А. Уткин, Изогональное сопряжение в четырехугольнике,
Квант, 2019, номер 2, 37–42

https://www.mathnet.ru/kvant804

$$10^{11} = 13 \cdot K_{11} + 4\,;$$
$$10^{12} = 13 \cdot K_{12} + 1\,.$$

Мы видим, что эти остатки образуют повторяющиеся числа. Это и есть ключ

Во-вторых, для двенадцатизначного числа имеем следующие тождества:

$$n = \overline{a_{11}a_{10}a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0} = a_{11} \cdot 10^{11} + a_{10} \cdot 10^{10} + a_9 \cdot 10^9 + a_8 \cdot 10^8 + a_7 \cdot 10^7 + a_6 \cdot 10^6 + a_5 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 = a_{11}(13 \cdot K_{11} + 4) + a_{10}(13 \cdot K_{10} + 3) + a_9(13 \cdot K_9 + (-1)) + a_8(13 \cdot K_8 + (-4)) + a_7(13 \cdot K_7 + (-3)) + a_6(13 \cdot K_6 + 1) + a_5(13 \cdot K_5 + 4) + a_4(13 \cdot K_4 + 3) + a_3(13 \cdot K_3 + (-1)) + a_2(13 \cdot K_2 + (-4)) + a_1(13 + (-3)) + a_0 = 13(a_{11} \cdot K_{11} + a_{10} \cdot K_{10} + a_9 \cdot K_9 + a_8 \cdot K_8 + a_7 \cdot K_7 + a_6 \cdot K_6 + a_5 \cdot K_5 + a_4 \cdot K_4 + a_3 \cdot K_3 + a_2 \cdot K_2 + a_1) + (4a_{11} + 3a_{10} - a_9 - 4a_8 - 3a_7 + a_6 + 4a_5 + 3a_4 - a_3 - 4a_2 - 3a_1 + a_0)\,.$$

Первое слагаемое очевидно делится на 13. Следовательно, остаток от деления на 13 числа n равен остатку от деления на 13 второго слагаемого.

Отсюда получаем признак делимости на 13 двенадцатизначного числа:

Число $n = \overline{a_{11}a_{10}a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ *делится на 13 тогда и только тогда, когда на 13 делится следующая сумма:*

$$4a_{11} + 3a_{10} - a_9 - 4a_8 - 3a_7 + a_6 + 4a_5 + 3a_4 - a_3 - 4a_2 - 3a_1 + a_0\,.$$

Поскольку уже 10^6 дает при делении на 13 остаток 1, далее остатки «зацикливаются», и можно получить алгоритм вычисления остатка при делении на 13 числа с произвольным количеством разрядов. Ключ этого алгоритма будет такой: $\boxed{1;\,4;\,3;-1;-4;-3}$. В примере для 12-значного числа ключ повторился два раза.

Изложенный в статье алгоритм обобщается до метода вычисления остатков при делении на произвольное простое число. О похожих признаках делимости более подробно рассказывалось в статье В.Абрамовича «Признаки делимости на l» («Квант» №10 за 1978 г.).

Автор выражает огромную благодарность Л.А.Емельянову, натолкнувшему его на возможность нахождения алгоритма, и С.Л.Кузнецову, который подсказал, как можно изложить материал существенно короче.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Изогональное сопряжение в четырехугольнике

А.УТКИН

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ *ИЗОГОНАЛЬНОЕ СОпряжение* – важный инструмент в геометрии. Из недавних материалов в «Кванте» упомянем статьи [1], [2]. В этой статье мы расскажем об изогональном сопряжении в четырехугольнике и покажем, что оно может оказаться полезным при решении задач. В частности, мы изложим решение задачи M2529 из «Задачника «Кванта».

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190204

Для начала дадим определение.

Определение. Говорят, что точки P и P' (отличные от A, B, C, D) *изогонально сопряжены в четырехугольнике* $ABCD$ (или относительно четырехугольника $ABCD$), если прямые, соединяющие любую вершину четырехугольника с точками P и P', симметричны относительно соответствующей биссектрисы угла четырехугольника (т.е. AP и AP' симметричны относительно угла DAB, BP и BP' – относительно угла ABC, CP и CP' – относительно угла BCD, а DP и DP' – относительно угла CDA).

Мы видим, что изогонально сопряженные точки P и P' относительно четырехугольника $ABCD$ должны являться изогонально сопряженными и в треугольнике, образованном тремя из четырех прямых AB, BC, CD, DA. А из этого соображения вытекает, что если в четырехугольнике изогонали к AP, BP, CP относительно соответствующих углов пересеклись в одной точке Q, то и в четвертом угле, $\angle D$, прямые DP и DQ будут изогоналями.

Конечно, не для любой точки P имеется соответствующая (изогонально сопряженная) точка. Известен следующий критерий наличия изогонально сопряженной точки.

Теорема. *Пусть P – точка, лежащая внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$. Для точки P существует точка, изогонально сопряженная относительно $ABCD$, тогда и только тогда, когда*

$$\angle APB + \angle CPD = 180^\circ . \qquad (*)$$

Отложив обсуждение доказательства теоремы и некоторые замечания о ее обобщениях напоследок, сейчас мы покажем возможную схему применения теоремы. Пусть, например, перед нами следующая конструкция: внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ находятся точки P и Q такие, что $\angle BAP = \angle DAQ$, $\angle ABP = \angle CBQ$ и для точки P выполнено условие $(*)$ (рис.1). Тогда отсюда сразу следуют равенства $\angle CDP = \angle ADQ$ и $\angle DCP = \angle BCQ$, а также

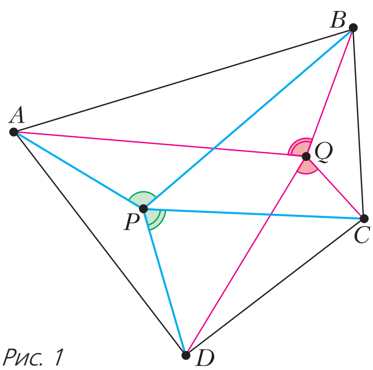

Рис. 1

$\angle AQB + \angle CQD = 180^\circ$. В самом деле, из $(*)$ следует, что для точки P есть точка P', изогонально сопряженная относительно $ABCD$. Поэтому $\angle BAP = \angle DAP'$, $\angle ABP = \angle CBP'$. Но эти равенства определяют точку единственным образом, значит, $P' = Q$. Равенства $\angle CDP = \angle ADQ$ и $\angle DCP = \angle BCQ$ следуют теперь из того, что P и Q изогонально сопряжены, а равенство $\angle AQB + \angle CQD = 180^\circ$ – это условие $(*)$ для точки Q.

Теперь перейдем к обсуждению решения задач с помощью изогонального сопряжения в четырехугольнике (конечно, задачи допускают решения и без этого соображения).

Начнем с такой задачи.

Задача 1 (М2007, Л.Емельянов). *Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I (рис.2). На отрезках AI и CI выбраны точки P и Q*

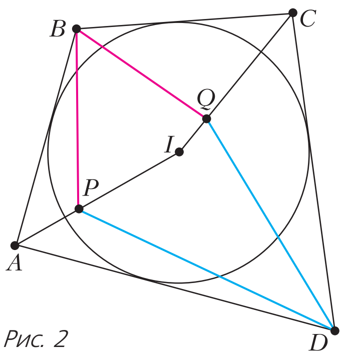

Рис. 2

соответственно так, что $\angle PBQ = \frac{1}{2}\angle ABC$. Докажите, что $\angle PDQ = \frac{1}{2}\angle ADC$.

Решение. Из условия следует, что $\angle PBQ = \angle IBC$, а для решения достаточно доказать, что $\angle PDQ = \angle IDC$.

Для описанного четырехугольника $ABCD$ выполнено равенство $\angle AIB + \angle CID = 180^\circ$ или $\angle PIB + \angle CID = 180^\circ$. Последнее равенство означает, что точка I имеет изогонально сопряженную точку относительно четырехугольника $BCDP$. А равенства $\angle PBQ = \angle CBI$ и $\angle BCQ = \angle DCI$ означают, что эта точка – Q. Отсюда получаем *изогональность* точек I и Q относительно угла PCD, т.е. $\angle PDQ = \angle IDC$, что и требуется.

Упражнение 1 (И.Шарыгин). В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D. Окружности с центрами J_1 и J_2 вписаны в треугольники ABD и ACD. Пусть M – точка касания вписанной окружности ABC со стороной BC. Докажите, что тогда $\angle J_1MJ_2 = 90^\circ$.

Указание. Фактически это частный (вырожденный) случай задачи 1.

Задача 1 уже обсуждалась ранее – например, в статье [3]. Оказывается, она естественно связана с разными конструкциями, в которых участвуют окружности и касательные. И не случайно способ рассуждений, похожий на наше решение этой задачи, поможет нам в решении следующей задачи.

Задача 2 (М2529, А.Уткин). *Дан описанный четырехугольник ABCD. На стороне BC выбраны точки M и N так, что N лежит между B и M (рис.3). В треугольники MNX, ADX, ABM и DCN вписаны*

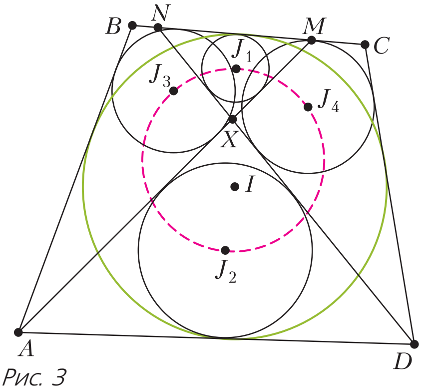

Рис. 3

окружности с центрами J_1, J_2, J_3 и J_4 соответственно. Докажите, что их центры лежат на одной окружности.

Решение. Для решения задачи достаточно установить, что $\angle J_3J_1J_4 + \angle J_3J_2J_4 = 180°$. Заметим, что поскольку MJ_1 и NJ_1 – биссектрисы треугольника MXN, то J_1J_3 и J_1J_4 – биссектрисы углов M и N,

$$\angle J_3J_1J_4 = \angle MJ_1N = 90° + \frac{1}{2}\angle MXN.$$

Из треугольника AXD получаем, что

$$\angle AJ_2D = 90° + \frac{1}{2}\angle AXD = $$
$$= 90° + \frac{1}{2}\angle MXN = \angle J_3J_1J_4 .$$

Таким образом, нам достаточно понять, что $\angle AJ_2D + \angle J_3J_2J_4 = 180°$, или, иными словами, что точка J_2 имеет изогонально сопряженную точку относительно четырехугольника AJ_3J_4D.

Пусть I – центр описанного четырехугольника $ABCD$. Имеем $\angle AIB + \angle CID = 180°$, или $\angle MIJ_3 + \angle J_4ID = 180°$. Последнее равенство означает, что точка I имеет изогонально сопряженную точку относительно четырехугольника AJ_3J_4D. Далее,

$$\angle J_2AD = \frac{1}{2}\angle MAD = \frac{1}{2}\angle BAD - \frac{1}{2}\angle BAM =$$
$$= \angle BAI - \angle BAJ_3 = \angle IAJ_3 .$$

Аналогично устанавливаем равенство $\angle J_2DA = \angle IDJ_4$. Значит, изогонально сопряженная точка для точки I относительно четырехугольника AJ_3J_4D – это точка J_2 и, наоборот, для J_2 нашлась искомая изогонально сопряженная точка относительно четырехугольника AJ_3J_4D – точка I.

Решим еще одну популярную задачу нашим методом.

Задача 3. *Выпуклый четырехугольник разрезан на девять выпуклых четырехугольников двумя прямыми, соединяющими AB и CD, и двумя прямыми, соединяющими BC и AD (рис.4). Угловые и центральный четырехугольники описанные. Докажите, что исходный четырехугольник описанный.*

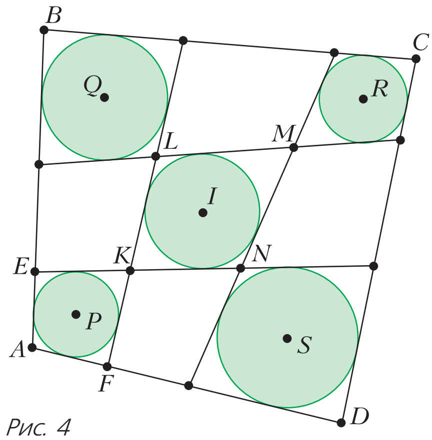

Рис. 4

Решение. Рассмотрим четырехугольник $PQRS$ с вершинами в центрах окружностей. Пусть I – центр окружности, вписанной в центральный четырехугольник $KLMN$. Точки P, K, I лежат на одной прямой – биссектрисе угла LKN, то же верно для аналогичных троек точек. Имеем

$$\angle PIQ + \angle RIS = \angle KIL + \angle MIN = 180° .$$

Значит, у точки I имеется изогонально сопряженная точка относительно четырехугольника $PQRS$. Покажем, что в четырехугольнике $PQRS$ изогонали к прямым PKI, QLI, RMI, SNI – это прямые AP, BQ, CR, DS, т.е. биссектрисы углов $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$. Отсюда последует, что эти биссектрисы пересекаются в одной точке (изогональной точке I относительно $PQRS$), что нам и нужно для доказательства описанности четырехугольника $ABCD$.

Покажем, например, что $\angle QPK = 180° - \angle SPA$ (это будет означать, что PK и PA изогональны относительно угла QPS). Пусть U – точка пересечения AD и KN, а V – точка пересечения AB и KL. Используя то, что PQ – биссектриса угла между прямыми AE и KF, а PS – биссектриса угла между прямыми AF и KE, сделаем нужный подсчет углов:

$$\angle KPS = \frac{1}{2}\angle(AD,KN) + \frac{1}{2}\angle UKF = 90° - \frac{1}{2}\angle AFK,$$

$$\angle APQ = \angle PAV + \angle AVP = \left(180° - \frac{1}{2}\angle EAF\right) + \frac{1}{2}\angle(AB,KL) = 180° - \frac{1}{2}\angle AFV = 90° + \frac{1}{2}\angle AFK.$$

Таким образом, $\angle APQ + \angle SPK = 180°$, значит, AP и KP изогональны в $\angle SPQ$, что и требовалось. Мы принимали, что U лежит на луче FA, а V – на луче EA. Остальные случаи аналогичны.

Задача 3 решена. Заметим, что более «стандартное» решение задачи 3 использует «перекидывание» равных отрезков касательных (см., например, [1]). По сути, в решении задачи М2529 («Квант» №12 за 2018 г.) мы использовали вырожденный вариант задачи 3 (а точнее, утверждения, обратного к ней) – когда окружности с центрами P и S являются точками (окружностями нулевого радиуса).

Задача 3 отражает довольно общий факт. К нему можно свести и утверждение предыдущей задачи. Устремив радиусы двух окружностей к нулю, можно получить другое решение задачи 2 (рис.5).

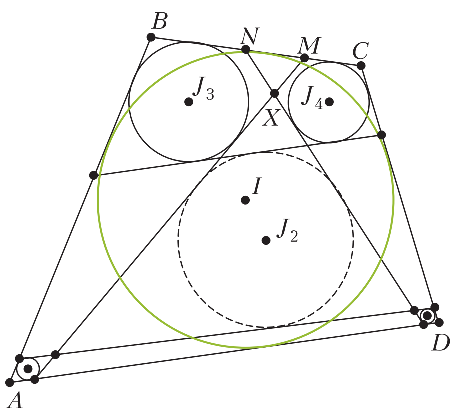

Рис. 5

Задача 4 (Олимпиада имени И.Ф.Шарыгина, 2017, А.Соколов). *Пусть в остроугольном треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, H – ортоцентр (рис.6). Если E и F – точки пересечения срединного перпендикуляра к BH с боковыми сторонами, то OB – биссектриса $\angle EOF$.*

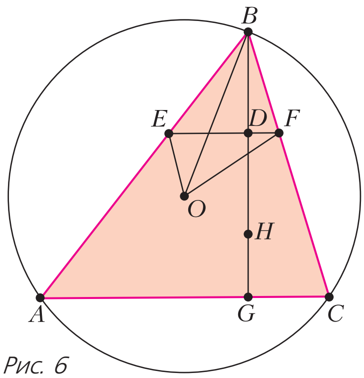

Рис. 6

Решение. Рассмотрим трапецию $AEFC$. Из симметрии треугольников BEF и HEF относительно прямой EF имеем $\angle EHF = \angle ABC$, а, как известно, $\angle AHC + \angle ABC = 180°$. Значит, для точки H в четырехугольнике $AEFC$ существует изогонально сопряженная точка, и эта точка – O (поскольку в треугольнике ABC точки O и H изогонально сопряжены). Отсюда получаем $\angle AEO = \angle FEH$. Из симметрии $\angle FEH = \angle FEB$, значит, $\angle AEO = \angle FEB$, т.е. AB – внешняя биссектриса угла OEF. Аналогично, CB – внешняя биссектриса угла OFE, поэтому B является центром вневписанной окружности треугольника EOF и поэтому OB – биссектриса $\angle EOF$.

Упражнение 2. В условиях задачи 4:

а) выразите $\angle EOF$ через $\angle ABC$;

б) докажите, что центр описанной окружности треугольника EBF лежит на прямой OB и на окружности (EOF);

в) из б) выведите другое решение задачи 1.

Задача 5 (IV Иранская геометрическая олимпиада). *Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. Прямая CO пересекает высоту, проведенную из вершины A, в точке K (рис.7,а). Пусть P и M – середины отрезков AK и AC соответственно. Пусть прямые PO и BC пересека-*

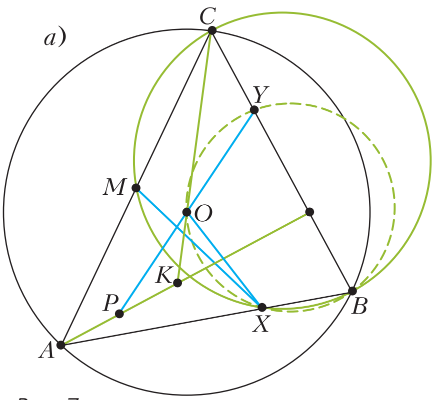

Рис. 7

ются в точке Y , а описанная окружность треугольника BCM вторично пересекает прямую AB в точке X. Докажите, что четырехугольник BXOY вписанный.

Решение. Решим задачу для остроугольного треугольника. Тогда $\angle CMX$ тупой, значит, четырехугольник $AMOX$ выпуклый. При гомотетии относительно точки A и затем симметрии относительно биссектрисы угла A, переводящей ΔABC в ΔAMX, прямая AK перейдет в изогональ AO, поэтому $MX \perp AO$.

Тогда пересечение T прямых MX и AO имеет изогонально сопряженную точку относительно четырехугольника $AMOX$ (так как $\angle ATM + \angle OTX = 90° + 90° = 180°$). При этом эта изогонально сопряженная точка – это точка P, поскольку AO и AP – изогонали в угле A, а

$$\angle OMX = 90° - \angle MOA = \angle OAM =$$

$$= \angle OAM = \angle ACO = \angle AMP \quad (CK \parallel MP).$$

Значит, A и P изогональны относительно угла MOX, т.е. $\angle MOA = \angle POX \, (= \angle ABC)$. Тогда четырехугольник $BXOY$ вписанный.

Упражнение 3. Решите задачу 5 для других конфигураций точек.

Мы увидели, как теорема может помочь в решении задач: из одних соотношений на углы мы быстро получали другие неочевидные равенства (минуя многочисленные промежуточные шаги). Как обещано, обсудим теперь саму теорему.

Доказательство теоремы. Проведем вначале доказательство в одну сторону. Предположим, что внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ (рис.8) есть пара изогонально сопряженных точек P и Q. Тогда

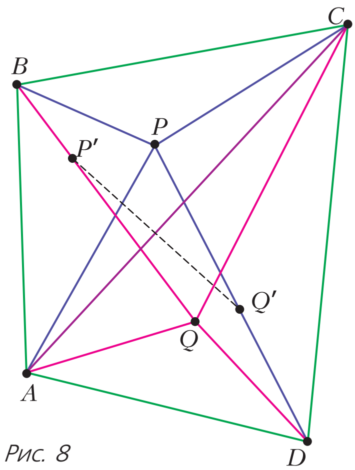

Рис. 8

докажем равенство (∗). Пусть P' – точка, изогонально сопряженная P в треугольнике ABC, Q' – точка, изогонально сопряженная Q в треугольнике ADC. Тогда $\angle P'AC = \angle BAP = \angle QAD = \angle CAQ'$. Аналогично, $\angle P'CA = \angle ACQ'$. Значит, точки P' и Q' симметричны относительно AC. Далее, P' лежит на BQ, Q' лежит на DP. В треугольнике APC точки B и Q' изогонально сопряжены, значит, BP и DP – изогонали в угле APC. Следовательно, $\angle APB + \angle CPD = 180°$, что и требовалось.

Оказывается, что другие случаи расположения точек (вырожденный четырехугольник, точки P и Q лежат вне четырехугольника или на его сторонах и т.д.) рассматриваются аналогично. Сразу доказать теорему для всех случаев можно, считая в этом доказательстве, что для любых точек X, Y, Z $\angle XYZ$ означает ориентированный угол $\angle(XY, YZ)$. Это обобщение будет полезно при доказательстве теоремы в обратную сторону.

Для доказательства в обратную сторону достаточно построить точку Q как точку пересечения изогонали AQ к прямой AP и изогонали CQ к прямой CP. Рассмотрим четырехугольник $APCQ$. По условию даны равенства $\angle PAB = \angle DAQ$ и $\angle PCB = \angle DCQ$. Тем самым точки B и D – кандидаты в пару изогонально сопряженных точек относительно $APCQ$. Заметим, что PB и PD – изогонали в угле APC, а QB и QD – изогонали в угле AQC. Поэтому B и D действительно изогонально сопряжены.

Осталось воспользоваться прямой теоремой для четырехугольника $APCQ$ и пары точек B, D. Сумма ориентированных углов $\angle(AB, BP)$ и $\angle(CB, BQ)$ равна 0, т.е. кратна 180°. Получаем, что BP и BQ – изогонали в угле B. Аналогично получается, что DP и DQ – изогонали в угле D. Окончательно, P и Q изогонально сопряжены в четырехугольнике $ABCD$. «Скользким» местом является существование точки пересечения AQ и CQ. В этом случае будем считать, что точке P изогонально сопряжена бесконечно удаленная точка.

Имеется и другой подход к доказательству, основанный на том, что изогонально сопряженные точки внутри четырехугольника $ABCD$ – это в точности фокусы вписанных в него эллипсов (рис.9), а что отрезки

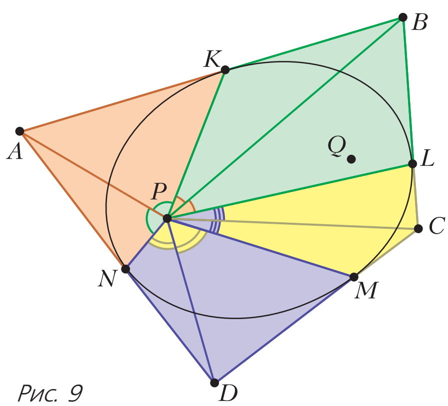

Рис. 9

касательных, проведенных из одной точки, видны из фокуса под равными углами (см., например, книгу [4]).

Условие (∗) можно переформулировать разными способами, например как равенство направленных углов APB и DPC (или, эквивалентно, как равенство направленных углов BPC и APD). По-другому: (∗) эквивалентно тому, что PA и PC изогональны относительно пары прямых PB и PD. Или так: угол APC и угол BPD имеют одну и ту же пару биссектрис (внутренняя и внешняя биссектрисы).

Изогональное сопряжение обладает в некотором смысле симметричностью. Предлагаем читателю глубже понять конструкцию изогонального сопряжения, решив следующее упражнение.

Упражнение 4. Пусть $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ – три пары точек (все точки – общего положения). Докажите такие утверждения.

а) Если C_1 и C_2 изогонально сопряжены относительно $A_1B_1A_2B_2$, то B_1, B_2 изогонально сопряжены относительно $A_1C_1A_2C_2$.

б) Пусть известно, что (A_1B_1, A_1B_2) и (A_1C_1, A_1C_2) – изогонали относительно A_1, (B_1A_1, B_1A_2) и (B_1C_1, B_1C_2) – изогонали относительно B_1, (C_1A_1, C_1A_2) и (C_1B_1, C_1B_2) – изогонали относительно C_1. Тогда (A_2B_1, A_2B_2) и (A_2C_1, A_2C_2) – изогонали относительно A_2, (B_2A_1, B_2A_2) и (B_2C_1, B_2C_2) – изогонали относительно B_2, (C_2A_1, C_2A_2) и (C_2B_1, C_2B_2) – изогонали относительно C_2.

В заключение отметим, что эта статья была написана на основе работы, с которой автор выступал на Московской математической конференции школьников в декабре 2018 года (https://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/works2018/utkin5.pdf). В этой работе с использованием изогонального сопряжения дополнительно были получены некоторые свойства описанного четырехугольника.

Автор благодарит П.А.Кожевникова за внимание и помощь при написании статьи.

Литература

1. *П.Кожевников.* Изогонально сопряженные точки. – «Квант», 2016, №1.

2. *Д.Прокопенко.* Изогональное сопряжение и педальные треугольники. – «Квант», 2017, №9.

3. *Н.Белухов, П.Кожевников.* Описанные четырехугольники и ломаные. – «Квант», 2010, №1.

4. *А.В.Акопян, А.А.Заславский.* Геометрические свойства кривых второго порядка. – М.: МЦНМО, 2007.