ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А.Г.Сергеев

1. ВВЕДЕНИЕ

В развитии математических методов в физике твердых тел можно выделить два периода. Первый относится к построению классической теории Блоха, описывающей свойства твердлых тел, обладающих кристаллической решеткой. Основными математическими инструментами на этом этапе были традиционные и для других разделов теоретической физики функциональный анализ и дифференциальные уравнения, в том числе в частных производных. Второй период наступил с внедрением новых математических методлов, таких как топология, теория C^*-алгебр, K-теория и некоммутативная геометрия.

Роль топологии в теории твердого тела проявилась в полной мере в связи с квантовым эффектом Холла. Вскоре после его открытия фон Клитцингом в 1980 г. появились публикации Лафлина и Таулесса с коллегами, в которых предлагалось топологическое объяснение этого эффекта.

Ключевую роль в исследовании топологических свойств твердых тел играет изучение их групп симметрий. Описание возможных типов симметрий восходит к Китаеву, который предложил классификацию топологических объектов в физике твердого тела, основанную на теории представлений клиффордовых алгебр.

На этом этапе был выделен класс твердых тел, называемых топологическими диэлектриками, которые обладают широкой энергетической щелью, устойчивой относительно малых деформаций. Это послужило основанием для использования топологических методов при их изучении.

Особый интерес представляют топологические диэлектрики, инвариантные относительно обращения времени. Кейн и Мил ввели для таких диэлектриков топологический $\mathbb{Z}_2$-инвариант и показали, что этот инвариант является нетривиальным для квантового спинового диэлектрика Холла.

Вслед за топологией последовали теория C^*-алгебр и некоммутативная геометрия. Введение C^*-алгебр естественно связано с классификацией Китаева, показавшего, что алгебры симметрий топологических диэлектриков принадлежат к классу клиффордовых алгебр. Некоммутативная геометрия была с успехом применена Беллиссаром и его коллегами для исследования примесей в твердых телах, описываемых в терминах теории вероятностей.

После установления связи алгебр симметрий твердых тел с теорией C^*-алгебр, пришло время K-теории, которая оказалась тем языком, на котором естественно формулировать и изучать топологические свойства твердых тел, поскольку для C^*-алгебр имеется вариант K-теории, предложенный Ван Далем.

Переходя к квантованию теории топологических диэлектриков, заметим, что эта задача квантования сводится, благодаря наблюдению Китаева, к описанию неприводимых представлений клиффордовых алгебр. Следующий шаг был сделан Кеннеди и Цирнбауэром, которые ввели важное понятие псевдосимметрий. Наблюдаемым, задаваемым гамильтоианами топологических диэлектриков, отвечают квантовые наблюдаемые, задаваемые комплексными структурами на пространстве Намбу, порождаемом операторами рождения и уничтожения. При этом исходным наблюдаемым, удовлетворяющим условию коммутирования с симметриями топологического диэлектрика, будут отвечать квантовые наблюдаемые, удовлетворяющие условию антикоммутирования с псевдосимметриями, определяемыми представлением клиффордовой алгебры.

Однако наряду с топологическими диэлектриками, обладающими широкой энергетической щелью, имеются твердые тела, этим свойством не наделенные. Ярким примером таких твердых тел может служить графен. Он имеет шестиугольную решетку, в узлах которой располагаются атомы углерода. В отличие от топологических диэлектриков разные энергетические зоны в графене могут (и даже должны) пересекаться.

Похожий эффект возникает и в топологических диэлектриках при выходе из внутренности тела диэлектрика на его границу, где разные энергетические зоны (не пересекающиеся в теле диэлектрика) могут пересекаться при выходе на границу. Связь между топологическими инвариантами диэлектрика и его границы устанавливается BB-соответствием (от английского "bulk-boundary").

Список литературы

[1] A.Alldridge, C.Max, M.R.Zirnbauer, Bulk-boundary correspondence for disordered free-fermion topological phases, Comm. Math. Phys., **377**(2020), 1761-1821.

[2] N.W.Ashcroft, N.D.Mermin, *Solid State Physics*, Saunders, New York, 1976 [Русский перевод: Н.Ашкрофт, Н.Мермин, Физика твердого тела, М.: Мир, 1979]

[3] J.Bellissard, A. van Elst, H.Schulz-Baldes, The noncommutative geometry of the quantum Hall effect, J. Math. Phys. **35**(1994), 5373–5451.

[4] F.A.Berezin, M.A.Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.

[5] C.Bourne, J.Kellendonk, A.Rennie, The K-theoretic bulk-edge correspondence for topological insulators, Ann. Inst. Poincare, **18**(2017), 1833–1866.

[6] C.L.Kane, E.J.Mele, Quantum spin Hall effect in graphene, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:226801.

[7] C.L.Kane, E.J.Mele, $\mathbb{Z}_2$ topological order and the quantum spin Hall effect, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:146802.

[8] R.Kennedy, M.R.Zirnbauer, Bott periodicity for Z2 symmetric ground states of gapped free-fermion systems. Commun. Math. Phys. **342**(2016), 909–963.

[9] A.Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, Adv. Theor. Phys., AIP Conf. Proc. **1134**(2009), 22-30.

[10] B.Laughlin, Quantized Hall conductance in two dimensions, Phes Rev. **B23**(1981), 5232.
[11] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва, 1978.
[12] E.Prodan, H.Schulz-Baldes, *Bulk and Boundary Invariants for Complex Topological Insulators*, Mathematical Physics Studies. Springer, 2016.
[13] H.Schulz-Baldes, T.Stoiber, *Harmonic analysis in operator algebras and its applications to index theory and topological solid state systems*, arXiv:2206.07781v2(math-ph), 2022.
[14] А.Г.Сергеев, *О математических задачах в теории топологических диэлектриков*, Теор. Матем. Физика, 208:2 (2021), 342–354
[15] A.G.Sergeev, *Quantum Hall Effect and Noncommutative Geometry*, Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics, Trends Math., Birkhauser, Cham, 2021, 314–326
[16] А.Г.Сергеев, *BB-соответствие в теории твердого тела*, Труды ММО, 84, № 2, 2023, 179–204
[17] D.J.Thouless, M.Kohmoto, M.P.Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 405-408.
[18] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. I. Quat. J. Math. Oxford, Ser.(2), **39**(1988), 185–199.
[19] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. II. Pacific J. Math., **134**(1988), 377-392.