А. А. Лобов, М. Б. Абросимов, О единственности минимального рёберного 1-расширения гиперкуба Q_4,
ПДМ, 2022, номер 4, 84–93

УДК 519.17 DOI 10.17223/20710410/58/8

О ЕДИНСТВЕННОСТИ МИНИМАЛЬНОГО РЁБЕРНОГО 1-РАСШИРЕНИЯ ГИПЕРКУБА Q_4[1]

А. А. Лобов, М. Б. Абросимов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

E-mail: aisanekai@mail.ru, mic@rambler.ru

Одним из важных свойств надёжных вычислительных систем является их отказоустойчивость. Для исследования отказоустойчивости можно использовать аппарат теории графов. Рассматриваются минимальные рёберные расширения графа, которые являются моделью для исследования отказа связей вычислительной системы. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ с n вершинами называется минимальным рёберным k-расширением n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если граф G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k рёбер и имеет при этом минимально возможное число рёбер. Гиперкуб Q_n — это регулярный 2^n-вершинный граф порядка n, представляющий собой декартово произведение n полных 2-вершинных графов K_2. Гиперкуб является распространённой топологией для построения вычислительных систем. Ранее было описано семейство графов Q_n^*, представители которого при $n > 1$ являются минимальными рёберными 1-расширениями соответствующих гиперкубов. В данной работе получено аналитическое доказательство единственности минимальных рёберных 1-расширений гиперкубов при $n \leqslant 4$ и установлено общее свойство произвольного минимального рёберного 1-расширения гиперкуба Q_n при $n > 2$: оно не содержит рёбер, соединяющих вершины, расстояние между которыми в гиперкубе равно 2.

Ключевые слова: *граф, гиперкуб, рёберная отказоустойчивость, минимальное рёберное 1-расширение.*

ABOUT UNIQUENESS OF THE MINIMAL 1-EDGE EXTENSION OF HYPERCUBE Q_4

A. A. Lobov, M. B. Abrosimov

Saratov State University, Saratov, Russia

One of the important properties of reliable computing systems is their fault tolerance. To study fault tolerance, we can use the graph theory. In this paper, minimal edge extensions of graph are considered as a model for studying the failure of links in a computing system. A graph G^* is a k-edge extension of a graph G if every graph obtained by removing any k edges from G^* contains G. A k-edge extention G^* of graph G is said to be minimal if it contains n vertices, where n is the number of vertices of G, and G^* has the minimum number of edges among all k-edge extensions of graph G with n vertices. The hypercube Q_n is a regular 2^n-vertex graph of order n, which is the Cartesian product of n complete 2-vertex graphs K_2. We propose a

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения госзадания (проект № FSRR-2020-0006).

family of graphs Q_n^* whose representatives for $n > 1$ are minimal 1-edge extensions of the corresponding hypercubes. In this paper, we provide an analytical proof of the uniqueness of minimal 1-edge extensions of hypercubes for $n \leqslant 4$, as well as establishing one general property of an arbitrary minimal 1-edge extension of a hypercube Q_n for $n > 2$: it does not contain edges connecting vertices, the distance between which in the hypercube is equal to 2.

Keywords: *graph, hypercube, edge fault tolerance, minimal 1-edge extension.*

Введение

Топология гиперкуба является популярной схемой соединения параллельных процессоров [1], в том числе и в отказоустойчивых системах типа IBM Blue Gene/Q [2]. Особый интерес с точки зрения отказоустойчивости представляет 4-куб Q_4. Для исследования полной отказоустойчивости элементов Дж. Хейз предложил модель, основанную на графах [3, 4], которая позднее была перенесена и на случай отказов связей [5]. Оптимальные вершинные k-отказоустойчивые реализации гиперкубов Q_n при $n > 3$ неизвестны. На практике используются тривиальные отказоустойчивые реализации с одним избыточным элементом, соединённым со всеми остальными. В работе [6] описывается вершинное 1-расширение гиперкуба Q_4, которое имеет на одно ребро меньше, чем тривиальное. Однако не доказано, что оно является минимальным. Ранее была предложена оптимальная рёберная 1-отказоустойчивая реализация гиперкуба Q_n при $n \geqslant 2$ [5]. В данной работе удалось доказать, что при $n \leqslant 4$ гиперкуб Q_n имеет единственную с точностью до изоморфизма оптимальную рёберную 1-отказоустойчивую реализацию или, в другой терминологии, минимальное рёберное 1-расширение. Отметим, что существуют и другие подходы для исследования отказоустойчивости [7, 8]. Мы будем использовать основные определения из теории графов в соответствии с работами [9, 10].

Определение 1. *Декартовым произведением* $G_1 \times G_2$ двух графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется граф $G = (V, \alpha)$, такой, что $V = V_1 \times V_2$ и вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны в G тогда и только тогда, когда либо $u_1 = v_1$, а u_2 и v_2 смежны в G_2, либо $u_2 = v_2$, а u_1 и v_1 смежны в G_1.

Определение 2. *Гиперкубом* Q_n (*n-кубом*) называется граф, являющийся декартовым произведением n полных 2-вершинных графов K_2.

Гиперкуб Q_n — это регулярный 2^n-вершинный граф порядка n. Семейство гиперкубов достаточно хорошо изучено [11]. Важным свойством гиперкуба является его симметричность: все вершины и рёбра в гиперкубе являются подобными.

Введём традиционное обозначение меток вершин гиперкуба Q_n двоичными векторами длины n так, чтобы расстояние между двумя вершинами равнялось дистанции Хэмминга между их метками. На рис. 1 показаны гиперкубы Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4.

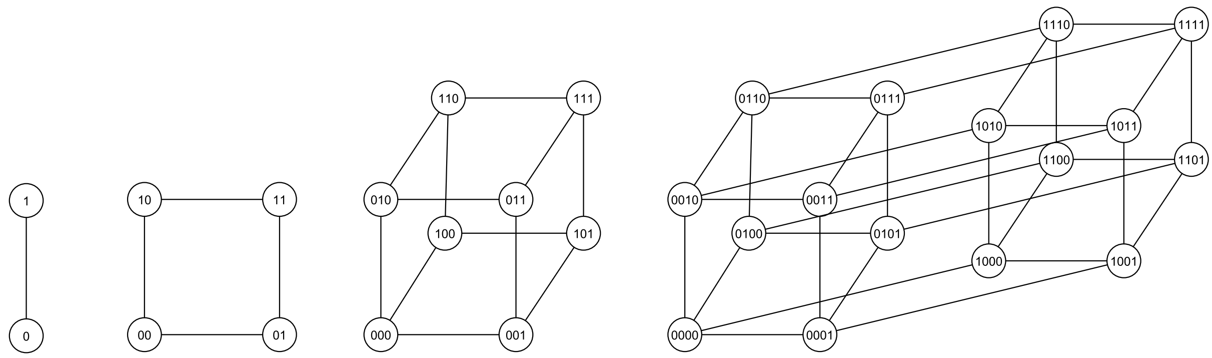

Рис. 1. Гиперкубы Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4

1. Минимальные рёберные 1-расширения гиперкуба

Определение 3. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным рёберным k-расширением* n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является рёберным k-расширением графа G, то есть граф G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k рёбер;
2) граф G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Если рассматривать простые графы, то минимальное рёберное k-расширение существует не у всех графов. Например, полные графы K_n не имеют минимальных ребёрных k-расширений ни при каких натуральных k. Задача поиска минимальных рёберных k-расширений является вычислительно сложной [12], только для некоторых классов графов удалось найти частичное или полное описание схем построения их минимальных рёберных k-расширений. В работах [13, 14] предложены алгоритмы построения всех неизоморфных минимальных вершинных и рёберных расширений заданного графа без непосредственной проверки на изоморфизм, что хорошо подходит для параллельной реализации. С помощью этих алгоритмов удалось экспериментально найти все минимальные рёберные 1-расширения 16-вершинного гиперкуба, однако минимальные вершинные 1-расширения пока найти не удалось, так как для их поиска требуется на несколько порядков больше вычислительных ресурсов. Предположительно минимальное вершинное 1-расширение найдено аналитическим путём, однако его минимальность пока не подтверждена ни аналитически, ни с помощью вычислительного эксперимента [6].

В работе [2] доказаны несколько лемм, которые позволяют охарактеризовать вид минимального рёберного k-расширения и оценить минимально возможное количество дополнительных рёбер в нём. Далее нам понадобится одна из них.

Лемма 1 [2]. Если минимальная степень вершины графа G равна $d > 0$, то его минимальное рёберное k-расширение не содержит вершин степени меньше $d + k$.

Будем рассматривать минимальные рёберные 1-расширения гиперкуба Q_n. При $n = 1$ гиперкуб Q_1 изоморфен полному графу K_2 и не имеет минимальных рёберных 1-расширений. При $n = 2$ гиперкуб Q_2 изоморфен циклу C_4 и по лемме 1 имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное рёберное 1-расширение — полный граф K_4. Далее рассматриваем случай $n > 2$.

В [5] предложена схема построения графов Q_n^*. Это однородные графы порядка $n + 1$, которые при $n > 1$ получаются из гиперкуба Q_n добавлением рёбер, соединяющих противоположные вершины, то есть вершины, расположенные друг от друга на максимальном расстоянии n. Если вершина имеет код k, то она соединяется с вершиной, код которой получается из k поразрядной инверсией.

Теорема 1. Для n-мерного гиперкуба Q_n при $n > 1$ граф Q_n^* является минимальным рёберным 1-расширением.

Легко убедиться, что минимальное рёберное 1-расширение для гиперкуба Q_2 единственно с точностью до изоморфизма: граф Q_2^* изоморфен графу K_4, и это единственный с точностью до изоморфизма регулярный 4-вершинный граф порядка 3. В работе [5] вопрос единственности минимального рёберного 1-расширения не обсуждается. В гиперкубе Q_n каждая вершина имеет степень n, а в его минимальном рёберном 1-расширении Q_n^* каждая вершина имеет степень $n + 1$. Следовательно, если у гиперкуба Q_n существуют другие минимальные рёберные 1-расширения, то все вершины в них также имеют степень $n + 1$. Докажем, что гиперкубы Q_3 и Q_4 имеют единственные с точностью до изоморфизма минимальные рёберные 1-расширения, что является основным результатом данной работы.

2. Единственность минимального рёберного 1-расширения гиперкуба Q_3

Для произвольного минимального рёберного 1-расширения гиперкуба Q_n при $n > 2$ установлено следующее общее свойство:

Лемма 2. Минимальное рёберное 1-расширение гиперкуба Q_n при $n > 2$ не содержит рёбер, соединяющих вершины, расстояние между которыми в гиперкубе Q_n равно 2.

Доказательство. Предположим, что G^* является минимальным рёберным 1-расширением гиперкуба Q_n. Граф G^* строится из графа Q_n путём добавления только одного ребра в каждой вершине, то есть разбиения множества несмежных вершин графа Q_n на пары и соединения их рёбрами. Предположим, что в графе G^* есть ребро, соединяющее вершины, коды которых отличаются в двух позициях. Не ограничивая общности, пусть это будут, например, вершины $0\ldots000$ и $0\ldots011$.

В графе Q_n все вершины и рёбра являются подобными. Очевидно, что удаление добавленного ребра в графе G^* даст граф, в который будет вкладываться исходный гиперкуб Q_n.

Рассмотрим удаление любого ребра, инцидентного вершине $0\ldots00$ и вершине, несмежной с $0\ldots011$, например $10\ldots0$. Обозначим получившийся граф через H. Попробуем вложить в граф H гиперкуб Q_n. Вершина $0\ldots00$ в графе H имеет степень n, следовательно, на расстоянии 1 от неё в гиперкубе будут все оставшиеся вершины, кроме $10\ldots0$: $010\ldots0$, $0010\ldots0$, $\ldots$, $0\ldots010$, $0\ldots001$ и $0\ldots011$. При вложении гиперкуба между вершинами на расстоянии 1 нет рёбер, то есть рёбра между вершиной $0\ldots011$ и вершинами $0\ldots010$ и $0\ldots001$ не могут быть задействованы при вложении. Но без учёта этих рёбер у вершины $0\ldots011$ степень станет равна $n - 1$ и вложение гиперкуба будет невозможно. ■

Из леммы 2 следует

Теорема 2. Граф Q_3^* является единственным с точностью до изоморфизма минимальным рёберным 1-расширением гиперкуба Q_3.

Единственные с точностью до изоморфизма минимальные рёберные 1-расширения гиперкубов Q_2 и Q_3 представлены на рис. 2.

Аналогичный результат удалось доказать и для гиперкуба Q_4, что является основным результатом данной работы.

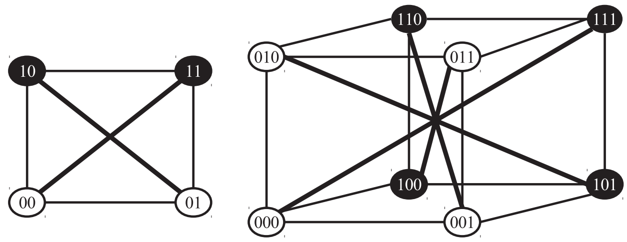

Рис. 2. Минимальные рёберные 1-расширения для Q_2 и Q_3

3. Единственность минимального рёберного 1-расширения гиперкуба Q_4

Теорема 3. Граф Q_4^* является единственным с точностью до изоморфизма минимальным рёберным 1-расширением гиперкуба Q_4.

Доказательство. Предположим, что G^* является минимальным рёберным 1-расширением гиперкуба Q_4, причём G^* не изоморфен Q_4^*. Как отмечено в доказательстве леммы 2, граф G^* строится из графа Q_4 путём добавления только одного ребра в каждой вершине, то есть разбиения множества несмежных вершин графа Q_4 на пары и соединения их рёбрами.

С учётом леммы 2 достаточно показать, что минимальное рёберное 1-расширение гиперкуба Q_4 не содержит рёбер, соединяющих вершины, расстояние между которыми в гиперкубе Q_4 равно 3.

Предположим, что это неверно и в графе G^* есть ребро, соединяющее вершины, код которых отличается в трёх позициях. Не ограничивая общности, пусть это будут, например, вершины 0000 и 0111.

Далее будем последовательно рассматривать удаление рёбер, инцидентных вершине 0000, и пробовать строить вложение гиперкуба, доопределяя по необходимости нужные рёбра в графе G^*. Будем строить вложение по мере удаления вершин от вершины 0000. Заметим, что в гиперкубе должно быть четыре вершины на расстоянии 1 от вершины 0000, шесть вершин на расстоянии 2, четыре вершины на расстоянии 3 и одна вершина на расстоянии 4. Расстояние до вершины 0000 равно сумме единиц в коде вершины. Каждая вершина на расстоянии 1 смежна с вершиной 0000 и тремя вершинами на расстоянии 2, каждая вершина на расстоянии 2 смежна с двумя вершинами на расстоянии 1 и с двумя вершинами на расстоянии 3, каждая вершина на расстоянии 3 смежна с вершиной на расстоянии 4 и тремя вершинами на расстоянии 2. Так как в графе G^* все вершины имеют степень 5, то при вложении только одно ребро в каждой вершине не будет задействовано.

Будем называть вершину на расстоянии t от вершины 0000 вершиной типа t. Тогда в гиперкубе Q_4 есть одна вершина типа 0 (это сама вершина 0000), четыре вершины типа 1 (0001, 0010, 0100 и 1000), шесть вершин типа 2 (0011, 0101, 0110, 1001, 1010 и 1100), четыре вершины типа 3 (0111, 1011, 1101 и 1110) и одна вершина типа 4 (1111).

На рис. 3–8 белым цветом помечены вершина 0000 и вершины, тип которых неизвестен. Вершины типа 1 помечены белым цветом с жирной границей, рёбра от них до вершины 0000 также выделены жирным. Удалённое ребро обозначено пунктиром, а добавленные рёбра — жирным пунктиром. Светло-серым цветом обозначены вершины типа 2, а тёмно-серым — вершины типа 3. Черным цветом обозначена вершина типа 4.

С л у ч а й 1. Рассмотрим удаление ребра между вершинами 0000 и 0100 в графе G^*. Предположим, что возможно вложение гиперкуба Q_4 в получившийся граф.

Так как у вершины 0000 после удаления ребра степень будет равна 4, то все смежные с ней вершины при вложении гиперкуба окажутся от неё на расстоянии 1: 0001, 0010, 1000 и 0111. Так как вершины 0110, 0011, 0101, 1010 и 1001 смежны, по крайней мере, с двумя из этих вершин, то при вложении гиперкуба они будут находиться на расстоянии 2 от вершины 0000. Рассуждаем далее. Вершины 0100, 1110, 1011 и 1101 смежны, по крайней мере, с двумя вершинами на расстоянии 2, следовательно, это будут вершины на расстоянии 3. Таким образом, осталось только две вершины, роли которых пока не определены: 1100 и 1111. Одна из них должна быть вершиной на расстоянии 4, а одна — на расстоянии 2. Каждая из них смежна с тремя вершинами на расстоянии 3 и одной вершиной на расстоянии 1.

Заметим, что в гиперкубе для каждой пары вершин на расстоянии 1 есть единственная смежная с ними обеими вершина на расстоянии 2. Однако вершина 0111 имеет две общие смежные вершины типа 2 с вершиной 0010 (0110 и 0011) и две общие смежные вершины типа 2 с вершиной 0001 (0011 и 0101). Так как все рёбра вершины 0111 уже определены и при вложении гиперкуба только одно из них не будет использоваться, то это ребро 0111–0011. Следовательно, вершина 1111 будет также вершиной типа 2, а вершина 1100 — вершиной типа 4. Так как вершина типа 4 смежна со всеми вершинами типа 3, то должно быть ребро между вершинами 1100 и 1011. Далее заметим, что у вершин 0111 и 1000 должна быть общая смежная вершина типа 2. У вершины 0111 уже все рёбра определены, и это не может быть ни одна из вершин 0110, 0011 и 0101. Следовательно, это должна быть вершина 1111, поэтому должно быть ребро 1000–1111. Получили ситуацию, представленную на рис. 3.

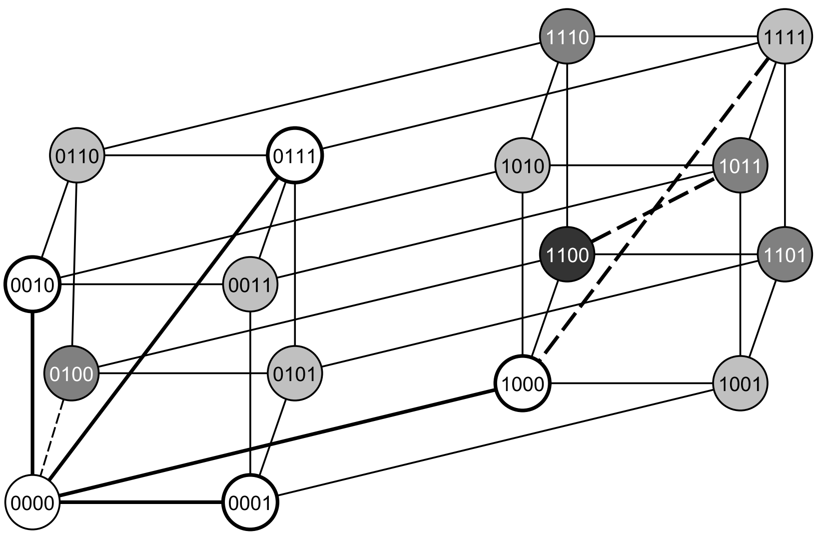

Рис. 3. Случай 1. Удаление ребра между вершинами 0000 и 0100

С л у ч а й 2. Рассмотрим теперь удаление ребра между вершинами 0000 и 0001. Повторяя те же рассуждения, получим, что вершины 0010, 0100, 0111 и 1000 будут вершинами типа 1, а 0110, 0011, 0101, 1100, 1010 — вершинами типа 2, так как смежны, по крайней мере, с двумя вершинами типа 1. С учётом уже определённого ребра между вершинами 1000 и 1111, получаем, что вершина 1111 также будет вершиной типа 2, так как смежна с двумя вершинами типа 1. Тогда вершины 0001, 1110, 1011 и 1101 будут вершинами типа 3, так как смежны, по крайней мере, с двумя вершинами типа 2. Оставшаяся вершина 1001 будет вершиной типа 4. Так как вершина типа 4 смежна со всеми вершинами типа 3, то должно быть ребро между вершинами 1001 и 1110. Получили ситуацию, представленную на рис. 4.

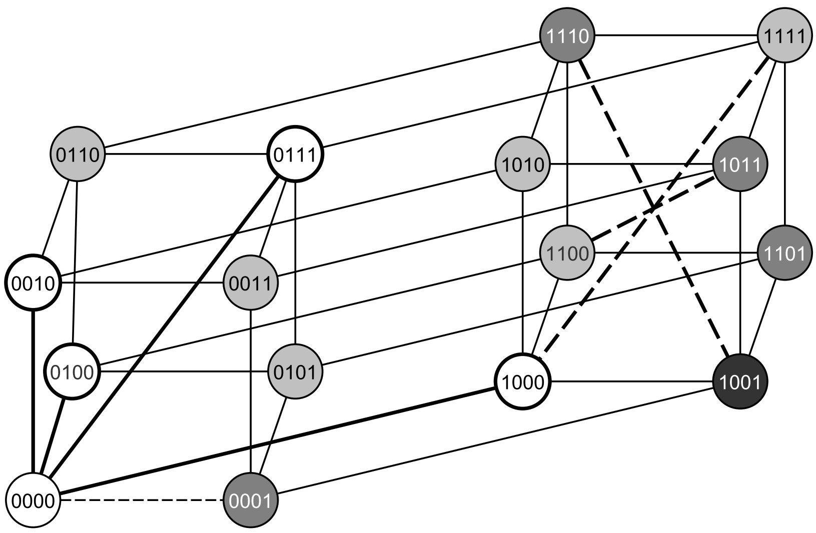

Рис. 4. Случай 2. Удаление ребра между вершинами 0000 и 0001

Случай 3. Рассмотрим удаление ребра между вершинами 0000 и 0010. Повторяя предыдущие рассуждения, получим, что вершины 0001, 0100, 0111 и 1000 будут вершинами типа 1, а 0110, 0011, 0101, 1001, 1100 и 1111 — вершинами типа 2, так как смежны, по крайней мере, с двумя вершинами типа 1. Тогда вершины 0010, 1110, 1011 и 1101 будут вершинами типа 3, так как смежны, по крайней мере, с двумя вершинами типа 2. Оставшаяся вершина 1010 будет вершиной типа 4. Так как вершина типа 4 смежна со всеми вершинами типа 3, то должно быть ребро между вершинами 1010 и 1101. Получили ситуацию, представленную на рис. 5.

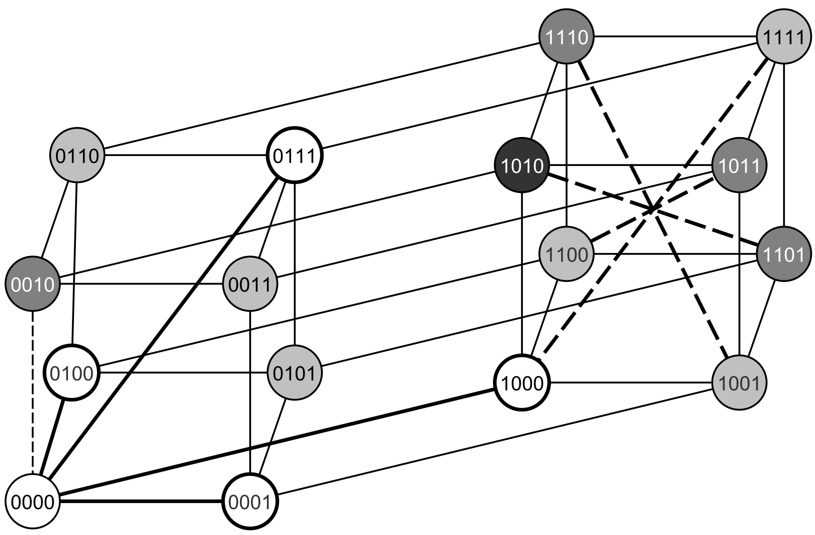

Рис. 5. Случай 3. Удаление ребра между вершинами 0000 и 0010

Заметим, что мы полностью определили дополнительные рёбра у десяти вершин графа G^*, и осталось только шесть вершин, относительно которых дополнительные рёбра не определены: 0001, 0010, 0011, 0100, 0101 и 0110. Так как с учётом леммы 2 мы не можем соединять вершины на расстоянии 2, то остаётся единственным возможным образом соединить вершины на расстоянии 3 (все вершины на расстоянии 4 уже «заняты»). Получили, что граф G^* должен иметь вид, представленный на рис. 6.

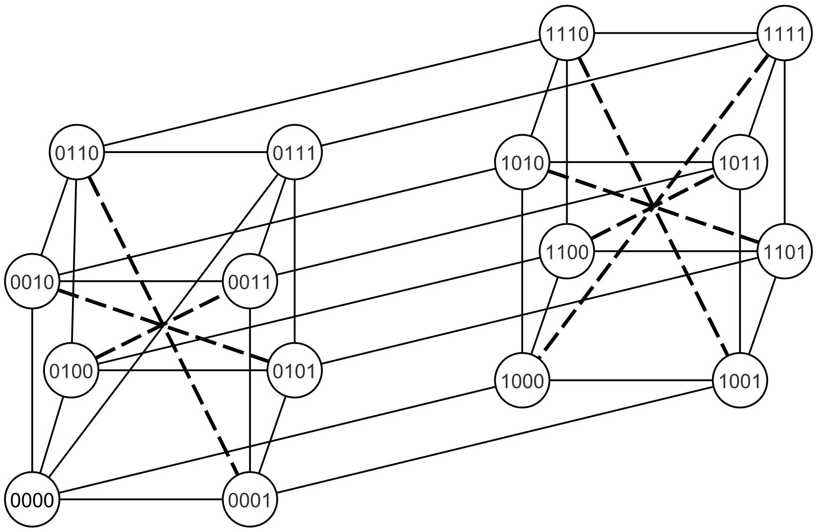

Рис. 6. Предполагаемое минимальное реберное 1-расширение гиперкуба Q_4

Убедимся, что построенный граф G^* не является расширением гиперкуба Q_4.

С л у ч а й 4. Рассмотрим удаление ребра между вершинами 0000 и 1000. Повторяем предыдущие рассуждения. Вершины 0001, 0010, 0100 и 0111 будут вершинами типа 1, а 0110, 0011, 0101 — вершинами типа 2, так как смежны, по крайней мере, с двумя вершинами типа 1 (рис. 7).

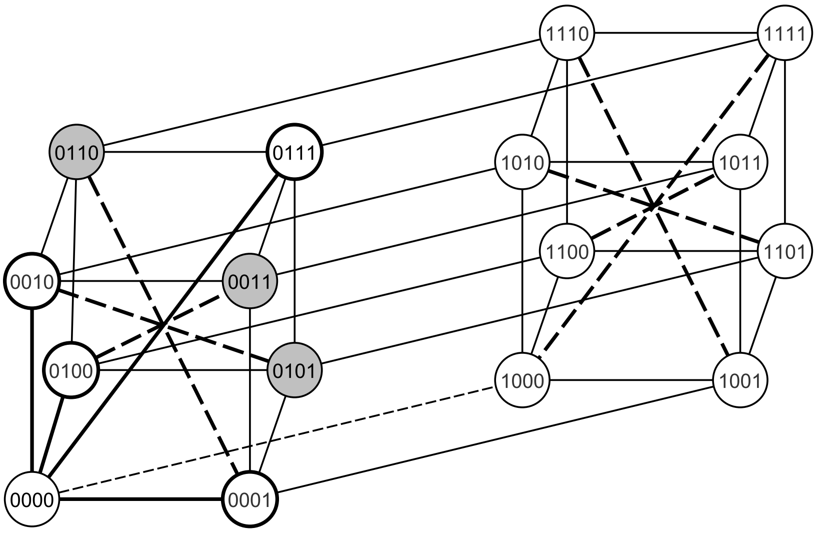

Рис. 7. Случай 4. Удаление ребра между вершинами 0000 и 1000

Видно, что вершина 0110 смежна с четырьмя вершинами типа 1 и ещё с вершиной 1110. Напомним, что вершина типа 2 должна быть смежна с двумя вершинами типа 1 и двумя вершинами типа 3. Следовательно, вложение гиперкуба невозможно. ■

Таким образом, гиперкуб Q_4 имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное рёберное 1-расширение, которое представлено на рис. 8.

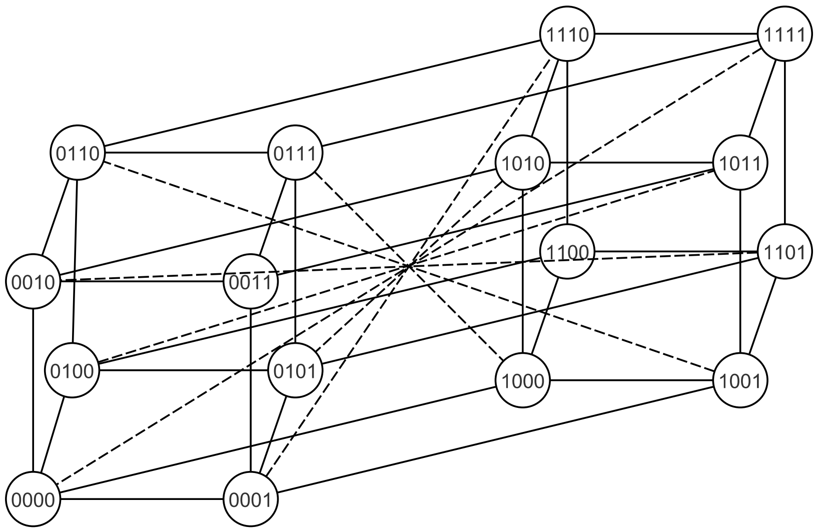

Рис. 8. Минимальное рёберное 1-расширение гиперкуба Q_4

Заключение

Рассмотрен вопрос о единственности минимальных рёберных 1-расширений гиперкубов. Доказано общее свойство, что в минимальном рёберном 1-расширении любого гиперкуба Q_n при $n > 2$ не может быть рёбер между вершинами на расстоянии 2. Из этого следует единственность минимального рёберного 1-расширения гиперкуба Q_3. Продолжая рассуждения, было бы логично доказать, что в минимальном рёберном 1-расширении любого гиперкуба Q_n при $n > 3$ не может быть рёбер между вершинами на расстоянии 3, и далее, что в минимальном рёберном 1-расширении любого гиперкуба Q_n при $n > 2$ не может быть рёбер между вершинами на расстоянии $n - 1$. Из этого следовала бы единственность минимального рёберного 1-расширения любого гиперкуба. Удалось доказать только частный случай: в минимальном рёберном 1-расширении гиперкуба Q_4 не может быть рёбер между вершинами на расстоянии 3 и, следовательно, гиперкуб Q_4 имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное рёберное 1-расширение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Padua D. A.* Encyclopedia of Parallel Computing. N.Y.: Springer, 2011.
2. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
3. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C25. No. 9. P. 875–884.
4. *Harary F. and Hayes J. P.* Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. V. 27. P. 19–23.
5. *Harary F. and Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
6. *Лобов А. А., Абросимов М. Б.* О вершинном 1-расширении гиперкуба // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф. Саратов: Издат. центр «Наука», 2018. С. 249–251.
7. *Zhang Y., Zhao S., and Meng J.* Edge fault tolerance of graphs with respect to λ2-optimal property // Theor. Comput. Sci. 2019. V. 783. P. 95–104.

8. *Liu H. and Cheng D.* Structure fault tolerance of balanced hypercubes // Theor. Comput. Sci. 2020. V. 845. P. 198–207.
9. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997. 368 с.
10. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973. 296 с.
11. *Harary F., Hayes J. P., and Wu H.-J.* A survey of the theory of hypercube graphs // Computers & Math. with Appl. 1988. V. 15. Ed. 4. P. 277–289.
12. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.
13. *Абросимов М. Б., Камил И. А. К., Лобов А. А.* Построение всех неизоморфных минимальных вершинных расширений графа методом канонических представителей // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19. Вып. 4. С. 479–486.
14. *Абросимов М. Б., Судани Х. Х. К., Лобов А. А.* Построение минимальных рёберных расширений графа без проверки на изоморфизм // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20. Вып. 1. С. 105–115.

REFERENCES

1. *Padua D. A.* Encyclopedia of Parallel Computing. N.Y., Springer, 2011.
2. *Abrosimov M. B.* Grafovye modeli otkazoustoychivosti [Graph Models of Fault Tolerance]. Saratov, SSU Publ., 2012. 192 p. (in Russian).
3. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system. IEEE Trans. Comput., 1976, vol. C25, no. 9, pp. 875–884.
4. *Harary F. and Hayes J. P.* Node fault tolerance in graphs. Networks, 1996, vol. 27, pp. 19–23.
5. *Harary F. and Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs. Networks, 1993, vol. 23, pp. 135–142.
6. *Lobov A. A. and Abrosimov M. B.* O vershinnom 1-rasshirenii giperkuba [On the vertex 1-extension of a hypercube]. Komp'yuternye nauki i informatsionnye tekhnologii, Saratov, "Nauka" Publ., 2018, pp. 249–251. (in Russian)
7. *Zhang Y., Zhao S., and Meng J.* Edge fault tolerance of graphs with respect to $\lambda 2$-optimal property. Theor. Comput. Sci., 2019, vol. 783, pp. 95–104.
8. *Liu H. and Cheng D.* Structure fault tolerance of balanced hypercubes. Theor. Comput. Sci., 2020, vol. 845, pp. 198–207.
9. *Bogomolov A. M. and Saliy V. N.* Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem [Algebraic Foundations of the Discrete Systems Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1997. 368 p. (in Russian).
10. *Harary F.* Graph Theory. Addison-Wesley, 1969. 274 p.
11. *Harary F., Hayes J. P., and Wu H.-J.* A survey of the theory of hypercube graphs. Computers & Math. with Appl., 1988, vol. 15, ed. 4, pp. 277–289.
12. *Abrosimov M. B.* On the complexity of some problems related to graph extensions. Math. Notes, 2010, vol. 88:5, pp. 619–625.
13. *Abrosimov M. B., Kamil I. A. K., and Lobov A. A.* Postroenie vsekh neizomorfnykh minimal'nykh vershinnykh rasshireniy grafa metodom kanonicheskikh predstaviteley [Construction of all nonisomorphic minimal vertex extensions of the graph by the method of canonical representatives]. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika, 2019, vol. 19, iss. 4, pp. 479–486. (in Russian).
14. *Abrosimov M. B., Sudani Kh. Kh. K., and Lobov A. A.* Postroenie minimal'nykh rebernykh rasshireniy grafa bez proverki na izomorfizm [Construction of all minimal edge extensions of the graph with isomorphism rejection]. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 105–115. (in Russian).