничены рамками B -множеств. Лебегу удалось построить искусственный и очень сложный пример множества, не являющегося B -множеством, однако ценность таких построений для математики была совершенно не ясна. Примерно в то же время в теории множеств появился целый ряд иных, чрезвычайно своеобразных построений, основанных на аксиоме произвольного выбора Цермело, которые приводят к новым концепциям, имеющим принципиальное значение.

Принцип выбора (аксиома Цермело) состоит в следующем: дано некоторое бесконечное множество, состоящее из множеств (A, B, C, \dots) , не пустых и не имеющих попарно общих элементов; тогда существует такое множество, которое с каждым из данных множеств (A, B, C, \dots) имеет в точности по одному общему элементу. Говоря образно, от каждого из данных множеств (A, B, C, \dots) можно выбрать по одному «представителю».

Этот принцип вызвал среди математиков большие разногласия: одни считают его очевидным, другие же против него возражают и не считают установленными теоремы, доказательства которых на него опираются. Отсюда следует постановка вопроса о возможности доказательства той или иной теоремы без применения принципа выбора. В 1939 г. К. Гёделем было доказано, что принцип выбора не противоречит остальным аксиомам теории множеств. В 1963 г. П. Дж. Коэн установил независимость принципа выбора от этих аксиом.

Николай Николаевич так формулирует задачу дескриптивной теории множеств: «Целью теории множеств является вопрос чрезвычайной важности: можно или нет рассматривать линейную протяженность атомистическим образом как множество точек: вопрос этот, кстати, уже не нов и восходит к эллинам» ([11], стр. 22).

Проблема изучения эффективных множеств, т. е. множеств, которые могут быть построены без применения аксиомы Цермело, — основная в исследованиях Н. Н. Лузина и руководимой им школы в области дескриптивной теории множеств.

Н. Н. Лузиным были открыты, а затем им самим и его учениками подробно исследованы так называемые проективные множества, получаемые

из B -множеств, лежащих в пространствах многих измерений, последовательным применением операции проектирования и взятия дополнения.

Класс проективных множеств существенно шире класса B -множеств. В то же время обнаружилось, что многие фундаментальные вопросы, касающиеся свойств проективных множеств, не поддаются решению. К числу таких вопросов относятся, например, проблемы о мощности и измеримости проективных множеств.

Николай Николаевич пришел к заключению, что классических средств теории множеств принципиально недостаточно для того, чтобы преодолеть затруднения, возникшие при изучении проективных множеств, и в связи с этим выдвинул идею о необходимости коренного пересмотра основ теории множеств. Чтобы оценить всю важность этой идеи, нужно принять во внимание, что теория множеств является логическим основанием всей современной математики. В те времена еще не было средств для фактического подтверждения концепции Н. Н. Лузина. Однако воззрения Н. Н. Лузина оказались пророческими — в настоящее время они получали полное подтверждение. Теория B -множеств, A -множеств и проективных множеств собрана Н. Н. Лузиным в монографии [11]. Эта книга чрезвычайно богата фактами и новыми идеями. Она явилась также программой для последующих работ не только в дескриптивной теории множеств, но и одного из разделов математической логики [12].

Результатом работ в области дескриптивной теории множеств является, с одной стороны, развитие самой этой области, с другой, — распространение ее общих концепций на различные области математики. При аксиоматическом описании различных систем математических понятий постоянно привлекаются результаты из теории B - или A -множеств.

«В самое последнее время автор (Н. Н. Лузин. — *П. К.*), возвратившись к проективным множествам, стал искать аналогичных трудностей и неопределимости в проблемах теории чисел.

Пользуясь выработанным им в теории множеств точек методом отделения, он поставил для натурального ряда чисел проблемы аналогичной трудности» ([18], т. II, стр. 709—722). (Цитируется по неопубликованной аннотации научных трудов акад. Н. Н. Лузина.)

Родство понятий B - и A -множеств с понятием рекурсивных и рекурсивно-перечислимых множеств общеизвестно. В самое последнее время теоретико-множественные концепции стали широко проникать в ряд разделов теоретического естествознания и, в частности, в кибернетику.

Работая в области теории функций действительного переменного, Н. Н. Лузин заинтересовал ею многих начинающих математиков. Своим ученикам он прививал вкус к наиболее глубоким и принципиальным математическим вопросам и нацеливал их на трудные, но особенно перспективные направления. Под влиянием Николая Николаевича многие из его учеников достигли успехов в самой теории функций или в смежных областях.

«В начале 20-х годов нынешнего века большинство студентов математиков чувствовало себя учениками Н. Н. Лузина и высоко ставило научный авторитет Д. Ф. Егорова, поддерживавшийся его большим и широким пони-

манием разнообразнейших отделов математики» ([20], стр. 16). Таким образом, Н. Н. Лузин совместно со своим учителем Д. Ф. Егоровым были создателями Московской математической школы теории функций (см. [19]). Вот как пишут об этом П. С. Александров, Б. В. Гнеденко и В. В. Степанов: «В 1911 г. Д. Ф. Егоров доказал свою известную теорему о последовательностях измеримых функций. Непосредственно за этим Н. Н. Лузин опубликовал теорему о C -свойстве измеримых функций. Этими двумя результатами было положено начало московской школе в области метрической теории функций действительного переменного...» ([20], стр. 13).

Представители школы Н. Н. Лузина оказали большое влияние на развитие таких областей математики, как теория функций действительного и комплексного переменного, математическая логика, теория вероятностей, топология, функциональный анализ, дифференциальные уравнения и различные области прикладной математики.

С 1931 г. Н. Н. Лузин начинает разрабатывать ряд новых для себя теоретических и практических проблем. Укажем на теорию Рикье — Жане в дифференциальных уравнениях и ее применение к вопросам геометрии и к теории автоматического управления.

Приступая в 1945 г. к чтению курса «Уравнения с частными производными» в Отделении технических наук АН СССР, Н. Н. Лузин говорил: «Еще сравнительно недавно математик, говорящий о системах уравнений с частными производными любого числа неизвестных функций с любым числом независимых переменных, чувствовал себя не очень уверенно, так как законы, управляющие такими системами, казались столь сложными и запутанными, что существенно правильным представлялось заключение: здесь все возможно и никаких законов быть не может. Такое положение вещей создано в результате работ некоторых знающих и умелых математиков, подошедших к предмету не с той стороны, где лежала действительная сущность вопроса». (Цитируется по неопубликованной рукописи.) По мнению Николая Николаевича, решение этой проблемы возможно лишь при помощи локальной аналитической теории, основы которой были заложены Коши и С. В. Ковалевской, а дальнейшее развитие содержится в работах Рикье и Жане.

Глубокое изучение этой теории привело Н. Н. Лузина к ряду исследований: геометрическому — по изгибанию поверхностей на главном основании, и аналитическому — по теории систем дифференциальных уравнений, где он ее применяет к системам с одной независимой переменной.

Изгибание поверхности на главном основании есть такое непрерывное изгибание поверхности, при котором сохраняется сопряженность сети некоторых кривых на поверхности. В 1866 г. московский геометр К. Петерсон впервые исследовал такие изгибания поверхностей. В дальнейшем эти вопросы изучались многими русскими и зарубежными авторами. Достаточно указать на то, что по этому предмету имеется около 150 работ, а число авторов достигает 40. Еще в 1911 г. С. П. Фиников вывел дифференциальные уравнения, определяющие все главные основания на какой-либо данной поверхности, а С. С. Бюшгенс получил дифференциальные уравнения, определяющие поверхности, которые имеют данный линейный элемент и допускают изгиба-

ние на главном основании. Однако вопрос о разрешимости этих уравнений в общем случае оставался не выясненным. Исследовались многие различные частные случаи и не было найдено ни одного примера, когда бы уравнения Финикова и Бюшгенса были неразрешимы. Так было до 1938 г., когда Н. Н. Лузин путем тонкого анализа этих уравнений установил, что существование главного основания является довольно редким случаем. Именно Н. Н. Лузин доказал следующее ([18], т. III, стр. 7—97):

1) Существуют линейные элементы, не имеющие никакого главного основания, т. е. никакая поверхность с таким линейным элементом не допускает изгибания на главном основании. И таких линейных элементов «подавляющее большинство», именно два коэффициента E и F (или G и F) $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ можно брать совершенно произвольно, а третий коэффициент может быть тогда подобран с большой степенью произвола.

2) Поверхности, изометричные данной (имеющие данный линейный элемент) и допускающие изгибание на главном основании, образуют семейство не более чем с 13 параметрами, в то время как известно, что выбор любой поверхности, изометричной данной, определяется выбором двух произвольных функций одного аргумента.

«Все это, — говорит Н. Н. Лузин, — заставляет смотреть на свойство поверхности «обладать главным основанием» как на весьма частное свойство, имеющееся лишь в исключительных случаях... Но, с другой стороны, не следует недооценивать смысл этого феномена. Если бы главное основание составляло особенность какого-нибудь одного ранее известного классического семейства поверхностей, интерес феномена Петерсона был бы сведен на нет, так как главное основание было бы просто свойством этого семейства поверхностей. И в таком случае это обстоятельство, без сомнения, было бы давно усмотрено. Но на самом деле этого нет, и феномен Петерсона дает нам какую-то, еще мало понятную, «косую» классификацию поверхностей, при которой наличие главного основания оказывается затрагивающим многие классические семейства поверхностей, без того, чтобы содержать их целиком. Надо учесть еще, что погоня за общностью осуществляется ценой утраты глубины и открытия неожиданных, хотя и частных, но глубоких соотношений...».

Очевидно, что результат Н. Н. Лузина является основным для обширной теории изгибаний на главном основании, так как он, наконец, после семидесятилетней ее истории определил ее границы.

Разрешив коренные вопросы теории изгибания на главном основании, Н. Н. Лузин обращается к рассмотрению двух задач.

1. Общая проблема. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы данный линейный элемент обладал поверхностями с главным основанием.

2. Ограниченная проблема. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы данная поверхность имела главное основание.

В опубликованных работах уравнения совместности не были получены Н. Н. Лузиным в явном виде и целью его последней работы [13], опубликованной посмертно, было составление этих уравнений в законченной форме для ограниченной проблемы [14].!

Несмотря на то, что с момента опубликования работы [13] прошло более 20 лет, уравнения совместности не найдены и ждут своего разрешения.

Работы Н. Н. Лузина по дифференциальным уравнениям связаны с некоторыми вопросами теории автоматического управления. При изучении этих вопросов он прежде всего излагает при помощи теории матриц свойства систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь x_j — неизвестные функции, b_i — данные функции от t и a_{ij} — квадратичные операторы с постоянными коэффициентами вида

$$a_{ij} = L_{ij}D^2 + M_{ij}D + N_{ij} \quad \left(D = \frac{d}{dt} \right).$$

Н. Н. Лузин ставит следующие две основные проблемы.

1) Узнать, совместна или несовместна система дифференциальных уравнений (1).

2) Зная, что система (1) является совместной, найти все ее решения и «оценить произвол».

Прежде всего он показал, что всякая система (1) может быть написана в нормальной форме Рикье — Жане. Найденный вид нормальной системы приводит к нахождению необходимых и достаточных условий существования у системы (1) решения с нулевыми начальными условиями.

В дальнейшем Н. Н. Лузин подробно изучает систему (1) при условии $b_1 = f(t)$, $b_i = 0$ ($i = 2, 3, \dots, n$), т. е. систему

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \begin{cases} f(t) & (i=1), \\ 0 & (i>1) \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Показывается, что необходимым и достаточным условием независимости неизвестной функции $x_1(t)$ от произвольной аналитической функции $f(t)$, входящей в правую часть первого уравнения этой системы, является тождественное уничтожение адъюнкты Δ_{11} матрицы $\| a_{ij} \|$.

Тождество $\Delta_{11} \equiv 0$ в дальнейшем именуется «критерием абсолютной инвариантности для решения $x_1(t)$ ». Развитием свойства абсолютной инвариантности решения уравнения (2) служит теорема об «инвариантности до ε » [15]. Эти критерии нашли широкое применение при построении и создании автоматических систем регулирования как в СССР, так и за рубежом. О практической важности этой проблемы говорит то, что в 1958, 1962, 1966 и 1971 гг. в г. Киеве проходили специальные совещания по теории инвариантности и ее применениям в автоматических устройствах.

С момента опубликования работ Н. Н. Лузина по дифференциальным уравнениям, связанных с теорией управления, прошло более 30 лет, однако подробного их изложения до сих пор нет.

Николаем Николаевичем получены также важные результаты, связанные с методами академика А. Н. Крылова по вековому уравнению, академика С. А. Чаплыгина по приближенному интегрированию дифференциальных уравнений и др. [15].

Название «вековое уравнение» обязано своим происхождением небесной механике: к вековому уравнению приводят исследования вековых неравенств в движении планет. Вековое уравнение также называют характеристическим уравнением или уравнением частот, поскольку в задачах теории колебаний корнями этого уравнения служат квадраты угловых частот системы.

Раскрытие векового определителя, т. е. вычисление коэффициентов векового уравнения, является весьма трудоемкой операцией. Раскрытием векового определителя занимались еще Лагранж, Лаплас, Якоби и Леверье. Однако основных успехов добились А. Н. Крылов и Н. Н. Лузин.

Сущность исследований Н. Н. Лузина по вековому уравнению состоит в том, что он произвел исчерпывающий алгебраический и геометрический анализ преобразования классического векового уравнения. Ранее это преобразование было выполнено А. Н. Крыловым при помощи дифференциальных уравнений. Особый интерес представляют исследования Николая Николаевича, посвященные случаям вырождения векового уравнения.

В связи с задачей о движении поезда С. А. Чаплыгин предложил приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений, основанный на использовании дифференциальных неравенств. С. А. Чаплыгин дал алгоритм построения аппроксимирующих пар. Н. Н. Лузин указал правило для наилучшего выбора исходной аппроксимирующей пары и определил быстроту сходимости процесса С. А. Чаплыгина. Он доказал сначала геометрически, а потом и аналитически, что быстрота сходимости процесса С. А. Чаплыгина значительно превосходит быстроту сходимости геометрической прогрессии и даже последовательности факториальных членов $1/n!$; этот процесс сходится как ряд с общим членом 2^{-2^n} .

Идеи метода С. А. Чаплыгина имели в лице Н. Н. Лузина своего горячего пропагандиста. Достаточно указать на то, что Н. Н. Лузин дал обзор работ, посвященных методу С. А. Чаплыгина, а также указал на стоящие здесь задачи, а в своем учебнике «Интегральное исчисление» 1949 г. он посвятил особую, двенадцатую, главу методу С. А. Чаплыгина.

Н. Н. Лузин продолжал активно интересоваться методом С. А. Чаплыгина до конца своей жизни. На базе всех проведенных исследований он предполагал написать монографию о методе С. А. Чаплыгина; надо надеяться, что ученики покойного Н. Н. Лузина выполнят, наконец, его желание.

Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин дали приближенное количественное решение дифференциального уравнения движения поезда для различных частных случаев. Н. Н. Лузин, заинтересовавшийся этой же задачей, подошел к ней с качественной стороны. Дифференциальное уравнение движения поезда он приводит к виду

$$\frac{du}{ds} = \Psi(u) + \Phi(s).$$

При этом, как он показывает, $\Psi(u)$ — монотонно убывающая функция от u в некотором интервале, исчезающая для определенного значения u_0 ; далее $\Psi''(u) > G > 0$; функция $\Phi(s)$ ограничена и равномерно непрерывна в интервале $(-\infty, \infty)$.

Н. Н. Лузин доказал, что при этих условиях уравнение обладает одним и только одним предельным решением $U(s)$, лежащим в интервале $(-\infty, \infty)$ между определенными границами. Всякое другое решение $u(s)$ при $s \rightarrow \infty$ асимптотически приближается к предельному решению $U(s)$. Если функция $\Phi(s)$ периодична, то предельное решение $U(s)$ также периодично (с тем же периодом). Эта теорема была им получена также для системы уравнений (2).

По предложению Геофизического института Николай Николаевич провел критический анализ методов прогноза погоды на основе метеорологических наблюдений за большой промежуток времени, используя свои исследования в области тригонометрических рядов [17]. Он пишет: «Цель настоящей статьи — пересмотр приобретших широкую известность приемов анализа для выяснения периодичности эмпирических данных кривых. Техника этих приемов давно выработана и в практическом применении нередко дает превосходные результаты. Тем не менее остается не вполне ясной та граница, до которой применимость этих приемов совершенно надежна и за которой они могут давать фантастические результаты».

Н. Н. Лузин проявлял живой интерес и к истории математики. В статьях «Дифференциальное исчисление» ([18], т. III, стр. 292—318), «Функция» ([18], т. III, стр. 319—341), «Ньютонова теория пределов» ([18], т. III, стр. 373—400) он раскрывает в историческом аспекте основные понятия математического анализа, начиная с античного периода до наших дней. В статьях «Исаак Ньютон как математик и натуралист (1642—1727)» (к трехсотлетию со дня рождения) ([18], т. III, стр. 401—414), «Эйлер (1707—1783)» (по поводу 150-летия со дня смерти) ([18], т. III, стр. 351—372) он дает подробную характеристику величайшим гениям человечества.

Оригинальность работ Николая Николаевича заключена не только в новой постановке вопросов, но и в методе: их отличает чрезвычайно яркий характер геометрического изложения. Н. Н. Лузин умел находить в самых сложных и отвлеченных вопросах простое геометрическое ядро, которое во многих случаях и предсказывало решение задачи. Достаточно вспомнить метод решета и метод проектирования, которые он ввел в дескриптивную теорию функций, или решетку при использовании метода Рикье и Жане, введенную им в теорию дифференциальных уравнений.

Н. Н. Лузин являлся не только выдающимся ученым, но и замечательным педагогом. Его изложение, всегда столь изящное и на первый взгляд кажущееся излишне простым, — результат его крупного педагогического таланта. Решение тех больших проблем, за которые он брался, отличаются тонкостью, изяществом и доступностью изложения. Возьмем хотя бы его учебник «Теория функций действительного переменного», где в увлекательной и яркой форме рассказано широкому кругу читателей — студентам, учителям средней школы, любителям математики — о целом ряде абстрактных и сложных понятий современной теории функций.

Наконец, даже элементарные учебники «Дифференциальное исчисление» и «Интегральное исчисление», написанные им для вузов, выдержали более 20 изданий. Их и теперь можно увидеть в руках студентов.

Мы являемся свидетелями того, что в связи с опубликованием работ Николая Николаевича [1], [9], [11], ранее не печатавшихся, а также обзоров его исследований [8], [10], [12], [14], [15], в работах других ученых получили дальнейшее развитие поставленные в них вопросы. Можно с уверенностью сказать, что они изучаются и будут изучаться поколениями математиков и техников и еще долгое время будут являться источником научного творчества.

Заканчивая краткий обзор работ Н. Н. Лузина, необходимо с удовлетворением указать на изданное трехтомное собрание его сочинений [18]. Однако досадно, что в это собрание вошли не все работы его по дифференциальным уравнениям (например, по теории инвариантности) и вычислительным методам. Многие из этих работ имеют большое практическое значение.

В заключение уместно вспомнить слова Л. В. Келдыш и П. С. Новикова: «Благодаря исключительной интуиции и способности глубоко видеть самое существо вопроса, Н. Н. Лузин нередко предсказывал математические факты, доказательство которых оказывалось возможным только много лет спустя и требовало создания совершенно новых методов математики. Он был одним из крупнейших математиков и мыслителей нашего времени, внесших большой вклад в науку и создавшим большую и очень сильную школу советских математиков» ([12], стр. 102).

Труды Н. Н. Лузина по богатству содержания и глубокому анализу основных понятий математики, общности результатов, многообразию новых методов, изяществу и ясности изложения поставили его в ряд ученых, пользующихся мировой известностью.

П. И. Кузнецов

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. Н. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд, М., 1915. Изд. 2-е: Интеграл и тригонометрический ряд, Редакция и комментарии Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова, Вступительные статьи Н. К. Бари, В. В. Голубева и Л. А. Люстерника, М.—Л., Гостехиздат, 1951, а также Собрание сочинений, т. I, 1953, 48—212.
 - [2] Д. Ф. Егоров, Отзыв о диссертации Н. Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд», представленной для получения степени магистра чистой математики, УМН 8:2(54), 1953, 105—110, а также Собрание сочинений, т. III, 1959, 433—439.
 - [3] А. Н. Крылов, Записка об ученых трудах Н. Н. Лузина, В. кн. «Записки об ученых трудах действительных членов АН СССР по Отделению гуманитарных наук, избранных 12 января и 13 февраля 1929 года», АН СССР, 1930, 48—64.
 - [4] Николай Николаевич Лузин, Материалы к библиографии ученых СССР, серия математики, вып. 3, 1948.
 - [5] Н. К. Бари и В. В. Голубев, Биография Н. Н. Лузина, В кн. Н. Н. Лузин, Собрание сочинений, т. III, 1959, 468—483.
 - [6] Памяти Н. Н. Лузина, УМН 5:4 (38) (1950), 15—18.
 - [7] Академик Николай Николаевич Лузин, «Математика в школе», № 3 (1950), 1—2.
 - [8] Н. К. Бари, и Л. А. Люстерник, Работы Н. Н. Лузина по метрической теории функций, УМН 6:6(46) (1951), 28—46, а также Собрание сочинений, т. III, 440—460.
 - [9] Н. Н. Лузин, Работы по теории функций комплексного переменного, УМН 7:2(48) (1952), 3—6, а также Собрание сочинений, т. III, 1959, 418—422.
 - [10] В. С. Федоров, Труды Н. Н. Лузина по теории функций комплексного переменного, УМН 7:2(48) (1952), 7—16, а также Собрание сочинений, т. III, 1959, 423—432.
- 14 Успехи матем. наук, т. XXIX, вып. 5

- [11] Н. Н. Лузин, Лекции об аналитических множествах и их приложениях, Редакция, предисловия и примечания Л. В. Келдыш и П. С. Новикова, М., Физматгиз, 1959, а также Собрание сочинений, т. II, 1958, 11—269.
- [12] Л. В. Келдыш, П. С. Новиков, Работы Н. Н. Лузина в области дескриптивной теории множеств, УМН 8:2(54) (1953), 93—104.
- [13] Н. Н. Лузин, О регулярном решении задачи изгибающей поверхности на главном основании, УМН 8:2(54) (1953), 83—92, а также Собрание сочинений, т. III, 1959, 111—122.
- [14] Л. Н. Сретенский, Замечания к посмертной работе Н. Н. Лузина об интегрировании уравнений изгибающей поверхности на главном основании, УМН 8:2(54) (1953), 75—82, а также Собрание сочинений, т. III, 1959, 461—467.
- [15] В. К. Гольцман и П. И. Кузнецов, Работы Н. Н. Лузина по дифференциальным уравнениям и по вычислительным методам, УМН 7:2(48) (1952), 17—30.
- [16] Н. Н. Лузин, О методе приближенного интегрирования акад. С. А. Чаплыгина, УМН 6:6(46) (1951), 3—27, а также Собрание сочинений, т. III, 1959, 181—208.
- [17] Н. Н. Лузин, К теоретическому обоснованию периодограмм, Собрание сочинений, т. III, 1959, 218—291.
- [18] Н. Н. Лузин, Собрание сочинений, изд. АН СССР, т. I, 1953, т. II, 1958, т. III, 1959.
- [19] П. И. Кузнецов, Дмитрий Федорович Егоров (к 100-летию со дня рождения), УМН 26:5(161) (1971), 169—206.
- [20] П. С. Александров, Б. В. Гнеденко и В. В. Степанов, Математика в Московском университете в XX веке, ИМИ, вып. 1 (1948).