О стационарном состоянии в динамике популяции с иерархической конкуренцией

А. А. Давыдов, А. Ф. Нассар

Мы показываем, что при заданном управлении в динамике структурированной по размеру популяции с иерархической формой конкуренции есть нетривиальное стационарное состояние. Точнее, мы предполагаем, что эта динамика описывается уравнением

$$\frac{\partial x(t,l)}{\partial t} + \frac{\partial[g(l,E(t,l))x(t,l)]}{\partial l} = -\bigl(\mu(l,E(t,l)) + u(l)\bigr)x(t,l), \tag{1}$$

где x – плотность индивидуумов размера l в момент времени t, функции g и μ характеризуют соответственно их рост и смертность при уровне конкуренции E, а управление u – эксплуатацию популяции. Функция конкуренции E задается формулой

$$E(t,l) = \int_l^L \chi(s)x(t,s)\,ds, \tag{2}$$

где χ – некоторая непрерывная функция, положительная при положительном аргументе, а отрезок $[0,L]$, $L > 0$, – это диапазон размеров, на котором популяция эксплуатируется. В силу формулы конкуренции влияние на развитие индивидуумов данного размера имеют лишь индивидуумы не меньшего размера. Этот факт отличает данную работу от работ [1]–[3], где интеграл берется по всему отрезку $[0,L]$ и уровень конкуренции одинаков для индивидуумов всех размеров. Граничное условие имеет вид

$$x(t,0) = \int_0^L r(l,E(t,l))x^{\beta}(t,l)\,dl + p_0 \tag{3}$$

и отвечает за приток индивидуумов размера $l = 0$: этот приток есть сумма естественного воспроизводства и промышленного возобновления $p_0 = \mathrm{const} \geqslant 0$. Функция r и показатель β, $\beta \in (0,1)$, характеризуют репродуктивность биомассы и нелинейную зависимость воспроизводства от плотности соответственно. Модель (1)–(3) аналогична хорошо известным (см., например, [4], [5]). Мы предполагаем, что все функции в ней, за исключением u, непрерывны и удовлетворяют следующим естественным условиям:

(a) при каждом $l \in [0,L]$ функции g и r не возрастают с увеличением конкуренции E, при этом функция g всюду положительна, а функция r всюду неотрицательна и положительна хотя бы на некотором непустом интервале из отрезка $[0,L]$;

(b) μ – положительная функция, неубывающая по E при каждом $l \in [0,L]$;

(c) при $0 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant L$ отношение $g(l_1,\,\cdot\,)/g(l_2,\,\cdot\,)$ не возрастает по E.

Условия (a)–(c) отражают неулучшение развития популяции при росте конкуренции и не меньшее влияние ее роста на индивидуумов малых размеров, чем на индивидуумов больших размеров.

Допустимым называется измеримое управление u, удовлетворяющее на $[0,L]$ условию $0 \leqslant u_1 \leqslant u \leqslant u_2$ с некоторыми кусочно непрерывными функциями u_1 и u_2.

Теорема. *Для любого допустимого управления u существует положительное непрерывное стационарное решение задачи* (1)–(3), *если в слое $0 \leqslant l \leqslant L$ функции g, μ, r удовлетворяют условиям* (a)–(c), *а функции g, μ – условию Липшица по E.*

Искомое стационарное решение должно быть решением задачи Коши

$$\frac{dz}{dl} = -M(l,E)z, \quad \frac{dE}{dl} = -\widetilde{\chi}(l,E)z, \qquad z(L) = z_L \geqslant 0, \quad E(L) = 0, \tag{4}$$

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-5138.2014.1).

DOI: 10.4213/rm9631