Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 11

Издание выходит с 2003 года

Конференция «Леонард Эйлер и современная математика»

Сборник докладов

МИАН

Москва
2008

УДК 511+531
ББК (В)22
С56

С56 **Современные проблемы математики** / Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2008. Вып. 11: Конференция "Леонард Эйлер и современная математика" (МИАН, 17 мая 2007 года). Сборник докладов – 72 с.

ISBN 5-98419-027-3

Серия "Современные проблемы математики" – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии публикуются работы, отражающие научные достижения сотрудников и аспирантов МИАН. Особое внимание уделяется исследованиям, выполненным в рамках научных программ Российской академии наук. Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН. Издания серии рассылаются по стандартному обязательному списку, в библиотеки математических институтов и ведущих университетов страны.

Выпуск 11 содержит избранные доклады, сделанные на конференции "Леонард Эйлер и современная математика", состоявшейся 17 мая 2007 г. в Математическом институте им. В. А. Стеклова и посвященной 300-летию со дня рождения Л. Эйлера.

ISBN 5-98419-027-3

Содержание

Эйлер и комбинаторика

А. М. Зубков

Леонард Эйлер является одним из создателей методов математического анализа. Наряду со строгими математическими (дедуктивными) доказательствами Эйлер широко использовал эмпирические методы (индукцию) и "правдоподобные" рассуждения. Развитие методов математического анализа в значительной степени проводилось Эйлером с целью решения конкретных математических и прикладных задач. Работы Эйлера внесли большой вклад в разные области математики, в том числе и в комбинаторику. Комбинаторные результаты Леонарда Эйлера, лежащие несколько в стороне от основной массы его работ, позволяют лучше оценить как разносторонность его дарования, так и склонность к использованию аналитических методов.

Термин "комбинаторная математика" разные авторы понимают по-разному. Начиная с древних греков, главной математической абстракцией является бесконечность (в виде бесконечного ряда натуральных чисел, безграничной делимости отрезка прямой, неограниченности пространства и т. п.). Немного утрируя, можно сказать, что в отличие от почти всех остальных областей математики, которые в том или ином виде связаны с изучением свойств бесконечных объектов (неограниченных или состоящих из бесконечного множества элементов), комбинаторика включает в себя задачи, относящиеся к свойствам конечных (во всех смыслах) объектов.

Ниже приводится краткий обзор исследований Эйлера по направлениям, которые называют теперь теорией графов, теорией латинских квадратов, перечислительной комбинаторикой. Обсуждаются методы, использовавшиеся Эйлером, и некоторые более поздние результаты в этих направлениях, связанные с работами Эйлера.

1. Теория графов

Одной из наиболее известных комбинаторных работ Леонарда Эйлера является статья с решением задачи о мостах города Кёнигсберг [8].

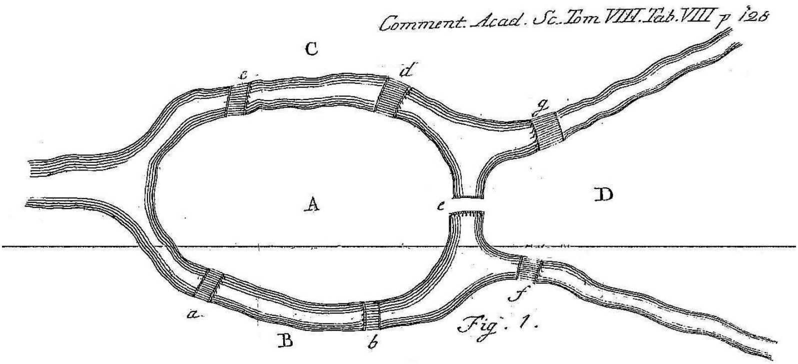

Рис. 1. Схема мостов Кёнигсберга из статьи Эйлера [8].

Река, протекающая через Кёнигсберг, делит его на 4 части, которые были соединены 7 мостами (рис. 1). Существовало поверье, согласно которому загаданное желание должно исполниться, если пройти по каждому из 7 мостов ровно по одному разу. Лейбниц в переписке с Вольфом в 1670 г. обсуждал математическую задачу о существовании маршрута обхода всех кёнигсбергских мостов и высказывал мнение о том, что она представляет собой новый тип геометрических задач, связанных не с размерами объектов, а только с их взаимным расположением (теперь такие задачи называются топологическими), и что поэтому для ее решения нужно использовать качественно новые методы.

Эйлер в своей работе [8] предложил строгое, изящное и в конечном счете аналитическое решение, основанное на правильной переформулировке задачи о мостах. Рассмотрим идеи этого решения.

Прием, использованный Эйлером, теперь иногда называют “двойным счетом” (одна и та же величина вычисляется двумя разными способами). Прежде всего, в качестве основных объектов Эйлер использует не мосты, а соединяемые ими области суши. Если обозначать области суши прописными латинскими буквами, то маршрут прохода по мостам можно представить последовательностью $ABCAD\ldots$ символов областей. (Такая запись не отражает, в каком порядке проходит маршрут по мостам, соединяющим две области, если таких мостов несколько, но оказывается, что это и не существенно!) Далее, число символов в маршруте, который проходит по каждому мосту один раз, на 1 больше числа мостов в маршруте, поскольку каждая пара соседних символов соответствует переходу по одному мосту. Наконец, основное соображение состоит в том, что если символ области X не является концевой точкой маршрута, то он соответствует проходу по двум мостам, соединяющим область X с другими областями, а если символ X является концевой точкой – то проходу по одному такому мосту. Отсюда следует, что если маршрут проходит по N мостам, соединяющим область X с другими областями, то символ X появляется в записи маршрута $(N+1)/2$ раз, если N нечетное (и при этом один раз X является концевой точкой маршрута), и либо $N/2$, либо $N/2+1$ раз, если N четное (в последнем случае маршрут начинается и заканчивается символом X).

Правило "двойного счета" Эйлер попутно применяет еще раз, замечая, что у каждого моста два конца и что поэтому сумма чисел мостов, соединяющих каждую из областей с остальными, вдвое превосходит общее число мостов и поэтому должна быть четной; но тогда число областей, в которых заканчивается нечетное число мостов, тоже должно быть четным.

Из этих соображений Эйлер выводит, что если число мостов равно M, а число областей с нечетным числом мостов равно $2m$, то запись маршрута, проходящего по всем мостам, должна содержать не менее $M+m$ символов, что больше $M+1$, если $m>1$. Это условие позволяет убедиться, что не существует маршрута, проходящего по 7 мостам Кёнигсберга по одному разу. Эйлер не описывает подробно способ построения маршрута в ситуациях, когда $m \leqslant 1$, ограничиваясь замечаниями о том, что при $m=1$ маршрут должен начинаться и заканчиваться в областях с нечетным числом мостов и что если две области соединены несколькими мостами, то можно мысленно удалить пары таких мостов и получить более простую схему, а после того, как обход упрощенной схемы будет построен, можно добавить к нему проходы по удаленным мостам.

Интересно отметить, как Эйлер относился к своему решению. В [10] среди других писем Эйлера приводится письмо Карлу Леонарду Готлибу Элеру (Carl Leonard Gottlieb Ehler), любителю математики и бургомистру г. Данцига, в котором Эйлер по просьбе Элера кратко излагает свое решение задачи о мостах, а затем пишет:

“*Следовательно, ты можешь убедиться, славнейший муж, что это решение по своему характеру имеет мало отношения к математике, и мне непонятно, почему следует скорее от математика ожидать этого решения, нежели от какого-нибудь другого человека, ибо это решение подкрепляется одним только рассуждением, и нет необходимости привлекать для нахождения этого решения какие-либо законы, свойственные математике. Итак, я не знаю, каким образом получается, что вопросы, имеющие совсем мало отношения к математике, скорее разрешаются математиками, чем другими* [*учеными*]”.

По-видимому, Эйлер понимал математику главным образом как науку о вычислениях; но он живо интересовался также качественно новыми задачами, как показывает продолжение приведенного отрывка:

“*Между тем Ты, славнейший муж, определяешь место этого вопроса в геометрии положения, и что касается этой новой науки, то, признаюсь, мне неизвестно, какого рода относящиеся сюда задачи желательны были Лейбницу и Вольфу. Итак, я прошу Тебя, если Ты считаешь, что я способен нечто создать в этой новой науке, чтобы Ты соблаговолил мне прислать несколько определенных, относящихся к ней задач, для того, чтобы я мог лучше уяснить себе, что именно представляется желательным. Между тем, поскольку мне известно, что Ты также можешь составить суждение о математических науках на основании одной только задачи, которую следует предложить и решить, начало чему по Твоей просьбе положил преславный Кюн, я хотел бы, чтобы он представил нам такого рода задачи, которые он считает более трудными,* [*сделав это*] *как для прогресса науки, так и для упражнения наших сил.*”

В современной теории графов путь, проходящий по одному разу по всем ребрам графа, называют *эйлеровым путем*, а замкнутый эйлеров путь – *эйлеровым циклом.* Найденный Эйлером критерий в современных терминах выглядит так:

"В связном неориентированном графе эйлеров путь (цикл) существует тогда и только тогда, когда число вершин нечетной кратности не больше 2 (вершин нечетной кратности нет)".

Более общий критерий охватывает случай, когда в графе есть как ориентированные, так и неориентированные ребра:

"В связном графе эйлеров путь (цикл) существует тогда и только тогда, когда в графе с удаленными ориентациями ребер существует эйлеров путь (цикл) и для каждой вершины разность между числом входящих и выходящих ребер не превышает числа инцидентных этой вершине неориентированных ребер."

После решения задачи о мостах Эйлер, видимо, продолжал размышлять о "геометрии положений", и в 1750 г. в письме Гольдбаху (см. также [4]) он сообщил о найденной им формуле, связывающей число V вершин, число E ребер и число F граней выпуклого многогранника: $N - E + F = 2$. Первое строгое доказательство этой формулы, которую называют теперь формулой Эйлера, опубликовал О. Коши [3] в 1813 г., когда ему было около 20 лет. Доказательство Коши является индуктивным и использует наглядные, а не аналитические, соображения. В 1893 г. А. Пуанкаре [15] обобщил формулу Эйлера на n-мерные политопы: если N_k – число k-мерных ($k = 0, 1, \dots, n-1$) граней, то

$$N_0 - N_1 + N_2 - \cdots + (-1)^{n-1} N_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}.$$

Обобщения выражения, стоящего в левой части, используются как топологические инварианты поверхностей.

В "задаче о мостах" рассматриваются пути, проходящие по всем *ребрам* графа. В связи с ней естественно возникает аналогичная задача о путях, проходящих по одному разу через все *вершины* графа; такие пути называются *гамильтоновыми.* В общем случае задача выяснения вопроса о существовании гамильтонова пути в графе является NP-полной, т. е. принадлежит множеству Σ таких бесконечных совокупностей σ задач, что: а) ни для какой совокупности $\sigma \in \Sigma$ не известен алгоритм, решающий любую задачу из σ за время, полиномиально зависящее от длины формулировки задачи, и б) если для какой-нибудь совокупности $\sigma \in \Sigma$ существует алгоритм, решающий любую задачу из σ за полиномиальное время, то для любой другой совокупности $\sigma' \in \Sigma$ тоже существует алгоритм, решающий все задачи из σ' за полиномиальное время.

Таким образом, в ближайшей окрестности решенной Эйлером “задачи о мостах” находятся задачи, не решенные до сих пор.

В работе [9], представленной к публикации в 1759 г. и опубликованной в 1766 г., Леонард Эйлер рассмотрел задачи построения обходов шахматной доски (и ее обобщений) шахматным конем, которые являются частными случаями задачи о гамильтоновых путях. Это была первая серьезная математическая статья, посвященная способам построения обходов квадратных и прямоугольных досок ходом шахматного коня; она определила характер дальнейших исследований в этой области “занимательной математики”. Эйлер построил замкнутый обход шахматной доски (доказав тем самым, что обход можно начинать с любой клетки) и указал способы преобразования и построения обходов и привел разнообразные примеры обходов (как замкнутых, так и не замкнутых, в том числе обладающих различными свойствами симметрии). Кроме того, Эйлер рассмотрел задачи об обходе конем досок, имеющих другие размеры и формы. В частности, он:

а) отметил, что не существует обходов досок размеров 3×3 и 4×4 и привел пример обхода конем всех клеток доски 4×4, кроме одной угловой клетки;

б) заметил, что не существует замкнутых обходов досок с нечетным числом клеток, показал, что любой обход доски размером 5×5 должен начинаться или заканчиваться в угловой клетке, и, соединив обходы досок 5×5, построил симметричный обход доски 10×10;

в) построил (незамкнутые) обходы досок размером 3×4 и 3×7, отметил, что доски размером 3×5 и 3×6 обойти ходом шахматного коня нельзя, и высказал гипотезу о том, что не существует замкнутых обходов досок, у которых хотя бы одна из сторон короче 5 клеток;

г) построил примеры обходов досок крестообразной формы.

Гипотеза Эйлера была опровергнута только в 1917 г., когда Е. Бергхольт в письмах в The British Chess Magazine привел примеры замкнутых обходов досок размером 3×10 и 3×12.

2. Магические и латинские квадраты

Две работы Леонарда Эйлера, посвященные магическим и латинским квадратам, заложили основы нового направления комбинаторики – теории латинских квадратов, результаты которой применяются в различных областях.

Таблица размера $n \times n$, заполненная натуральными числами от 1 до n^2, называется *магическим квадратом*, если суммы чисел во всех ее строках, столбцах и в двух диагоналях одинаковы. Магические квадраты были известны еще в древнем Китае, и считалось, что они могут обладать волшебными свойствами.

Таблица размера $n \times n$, заполненная натуральными числами от 1 до n, называется *латинским квадратом*, если в каждой строке и в каждом столбце находится перестановка чисел от 1 до n.

Первое упоминание о латинских квадратах (в связи с решением карточных задач) относится к 1723 г. Систематическое изучение латинских квадратов началось с работ Эйлера [6], [7].

В [6] Эйлер предложил для построения магических квадратов использовать представление целых чисел от 0 до $n^2 - 1$ в виде сумм $an + b$, где a и b принимают значения от 0 до $n - 1$. Если $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ и $\|b_{ij}\|_{i,j=1}^n$ – два латинских квадрата, заполненных числами от 0 до $n - 1$, и все n^2 элементов квадратной таблицы $\|(a_{ij}, b_{ij})\|$ различны, то в квадратной таблице $\|a_{ij}n + b_{ij}\|$ суммы чисел, стоящих в любой строке и в любом столбце, равны одному и тому же числу $\frac{1}{2}\, n(n-1)n + \frac{1}{2}\, n(n-1)$. (Эйлер использовал для обозначения чисел a_{ij} латинские, а для чисел b_{ij} – греческие буквы и поэтому назвал таблицу $\|(a_{ij}, b_{ij})\|$ *греко-латинским квадратом*; этот термин иногда используется и в наше время, но чаще латинские квадраты $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ и $\|b_{ij}\|_{i,j=1}^n$, для которых все пары (a_{ij}, b_{ij}) различны, называют *ортогональными*.)

На примерах квадратов размеров 3×3, 4×4, 5×5 Эйлер показал, что условие равенства диагональных сумм суммам по строкам и столбцам при такой конструкции записывается в виде линейных уравнений, выполнение которых можно обеспечить за счет переобозначения элементов. Однако построить грекo-латинский квадрат размера 6×6 Эйлеру не удалось, и он построил магический квадрат размера 6×6, комбинируя квадраты, не являющиеся латинскими.

По-видимому, неудача с реализацией внешне простого способа построения магического квадрата размера 6×6 с помощью двух греко-латинских (ортогональных) латинских квадратов, заинтересовала Эйлера, и он посвятил большую работу [7] изучению способов построения латинских и греко-латинских квадратов. В частности, в ней были указаны способы построения ортогональных латинских квадратов размера $n \times n$ при $n \not\equiv 2 \pmod 4$, и Эйлер высказал предположение о том, что при $n \equiv 2 \pmod 4$ ортогональных латинских квадратов размера $n \times n$ не существует. В случае $n = 6$ Эйлер сформулировал свою гипотезу в виде задачи о том, можно ли расставить 36 офицеров из 6 полков (по 6 разных чинов из каждого полка) в виде квадрата 6×6 так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке находились офицеры разных званий и из разных полков. Эту гипотезу Эйлера частично подтвердил в 1900 г. G. Tarry [16], доказав (фактически – перебором всех возможных неэквивалентных пар латинских квадратов размера 6×6), что в случае $n = 6$ она верна. Следующее продвижение в исследовании гипотезы Эйлера было сделано лишь в 1959 г., когда Bose, Shrikhande и Parker [2], [14], [1] установили, что пары ортогональных латинских квадратов существуют при всех натуральных $n \neq 2, 6$.

Таким образом, для того, чтобы исправить утверждение сформулированной Эйлером гипотезы, потребовалось почти 200 лет развития как математики, так и техники (примеры ортогональных латинских квадратов порядка 10 были построены с помощью ЭВМ). Можно сказать, что трудоемкость задач, не поддававшихся гению Эйлера, превышает 100 лет коллективной работы других математиков.

Одна из пар ортогональных латинских квадратов порядка 10 изображена на рис. 2.

Для различных значений n существует разное число попарно ортогональных латинских квадратов. Число попарно ортогональных латинских квадратов порядка n не может быть больше $n-1$, и это значение достигается в случаях, когда n – степень простого числа (такая система попарно ортогональных латинских квадратов называется *полной*). Общей формулы для максимального числа попарно ортогональных латинских квадратов порядка n не существует; более того, до сих пор неизвестно, существуют ли три попарно ортогональных квадрата порядка 10.

В XVIII веке, когда Эйлер ввел понятие греко-латинских (ортогональных) квадратов, они были просто новыми чисто математическими объектами. В дальнейшем латинские и особенно орто-

11	87	96	05	20	49	68	32	53	74
78	22	81	97	06	30	59	43	64	15
69	18	33	82	91	07	40	54	75	26
50	79	28	44	83	92	01	65	16	37
02	60	19	38	55	84	93	76	27	41
94	03	70	29	48	66	85	17	31	52
86	95	04	10	39	58	77	21	42	63
23	34	45	56	67	71	12	88	90	09
35	46	57	61	72	13	24	00	89	98
47	51	62	73	14	25	36	99	08	80

Рис. 2. Ортогональные латинские квадраты порядка 10.

гональные латинские квадраты нашли применения в различных областях (см., например, [13]).

В комбинаторике полные системы ортогональных латинских квадратов соответствуют конечным аффинным и проективным плоскостям. Латинские квадраты используются при построении квадратов Рума (турниров игры в бридж). В конце XIX века Кэли показал, что таблица умножения элементов конечной группы является латинским квадратом. В 30-х годах XX века возникло понятие квазигруппы, в которой таблицей умножения может быть любой латинский квадрат.

Системы попарно ортогональных латинских квадратов используются при построении сеточных методов интегрирования в вычислительной математике.

В 30-х годах XX века Р. Фишер [11], [12] предложил использовать латинские (и ортогональные латинские) квадраты для планирования сельскохозяйственных экспериментов. Число таких экспериментов не может быть произвольно большим (хотя бы потому, что каждый эксперимент длится несколько месяцев), на результат эксперимента могут оказывать влияние несколько факторов, в том числе и неконтролируемые. Например, пусть в математической модели результат эксперимента линейно зависит от трех контролируемых факторов, каждый из которых принимает n разных значений, и от случайной величины. Обозначим возможные влияния каждого из факторов числами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$; тогда результат эксперимента, в котором факторы принимают соответственно i-е, j-е и k-е значения, равен

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk},$$

где μ – среднее значение результата, а ε_{ijk} – случайное влияние. Чтобы проверить справедливость статистической гипотезы о том, что $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, т. е. что ни один фактор не влияет на результат эксперимента, можно поставить n^3 экспериментов со всеми возможными сочетаниями факторов. Однако число экспериментов можно сократить до n^2, если использовать латинский квадрат $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$ и провести n^2 экспериментов со следующими сочетаниями факторов: (i, j, a_{ij}), $i, j = 1, \ldots, n$.

Еще одна область применения латинских квадратов – построение кодов, исправляющих ошибки. *Кодом* C длины N над алфавитом A из n букв называется множество N-мерных векторов (кодовых слов), компоненты которых принадлежат A. *Расстоянием* $d(C)$ кода C называется минимальное расстояние Хемминга (число несовпадающих координат) между элементами кода. При передаче кодовых слов могут происходить искажения отдельных координат. Если число искаженных координат меньше $\frac{1}{2}\,d(C)$, то по искаженному кодовому слову можно однозначно восстановить неискаженное. Поэтому говорят, что код C исправляет $\left[\frac{1}{2}\,d(C)\right]$ ошибок. Если число искаженных координат меньше $d(C)$, то однозначное восстановление кодового слова может оказаться невозможным, но факт наличия искажений обнаруживается.

Ортогональные латинские квадраты позволяют строить коды, исправляющие ошибки. Пусть $A_1 = \|a_{ij}^{(1)}\|, \ldots, A_m = \|a_{ij}^{(m)}\|$ – попарно ортогональные латинские квадраты порядка n. Тогда множество кодовых слов длины $m + 2$

$$(i, j, a_{ij}^{(1)}, \ldots, a_{ij}^{(m)}), \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

образует код из n^2 элементов, исправляющий $[m/2]$ ошибок. Действительно, достаточно показать, что любые два кодовых слова различаются по крайней мере $m+1$ координатой. Любые два разных кодовых слова $\left(i, j, a_{ij}^{(1)}, \ldots, a_{ij}^{(m)}\right)$, $\left(i', j', a_{i'j'}^{(1)}, \ldots, a_{i'j'}^{(m)}\right)$ различаются хотя бы одной из первых двух координат. Если, например, $i = i'$, то $j \neq j'$ и $a_{ij}^{(k)} \neq a_{ij'}^{(k)}$, $k = 1, \ldots, m$, так как в каждом латинском квадрате все числа в i-й строке попарно различны. Аналогично рассматривается случай $i \neq i'$, $j = j'$. Если же $i \neq i'$, $j \neq j'$, то может существовать не более одного такого k, что $a_{ij}^{(k)} = a_{i'j'}^{(k)}$, так как если $a_{ij}^{(k_1)} = a_{i'j'}^{(k_1)}$, $a_{ij}^{(k_2)} = a_{i'j'}^{(k_2)}$, то

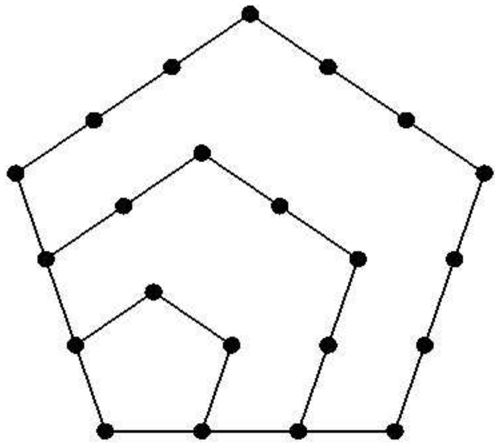

Рис. 3. Пятиугольные числа: 1, 5, 12, 22,... .

$\left(a_{ij}^{(k_1)}, a_{ij}^{(k_2)}\right) = \left(a_{i'j'}^{(k_1)}, a_{i'j'}^{(k_2)}\right)$, т. е. латинские квадраты A_{k_1} и A_{k_2} не ортогональны.

Вряд ли Эйлер предполагал, что латинские квадраты будут столь широко применяться, однако его математическая интуиция помогла правильно оценить естественность конструкции и нетривиальность свойств латинских квадратов.

3. Теорема о пятиугольных числах

Наконец, необходимо упомянуть еще один характерный для Леонарда Эйлера цикл исследований, находящийся на стыке комбинаторики, теории чисел и математического анализа и посвященный свойствам пятиугольных чисел. Так называемые многоугольные числа определяются как элементы последовательностей натуральных чисел, образованных количествами "целых" точек, содержащихся в гомотетичных многоугольниках с целочисленными длинами сторон (рис. 3).

Многоугольные числа были известны еще в древней Греции. В частности, формула n-го пятиугольного числа имеет вид $p_n = \frac{1}{2}\,n(3n-1)$, $n = 1, 2, \ldots$. Судя по переписке, около 1740 г. Эйлер обнаружил, что при разложении бесконечного произведения

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots$$

в степенной ряд получается выражение

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+\cdots, \quad (1)$$

в котором присутствуют не все степени x и в котором ненулевые коэффициенты равны ± 1. Эйлер заметил, что все показатели степеней с ненулевыми коэффициентами имеют вид $\frac{1}{2}\,n(3n\pm 1)$; это множество обобщенных пятиугольных чисел содержит как обычные пятиугольные числа $p_1, p_2, \ldots$, так и числа, которые получаются при подстановке в формулу $\frac{1}{2}\,n(3n-1)$ значений $n=0,-1,-2,\ldots$. Строгое доказательство теоремы о пятиугольных числах, т. е. тождества

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(x^{\frac{n(3n-1)}{2}}+x^{\frac{n(3n+1)}{2}}\right)$$

Эйлер нашел только в 1750 г., а опубликовал в 1760 г. [5]. Эта удивительная теорема стала первым примером нетривиальных тождеств, связывающих бесконечные произведения и степенные ряды; ряд других неожиданных тождеств был найден в начале XX века индийским математиком С. Рамануджаном.

Эйлер показал также, что другая эмпирически обнаруженная им в 1747 г. серия необычных равенств, связанных с пятиугольными числами, является следствием теоремы о пятиугольных числах. Пусть $\sigma(n)$ – сумма всех натуральных делителей числа n. Эйлер показал, что при любом n

$$\begin{aligned}\sigma(n)=\sigma(n-1)+\sigma(n-2)-\sigma(n-5)-\sigma(n-7)+\\+\sigma(n-12)+\sigma(n-15)-\cdots;\end{aligned} \quad (2)$$

при каждом n в сумму в правой части входят только те слагаемые, аргументы которых положительны. Нетрудно заметить, что структура суммы в правой части (2) совпадает со структурой ряда (1).

Заключение

Подводя итог этому обзору, можно отметить, что, во-первых, Леонард Эйлер получил первые важные результаты в нескольких направлениях комбинаторики и сформулировал в качестве гипотез задачи, ставшие ориентирами для развития этих направлений более чем на 100 последующих лет; во-вторых, основной заслугой Эйлера перед комбинаторикой следует считать не столько введение новых понятий и решение конкретных задач, сколько разработку методов использования степенных рядов и производящих функций для получения точных и асимптотических формул в перечислительных задачах.

Список литературы

[1] R. C. Bose, S. S. Shrikhande, E. T. Parker, "Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture", *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 189–203 MR 122729, Zbl 0093.31905.

[2] R. C. Bose, S. S. Shrikhande, "On the falsity of Euler's conjecture about the nonexistence of two orthogonal Latin squares of order $4t + 2$", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **45** (1959), 734–737 doi 10.1073/pnas.45.5.734, MR 0104590, Zbl 0085.00902, ADS 1959PNAS...45..734B.

[3] A. Cauchy, "Recherches sur les polyèdres", *J. École Polytechnique, XVI*^{e} *Cahier*, **IX** (1813), 68–83.

[4] L. Euler, "Elementa doctrinae solidorum – Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita", *Novi commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, **4** (1752–3), 109–140.

[5] L. Euler, "Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum", *Novi commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, **5** (1760), 75–83.

[6] L. Euler, "De quadratis magicis", Представлено Санкт-Петербургской Академии Наук 17 октября 1776 г., впервые опубликовано в *Mem. Soc. Flessingue*, *Comm. Arith. Collect.* (*eloge St.Petersburg* 1783) **2** (1849), 593–602.

[7] L. Euler, "Recherches sur une nouvelle espece de quarres magiques", Представлено Санкт-Петербургской Академии Наук 8 марта 1779 г., впервые опубликовано в *Verhandelingen uitgegeven door het Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissengen* **9** (1782), 85–239; *Commentationes arithmeticae*, **1** (1849), 302–361; *Opera Omnia*, *Ser.* I, **7**, 291–392.

[8] L. Euler, "Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis", *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, **8** (1741), 128–140; *Opera Omnia* (1), **7**, 1–10.

[9] L. Euler, "Solution d'une question curieuse que ne paroit soumise ò aucune analyse", *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*,

15 (1759) (1766), 310–337; *Commentationes arithmeticae*, **1** (1849), 337–355; *Opera Omnia*, *Ser.* I, **7**, 26–56.

[10] Л. Эйлер, *Письма к ученым*, изд-во АН СССР, М.–Л., 1963.

[11] R. A. Fisher, *Statistical methods for research workers*, Oliver & Boyd, Edinburg, London, 1925.

[12] R. A. Fisher, “The arrangement of field experiments”, *J. Ministry of Agriculture*, **33** (1926), 503–513.

[13] Ch. F. Laywine, G. L. Mullen, *Discrete mathematics using Latin squares*, J. Wiley & Sons, New York, 1998 MR 1644242.

[14] E. T. Parker, “Orthogonal Latin squares”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **45** (1959), 859–862 doi 10.1073/pnas.45.6.859, MR 0104591, Zbl 0086.02201, ADS 1959PNAS...45..859P.

[15] H. Poincaré, “Analysis Situs”, *J. École Polytechnique* 2, **1** (1895).

[16] G. Tarry, “Le problème des 36 officers”, *Compt. Rend. Ser. Math., Astron., Géod. Mécan.*, **29** (1900), 170–203.

Эйлер и теория чисел

А. А. Карацуба

Здесь излагается расширенное содержание доклада, прочитанного автором на конференции, посвященной 300-летию со дня рождения Л. Эйлера (Математический институт им. В. А. Стеклова, 17 мая 2007 г.)

А) Седьмая часть научных работ Эйлера посвящена теории чисел (из 900 названий статей Эйлера и его сына Иоганна Альбрехта 120 посвящены теории чисел).

Б) Внимание Эйлера к теории чисел привлек Гольдбах (письмо Гольдбаха к Эйлеру от 1 декабря 1729 г.), и первой работой была работа о теореме Ферма, касающаяся представимости простых чисел суммою двух квадратов целых чисел. Несмотря на разницу в возрасте в 17 лет, Гольдбах и Эйлер дружили, вели активную переписку, где ставились и решались проблемы теории чисел, вплоть до кончины Гольдбаха в 1764 г.

В) Самым значительным изданным трудом Эйлера по теории чисел являются его “Арифметические сочинения”. Это двухтомная монография, изданная в 1849 г. в Петербурге под редакцией Фуса, Буняковского, Чебышева. К изданию трудов Эйлера привлек Чебышева в 1847 г. Буняковский. После этого издания Чебышев занялся теорией чисел и написал две свои знаменитые статьи по теории чисел.

Г) Уже в наше время (1997 г.) вышла книга (см. [4]) “Неопубликованные материалы Л. Эйлера по теории чисел” под редакцией Н. И. Невской, где содержатся заметки из записных книжек Эйлера, касающиеся вопросов теории чисел.

Д) Во времена Эйлера еще не было науки “теория чисел”. Да и сама математика, как строгая наука, начинала только-только строиться. Как самостоятельная наука теория чисел сформировалась значительно позднее, после работ Гаусса, после издания его классического труда “Арифметические исследования” (1801 г.).

Е) Но в то же время период деятельности Эйлера был тем периодом, когда закладывался фундамент теории чисел, когда находились (создавались) понятия, ставились и решались задачи, которые впоследствии составили здание теории чисел.

Я расскажу о некоторых, на мой взгляд, самых важных, результатах, полученных Эйлером в теории чисел.

1. Со времен Пифагора (VI в. до н. э.) стоял вопрос о совершенных и дружественных числах. Натуральное число a называется совершенным, если сумма всех его собственных делителей, т.е. делителей, отличных от a, равняется a (таким образом, сумма всех делителей a равняется $2a$). Например, число 6 является совершенным, так как собственные делители 6 есть $1, 2, 3$ и $1+2+3=6$. До Эйлера была теорема Евклида: если $a=(2^p-1)2^{p-1}$ и число 2^p-1 является простым, то a – совершенное число. Например, при $p=2$ получаем: $2^p-1=2^2-1=3$, $a=6$; при $p=3$ получаем: $2^p-1=2^3-1=7$, $a=28$. Простые числа $M_p=2^p-1$ называются простыми Мерсенна. Эйлер доказал, что если число a является четным совершенным числом, то оно имеет указанный выше вид. Таким образом, для того, чтобы четное число a было совершенным, необходимо и достаточно, чтобы оно имело следующий вид:

$$a=M_p2^{p-1}, \qquad M_p=2^p-1 \text{ – простое число.}$$

Эйлер высказал гипотезу, что нет нечетных совершенных чисел (гипотеза не доказана, 2007 г.).

Натуральные числа A и B называются дружественными, если сумма собственных делителей A равняется B и наоборот, сумма собственных делителей B равна A. До Эйлера были известны две пары дружественных чисел: пара Пифагора $(220, 284)$ и пара Ферма–Декарта $(17296, 18416)$. Эйлер нашел 59 новых пар, в частности, пары нечетных дружественных чисел; например, такой парой будет $(3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 5\cdot 17, 3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 107)$.

2. Как было сказано выше, первой работой Эйлера по теории чисел была работа, связанная с теоремой Ферма. Эйлер хорошо был знаком с работами Ферма и под их влиянием написал целый ряд своих.

а) Ферма рассматривал числа $F_n=2^{2^n}+1$ и высказал гипотезу, что все они, $n=0,1,2,\ldots$ являются простыми. Эйлер опроверг эту гипотезу, доказав, что F_5 делится на 641. Сейчас числа F_n называются числами Ферма. Еще не найдено ни одного простого F_n, $n\geqslant 5$. Харди высказал гипотезу, что только конечное число чисел F_n являются простыми (гипотеза не доказана, 2007 г.).

б) Ферма принадлежит следующая теорема (“малая теорема Ферма”): если p – простое число, a не делится на p, то $a^{p-1}-1$ делится на p.

Эта теорема играет одну из главных ролей в элементарной теории чисел и алгебре. Эйлер нашел принципиально новое обобщение малой теоремы Ферма. При натуральном числе n Эйлер определил функцию $\varphi(n)$ (“функция Эйлера”) – количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно-простых с n. Теорема Эйлера: если a и n – взаимно-простые числа, то $a^{\varphi(n)}-1$ делится на n. Функция Эйлера и теорема Эйлера занимают одно из центральных мест в современной теории чисел. Буква φ и символ $\varphi(n)$ введены Гауссом.

в) Эйлером доказаны основные теоремы теории сравнений, в частности, теоремы о квадратичных вычетах. Например, им доказано соотношение (“критерий Эйлера”), которое в современной форме записывается так:

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$$

Здесь p – нечетное простое число, (a/p) – символ Лежандра,

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} +1, & \text{если } a \text{ – квадратичный вычет по модулю } p; \\ \ \ 0, & \text{если } a \text{ – делится на } p; \\ -1, & \text{если } a \text{ – квадратичный невычет по модулю } p. \end{cases}$$

Эйлер нашел и сформулировал квадратичный закон взаимности: если p и q – нечетные простые числа, то

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

Квадратичный закон взаимности был доказан Гауссом (им дано восемь разных доказательств этого утверждения). Обобщения закона взаимности даны Гауссом, Эйзенштейном, Куммером, Гильбертом, Артином, Хассе, Шафаревичем, Востоковым.

г) Вслед за Ферма, Эйлер много внимания уделил вопросам представимости чисел значениями бинарных квадратичных форм. Ферма предположил, а доказал Эйлер, что простые числа вида $p=4n+1$ и только такие представимы в виде x^2+y^2 и указанное представление единственное. Эйлер доказал, что простые числа вида $p = 8n + 1$, $p = 8n + 3$ и только такие, представимы в виде $x^2 + 2y^2$, простые числа вида $p = 6n + 1$ и только такие представимы в виде $x^2 + 3y^2$, причем указанные представления единственные.

д) Эйлер исследовал уравнение $y^2 - Dx^2 = 1$, $D \neq k^2$, которое сейчас называется уравнением Пелля, указал алгоритм нахождения его решений через цепные дроби $\sqrt{D}$ и для всех $D < 100$ привел наименьшие решения этого уравнения.

е) Продолжением г) явились работы Эйлера по представлению натуральных чисел суммами квадратов. Занимаясь этой проблемой, Эйлер доказал свое знаменитое тождество: произведение суммы четырех квадратов на сумму четырех квадратов равняется сумме четырех квадратов. Он был близок к доказательству теоремы о том, что любое натуральное число есть сумма четырех квадратов целых чисел (теорема Лагранжа). Это ясно видно по его записям в записных книжках. После того, как Лагранж доказал теорему о четырех квадратах, Эйлер вернулся к этой тематике и дал новое, более простое и прямое доказательство теоремы Лагранжа.

Хочу обратить внимание слушателей на одну удивительную проблему, которая идет от Эйлера и связана с суммами квадратов целых чисел.

Все натуральные числа, за исключением чисел вида $4^m(8n+7)$, $m, n = 0, 1, 2 \ldots$, представимы в виде $x^2+y^2+z^2$. Естественно возникает вопрос: как близко к заданному числу N можно подойти суммой двух квадратов целых чисел? Так как $(n+1)^2-n^2 = 2n+1$ и правая часть этого равенства имеет порядок корня квадратного из n^2, то одним квадратом можно подойти к N на расстояние порядка $\sqrt{N}$. Следовательно, суммой двух квадратов можно подойти к N на расстояние порядка $\sqrt[4]{N}$. А можно ли подойти ближе? Со времен Эйлера стоит эта задача "без движения", хотя есть гипотеза о том, что

$$\min_{x,y\in\mathbb{Z}} \left| N - x^2 - y^2 \right| \leqslant N^{\varepsilon}$$

где $\varepsilon > 0$, ε – любое, $N \geqslant N_1(\varepsilon)$. Заменить $\frac{1}{4}$ в предыдущем рассуждении на $\frac{1}{4} - c$ со сколь угодно малым фиксированным $c > 0$, не могут, и эта, на первый взгляд, простая задача "стоит на месте" более 250 лет.

ж) Эйлер размышлял над Великой теоремой Ферма. Он доказал, что уравнение $x^3 + y^3 = z^3$ не имеет решений в натуральных числах x, y, z. Метод его доказательства опирался на арифметику алгебраических чисел. В частности, из тождества

$$p^2 + 3q^2 = (p + q\sqrt{-3}\,)(p - q\sqrt{-3}\,) = r^3,$$

он делает вывод, что $p \pm q\sqrt{-3} = \left(u \pm v\sqrt{-3}\,\right)^3$, т.е. пользуется неявно основной теоремой арифметики (однозначность разложения натуральных чисел на простые сомножители) в кольце целых чисел $u \pm v\sqrt{-3}$. Но в то время не было основной теоремы арифметики (только Гаусс доказал эту теорему) и не возникало соответствующих вопросов. Но идея строить арифметику алгебраических чисел и применять ее к доказательству Великой теоремы Ферма принадлежит Эйлеру. Эта идея продолжила свое развитие в работах Гаусса, Куммера, Дирихле, Дедекинда, Золотарева, Кронекера, Гильберта. Была построена большая наука – алгебраическая теория чисел, которая получила основное свое развитие в 20-м веке.

3. Эйлер ввел в математику первообразные корни и индексы (дискретный аналог логарифма), которые в наше время нашли многочисленные применения в криптографии.

4. Эйлер был одним из первых, кто понял, что иррациональности бывают разной природы – более “простые”, такие как $\sqrt{2}$, и более “сложные”, такие, как $\log_2 3$. В своей монографии “Введение в анализ бесконечно малых” он пишет: “Так как логарифмы чисел, не являющиеся степенями основания a, не могут быть выражены ни рационально, ни иррационально, то они справедливо относятся к количествам трансцендентным; поэтому логарифмы обычно причисляются к количествам трансцендентным” (с. 104, п. 105).

В то время еще не было точного определения трансцендентного числа. Оно появилось через 100 лет, в 1844 г. его ввел Лиувилль. Он же привел примеры трансцендентных чисел. В 1873 г. Эрмит доказал трансцендентность числа e, а в 1882 г. Линдеман доказал трансцендентность числа π, чем была решена проблема квадратуры круга. В 1900 г. Гильберт среди своих 23-х проблем сформулировал утверждение Эйлера в несколько измененной форме как 7-ю проблему: если α – алгебраическое число, $\alpha \neq 0, 1$, β – алгебраическая иррациональность, то α^β – трансцендентное число. Первый результат в решении этой проблемы получил Гельфонд в 1929 г., затем – Кузьмин (1930 г.). Полностью проблему решили в 1934 г. Гельфонд и, независимо, Шнайдер. Была создана большая наука – теория трансцендентных чисел, с большим количеством глубоких результатов об алгебраических и трансцендентных числах и с многочисленными приложениями к диофантовым уравнениям (Туэ, Зигель, Рот, Бейкер, Спринджук, Нестеренко, Бертран и др.).

5. Эйлер, как и его предшественники (Пифагор, Евклид, Ферма), размышлял над простыми числами. Как уже было сказано, он доказал целый ряд замечательных теорем о представлении простых чисел значениями бинарных квадратичных форм. Он высказал гипотезу о том, что между a и $2a$, $a \geqslant 2$, всегда есть простое число. Эта гипотеза стала называться "Постулат Бертрана" и была доказана в 1848 г. Чебышевым.

Еще одна проблема теории простых чисел прямо связана с Эйлером. Легко доказать, что нет многочлена с целыми коэффициентами, все значения которого при целых значениях аргумента являются простыми числами. В то же время, повидимому, со времен Пифагора, стоит проблема о том, что в последовательности чисел n^2+1, $n = 1, 2, 3, \ldots$, содержится бесконечно много простых чисел. Эйлер рассмотрел многочлен $f_1(x) = x^2 - x + 41$, который при $x = 0, 1, 2, \ldots, 40$ принимает значения простых чисел. В 1939 г. Бигер рассмотрел многочлен $f_2(x) = x^2 - x + 72491$, который при $x = 0, 1, 2, \ldots, 11000$ принимает значения 4923 простых чисел. Возникла гипотеза (Хуа Ло-кен, 1940 г.): для каждого $N \geqslant 1$ существует целое число A такое, что многочлен $f(x) = x^2 - x + A$ при $x = 0, 1, 2, \ldots, N$ принимает значения простых чисел (гипотеза не доказана, 2007 г.).

В переписке с Гольдбахом была поставлена Проблема Гольдбаха (тернарная П.Г. или просто П.Г.) и Проблема Эйлера (бинарная П.Г.): каждое нечетное число $\geqslant 9$ есть сумма трех нечетных простых чисел и каждое четное число $\geqslant 6$ есть сумма двух нечетных простых чисел. П.Г. была решена в 1937 г. Виноградовым.

Уже из сказанного видно, насколько велик вклад Эйлера в теорию чисел.

6. Но самое главное, что внес в теорию чисел Эйлер, это применение анализа для решения задач теории чисел. Эйлеру принадлежат два метода решения задач теории чисел с помощью анализа, которые послужили основой той большой науки, которая сейчас называется аналитической теорией чисел. Основы, первые идеи применения анализа к решению задач теории чисел содержатся в монографии Эйлера “Введение в анализ бесконечно малых”, 1748 г. (см. [1]).

7. Совершенно необыкновенным является труд Эйлера, названный им “Введение в анализ бесконечно малых” (коротко “Введение”). Иногда сравнивают и проводят параллель между творчеством Баха и Эйлера, подчеркивая широту, глубину, оригинальность, простоту и красоту созданных ими произведений. Если внимательно посмотреть на сочинения Баха и Эйлера, то можно заметить большое сходство “Хорошо темперированного клавира” Баха и “Введения” Эйлера.

Как первое, так и второе сочинения, по первоначальному замыслу авторов, должны были быть учебными пособиями для начинающих. Но созданные шедевры вышли далеко за рамки учебников. В них содержатся поистине удивительные открытия и основы целых новых направлений, соответственно, в музыке и математике.

Сходство видно уже в предисловиях к этим сочинениям. Заглавие цикла на титульном листе у Баха звучит так: “Хорошо темперированный клавир, или Прелюдии и фуги во всех тонах и полутонах, касающихся как терций мажорных, или До, Ре, Ми, так и терций минорных, или Ре, Ми, Фа. Для пользы и употребления жадного до учения музыкального юношества, как и для особого времяпрепровождения тех, кто уже преуспел в этом учении, составлено и изготовлено Иоганном Себастьяном Бахам. В году 1722”

У Эйлера в “Предисловии” к “Введению” написано: “Такое разнообразие материала легко могло разрастись на много томов; но я дал все, по мере возможности, настолько сжато, что всюду излагается – весьма впрочем, ясно – лишь основное; более же подробная разработка предоставляется трудолюбию читателей, дабы они имели на чем упражнять свои силы, чтобы еще шире раздвинуть границы Анализа. Не боюсь открыто заявить, что в этой книге не только содержится много совершенно нового, но также указаны источники, откуда можно черпать многие замечательные открытия”.

8. И первый, один из самых знаменитых источников, это глава XV “О рядах, возникающих при перемножении сомножителей”, с. 238–260. Остановлюсь только на одном результате этой главы.

Результат относится к введенной Эйлером функции, которая впоследствии стала называться дзета-функцией Римана. На с. 241 Эйлер выписывает соотношения: “...если взять какую-либо степень простых чисел, ...

$$P = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right) \quad \text{и т.д.}},$$

то получим

$$P = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \text{ и т.д.},$$

где встречаются все без исключения натуральные числа”.

Правая часть последнего равенства сейчас обозначается символом $\zeta(n)$. Таким образом, при $s = n$ получаем:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \tag{1}$$

Равенство (1) называется тождеством Эйлера. Оно играет в настоящее время главную роль при изучении законов распределения простых чисел. Сам Эйлер, пользуясь (1), дал новое, аналитическое, т.е. с привлечением средств анализа, доказательство теоремы Евклида о бесконечности количества простых чисел. Действительно, если простых чисел – конечное число, то правая часть (1) при $s \to 1 + 0$ стремится к конечному пределу, именно, к числу

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Левая часть (1) при $s \to 1 + 0$ стремится к гармоническому ряду, т.е. к бесконечности. Получили противоречие.

Это открытие Эйлера послужило созданию того большого направления аналитической теории чисел, которое занимается вопросами, связанными с простыми числами. И здесь, главную роль, как об этом сказано выше, играет тождество Эйлера.

Идею Эйлера доказывать бесконечность множества простых чисел с помощью тождества (1) применил в 1837 г. Дирихле к доказательству теоремы о бесконечности множества простых чисел, принадлежащих арифметической прогрессии с разностью k и первым членом l, где $1 \leqslant l < k$, $(l, k) = 1$. Для этого он ввел (нашел) функции $\chi(n)$, определенные на множестве целых чисел n и удовлетворяющие следующим свойствам: $\chi(1) = 1$; $\chi(n)$ – периодическая с периодом k, т.е. $\chi(n+k) = \chi(n)$; $\chi(n)$ – мультипликативная функция, т.е. $\chi(nm) = \chi(n)\chi(m)$. Функции $\chi(n)$ стали называться "характерами Дирихле". При заданном числе k ("модуль характера") существует ровно $\varphi(k)$ разных характеров. Среди этих характеров есть один – главный характер $\chi_0(n)$, который равен 1 при $(n,k) = 1$, и равен 0 при $(n,k) > 1$. При помощи характеров можно аналитически, т.е. формульно, выделять числа n, принадлежащие заданной арифметической прогрессии, так как выполняется следующее равенство ("ортогональность характеров"):

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \chi(n)\chi(l_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } nl_1 \equiv 1 \pmod{k}; \\ 0, & \text{если } nl_1 \not\equiv 1 \pmod{k}. \end{cases} \tag{2}$$

В последней сумме $l_1 l \equiv 1 \pmod{k}$ и суммирование ведется по всем характерам модуля k.

При $s > 1$ Дирихле рассмотрел аналог функции $\zeta(s)$ – функцию $L(s,\chi)$ ("эль-функция Дирихле"):

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что $L(s,\chi_0)$ отличается от $\zeta(s)$ множителем, равным

$$\prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

т.е. $L(s,\chi_0) \to +\infty$ при $s \to 1+0$. Кроме того, Дирихле доказал, что $L(1,\chi) \neq 0$, если $\chi \neq \chi_0$. Из этого и соотношений (2) и (3) легко следует, что

$$\sum_{p \equiv l \pmod{k}} \frac{1}{p^s} \to +\infty$$

при $s \to 1+0$, т.е. бесконечность простых чисел p, принадлежащих арифметической прогрессии $nk + l$, $n = 0, 1, 2 \ldots$. Замечу, что характеры Дирихле нашли многочисленные применения в самых разных областях математики.

Другим следствием развития идеи Эйлера явились работы 1848 г. Чебышева. Пользуясь соотношениями между $\zeta(s), \zeta'(s)$,

$\zeta''(s),\dots$, Чебышев доказал теоремы о том, что если функция $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих x, "хорошо" приближается функцией "типа" $\operatorname{Li}(x)$,

$$\operatorname{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t},$$

то это будет $\operatorname{Li}(x)$, а также, что если существует предел отношения $\pi(x)/\operatorname{Li}(x)$ при $x \to +\infty$, то этот предел равен 1. Первая теорема опровергала гипотезу Лежандра 1808 г. о том, что

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x - 1,08366\dots}.$$

Другим выдающимся результатом Чебышева, который он получил под влиянием работ Эйлера, была теорема 1850 г.: при $x \geqslant x_1$ выполняются неравенства:

$$0.9\,\frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant 1.1\frac{x}{\ln x}.$$

Это второй, после теоремы Евклида, результат о поведении $\pi(x)$ при $x \to +\infty$, и первый результат о действительном порядке $\pi(x)$.

Тот факт, что $\pi(x)$, повидимому, лучше всего приближается функцией $\operatorname{Li}(x)$, в письме от 1849 г., которое было опубликовано много позднее (1863 г.), уже после работы Римана (1859 г.), сообщал Гаусс.

Наконец, Риман в 1859 г. рассмотрел $\zeta(s)$ как функцию комплексного переменного s, продолжил $\zeta(s)$ на всю s – плоскость, доказал некоторые теоремы о $\zeta(s)$ как функции комплексного переменного, и установил связь между $\pi(x)$ и нулями $\zeta(s)$. Родилась наука "Теория дзета-функции Римана".

Скажу несколько слов об этой науке. Пусть s – комплексное число, т.е. $s = \sigma + it$, $i^2 = -1$, σ и t – вещественные числа, $\sigma = \operatorname{Re} s$, $t = \operatorname{Im} s$.

При $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$ с помощью аналитических преобразований доказывается равенство:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s+1}{2}}\right)\omega(x)\,dx, \qquad (4)$$

где $\Gamma(s)$ – гамма-функция Эйлера, $\omega(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi x n^2}$. Из этого равенства видно, что функция $\xi(s)$,

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \qquad (5)$$

является целой функцией, т.е. голоморфной функцией в любом круге $|s| = R$, $R \to +\infty$. Таким образом, равенство (4) продолжает $\zeta(s)$ на всю s – плоскость. Кроме того, из (4) следует равенство

$$\xi(s) = \xi(1-s), \tag{6}$$

которое называется “функциональным уравнением $\zeta(s)$”. Опять же из (4) нетрудно доказать, что $\xi(s)$ является целой функцией первого порядка и, следовательно, по теореме Вейерштрасса,

$$\xi(s) = e^{as} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}, \tag{7}$$

где

$$a = \ln 2 + \ln \sqrt{\pi} - 1 - \frac{1}{2}\gamma = -0.023\ldots,$$

γ – постоянная Эйлера, ρ – бесконечная последовательность комплексных чисел вида $\rho = \beta + i\gamma_1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $0 < |\gamma_1|$. Числа ρ являются нулями $\zeta(s)$ (“нетривиальные нули”).

В силу (6) числа ρ расположены симметрично относительно прямых $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} s = 0$, т.е. вместе с $\rho = \beta + i\gamma_1$ нулями $\zeta(s)$ будут числа $\bar{\rho} = \beta - i\gamma_1$, $\rho_1 = 1 - \beta + i\gamma_1$, $\bar{\rho}_1 = 1 - \beta - i\gamma_1$. Риман высказал гипотезу (“гипотеза Римана” или, коротко, RH), что все ρ лежат на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ (“критическая прямая”), т.е. $\operatorname{Re} \rho = \beta = \frac{1}{2}$.

Рассматривая логарифмическую производную функции $\xi(s)$ и пользуясь (5), (1), (7), при $\operatorname{Re} s > 1$ получают равенство

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{1}{s-1} - \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) - c_1,$$

где $\Lambda(n)$ – функция Мангольдта,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^k,\ p \text{ – простое число}, \\ 0, & \text{если } n \neq p^k, \end{cases}$$

c_1 – константа.

Из последней формулы методом “комплексного интегрирования” получается “явная формула” для функции Чебышева $\psi(x)$,

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \tag{8}$$

(если x равняется степени простого числа, то последнее слагаемое в сумме $\psi(x)$ равняется $\frac{1}{2}\Lambda(x)$).

Функции $\pi(x)$ и $\psi(x)$ тесно связаны одна с другой, но $\psi(x)$ устроена проще, чем $\pi(x)$: главный член ее асимптотической формулы есть x, в то время как главный член асимптотической формулы $\pi(x)$ есть $\mathrm{Li}(x)$. Соответственно, и формула для $\pi(x)$ через ρ сложнее, чем (8) ("формула Римана"):

$$\pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}\,) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}\,) + \cdots = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\rho} \mathrm{Li}(x^{\rho}) - c,$$

$$\mathrm{Li}(x^{\rho}) = \mathrm{Li}(e^{\rho \ln x}), \qquad \mathrm{Li}(e^{\omega}) = \int_{-\infty+iv}^{u+iv} \frac{1}{z}\, e^{z}\, dz, \quad \omega = u + iv,$$

c – константа.

Все основные применения $\zeta(s)$ к теории простых чисел связаны с (8) и ее вариантами.

Адамар и Валле-Пуссен в 1896 г. доказали, что $\operatorname{Re}\rho = \beta < 1$ и, тем самым, что $\psi(x) \sim x$, $\pi(x) \sim \operatorname{Li} x$. Каждое из этих соотношений называется асимптотическим законом распределения простых чисел. Затем последовала целая серия результатов с уточнением границы нулей $\zeta(s)$, что сразу же вело к уточнению остаточного члена в асимптотических формулах $\psi(x)$ и $\pi(x)$:

$$\begin{aligned} &\psi(x) = x + O(R(x)); \\ &\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(R(x)), \quad R(x) = x \exp\bigl(-0.05(\ln x)^{\alpha}\bigr), \end{aligned} \tag{9}$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ (Валле-Пуссен, 1898 г.); $\alpha = \frac{1}{2}\bigl(1 + \frac{\ln\ln\ln x}{\ln\ln x}\bigr)$ (Литтлвуд, 1920 г.); $\alpha < \frac{4}{7}$ (Чудаков, 1936 г.); $\alpha < \frac{7}{12}$ (Коробов, 1957 г.); $\alpha < \frac{3}{5}$ (Виноградов, 1958 г.).

В этой же области исследований были доказаны исключительно интересные теоремы о простых числах, лежащих на коротких промежутках числовой оси (усиление постулата Бертрана):

$$\pi(x+h) - \pi(x) = (1 + o(1))\frac{h}{\ln x}, \qquad h = x^{\alpha},$$

$\alpha = 1 - 0.00003$ (Хохайзель, 1930 г.) $\alpha = 1 - 0.004$ (Хейльбронн, 1933 г.) $\alpha = 1 - 0.25$ (Чудаков, 1936 г.) $\alpha = 1 - \frac{3}{8}$ (Ингам, 1937 г.) $\alpha = 1 - \frac{2}{5}$ (Монтгомери, 1969 г.) $\alpha = 1 - \frac{5}{12}$ (Хаксли, 1972 г.).

Получено большое количество арифметических результатов при условии справедливости RH. Оказалось, что многие из этих результатов эквивалентны RH. В частности, соотношение вида

$$R(x) = O(\sqrt{x}\,\ln^2 x),$$

где $R(x)$ определяется равенством (9), эквивалентно RH. Получено много результатов о нулях $\zeta(s)$: нули на критической прямой (Харди, Литтлвуд, Зигель, Кузьмин, Сельберг, Левинсон, Карацуба, Конри), "плотностные" теоремы (Ингам, Сельберг, Монтгомери, Хаксли), граница нулей (Валле-Пуссен, Литтлвуд, Чудаков, Коробов, Виноградов). Доказаны чисто функциональные теоремы о $\zeta(s)$: теорема Гамбургера (1922 г.) о том, что $\zeta(s)$ однозначно определяется функциональным уравнением и тем, что она представляется рядом Дирихле при $\operatorname{Re} s > 1$, теорема Воронина (1975 г.) об "универсальности" $\zeta(s)$ – в $\zeta(s)$ "содержатся" все аналитические функции. Исследованы классы функций, которые "похожи" на $\zeta(s)$и для которых RH не имеет места; эти функции удовлетворяют функциональным уравнениям "риманова типа", т.е. вида (6), но не имеют "эйлерова" произведения вида (1) (Дэвенпорт, Хейльбронн, Сельберг, Воронин, Карацуба, Бомбьери, Хейчал). Для других функций, таких как $L(s,\chi)$, $\zeta_k(s)$, которые, как и $\zeta(s)$, имеют Эйлерово произведение, повидимому, справедлив аналог RH (RHR – "расширенная" RH). Эти функции дали возможность решить ряд проблем о простых числах в арифметических прогрессиях (Линник, Родосский, Бомбьери–Виноградов), "почти бинарную" проблему Гольдбаха (Чен Жиран), "условно" решить проблему Гаусса–Артина о первообразных корнях (Хооли).

Невозможно перечислить в данном докладе даже малую часть тех результатов, которые получены к настоящему времени с помощью $\zeta(s)$ и ее обобщений.

9. Второй знаменитый источник содержится в главе XVI "О разбиении чисел на слагаемые". Здесь в п. 302 (с. 263) Эйлер рассматривает произведение – дробь

$$\frac{1}{(1-x^{\alpha}z)(1-x^{\beta}z)(1-x^{\gamma}z)(1-x^{\delta}z)(1-x^{\varepsilon}z)\ldots \text{ и т.д.}}$$

представляет его в виде

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \cdots \text{ и т.д.}$$

и делает выводы о $P, Q, R, S, \ldots$. Мы поступим несколько иначе. Рассмотрим уравнение

$$\alpha n + \beta m + \gamma l = N, \tag{10}$$

где α, β, γ – фиксированные натуральные числа, N – целое неотрицательное число, n, m, l – неизвестные неотрицательные числа. Пусть $I(N)$ – количество решений этого уравнения. Как найти $I(N)$? Рассматривая произведения $F(x)$,

$$F(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{\alpha n}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} x^{\beta m}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} x^{\gamma l}\right), \tag{11}$$

видим, что оно равно

$$\sum_{N=0}^{\infty} I(N)\, x^N.$$

Если $|x| < 1$, то каждая из сумм в (11), как сумма членов геометрической прогрессии, равна, соответственно,

$$\frac{1}{1-x^{\alpha}}, \quad \frac{1}{1-x^{\beta}}, \quad \frac{1}{1-x^{\gamma}},$$

т.е. получаем равенство (ср. с дробью Эйлера):

$$F(x) = \sum_{N=0}^{\infty} I(N)\, x^N = \frac{1}{(1-x^{\alpha})(1-x^{\beta})(1-x^{\gamma})}.$$

Тем самым мы получили метод нахождения количеств решений уравнения (10), который сейчас называется методом “производящих” функций. Функция $F(x)$ – “производящая”, коэффициенты ее ряда Тейлора при x^N и есть $I(N)$ – нужные нам величины. Легко видеть, что

$$I(N) = \frac{1}{N!}\left(\frac{d^N}{dx^N} F(x)\right)\bigg|_{x=0}. \tag{12}$$

При больших N находить $I(N)$ по формуле (12) трудно. Эйлер, для нахождения $I(N)$ по этой формуле, представлял $F(x)$ в виде суммы простейших дробей. Но, после создания комплексного анализа, появилась другая формула для $I(N)$ – формула Коши:

$$I(N) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R<1} \frac{F(z)}{z^{N+1}}\, dz. \tag{13}$$

Эта формула нашла многочисленные применения в комбинаторном анализе. Одно из самых интересных ее применений – это теорема Харди–Рамануджана (1918 г.) о “разбиениях”, т.е. о числе $p(n)$ решений уравнения

$$n = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \cdots ,$$

другими словами, о числе представлений n в виде суммы всевозможных слагаемых. Производящей функцией здесь будет $f(x)$,

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n, \qquad |x| < 1.$$

С помощью специальных преобразований, которые позднее послужили созданию “кругового метода”, Харди и Рамануджан нашли асимптотику интеграла (13), отвечающего $f(x)$ и, тем самым, нашли асимптотическую формулу для $p(n)$:

$$p(n) = \frac{e^{k\,\lambda_n}}{4\sqrt{3}\,\lambda_n^2}\left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\right),$$
$$k = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}, \quad n \geqslant 1.$$

Но это было только начало. Харди, Литтлвуд, Рамануджан (1920 г.) применили указанную идею к решению нелинейных аддитивных задач теории чисел, в частности, к проблеме Варинга, т.е. к проблеме изучения $I(N)$ – числа решений уравнения

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n = N. \tag{14}$$

в целых неотрицательных числах $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Здесь производящей функцией $F(z)$, $|z| < 1$, будет такая:

$$F(z) = \left(\sum_{x=0}^{\infty} z^{x^n}\right)^k,$$

совсем непростая функция. Но Харди–Литтлвуд–Рамануджан нашли метод, который позволял исследовать интеграл (13), отвечающий этой функции $F(z)$. Дугу окружности интегрирования в (13) они, по определенному правилу, разбивали на “большие” и “малые” дуги. На “больших” дугах получался “главный” член асимптотической формулы для $I(N)$. На "малых" дугах они оценили соответствующую часть $I(N)$ и доказали, что она есть о-малое от "главного члена". Так было получено новое решение проблемы Варинга (проблему решил в 1909 г. Гильберт). Так появился "круговой" метод Харди–Литтлвуда–Рамануджана. Этот же метод был применен Харди–Литтлвудом (1923 г.) к тернарной проблеме Гольдбаха – к проблеме разрешимости в простых числах p_1, p_2, p_3 уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3 = N. \tag{15}$$

Принимая справедливой RHR, они доказали, что для количества $I(N)$ решений уравнения (15) справедлива асимптотическая формула:

$$I(N) \sim \frac{N^2}{2(\ln N)^3}\,\sigma(N),$$

где $\sigma(N) > 1$, если N – нечетное число. Отсюда следовало, что $I(N) > 0$ при $N \geqslant N_1$, т.е. существование решений уравнения (15). Замечу, что в 1997 г. Дезуе, Эффингер, Риле и Зиновьев, пользуясь современными достижениями в аналитической теории чисел и мощными компьютерами, доказали, что в этой теореме $N_1 = 7$.

Начиная с 1929 г. к аддитивным проблемам теории чисел Виноградов стал применять тригонометрические суммы, т.е. суммы вида

$$\sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i f(x)},$$

где $f(x)$ – вещественнозначная функция. Основная идея применения тригонометрических сумм очень проста и опирается на формулу:

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha m}\,d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0; \\ 0, & \text{если } m \neq 0,\ m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тогда вместо бесконечных рядов $\mathrm{F}(z)$ появляются конечные суммы. Например, $I(N)$ для (14) запишется так:

$$I(N) = \int_0^1 (S(\alpha))^k\, e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha,$$

$$S(\alpha) = \sum_{x \leqslant \sqrt[n]{N}} e^{2\pi i\alpha x^n}.$$

Для уравнения (15) $I(N)$ запишется так:

$$I(N) = \int_0^1 T^3(\alpha)\, e^{-2\pi i\alpha N}\, d\alpha,$$
$$T(\alpha) = \sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}.$$

Введение тригонометрических сумм не только упростило метод Харди–Литтлвуда–Рамануджана. Оно дало возможность решить ряд новых проблем теории чисел. Конечно, для этого надо было изучать суммы вида $S(\alpha)$, $T(\alpha)$ и др. Это было сделано Виноградовым. Сначала он получил выдающиеся результаты в проблеме Варинга, в частности, доказав, что

$$G(n) = O(n\ln n),$$

где $G(n)$ – функция Харди–Литтлвуда – наименьшее k такое, что каждое $N \geqslant N_1(n)$ представляется суммой k слагаемых вида x^n, $x \in \mathbb{Z}$, $x \geqslant 0$. Очевидно, что $G(n) > n$, а верхняя оценка $G(n)$ у Харди–Литтлвуда–Рамануджана имела вид $G(n) < n2^n$.

Затем Виноградов научился оценивать $|T(\alpha)|$ и в 1937 г. решил проблему Гольдбаха.

Тем самым проблема, поставленная в переписке Гольдбаха и Эйлера, была решена вследствие развития метода производящих функций Эйлера в круговой метод Харди–Литтлвуда–Рамануджана и метод тригонометрических сумм Виноградова.

Отмечу, что метод тригонометрических сумм является сейчас одним из основных методов аналитической теории чисел. Построена целая наука – теория тригонометрических сумм – с большим количеством результатов в ней, которые даже вкратце невозможно все перечислить здесь (аддитивные проблемы теории чисел, целые точки в областях на плоскости и в пространстве, распределение дробных долей вещественных функций , порядок роста арифметических рядов Дирихле, граница нулей $\zeta(s)$ и ее обобщений, осциллирующие интегралы в теории чисел, физике, теории вероятностей, математической статистике, томографии и многоемногое другое).

Заключение. К исследованиям Эйлера в области теории чисел тесно примыкают его работы по теории функций и математическому анализу. Достаточно назвать его гамма–функцию, интегралы первого и второго родов, выражение тригонометрических функций через экспоненциальные, формулу суммирования вида

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \int_a^b \rho(x)f'(x)\,dx,$$

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\},$$

постоянную γ,

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right),$$

значения $\zeta(2n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$\zeta(2n) = \alpha(n)\pi^{2n}, \qquad \alpha(n) \text{ – рациональные числа},$$

в частности, формулу

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6},$$

и многое другое.

Упомянутая параллель в творчестве Баха и Эйлера также, по моему мнению, не является случайным совпадением. Эйлер занимался математической теорией музыки и света. Ему принадлежат работы “Опыт новой теории музыки, ясно изложенной на основе вернейших начал гармонии”, 1739 г., и “Теория образования голоса и музыки”. В музыкальном энциклопедическом словаре, (см. [5], с. 650), об Эйлере сказано: “Занимался проблемами музыкальной акустики (объяснил происхождение обертонов) в связи с музыкальной теорией (аккордикой, модуляционностью), вопросами цветомузыкальных ассоциаций. Изданы в собр. соч., т. I, серия III (“Opera omnia”, Lpz. – B., 1926).”

При написании статьи я пользовался материалом, содержащимся в следующих сочинениях:

Список литературы

[1] Леонард Эйлер, *Введение в анализ бесконечно малых*, ОНТИ, М.-Л., 1936.

[2] А. О. Гельфонд, “О некоторых характерных чертах идей Л. Эйлера в области математического анализа и его «Введении в анализ бесконечно малых»”, *УМН*, **12**:4 (1957), 29–39 Mi rm7662, MR 90533.

[3] *Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука*, Сб. статей, ред. Н. Н. Боголюбов, Г. К. Михайлов, А. П. Юшкевич, Наука, М., 1988.

[4] *Неопубликованные материалы Л. Эйлера по теории чисел*, Отв. ред. Н. И. Невская, Наука, С.-Петербург, 1997.

[5] *Музыкальный энциклопедический словарь*, Советская энциклопедия, М., 1990.

Закончу статью словами Лапласа: “Читайте, читайте Эйлера, он учитель всех нас”.

Эйлер и математические методы механики

В. В. Козлов

Эта статья – очерки о жизни и о достижениях Леонарда Эйлера в области теоретических проблем механики. Обсуждается ряд тем, связанных с развитием идей и методов Эйлера (расходящиеся ряды и асимптотики решений нелинейных дифференциальных уравнений, гидродинамика идеальной жидкости и гамильтоновы системы, вихревая теория систем на группах Ли с левоинвариантной кинетической энергией, энергетические критерии устойчивости, задача Эйлера двух гравитирующих центров в искривленных пространствах).

1. Введение

Эта работа посвящена творчеству величайшего математика Леонарда Эйлера. Его наследие в математике и ее приложениях столь грандиозно, что еще не в полной мере осознано и систематизировано. Жизнь Эйлера – яркий пример интернациональности науки (и математики в особенности). Он родился в Швейцарии, там же получил образование и раскрыл свое математическое дарование под руководством знаменитого Иоганна Бернулли, который в свою очередь был прямым учеником самого́ Лейбница. Затем 19-летним молодым человеком по совету своих друзей Николая и Даниила Бернулли он прибыл в Санкт-Петербург, чтобы получить стабильное место работы с хорошей заработной платой. Как заметил Кондорсе, “они употребили столько же усилий для того, чтобы приблизить к себе своего страшного соперника, сколько их употребляют обыкновенные люди для удаления такового”. Мы увидим далее, что, действительно, Леонард Эйлер и Даниил Бернулли часто соперничали, занимаясь параллельно одними и теми же теоретическими проблемами механики.

В наше время молодые российские математики с теми же целями часто уезжают в Европу и Америку. Во времена Эйлера все было наоборот. Конечно, тогда молодой Петербург еще мало походил на европейскую столицу: Эйлер и Даниил Бернулли, который в то время уже работал в России, фактически были ровесниками города. В своих письмах Даниил жаловался отцу Иоганну Бернулли на холод и скуку Петербурга. Соглашаясь с этим, Иоганн, однако, повторял, что в Европе нет больше такого места, где так уважают науку и так хорошо за нее платят.

Интересно отметить, что вначале Эйлер был зачислен на должность адъюнкта по кафедре физиологии, поскольку все места по математике и физике были заняты. Он даже всерьез штудировал анатомию и медицину в своем родном Базеле перед поездкой в Россию. Впрочем вскоре его перевели сначала на кафедру физики, а в 1733 г. он занял место своего друга Даниила Бернулли – кафедру математики. Д. Бернулли вернулся в Базель из-за расстроенного здоровья, а его старший брат Николай умер на следующий год по приезде в Петербург. Кстати сказать, надпись под бюстом Эйлера, установленным в здании Президиума Российской академии наук, продолжает утверждать, что Леонард Эйлер – физиолог, физик и (только потом!) математик.

В общей сложности Эйлер проработал в Петербурге 31 год и скончался здесь 76 лет от роду. Когда в 1740-х годах общая обстановка в России оказалась неблагоприятной для науки, Эйлер принял приглашение прусского императора Фридриха II и проработал директором математического класса Берлинской академии наук 25 лет. Стоит подчеркнуть, что будучи в Берлине, Эйлер продолжал активно сотрудничать с Петербургской академией, регулярно публикуя свои многочисленные статьи по математике и механике в ее “Комментариях”. Посмертными трактатами Л. Эйлера еще многие годы заполнялись журналы, которые издавались Петербургской академией наук.

Эйлер был самым авторитетным и уважаемым ученым в России. Можно напомнить известный случай, когда княгиня Дашкова, назначенная директором Петербургской академии, попросила именно Эйлера сопровождать ее при первом посещении Академии (хотя он в то время не ладил с академическим начальством и даже не посещал академических конференций).

Рассказывают, что Эйлер однажды решился попросить у Екатерины II генеральский чин тайного советника (как академик он был действительным статским советником, что соответствовало армейскому чину полковника). Перед ним был пример Христиана Гольдбаха, который состоял на государственной службе России и работал криптографом в Министерстве иностранных дел в Москве. Эйлер вел с ним оживленную переписку, в которой, в частности, обсуждались ставшие знаменитыми гипотезы из аддитивной теории чисел. Однако Екатерина отшутилась: “Господин академик! Генералов у меня много, а Эйлер – всего один!”

2. Расходящиеся ряды и обратная теорема Лагранжа–Дирихле

Бытует мнение (сформированное не только трудами по истории науки), что математики того времени (в частности, и Эйлер) часто путались в элементарных вопросах. Например, не отличали дифференцируемые функции от непрерывных, мешали в одну кучу сходящиеся и расходящиеся ряды и т. д. Конечно, тогда в математике было меньше схоластики, не принято было давать точные определения и многие математические структуры не были выделены и четко очерчены. Однако следует предостеречь от поверхностного взгляда на эти вопросы. Было бы верхом наивности утверждать, что Эйлер не понимал различия между сходящимися и расходящимися рядами. Как точно подметил Харди, в этих вопросах математикам того времени не хватало техники. Им не был еще известен критерий сходимости Коши и поэтому было затруднительным сделать вывод о сходимости ряда без попытки вычисления его суммы. В оперировании с расходящимися рядами точка зрения Эйлера существенно более гибкая и более глубокая, чем это излагается в стандартных университетских курсах анализа. Когда выпускнику университета, хорошо усвоившему такой курс, встретится расходящийся ряд, то он его отбросит как нечто запрещенное и даже несуществующее. Между тем полезно попытаться найти сумму этого расходящегося ряда, применив подходящий метод суммирования. Зачастую такой подход решает дело. Ведь вся эргодическая теория по существу построена на замене обычной сходимости на сходимость по Чезаро (средних арифметических).

Вот один из результатов Эйлера:

$$1 - 1! + 2! - 3! + 4! - \cdots = 0.5963\ldots. \tag{1}$$

Он получил эту формулу несколькими различными способами.

Однако, по мнению акад. А. Н. Крылова,

“Все эти формулы в математике совершенно бесполезны...”

В дальнейшем последователи Эйлера, преклоняясь перед его авторитетом, как бы старались приумножить число этих нелепых равенств, зачастую забыв об условном их смысле, придаваемом Эйлером, и таким образом создали *тот скандал в математике*, который продолжался 75 лет…

Скандал этот был прекращен Гауссом, Коши и Абелем, изгнавшими из строгой математики пользование рядами без исследования их сходимости” [1].

Такая консервативная точка зрения, конечно, малопродуктивна. Когда А. Н. Крылов писал эти строки, теория суммирования расходящихся рядов была уже сильно продвинута (см. фундаментальную монографию Г. Харди [2], в которой много места уделяется истории вопроса и, в частности, вкладу Эйлера в развитие этой теории).

Вот как можно посмотреть на формулу Эйлера (1). Рассмотрим простую нелинейную систему дифференциальных уравнений на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{x, y\}$:

$$\dot{x} = x - y, \qquad \dot{y} = -y^2. \tag{2}$$

Будем искать ее решения, которые асимптотически стремятся к положению равновесия $x = y = 0$ при $t \to +\infty$. Второе уравнение (2) имеет очевидное асимптотическое решение $y(t) = 1/t$. Подставим это решение в первое уравнение и найдем формальное решение полученного линейного неоднородного уравнения в виде ряда по обратным степеням t:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{t^k}\,. \tag{3}$$

При $t = 1$ получаем ряд Эйлера. С другой стороны, система (2) имеет стремящееся к нулю решение

$$x(t) = e^t \int_t^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du, \qquad y(t) = \frac{1}{t}\,,$$

причем расходящийся ряд (3) является асимптотическим представлением функции $x(t)$ при $t \to +\infty$ (в чем легко убедиться последовательным интегрированием по частям). Подставляя $t = 1$, получим сумму ряда Эйлера:

$$e \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du = 0.5963\ldots.$$

Эти рассуждения только по форме отличаются от рассуждений самоѓо Эйлера.

Вообще, пусть система дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n = \{x\}$

$$\dot{x} = v(x), \qquad v(0) = 0 \tag{4}$$

с гладкой (бесконечно дифференцируемой) правой частью допускает формальное решение в виде ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{(j)}}{(t^\mu)^j}\,, \qquad x^{(j)} \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

где μ – некоторая положительная постоянная (для решения (3) $\mu = 1$). Тогда это уравнение имеет настоящее решение $t \mapsto x(t)$ (быть может, и не одно) такое, что

1) $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$,

2) степенной ряд (5) будет для него асимптотическим:

$$x(t) - \sum_{j=1}^{N} \frac{x^{(j)}}{(t^\mu)^j} = O\left(\frac{1}{t^{(N+1)j}}\right), \qquad t \to \infty.$$

Эта замечательная теорема доказана А. Н. Кузнецовым в 1972 г. [3]. Думаю, что Эйлер был бы доволен таким результатом. Впоследствии (по моему предложению) А. Н. Кузнецов обобщил эту теорему на случай, когда коэффициенты формального ряда (5) полиномиально зависят от логарифмов t, а также распространил ее на более общие шкалы сравнения [4].

С сожалением (и удивлением) приходится констатировать, что теория Кузнецова малоизвестна (особенно за рубежом). Например, в недавней книге Ж.-П. Рамиса [5], посвященной асимптотическому анализу решений дифференциальных уравнений, она даже не упоминается. Вместо нее фигурирует более слабое утверждение, к тому же полученное позже.

Приведу один пример из этого круга идей, связанный с проблемой обращения теоремы Лагранжа–Дирихле об устойчивости, поставленной А. М. Ляпуновым еще в 1897 году. Теорема Лагранжа–Дирихле утверждает, что если в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет строгий локальный минимум, то равновесие устойчиво. Этот *энергетический критерий устойчивости* широко используется и для исследования устойчивости состояний равновесия систем с распределенными параметрами. В связи с этим важно указать необходимые условия устойчивости.

Движение системы в потенциальном силовом поле описывается уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

где

$$T = \frac{1}{2}\sum g_{ij}(x)\,\dot{x}_i\dot{x}_j$$

– положительно определенная квадратичная форма по скоростям $(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) = \dot{x}$ (кинетическая энергия системы), а $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – потенциальная энергия. Пусть $dV(0) = 0$. Тогда $x = 0$ – положение равновесия. Пусть функции g_{ij} и V бесконечно дифференцируемы и

$$V = V(0) + V_2 + V_m + V_{m+1} + \cdots \tag{7}$$

– разложение Маклорена потенциальной энергии в ряд по однородным формам $(V_k(\lambda x) = \lambda^k V_k(x))$. Так как $x = 0$ – положение равновесия, то в этом разложении отсутствуют слагаемые, линейные по $x_1, \ldots, x_n$.

В типичной ситуации, конечно, $m = 3$. Однако для четных потенциалов $m = 4$.

Как показал Ляпунов, если V_2 не имеет минимума в точке $x = 0$, то это равновесие неустойчиво (причем экспоненциально). Поэтому рассмотрим случай, когда $V_2 \geqslant 0$. Если квадратичная форма V_2 положительно определена, то равновесие $x = 0$, наоборот, устойчиво (теорема Лагранжа–Дирихле). Так что полезно рассмотреть плоскость

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : V_2(x) = 0\}$$

и предположить, что $\dim \Pi \geqslant 1$. Пусть W_m – ограничение однородной формы V_m на Π. Справедлива

Теорема 1 [6]. *Если W_m не имеет минимума в точке $x = 0$, то равновесие неустойчиво.*

В этом случае можно указать формальное решение уравнения (6) в виде ряда (5), где $\mu = 2/(m-2)$. При четных $m \geqslant 4$ коэффициенты $x^{(j)}$ полиномиально зависят еще от $\ln t$. Если $V_2 \not\equiv 0$, то ряды (5), как правило, расходятся даже в предположении аналитичности функций g_{ij} и V. Однако (по теореме Кузнецова [4]) уравнение (6) имеет решение $t \mapsto x(t)$, которое стремится к положению равновесия $x = 0$ при $t \to +\infty$. Так как уравнение (6) не меняется при обращении времени $t \mapsto -t$, то $t \mapsto x(-t)$ будет решением, *асимптотически исходящим* из точки $x = 0$. В частности, равновесие $x = 0$ неустойчиво, причем эта неустойчивость имеет степенной характер.

Отметим, что теорема 1 опубликована на три года раньше общей теоремы Кузнецова, нужной для ее доказательства. Фактически теорема Кузнецова с логарифмами была анонсирована в работе [6].

Если в разложении (7) отсутствуют квадратичные слагаемые ($V_2 = 0$), то в аналитическом случае формальный ряд (5) сходится при достаточно больших значениях t [7]. Этот факт установлен даже в более общем случае, когда x – это точки гильбертова пространства. Если $V_2 \not\equiv 0$ и V_2 не имеет минимума в точке $x = 0$, то равновесие бесконечномерной системы также неустойчиво. Здесь асимптотическое решение следует искать в виде ряда по степеням $\exp(-\lambda t)$, $\lambda > 0$, который сходится при больших t. Эти результаты (вместе с теоремой Лагранжа–Дирихле) дают надежную основу для исследования устойчивости состояний равновесия систем с распределенными параметрами. Было бы интересным распространить теорему 1 на бесконечномерный случай. Это дало бы возможность доказать неустойчивость равновесия в точках бифуркации, когда второй дифференциал потенциальной энергии теряет положительную определенность.

Систематическое изложение затронутого круга вопросов можно найти в книге [8].

3. Эйлер и механика

Обратимся теперь к работам Леонарда Эйлера собственно по механике. Эта тема представляется совершенно необъятной, особенно с учетом его многочисленных прикладных исследований. Поэтому мы сосредоточимся на чисто теоретических работах Эйлера, посвященных математическим аспектам механики.

Сначала обсудим достижения Л. Эйлера в аналитической динамике.

A. Эйлер ввел и систематически использовал так называемые *естественные* уравнения движения материальной точки, когда уравнение Ньютона $m\ddot{r} = F$ проектируется на оси подвижного репера Френе. Эта идея потом была им использована в динамике твердого тела. Любопытно отметить, что более простая запись уравнений движения в неподвижном репере появилась позже в работах Маклорена.

Эйлер открыл, что в отсутствие внешних сил траектории материальной частицы, движущейся по гладкой регулярной поверхности, совпадают с геодезическими линиями этой поверхности.

Эйлер (одновременно с Д. Бернулли) ввел в механику момент количества движения системы частиц и нашел фундаментальную теорему о его изменении. В этой теореме фигурирует момент силы, известный до Эйлера и широко использовавшийся в задачах статики.

Эта теорема дала возможность Эйлеру вывести уравнения вращения твердого тела

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = M. \tag{8}$$

Здесь ω – угловая скорость тела в подвижной системе отсчета (связанной с телом), I – оператор (тензор) инерции, а M – суммарный момент сил, действующих на тело. При выводе этого уравнения использовалась открытая Эйлером теорема о распределении скоростей в движущемся твердом теле, а также теория моментов инерции.

Рассматривая изменение момента инерции тела в зависимости от направления прямой, Эйлер доказал существование трех взаимно ортогональных прямых (главных осей инерции), обладающих экстремальными значениями моментов инерции. В этих осях симметричный оператор I приводится к диагональному виду. По существу это первые теоремы линейной алгебры, относящиеся к преобразованиям квадратичных форм.

Эйлер ввел координаты, определяющие ориентацию тела (углы Эйлера) и представил угловую скорость через эти углы и их производные по времени (кинематические формулы Эйлера). Эти соотношения вместе с динамическими уравнениями (8) составляют замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающую вращение твердого тела вокруг неподвижной точки под действием заданных сил. Эйлер проинтегрировал свои уравнения в простом, но важном случае, когда $M = 0$ (волчок Эйлера).

Безусловно, Леонард Эйлер – основатель динамики твердого тела, имеющей кроме всего прочего и большое прикладное значение.

Эйлер сформулировал и обосновал принцип наименьшего действия. Вначале этот вариационный принцип был установлен для движения одной материальной точки в потенциальном силовом поле, затем Лагранж его распространил на систему взаимодействующих частиц, а впоследствии Якоби придал ему привычную сейчас форму. Любопытно отметить, что Эйлер и Лагранж – классики вариационного исчисления – не заметили более простого и фундаментального вариационного принципа Гамильтона, из которого принцип наименьшего действия выводится как следствие. Вариационные принципы играют существенную роль не только в аналитической механике, но и в математической и теоретической физике.

История открытия принципа наименьшего действия весьма поучительна. Я приведу ее в очень живом изложении Якоби (с некоторыми сокращениями) [9].

“Рождение этого принципа было связано с большим литературным гамом, вряд ли когда еще поднимали такую суматоху. Открытие этого принципа приписывается бывшему президенту Берлинской Академии Мопертюи, который хотя и был умным человеком, и с некоторыми идеями, но мало учился и в открытом недавно исчислении бесконечно малых разбирался не так хорошо, как великие математики того времени…

…в 1744 г. Мопертюи обставил с большой помпой свое сообщение Парижской АН, в котором говорилось, что математика до этого времени повсюду использовалась в самых незначительных целях, а уж он-то найдет ей достойное применение, выведя все законы природы непосредственно из божьих атрибутов. При этом под названием “принцип наименьшего действия” он формулирует принцип, из-за которого ни одна собака с печи не слезет, в то время как эйлеровский охватывает всю механику…

Мопертюи обнародовал свою теорему незадолго до отъезда из Парижа в Берлин, чтобы стать там президентом Академии, а затем написал о ней второй трактат в берлинских Memoiren. Тон, которым он был написан, естественно, вскоре встретил возражения…

…но особенно возмущался некий математик Кениг. Этот последний был странным человеком: в юности он вместе с тем же Мопертюи и Клеро учился у старого Иоганна Бернулли в Базеле, а затем втянулся в демагогические волнения…, направленные против аристократических тенденций, и был изгнан из своего родного города Берна...

И вот он напал на Мопертюи в Actis Eruditorum, одной очень известной газете... К этой статье Кениг присоединил отрывок из письма Лейбница..., в котором Лейбниц дает понять, что он подробно изучил действие, и что оно всегда будет минимумом...

Разразился крупный скандал, и от Кенига потребовали оригинал письма. Но у того была лишь копия, доставшаяся ему от некоего Хинцеля, повешенного при упомянутых волнениях в Цюрихе... Позднее Кениг обнародовал письмо целиком, оно содержит немало интересного, однако, кажется, как будто он выдумал добавление о минимуме действия лишь, чтобы позлить Мопертюи. Эйлеру поручили написать сочинение и вывести Кенига на чистую воду, и Берлинская Академия торжественно подтвердила разоблачение обмана на одном из своих заседаний...

...Эйлер повел себя так, что принцип Мопертюи он все время подменял своим принципом наименьшего действия, при защите отождествил оба и сказал, что уж если доказанный им для отдельных случаев принцип так важен, то что можно сказать о принципе Мопертюи, которого он выставил открывателем всех законов механики и физики".

B. Леонард Эйлер – один из творцов гидродинамики. Уравнения движения жидкости можно представить в двух различных формах: или мы исследуем скорость, давление и плотность во всех точках течения, или же мы исследуем историю отдельной частицы жидкости. Уравнения, которые получаются этими двумя способами, обычно называются эйлеровой и лагранжевой формами уравнений гидродинамики (хотя обе принадлежат Эйлеру).

Наиболее популярны уравнения Эйлера, описывающие движение идеальной жидкости:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\, v\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho\,\frac{\partial V}{\partial x}\,. \tag{9}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$ – точка трехмерного евклидова пространства, $v(x,t)$ – поле скоростей частиц жидкости, $\rho(x,t)$ – плотность, $p(x,t)$ – давление, $V(x,t)$ – плотность потенциальной энергии массовых сил. К трем скалярным уравнениям (9) добавляется уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \tag{10}$$

которое выражает закон сохранения массы движущегося объема жидкости. Оно также получено Эйлером. Обычно рассматривают баротропную жидкость, когда давление и плотность связаны некоторым функциональным соотношением. Это дополнительное предположение замыкает систему нелинейных дифференциальных уравнений (9) и (10). Основные гидродинамические результаты Эйлера опубликованы в 1755 г. (Берлин) и 1759 г. (С.-Петербург).

Для баротропной жидкости уравнение (9) можно представить в виде уравнения Ламба

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\operatorname{rot} v) \times v = -\frac{\partial h}{\partial x}\,, \tag{11}$$

где $h = v^2/2 + \mathscr{P} + V$, а $\mathscr{P}$ – функция давления ($\rho^{-1}\,dp = d\mathscr{P}$). Функция h называется функцией Бернулли. В стационарном случае h постоянна на линиях тока (теорема Д. Бернулли). Этот факт был положен Даниилом Бернулли в основу своей “Гидродинамики”, опубликованной в 1738 г.

Стационарные течения идеальной жидкости хорошо изучены. Во-первых, векторные поля v и $\operatorname{rot} v$ касаются поверхностей Бернулли

$$B_c = \{x : h(x) = c\}.$$

Эти поверхности регулярны, если поле v неколлинеарно своему ротору. Более того, поля

$$v \quad \text{и} \quad (\operatorname{rot} v)/\rho$$

коммутируют. Этот факт отмечен В. И. Арнольдом [10] для однородной несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) и автором [11] в общем случае. Следовательно, если поверхности Бернулли ограничены, то они диффеоморфны двумерным торам, причем частицы жидкости движутся условно-периодически. Если же поля v и $\operatorname{rot} v$ коллинеарны, то течение в замкнутой области, как правило, будет хаотическим.

С. В математической теории упругости Эйлер вывел дифференциальное уравнение для упругой кривой (эластики) и дал классификацию ее форм равновесий (1744 г.).

Определил наименьшую высоту колонны, при которой она может изогнуться под действием своего собственного веса или приложенной извне нагрузки. Лагранж следовал его теории и применил ее к определению наиболее надежной формы колонн. Эти работы – первые исследования по устойчивости упругих систем, в которых ключевую роль играет энергетический критерий устойчивости (для систем с конечным числом степеней свободы – это упоминавшаяся выше теорема Лагранжа–Дирихле).

Наконец, вслед за Тейлором, Эйлер получил дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня, нашел собственные функции и вывел уравнения частот для различных краевых условий. Параллельно с ним эти результаты получил и Даниил Бернулли.

D. Работы Эйлера по небесной механике и астрономии носят, в основном, прикладной характер (например, его теория движения Луны, по которой были составлены практические таблицы). Однако имеются результаты Эйлера по задаче трех тел, которые вошли в "золотой фонд" небесной механики. Во-первых, это частные движения трех гравитирующих тел, которые все время остаются на одной подвижной прямой. Далее, Эйлер проинтегрировал плоскую задачу двух неподвижных центров, когда движущаяся частица притягивается двумя неподвижными точками. Если переносить один из притягивающих центров в бесконечность и согласованным образом увеличивать его массу, то получим важную предельную интегрируемую задачу Кеплера в однородном силовом поле. Эта задача имеет существенное значение в квантовой механике: атом водорода в однородном электрическом поле. С ней связан "эффект Штарка" – расщепление спектральных линий атомов в электрическом поле.

Впоследствии Лагранж показал интегрируемость задачи двух центров в пространстве, а также обобщил ее на случай, когда движущаяся точка притягивается (или отталкивается) упругой силой, направленной к точке, лежащей посредине между центрами.

О научном стиле Эйлера удачно сказал Якоби в своих "Лекциях по динамике": "Работы Эйлера имеют вообще ту большую заслугу, что им везде приведены по возможности все случаи, в которых задачи могут быть решены полностью с помощью данных способов и средств. ... как правило, когда удается к примерам Эйлера присоединить какой-нибудь новый пример, то это является обогащением науки".

В связи с этим высказыванием упомянем замечательный результат С. В. Болотина о неинтегрируемости плоской задачи n неподвижных центров при $n \geqslant 3$ [12].

Мы сейчас перекинем мостики к некоторым новым исследованиям в этих областях, где идеи и методы Эйлера имеют существенное значение.

4. Гидродинамика гамильтоновых систем

Гидродинамические уравнения Эйлера (9) возникают естественным образом при изучении инвариантных многообразий гамильтоновых систем, однозначно проектирующихся на конфигурационное пространство.

Пусть M^n – n-мерное конфигурационное многообразие механической системы с локальными координатами $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\Gamma = T^*M$ – фазовое пространство (кокасательное расслоение M), $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – канонические импульсы в точке $x \in M$ (это ковекторы – элементы пространства T_x^*M, двойственного касательному пространству T_xM), $H(x, y, t)$ – функция Гамильтона (заданная на Γ и зависящая, вообще говоря, от времени t). Эволюция определяется системой канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial y_j}, \quad \dot{y}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{12}$$

Пусть Σ_t^n – многообразие в фазовом пространстве Γ, однозначно проектирующееся на конфигурационное пространство M. В канонических координатах x, y оно задается уравнениями

$$y = u(x, t), \tag{13}$$

где u – некоторое ковекторное поле на M, зависящее, возможно, от времени. Свойство *инвариантности* многообразия Σ_t означает следующее. Пусть $x(t)$, $y(t)$ – решение уравнений Гамильтона с начальными данными

$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = y_0.$$

Если точка (x_0, y_0) принадлежит Σ_{t_0}, то

$$(x(t), y(t)) \in \Sigma_t$$

для всех значений t.

Несложно проверить, что критерий инвариантности многообразия Σ_t состоит в том, что поле (13) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\operatorname{rot} u)v = -\frac{\partial h}{\partial x}\,, \tag{14}$$

где $\operatorname{rot} u = \partial u/\partial x - (\partial u/\partial x)^T$ – кососимметрическая $n\times n$-матрица (ротор ковекторного поля u),

$$v(x,t) = \frac{\partial H}{\partial y}\bigg|_{y=u(x,t)}$$

– векторное поле на M, $h(x,t) = H(x, u(x,t), t)$ – функция на M, зависящая от времени t как параметра.

Для "натурального" гамильтониана

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x,t)\, y_i y_j + V(x_1,\ldots,x_n,t)$$

уравнение (14) имеет следующий явный вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j,k} g_{jk}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)u_k \\ &\qquad = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j,k} g_{jk}u_j u_k\right) - \frac{\partial V}{\partial x_i}\,, \qquad i = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{15}$$

Это – нелинейная система n дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно n неизвестных функций $u_1,\ldots,u_n$.

Пусть, например, $n = 3$ и $g_{ij} = \delta_{ij}$ (символы Кронекера). Тогда $u = v$ и уравнения (15) будут иметь вид гидродинамических уравнений Эйлера, представленных в форме Ламба. Функцию h будем называть функцией Бернулли.

Движения рассматриваемой системы, фазовые траектории которых лежат на Σ, находятся как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений на M:

$$\dot{x} = v(x,t), \qquad x \in M. \tag{16}$$

Эти соображения позволяют применить идеи и методы гидродинамики к изучению гамильтоновых систем [13]. С этой целью введем *вихревые многообразия* как естественное обобщение вихревых линий в классической гидродинамике. Собственные векторы матрицы $\operatorname{rot} u$ с нулевым собственным значением назовем *вихревыми векторами.* В каждой точке $x \in M$ в любой момент времени t касательные вихревые векторы образуют линейное пространство. Возникает распределение касательных плоскостей на M. Можно показать (в предположении постоянства размерности плоскостей вихревых векторов), что это распределение интегрируемо. Интегральные многообразия этого распределения естественно назвать вихревыми многообразиями.

Оказывается, вихревые многообразия “вморожены” в поток системы дифференциальных уравнений (16) на M. Другими словами, преобразования из этого потока переводят вихревые многообразия в вихревые многообразия. Это – многомерный вариант классической теоремы Гельмгольца–Томсона из гидродинамики идеальной жидкости. Справедливо также следующее естественное обобщение теоремы Бернулли: в стационарном случае функция Бернулли h постоянна как на линиях тока (интегральных кривых векторного поля v на M), так и на вихревых многообразиях.

Рассмотрим потенциальное решение уравнения Ламба (14), когда $u = \partial S/\partial x$, где S – функция от координат x и времени t. В этом случае уравнение (14) эквивалентно соотношению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) = f(t). \tag{17}$$

Тривиальная калибровка

$$S \mapsto S - \int f(t)\, dt$$

позволяет обнулить правую часть уравнения (17), которое превращается в известное уравнение Гамильтона–Якоби. В гидродинамике (17) называется интегралом Лагранжа–Коши.

Классический метод Якоби интегрирования дифференциальных уравнений Гамильтона (12) сводится к отысканию *полного* решения уравнения (17), невырожденно зависящего еще от n параметров $c_1, \ldots, c_n$:

$$\det\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial c_i\, \partial x_j} \right\| \neq 0.$$

В [14] указано обобщение метода Якоби, основанное на поиске полного решения уравнений Ламба. Приведу простейший вариант теоремы об интегрируемости в стационарном случае при $n = 3$. Пусть известно решение уравнения (14) $u(x, c)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$, такое, что

1) $\operatorname{rot} u \neq 0$,
2) $\left|\dfrac{\partial u}{\partial c}\right| \neq 0$,
3) $d_x H(x, u(x, c)) \neq 0$.

Тогда уравнение Гамильтона интегрируется в квадратурах.

Это утверждение доказывается с помощью теории "последнего множителя" Эйлера–Якоби. Согласно Якоби, "...теория Эйлера по введению множителя в интегральное уравнение является одним из его самых замечательных открытий в интегральном исчислении".

Уравнение (14) появилось, по-видимому, впервые в вариационном исчислении как *условие согласованности полей экстремалей* (которые, как известно, описываются каноническими уравнениями Гамильтона). Правда, там обычно рассматриваются лишь *самосопряженные* (потенциальные) поля. И.С. Аржаных [15] обобщил уравнение Ламба на негамильтоновы системы (в частности, неголономные) и пытался распространить на них метод Гамильтона–Якоби. Однако до работы [13] уравнение (14) обычно не связывали с идеями гидродинамики. Систематическое изложение аналогий, существующих между гидродинамикой, геометрической оптикой, механикой и термодинамикой, можно найти в книге [16].

5. Вихревая теория волчка Эйлера

Ключевой вопрос применимости общей теории вихрей из 4 состоит в нахождении инвариантных многообразий, однозначно проектирующихся на конфигурационное пространство. Этот вопрос легко и естественно решается для волчка Эйлера [17].

Пусть α, β, γ – ортонормированный репер в неподвижном пространстве. Мы будем рассматривать их как векторы в подвижном пространстве, связанном с твердым телом. Тогда они уже не будут постоянными; их эволюция со временем описывается уравнениями Пуассона

$$\dot{\alpha} + \omega \times \alpha = 0, \qquad \dot{\beta} + \omega \times \beta = 0, \qquad \dot{\gamma} + \omega \times \gamma = 0. \tag{18}$$

Эти уравнения вместе с динамическими уравнениями Эйлера (8) образуют полную систему уравнений движения (в предположении, что момент сил M, действующих на тело, – известная функция от положения и угловой скорости твердого тела). В случае $M = 0$ эти уравнения допускают следующие интегралы:

$$(I\omega, \alpha) = c_1, \qquad (I\omega, \beta) = c_2, \qquad (I\omega, \gamma) = c_3, \tag{19}$$

выражающие свойство неизменности вектора кинетического момента тела $K = I\omega$ как вектора в неподвижном пространстве.

Интегралы (19) имеют прозрачную групповую интерпретацию. Конфигурационное пространство волчка, вращающегося вокруг неподвижной точки, – это группа поворотов трехмерного евклидова пространства $\mathrm{SO}(3)$. Вращениям волчка с постоянной угловой скоростью $\omega = \alpha$ отвечает *правоинвариантное* векторное поле скоростей на $\mathrm{SO}(3)$. Фазовый поток этого поля состоит, очевидно, из *левых* сдвигов на группе $\mathrm{SO}(3)$. Однако кинетическая энергия волчка $T = (I\omega, \omega)/2$ инвариантна при левых сдвигах. Следовательно, по теореме Нётер, уравнения движения допускают интеграл

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \omega}, \alpha\right) = (I\omega, \alpha) = \mathrm{const}.$$

Эти соображения фактически содержатся в краткой заметке А. Пуанкаре [18]. Там же введены более общие системы на группах Ли с левоинвариантной метрикой (кинетической энергией), о которых будет идти речь ниже.

Из формул (19) вытекает очевидное равенство

$$I\omega = c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma. \tag{20}$$

Оно позволяет представить скорость вращения волчка как однозначную функцию на конфигурационном пространстве. Другими словами, векторное равенство (20) задает трехпараметрическое семейство трехмерных стационарных инвариантных многообразий, однозначно проектирующихся на конфигурационное пространство $M = \mathrm{SO}(3)$. В дальнейшем рассматривается нетривиальный случай, когда $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \neq 0$.

Для упрощения формул свяжем с твердым телом трехгранник, образованный главными осями инерции тела относительно точки закрепления. В этих осях тензор инерции приводится к диагональному виду: $I = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$. Пусть ω_1, ω_2, ω_3 – проекции вектора угловой скорости ω на эти подвижные оси. Тогда вид кинетической энергии упрощается:

$$T = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right). \tag{21}$$

Для того чтобы представить инвариантные многообразия (19) в канонических переменных, введем в качестве обобщенных координат на группе SO(3) известные *углы Эйлера* ϑ, φ, ψ. Они однозначно определяют положение главных осей инерции твердого тела относительно неподвижного трехгранника. Угловые скорости выражаются через углы Эйлера и их производные с помощью *кинематических формул Эйлера* (1760):

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot\psi \sin\vartheta \sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi,\\
\omega_2 &= \dot\psi \sin\vartheta \cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi,\\
\omega_3 &= \dot\psi \cos\vartheta + \dot\varphi.
\end{aligned} \tag{22}$$

Они позволяют представить кинетическую энергию (21) как положительно определенную квадратичную форму по обобщенным скоростям $\dot\vartheta$, $\dot\varphi$, $\dot\psi$. Сопряженные канонические импульсы вводим по обычному правилу:

$$p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \dot\psi}, \qquad p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot\theta}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}.$$

Используя (21) и (22), получим следующие формулы:

$$\begin{aligned}
p_\psi &= I_1\omega_1\frac{\partial\omega_1}{\partial\dot\psi} + I_2\omega_2\frac{\partial\omega_2}{\partial\dot\psi} + I_3\omega_3\frac{\partial\omega_3}{\partial\dot\psi}\\
&= I_1\omega_1\sin\theta\sin\varphi + I_2\omega_2\sin\vartheta\cos\varphi + I_3\omega_3\cos\theta,\\
p_\theta &= I_1\omega_1\cos\varphi - I_2\omega_2\sin\varphi,\\
p_\varphi &= I_3\omega_3.
\end{aligned}$$

С учетом формулы (20) и известных выражений компонент векторов α, β, γ через углы Эйлера получаем окончательный вид инвариантных многообразий волчка Эйлера в канонических переменных:

$$\begin{aligned}
p_\psi &= c_3,\\
p_\vartheta &= c_1\cos\psi + c_2\sin\psi,\\
p_\varphi &= c_1\sin\vartheta\sin\psi - c_2\sin\vartheta\cos\psi + c_3\cos\vartheta.
\end{aligned} \tag{23}$$

Интересно отметить, что эти формулы не зависят от моментов инерции тела I_1, I_2, I_3.

Поскольку на волчок не действуют никакие силы, то неподвижный репер α, β, γ мы можем выбирать произвольно. Направим, например, вектор γ вдоль постоянного в пространстве вектора кинетического момента $K = I\omega$. Тогда, очевидно,

$$c_1 = c_2 = 0, \qquad c_3 = k, \qquad k = |K|.$$

При фиксированном k инвариантные многообразия (23) задают на группе $\mathrm{SO}(3)$ динамическую систему

$$\dot{x} = v(x), \qquad x = (\psi, \vartheta, \varphi).$$

С использованием кинематических формул Эйлера эти уравнения легко записать в явном виде:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= k\left(\frac{\sin^2\varphi}{I_1} + \frac{\cos^2\varphi}{I_2}\right), \\ \dot{\vartheta} &= k\left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right)\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi, \\ \dot{\varphi} &= k\cos\theta\left(\frac{1}{I_3} - \frac{\sin^2\varphi}{I_1} - \frac{\cos^2\varphi}{I_2}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Их фазовый поток задает стационарное “течение” воображаемой жидкости на группе $\mathrm{SO}(3)$. Опишем его основные свойства.

1°. “Внутренняя” метрика на $\mathrm{SO}(3)$, задаваемая кинетической энергией волчка, позволяет вычислить ротор векторного поля v (поля (24)). Это поле – вихревое. Рассматриваемое как поле скоростей, оно порождает вращение твердого тела с угловой скоростью $\omega = \mu\gamma$, $\mu = \mathrm{const}$ и коммутирует с полем v. В частности, поле $\operatorname{rot} v$ правоинвариантно и все вихревые линии замкнуты. Расслоение группы $\mathrm{SO}(3)$ вихревыми линиями совпадает с известным в топологии *расслоением Хопфа.*

2°. Уравнения (24) допускают интегральный инвариант

$$\iiint \sin\vartheta\, d\psi\, d\theta\, d\varphi, \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi.$$

Он задает на группе $\mathrm{SO}(3)$ меру, инвариантную относительно левых и правых сдвигов.

Этот факт позволяет говорить о сохранении “массы” воображаемой жидкости на группе SO(3). Ее плотность совпадает с плотностью биинвариантной меры (единственной с точностью до постоянного множителя).

3°. Интеграл Бернулли h равен

$$\frac{1}{2}\,k^2(I^{-1}\gamma, \gamma).$$

Критические точки функции h – орбиты постоянных вращений волчка вокруг главных осей инерции (с фиксированным значением кинетического момента K), а критические значения совпадают со значениями энергии на этих вращениях. Если c не является критическим значением функции h, то поверхность Бернулли

$$B_c = \{x \in \mathrm{SO}(3) : h(x) = c\}$$

– двумерный тор. Векторные поля v и $\operatorname{rot} v$ касаются B_c, коммутируют и линейно независимы в каждой точке. В частности, движение по этому тору будет условно-периодическим.

Эти результаты переносятся (с естественными изменениями) на общий случай систем на группах Ли с левоинвариантной кинетической энергией. Пусть G – связная группа Ли – конфигурационное пространство механической системы, а $T(\dot{x}, x)$ – кинетическая энергия, инвариантная относительно всех левых сдвигов на группе G.

Пусть $w_1, \ldots, w_n$ – базис правоинвариантных векторных полей на G. Их фазовые потоки – семейства левых сдвигов на группе G. Поэтому (по теореме Нётер) уравнения движения допускают n независимых первых интегралов

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \cdot w_1 = c_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \cdot w_n = c_n,$$

линейных относительно скорости $\dot{x}$. Из этих соотношений можно выразить скорость системы в виде однозначной функции от положения x и параметров $c = (c_1, \ldots, c_n)$:

$$\dot{x} = v_c(x), \qquad x \in G. \tag{25}$$

Напомним, что на каждой группе Ли имеется единственная (с точностью до постоянного множителя) мера, инвариантная при всех левых (правых) сдвигах. В случае *унимодулярной* группы эта мера (называемая мерой Хаара) биинвариантна. В частности, все компактные группы унимодулярны.

Теорема 2 [19]. *При фиксированном значении* $c \in \mathbb{R}^n$ *фазовый поток системы* (25) *сохраняет правоинвариантную меру на* G.

Следствие. *Если группа* G *унимодулярная, то фазовый поток системы* (25) *сохраняет меру Хаара на* G.

Это утверждение обобщает свойство 2° волчка Эйлера.

Развиваемый подход можно применить и к бесконечномерной группе диффеоморфизмов гладкого многообразия Q, сохраняющих элемент объема. Чтобы привязать последующие построения к обычной гидродинамике идеальной жидкости (скажем, с периодическими граничными условиями), в качестве Q можно взять, например, трехмерный тор с "плоской" метрикой и угловыми координатами $x = (x_1, x_2, x_3)$. Эта группа обычно обозначается $\mathrm{SDiff}\, Q$. Алгебра Ли группы $\mathrm{SDiff}\, Q$ состоит из касательных векторных полей на Q с нулевой дивергенцией. Определим скалярное произведение двух элементов этой алгебры (т. е. двух соленоидальных векторных полей v_1 и v_2) с помощью формулы

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int (v_1, v_2)\, d^3x.$$

Рассмотрим теперь течение однородной идеальной жидкости в области Q; для простоты будем считать плотность жидкости равной единице. Уравнение неразрывности приводит к условию несжимаемости: $\operatorname{div} v = 0$. Течения жидкости описываются кривыми g^t на группе $\mathrm{SDiff}\, Q$: диффеоморфизм $g^t \colon Q \to Q$ переводит каждую частицу из ее начального положения в положение, которое она занимает в момент времени t.

Несложно проверить, что кинетическая энергия жидкости

$$T = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle \tag{26}$$

– *правоинвариантная* риманова метрика на группе $\mathrm{SDiff}\, Q$. Свойство правоинвариантности отличает эту систему от волчка Эйлера и создает дополнительные трудности при ее изучении.

В 1960-е годы было подмечено следующее важное обстоятельство: течения идеальной несжимаемой жидкости – геодезические линии метрики (26). Таким образом, идеальная несжимаемая жидкость – это бесконечномерный "волчок Эйлера" с правоинвариантной метрикой на группе $\mathrm{SDiff}\, Q$ [20]–[22]. Это – следствие принципа наименьшего действия, который, если угодно, можно считать определением динамики идеальной жидкости.

Как известно, правые сдвиги на группе Ли включаются в фазовые потоки левоинвариантных полей. Оказывается, левоинвариантные поля $u(x,t)$ на группе $\mathrm{SDiff}\,Q$ – это соленоидальные поля на Q, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{rot}(v \times u). \tag{27}$$

Оно выражает свойство вмороженности интегральных кривых поля u в течение жидкости. С учетом несжимаемости уравнение (27) эквивалентно "уравнению Эйлера"

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [v, u],$$

где $[\,\cdot\,,\cdot\,]$ – коммутатор векторных полей. Следовательно, снова по теореме Нётер, уравнения геодезических на группе $\mathrm{SDiff}\,Q$ допускают бесконечную серию линейных законов сохранения:

$$\langle u, v\rangle = \int_Q (u, v)\, d^3x = \mathrm{const}. \tag{28}$$

Это утверждение (установленное в [16, доп. 1]) обобщает старую теорему Ж.-Ж. Моро, в которой $u = \mathrm{rot}\, v$.

Поскольку кинетическая энергия (26) представляет собой невырожденную квадратичную форму, то наличие бесконечной серии интегралов (28) позволяет надеяться найти скорость течения v как функцию на группе $\mathrm{SDiff}\,Q$. Отличие от левоинвариантного случая состоит в том, что фигурирующие в (28) векторные поля u не заданы априори, а их надо искать как решения уравнения (27). Если эту задачу считать решенной, то на группе $\mathrm{SDiff}\,Q$ естественным образом возникает бесконечномерная динамическая система, фазовый поток которой схож по своим свойствам со стационарным течением невязкой жидкости. Было бы интересным изучить эту систему с гидродинамической точки зрения, изложенной в 4 (вихревые векторы и многообразия, поверхности Бернулли, инвариантные меры, ...). Такой подход можно назвать *вторичной гидродинамикой*. Первые (но далеко не исчерпывающие) шаги в этом направлении сделаны в работе [23].

6. Энергетические критерии устойчивости

Как уже было сказано, Эйлер впервые изучал свойства упругих систем мало отклоняться от состояния равновесия при малых возмущающих воздействиях. Современная теория устойчивости упругих систем основана на распространении классической теории устойчивости на континуальные системы и может рассматриваться как часть теории дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве.

Для отыскания условий устойчивости упругих систем в потенциальном силовом поле обычно используют *энергетический подход*, основанный на теореме Лагранжа–Дирихле: положение равновесия устойчиво, если оно является точкой строгого локального минимума потенциальной энергии. Эта энергия – функционал от поля перемещений частиц упругой системы, зависящий еще от некоторых параметров (нагрузка, длина стержня, жесткость при изгибе и т. д.). Область устойчивости в пространстве параметров определяется условием, что вторая вариация потенциальной энергии – положительно определенная квадратичная форма. На границе области устойчивости эта форма становится вырожденной и, как правило, происходит бифуркация положений равновесия.

На практике широко применяют аппроксимацию континуальных систем конечномерными системами. Еще Лагранж заменял упругую среду набором большого числа малых частиц, упруго взаимодействующих между собой. Кстати сказать, с физической точки зрения такая модель даже ближе к действительности. В соответствии с этим замечанием мы обсудим некоторые новые идеи исследования устойчивости тривиального решения линейной системы

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{29}$$

допускающей квадратичный первый интеграл

$$f = \frac{1}{2}\,(Bx, x). \tag{30}$$

Матрицы A и B (B симметрична) будем считать *невырожденными.* Практически все, сказанное ниже, можно перенести на бесконечномерный случай с необходимыми предосторожностями.

Поскольку система (29) линейная, то устойчивость по Ляпунову положения равновесия $x = 0$ означает ограниченность всех ее решений. Квадратичный интеграл (30) можно интерпретировать как интеграл энергии. Конечно, критерий устойчивости равновесия $x = 0$ можно сформулировать через спектральные свойства матрицы A. Однако, имея в виду энергетический подход, полезно связать свойство устойчивости также и со свойствами квадратичного интеграла (30) (например, с его сигнатурой).

Теорема 3 [24]. *Справедливы следующие заключения*:

1) n *четно*;
2) *спектр матрицы* A *симметричен относительно вещественной и мнимой осей*;
3) $\operatorname{div}(Ax) = \operatorname{tr} A = 0$;
4) *если индекс инерции квадратичной формы* (30) *нечетный*, *то равновесие* $x = 0$ *неустойчиво*;
5) *система* (29) *имеет* $n/2$ *независимых квадратичных интегралов*;
6) *равновесие* $x = 0$ *устойчиво в том и только том случае*, *когда* (29) *допускает положительно определенный квадратичный интеграл.*

Всеми этими свойствами обладают линейные гамильтоновы системы. Оказывается, это замечание не случайно: система (29) в действительности гамильтонова, причем f – функция Гамильтона. Только эта система представлена, вообще говоря, не в канонической форме. Соответствующая симплектическая структура задается билинейной формой

$$\omega(x', x'') = (\Omega x', x''), \qquad \Omega = BA^{-1}.$$

Действительно, эта билинейная форма, очевидно, невырождена. Надо показать, что Ω – кососимметрическая матрица. Для доказательства воспользуемся равенством $A^T B = -BA$, которое выражает свойство квадратичной формы (30) быть первым интегралом системы (29). Итак,

$$A^T = -BAB^{-1}, \qquad \left(A^T\right)^{-1} = -BA^{-1}B^{-1}.$$

Поэтому

$$\Omega^T = \left(A^T\right)^{-1} B = -\left(BA^{-1}B^{-1}\right)B = -BA^{-1} = -\Omega.$$

После этого наблюдения систему (29) уже совсем легко представить в гамильтоновой форме:

$$\omega(\dot{x}, \cdot\,) = (\Omega\dot{x}, \cdot\,) = (Bx, \cdot\,) = df(\,\cdot\,).$$

Заключение 4) теоремы 3 обобщает классическую теорему Томсона о невозможности гироскопической стабилизации равновесия с нечетной степенью неустойчивости Пуанкаре (с нечетным индексом инерции потенциальной энергии). Его можно представить в несколько иной форме, если ввести *степень неустойчивости* u системы (29) как количество собственных значений матрицы A в правой комплексной полуплоскости. Пусть i^- (i^+) – отрицательный (положительный) индекс инерции квадратичной формы f. Тогда

$$u \equiv i^- \pmod 2. \tag{31}$$

Так как $i^- + i^+ = n$ и n четно, то в этом сравнении i^-, конечно, можно заменить на i^+.

Однако, как показано в [25], сравнение (31) справедливо и в более общем случае, когда

$$\dot{f} = (BAx, x) \leqslant 0. \tag{32}$$

Здесь n уже может быть и нечетным. Этот случай отвечает системам с диссипацией энергии. Если диссипация *полная* (квадратичная форма (32) отрицательно определена), то $u = i^-$ (теорема Островского–Шнейдера [26]).

Обобщенную теорему Томсона (31) можно распространить и на некоторые случаи, когда матрица A вырождена. Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ назовем *изотропным*, если $(Bx, x) = 0$. Конечно, если форма f положительно или отрицательно определена, то изотропным будет только нулевой вектор.

Теорема 4 [27]. *Пусть n четно, $|B| \neq 0$, i^- (i^+) нечетно и $Ax \neq 0$ для всех изотропных $x \neq 0$. Тогда матрица A имеет пару ненулевых вещественных чисел $\pm\lambda$ с изотропными собственными векторами.*

Более содержательным и сложным выглядит вопрос об оценке *степени устойчивости* s: это количество пар чисто мнимых собственных значений матрицы A. Снова считаем A и B невырожденными матрицами.

Теорема 5 [28]. *Справедлива оценка*

$$|i^+ - i^-| \leqslant 2l,$$

где l – количество пар чисто мнимых собственных чисел матрицы A с жордановыми клетками нечетного порядка.

Следствие 1. *Справедлива оценка*

$$|i^+ - i^-| \leqslant 2s. \tag{33}$$

Следствие 2. *Пусть индекс i^- (или i^+) равен единице. Тогда спектр A состоит из пары вещественных ненулевых чисел $\pm\lambda$ и $(n-2)/2$ пар чисто мнимых собственных значений с простыми элементарными делителями.*

Последнее утверждение описывает механизм потери устойчивости в типичном случае, когда теряется положительная определенность полной энергии. Это имеет прямое отношение и к рассмотренным Эйлером задачам о потере устойчивости равновесий упругих стержней.

Пусть $2i^- \leqslant n$. Тогда, с учетом соотношений $i^+ + i^- = n$ и $u + s = n/2$, неравенство (33) эквивалентно неравенству

$$u \leqslant i^-. \tag{34}$$

В таком виде оно было установлено ранее в работах [29], [30] для гамильтоновых систем частного вида, описывающих линейную динамику механических систем в потенциальном поле с дополнительными гироскопическими силами. В работе А. А. Шкаликова [31] содержится уточнение неравенства (34), основанное на обобщении теоремы Понтрягина о самосопряженных операторах в пространствах с индефинитной метрикой. Наш подход, применяемый к линейным гамильтоновым системам общего вида, использует теорию нормальных форм Вильямсона.

7. Задача двух центров в пространствах постоянной кривизны

Оказывается, классический результат Эйлера об интегрируемости задачи двух неподвижных центров допускает любопытное обобщение на пространства постоянной кривизны. Но сначала надо дать пояснения о гравитации в этих пространствах.

Хорошо известно, что потенциал гравитационного взаимодействия в обычном трехмерном евклидовом пространстве обладает двумя фундаментальными свойствами. С одной стороны, это – гармоническая функция (зависит лишь от расстояния и удовлетворяет уравнению Лапласа), а с другой стороны только этот потенциал и еще потенциал упругой пружины порождают центральные силовые поля, в которых все ограниченные орбиты частицы замкнуты (теорема Бертрана). Эти свойства естественным образом переносятся на более общий случай трехмерных пространств постоянной кривизны (трехмерная сфера S^3 и пространство Лобачевского L^3).

Для определенности записи рассмотрим трехмерную сферу. Пусть материальная частица m единичной массы движется в поле сил с потенциалом V, зависящим лишь от расстояния между этой частицей и фиксированной точкой $M \in S^3$. Эта задача – аналог классической задачи о движении в центральном поле. Пусть ϑ – длина дуги большого круга, соединяющего точки m и M, измеряемая в радианах. Тогда V зависит только от угла ϑ. Для определения гравитационного потенциала на сфере уравнение Лапласа следует заменить уравнением Лапласа–Бельтрами:

$$\Delta V = \sin^{-2} \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2 \theta \cdot \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) = 0.$$

Оно сразу же решается:

$$V = -\gamma \operatorname{ctg} \theta + \alpha, \qquad \alpha, \gamma = \text{const}.$$

Аддитивная константа α несущественна; положим далее $\alpha = 0$. Для определенности рассмотрим случай $\gamma > 0$ (тогда точка M будет притягивать точку m). Параметр γ играет роль гравитационной постоянной, умноженной на массу притягивающего центра M. В дополнение к притягивающему центру M это силовое поле имеет отталкивающий центр M' в антиподальной точке (где $\vartheta = \pi$).

В общем случае, когда V – произвольная функция от угла ϑ, траектории точки m лежат на двумерных сферах S^2, содержащих точки M и M'.

Естественно рассмотреть также обобщенную задачу Бертрана: среди всех потенциалов $V(\vartheta)$ выделить те, в поле которых почти все орбиты точки m на двумерной сфере S^2 замкнуты. Ее решением (как и в классическом случае) являются два потенциала:

$$V_1 = -\gamma \operatorname{ctg} \vartheta, \quad V_2 = \frac{k}{2} \operatorname{tg}^2 \theta, \qquad \gamma, k = \text{const}.$$

Первый из них – гравитационный потенциал, а второй – аналог потенциал Гука (k – “коэффициент упругости”).

Движение частицы в центральном гравитационном поле подчиняется обобщенным законам Кеплера. В частности, ее орбиты – квадрики на S^2 – линии пересечения сферы с конусом второго порядка, вершина которого совпадает с центром сферы.

Все эти результаты (с различных точек зрения и в разной общности) получены рядом авторов, зачастую не знавших о существовании работ предшественников. По-видимому, первой (и очень обстоятельной) работой на эту тему была забытая статья известного немецкого геометра Вильгельма Киллинга. Эти работы собраны и систематизированы А. В. Борисовым и И. С. Мамаевым в сборнике [32].

Рассмотрим теперь обобщенную задачу двух неподвижных центров. Речь идет о движении точки по двумерной сфере в поле с потенциалом $V_1 + V_2$, где

$$V_1 = \gamma_1 \operatorname{ctg} \vartheta_1, \quad V_2 = \gamma_2 \operatorname{ctg} \vartheta_2, \qquad \gamma_1, \gamma_2 = \mathrm{const}.$$

Здесь ϑ_1, ϑ_2 – дуги большого круга, проходящие через неподвижные гравитирующие центры M_1, M_2 и движущуюся частицу.

Уравнения движения в форме Гамильтона решаются разделением переменных в ортогональных *сфероконических* координатах на S^2. Это – результат Киллинга. Наше наблюдение состоит в том, что задача останется вполне интегрируемой, если добавить упругую силу (с обобщенным гуковским потенциалом) с центром, лежащим ровно посредине между M_1 и M_2 [33]. Этот результат вполне аналогичен добавлению Лагранжа к классической задаче Эйлера. Естественно, что все сказанное справедливо и в пространстве Лобачевского.

Затронутое выше – это небольшая часть творческого наследия Леонарда Эйлера. А ведь мы не касались его выдающихся результатов в анализе, геометрии и теории чисел! Осознавая все это, закончим известным призывом Лапласа: “Читайте Эйлера, изучайте Эйлера. Он наш общий учитель!”

Список литературы

[1] А. Н. Крылов, “Леонард Эйлер”, *Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Т. 1. Ч. 2. Научно-популярные статьи. Биографические характеристики*, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1951, 192–217.

[2] Г. Харди, *Расходящиеся ряды*, ИЛ, М., 1951 MR 0067217; пер. с англ.: G. H. Hardy, *Divergent series*, Clarendon, Oxford, 1949 MR 0030620, Zbl 0032.05801.

[3] А. Н. Кузнецов, “Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений”, *Функц. анализ и его прилож.*, **6**:2 (1972), 41–51 Mi faa2494, MR 315189, Zbl 0259.34005; англ. пер.: A. N. Kuznetsov, “Differentiable solutions to degenerate systems of ordinary equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **6**:2 (1972), 119–127 doi 10.1007/BF01077515.

[4] А. Н. Кузнецов, “О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением”, *Функц. анализ и его прилож.*, **23**:4 (1989), 63–74 Mi faa1068, MR 1035375, Zbl 0717.34004; англ. пер.: A. N. Kuznetsov, “Existence of solutions entering at a singular point of an autonomous system having a formal solution”, *Funct. Anal. Appl.*, **23**:4 (1989), 308–317 doi 10.1007/BF01078945.

[5] Ж.-П. Рамис, *Расходящиеся ряды и асимптотическая теория*, Ин-т компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2002; пер. с франц.: J.-P. Ramis, *Séries divergentes et théories asymptotiques*, Panoramas et Synthèses, **121**, Soc. Math. France, Paris, 1993 MR 1272100, Zbl 0830.34045.

[6] В. В. Козлов, “Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа–Дирихле”, *ПММ*, **50**:6 (1986), 928–937 MR 922185, Zbl 0631.70018, ADS 1986PriMM..50..928K; англ. пер.: V. V. Kozlov, “Asymptotic motions and the inversion of the Lagrange–Dirichlet theorem”, *J. Appl. Math. Mech.*, **50**:6 (1986), 719–725 doi 10.1016/0021-8928(86)90079-1.

[7] В. В. Козлов, В. П. Паламодов, “Об асимптотических решениях уравнений классической механики”, *Докл. АН СССР*, **263**:2 (1982), 285–289 MR 650153, Zbl 0504.70018; англ. пер.: V. V. Kozlov, V. P. Palamodov, “On asymptotic solutions of the equations of classical mechanics”, *Soviet Math. Dokl.*, **25**:2 (1982), 335–339.

[8] В. В. Козлов, С. Д. Фурта, *Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений*, Изд-во МГУ, М., 1996 MR 1457796, Zbl 0949.34003.

[9] К. Г. Я. Якоби, *Лекции по аналитической механике*, Ин-т компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2006; пер. с нем.: C. G. J. Jacobi, *Vorlesungen über analytische Mechanik*, Dokumente

Gesch. Math., **8**, Deutsche Mathematiker Vereinigung, Freiburg, 1996 MR 1414679, Zbl 0867.01051.

[10] В. И. Арнольд, "О топологии трехмерных стационарных течений идеальной жидкости", *ПММ*, **30**:1 (1966), 183–185 MR 0235578, Zbl 0156.23002; англ. пер.: V. I. Arnol'd, "On the topology of three-dimensional steady flows of an ideal fluid", *J. Appl. Math. Mech.*, **30**:1 (1966), 223–226 doi 10.1016/0021-8928(66)90070-0.

[11] В. В. Козлов, "Замечания о стационарных движениях сплошной среды", *ПММ*, **47**:2 (1983), 341–342 MR 740637, Zbl 0564.76116, ADS 1983PriMM..47..341K; англ. пер.: V. V. Kozlov, "Notes on steady vortex motions of continuous medium", *J. Appl. Math. Mech.*, **47**:2 (1983), 288–289 doi 10.1016/0021-8928(83)90020-5.

[12] С. В. Болотин, "Неинтегрируемость задачи n центров при $n > 2$", *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1. *Матем., мех.*, 1984, № 3, 65–68 MR 749024, Zbl 0551.70008; англ. пер.: S. V. Bolotin, "Nonintegrability of the N-center problem for $N > 2$", *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, **39**:3 (1984), 24–28 Zbl 0653.70016.

[13] В. В. Козлов, "Гидродинамика гамильтоновых систем", *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1. *Матем., мех.*, 1983, № 6, 10–22 MR 0728549, Zbl 0552.76006; англ. пер.: V. V. Kozlov, "The hydrodynamics of Hamiltonian systems", *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, **38**:6 (1983), 9–23 Zbl 0585.76004.

[14] В. В. Козлов, "Об одном обобщении метода Гамильтона–Якоби", *ПММ*, **60**:6 (1996), 929–939 MR 1627715, Zbl 1040.70503; англ. пер.: V. V. Kozlov, "An extension of the Hamilton–Jacobi method", *J. Appl. Math. Mech.*, **60**:6 (1996), 911–920 doi 10.1016/S0021-8928(96)00113-X.

[15] И. С. Аржаных, *Поле импульсов*, Наука, Ташкент, 1965 MR 0203980; англ. пер.: I. S. Arzhanykh, *Momentum fields*, Nat. Lending Lib., Boston Spa, Yorkshire, 1971 Zbl 0225.70001.

[16] В. В. Козлов, *Общая теория вихрей*, Удмурт. ун-т, Ижевск, 1998 MR 1707302, Zbl 1054.37514; англ. пер.: V. V. Kozlov, *Dynamical systems*. X. *General theory of vortices*, Encyclopaedia Math. Sci., **67**, Springer-Verlag, Berlin, 2003 MR 1995646, Zbl 1104.37050.

[17] В. В. Козлов, "Вихревая теория волчка", *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1. *Матем., мех.*, 1990, № 4, 56–62 MR 1086606, Zbl 0850.70068; англ. пер.: V. V. Kozlov, "Eddy theory of the top", *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, **45**:4 (1990), 26–38.

[18] H. Poincaré, "Sur une forme nouvelle des équations de la méchanique", *C. R. Acad. Sci. Paris*, **132** (1901), 369–371 Zbl 32.0715.01.

[19] В. В. Козлов, В. А. Ярощук, "Об инвариантных мерах уравнений Эйлера–Пуанкаре на унимодулярных группах", *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1. *Матем., мех.*, 1993, № 2, 91–95 MR 1223989,

Zbl 0804.58034; англ. пер.: V. V. Kozlov, V. A. Yaroshchuk, “On the invariant measures of Euler–Poincaré equations on unimodular groups”, *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, **48**:2 (1993), 45–50.

[20] J.-J. Moreau, “Une méthode de “cinématique fonctionnelle” en hydrodynamique”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **249** (1959), 2156–2158 MR 122197, Zbl 0117.19601.

[21] В. И. Юдович, “Плоские нестационарные движения идеальной несжимаемой жидкости”, *Докл. АН СССР*, **136**:3 (1961), 564–567 Zbl 0098.39602; англ. пер.: V. I. Yudovich, “Plane unsteady motion of an ideal incompressible fluid”, *Soviet Phys. Dokl.*, **6** (1961), 18–20 ADS 1961SPhD....6...18Y.

[22] V. I. Arnol'd, “Sur un principe variationnel pour les écoulements stationnaires des liquides parfaits et ses applications aux problèmes de stabilité non linéaires”, *J. Mécanique*, **5**:1 (1966), 29–43 Zbl 0161.22903.

[23] М. В. Дерябин, Ю. Н. Федоров, “О редукциях на группу геодезических потоков с (лево-) правоинвариантной метрикой и их полях симметрий”, *Докл. РАН*, **391**:4 (2003), 439–442 MR 2043032; англ. пер.: M. V. Deryabin, Yu. N. Fedorov, “On reductions for a group of geodesic flows with (left-) right-invariant metric, and their symmetry fields”, *Dokl. Math.*, **68**:1 (2003), 75–78.

[24] В. В. Козлов, “Линейные системы с квадратичным интегралом”, *ПММ*, **56**:6 (1992), 900–906 MR 1229017, Zbl 0792.70014; англ. пер.: V. V. Kozlov, “Linear systems with a quadratic integral”, *J. Appl. Math. Mech.*, **56**:6 (1992), 803–809 doi 10.1016/0021-8928(92)90114-N.

[25] В. В. Козлов, “О степени неустойчивости”, *ПММ*, **57**:5 (1993), 14–19 MR 1262057, Zbl 0798.70013; англ. пер.: V. V. Kozlov, “On the degree of instability”, *J. Appl. Math. Mech.*, **57**:5 (1993), 771–776 doi 10.1016/0021-8928(93)90141-8.

[26] A. Ostrowski, H. Schneider, “Some theorems on the inertia of general matrices”, *J. Math. Anal. Appl.*, **4**:1 (1962), 72–84 doi 10.1016/0022-247X(62)90030-6, MR 0142555, Zbl 0112.01401.

[27] В. В. Козлов, “Замечания о собственных числах вещественных матриц”, *Докл. РАН*, **403**:5 (2005), 589–592 MR 2215319; англ. пер.: V. V. Kozlov, “Remarks on eigenvalues of real matrices”, *Dokl. Math.*, **72**:1 (2005), 567–569.

[28] В. В. Козлов, А. А. Карапетян, “О степени устойчивости”, *Дифференц. уравнения*, **41**:2 (2005), 186–192 MR 2202018, Zbl 1090.34564; англ. пер.: V. V. Kozlov, A. A. Karapetyan, “On the degree of stability”, *Differ. Equ.*, **41**:2 (2005), 195–201 doi 10.1007/s10625-005-0149-7.

[29] H. K. Wimmer, “Inertia theorems for matricies, controllability, and linear vibrations”, *Linear Algebra Appl.*, **8**:4 (1974), 337–343 doi 10.1016/0024-3795(74)90060-3, MR 394388, Zbl 0288.15015.

[30] P. Lancaster, M. Tismenetsky, "Inertia characteristics of selfajoint matrix polynomials", *Linear Algebra Appl.*, **52–53** (1983), 479–496 doi 10.1016/0024-3795(83)80030-5, MR 709367, Zbl 0516.15018.

[31] A. A. Shkalikov, "Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics: the instability index formula", *Recent developments in operator theory and its applications* (Winnipeg, Canada, 1994), Oper. Theory Adv. Appl., **87**, Birkhäuser, Basel, 1996, 358–385 MR 1399370, Zbl 0860.47009.

[32] А. В. Борисов, И. С. Мамаев (ред.), *Классическая динамика в неевклидовых пространствах*, Ин-т компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2004.

[33] V. V. Kozlov, A. O. Harin, "Kepler's problem in constant curvature spaces", *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, **54**:4 (1992), 393–399 doi 10.1007/BF00049149, MR 1188291, Zbl 0765.70007, ADS 1992CeMDA..54..393K.

Научное издание

Современные проблемы математики

Выпуск 11

Конференция

“Леонард Эйлер и современная математика”

Сборник докладов

Компьютерная верстка: *А. М. Малокостов*

Сдано в набор 15.07.2007. Подписано в печать 20.06.2008.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 4.5. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
`http://www.mi.ras.ru/spm/` e-mail: `spm@mi.ras.ru`