ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А.Г.Сергеев

1. Лекция XI. Топологические инварианты и BB-соответствие

1.1. **Топологические инварианты твердого тела.** Поведение фермионной квантовой системы определяется одночастичным гамильтонианом $h = h^* \in \mathrm{Mat}_N(R)$, где R – алгебра фон Неймана $R = L^\infty(\mathbb{T}^d, \mathcal{T})$, а ее основное состояние описывается *проектором Ферми*

$$p_F = \chi(h \leq E_F) \in \mathrm{Mat}_N(R).$$

Определение 1 (щелевое условие). *Щелевое условие (BGH)* выполняется для гамильтониана h, если уровень энергии Ферми E_F содержится в энергетической щели гамильтониана h, т.е. найдется замкнутый отрезок Δ, такой что $E_F \in \Delta$ и $\Delta \cap \sigma(h) = \emptyset$.

Переход от гамильтониана h к проектору Ферми часто называют *спектральным уплощением.* Спаривание этого проектора с четным характером Черна всегда корректно определено, но для нечетного характера Черна требуется предварительно построить по h некоторый унитарный опертор. Для этого предположим, что h антикоммутирует с некоторым самопряженным унитарным оператором J.

Физически, это условие означает наличие киральной симметрии у h. Для киральных систем N должно быть четным, а в качестве оператора J берется самосопряженный унитарный оператор

$$J = \begin{pmatrix} 1_{N/2} & 0 \\ 0 & -1_{N/2} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Mat}_N(R).$$

Определение 2 (киральное условие). *Киральное условие (CH)* выполняется для гамильтониана h, если $JhJ = -h$.

Из этого условия следует, что $\sigma(h) = -\sigma(h)$, поэтому в этом случае естественно предполагать, что $E_F = 0$ (считая, что 0 не является собственным значением h). В этом случае h будет задаваться внедиагональной матрицей а проектор Ферми будет иметь вид

$$p_F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1_{N/2} & -u_F^* \\ -u_F & 1_{N/2} \end{pmatrix} \ ,$$

где унитарный оператор $u_F \in \mathrm{Mat}_{N/2}(A)$ называется *унитарным оператором Ферми.*

Рассмотрим теперь индексное спаривание операторов p_F или u_F с характером Черна $\mathrm{Ch}_{\mathcal{T},\theta}$, где θ есть $\mathbb{R}^n$-действие, получаемое из $\mathbb{T}^d$-действия ρ по формуле

$$\theta_t(a) = \rho_{\hat{e}\cdot t}(a), \quad t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n,$$

где $\hat{e} = (\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$ – единичные векторы в $\mathbb{R}^d$, образующие ортонормированную (но возможно неполную) систему.

Если гамильтониан h удовлетворяет условию BGH и принадлежит гладкой подалгебре $\mathrm{Mat}_N(A_{\rho,\mathcal{T}})$, то проектор Ферми можно получить из h с помощью непрерывного (а не борелевского) функционального исчисления по формуле

$$p_F = g(h),$$

где $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – подходящая гладкая аппроксимация характеристической функции $\chi(h \leq E_F)$ области энергий, не превосходящих E_F. В этом случае проектор p_F также принадлежит $\mathrm{Mat}_N(A)$, определяя класс $[p_F]_0 \in K_0(A)$ и, тем самым, четное число Черна

$$\mathrm{Ch}_{\mathcal{T},\theta}(p_F) = \langle \mathrm{Ch}_{\mathcal{T},\theta}, [p_F]_0 \rangle.$$

Если $d = n$ четно, то число Черна называется *сильным инвариантом*, а при $n < d$ (с четным n) этот инвариант называется *слабым*. Если же гамильтониан h удовлетворяет, помимо условия BGH, также условию CH, то унитарный оператор Ферми u_F принадлежит $\mathrm{Mat}_{N/2}(A)$ и определяет класс $[u_F]_1 \in K_1(A)$, и, тем самым, нечетное число Черна

$$\mathrm{Ch}_{\mathcal{T},\theta}(u_F) = \langle \mathrm{Ch}_{\mathcal{T},\theta}, [u_F]_1 \rangle.$$

Снова, если $d = n$ нечетно, то этот инвариант называется *сильным*, а при $n < d$ инвариант называется *слабым*.

Предложение 1. *Для гладких гамильтонианов h, удовлетворяющих условию BGH, проектор Ферми $p_F \in Mat_N(A_{\mathcal{T},\rho})$ и четное число Черна $Ch_{\mathcal{T},\theta}(p_F)$ корректно определено. Если h, помимо BGH, удовлетворяет также условию CH, то $u_F \in Mat_{N/2}(A_{\mathcal{T},\rho})$ и нечетное число Черна $Ch_{\mathcal{T},\theta}(u_F)$ корректно определено.*

Условия, необходимые для корректного определения чисел Черна, можно существенно ослабить. Например, если p_F или u_F принадлежат соболевскому пространству $W_p^1(R)$ для некоторого $p \in (n, n+1]$, то числа Черна также корректно определены.

1.2. **Гладкое BB-соответствие.** Напомним, что мы сопоставили вектору нормали $\nu_\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ действие ξ группы G, равной $\mathbb{R}$ или $\mathbb{T}$. При этом алгебры из точной последовательности

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \hat{A} \longrightarrow A \longrightarrow 0 \;, \tag{1}$$

связывающей граничные и полупространственные алгебры, отождествляются с их представлениями с помощью $\hat{\pi}_{\mathcal{T},G}$ из предыдущей лекции. Это представление алгебры $A \rtimes_\xi G$ в пространстве $L^2(\hat{G} \times \mathbb{Z}^d)$ задается на образующих формулой

$$\hat{\pi}_{\mathcal{T},G}(af(D_\xi)) = \pi_{\mathcal{T}}(a) \int_{\hat{G}} \hat{\mu}(dr) f(X_\xi + r)$$

и продолжается до точного нормального представления W^*-скрещенного произведения

$$\mathcal{N}_\xi = R \rtimes G = L^\infty(\mathbb{T}^d, \mathcal{T}) \rtimes G.$$

Операторы этого представления задаются расслоенной формулой вида

$$\hat{a} = \int_{\hat{G}} \hat{\mu}(dr) \hat{a}_r,$$

где операторы $\hat{a}_r$ действуют в пространстве $L^2(\mathbb{Z}^d)$.

Мы также отождествляем алгебру R с ее образом в $\mathcal{N}_\xi$, поскольку отображение вложения $\pi_\mathcal{T} \otimes 1_{L^2(\hat{G})}$ отождествляет R с $\pi_\mathcal{T}(R)$.

Образующая D_ξ представляется оператором

$$\hat{X}_\xi = \int_{\hat{G}} \hat{\mu}(dr)(X_\xi + r),$$

где $X_\xi = \nu_\xi \cdot X$ – оператор координаты на поверхности. Гладкая проекция $\mathcal{P}$, введенная при построении гладкого теплицева продоожения, будет в этом представлении задаваться формулой

$$\mathcal{P} = \int_{\hat{G}} \hat{\mu}(dr)\chi_s(X_\xi + r),$$

где $\chi_s(r) = 0$ при $r \leq 0$ и $\chi_s(r) = 1$ при $r > \epsilon$ для некоторого $\epsilon > 0$.

Пользуясь этим представлением, можно построить поднятие элемента $a \in A$ до элемента $\hat{a} = \mathcal{P}a\mathcal{P} + \tilde{k}$, где $\hat{a} \in \hat{A}$, $\tilde{k} \in E$.

Предложение 2. *Пусть $h \in Mat_N(A)$ есть самосопряженный оператор, удовлетворяющий условию BGH, и $\hat{h} \in Mat_N(\hat{A})$ – самосопряженное поднятие h из точной последовательности, связывающей граничные и полупространственные алгебры, вида*

$$\hat{h} = \mathcal{P}h\mathcal{P} + \tilde{k}, \quad \tilde{k} \in Mat_N(E).$$

Тогда

(1) *Экспоненциальное отображение $Exp : K_0(A) \to K_1(E)$ переводит класс $[p_F]_0$ в класс $[\hat{u}_\Delta]_1$ вида*

$$\hat{u}_\Delta = exp(2\pi i f_{Exp}(\hat{h})) \in Mat_N(E^+) \subset Mat_N(\mathcal{N}_\xi),$$

где $f_{Exp} \in C^\infty(\mathbb{R})$ – гладкая функция, такая что $f_{Exp}(t) = 0$ ниже Δ и $f_{Exp}(t) = 1$ выше Δ.

(2) *Если условие CH выполняется как для h, так и для $\hat{h}$, то индексное отображение $Ind : K_1(A) \to K_0(E)$ переводит класс $[u_F]_1$ в класс $[\hat{p}_\Delta]_0 - [0_{N/2} \oplus 1_{N/2}]_0$, где*

$$\hat{p}_\Delta = exp(-\frac{\pi i}{2} f_{Ind}(\hat{h})) \begin{pmatrix} 1_{N/2} & 0 \\ 0 & 0_{N/2} \end{pmatrix} exp(\frac{\pi i}{2} f_{Ind}(\hat{h})) \in Mat_N(E^+) \subset Mat_N(\mathcal{N}_\xi),$$

где $f_{Ind} \in C^\infty(\mathbb{R})$ – нечетная гладкая функция, такая что $f_{Ind}(t) = -1$ ниже Δ и $f_{Ind}(t) = 1$ выше Δ.

Доказательство этого предложения можно найти в книге [2].

Воспользуемся приведенным предложением для построения граничных инвариантов, основанного на спаривании K-групп с характерами Черна. Напомним, что действие ρ может быть продолжено до (сильно) непрерывного $\mathbb{R}^d$-действия на скрещенном произведении E, полагая его тривиальным на функциях $f(\hat{X}_\xi)$ от образующих. Тогда n-мерное действие θ будет определяться выбором ортонормированного семейства $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ в пространстве $\mathbb{R}^d$ с $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n \perp \nu_\xi$. Действие θ оставляет двойственный след $\widehat{\mathcal{T}}$ инвариантным, что позволяет ввести гладкий характер Черна $\mathrm{Ch}_{\widehat{\mathcal{T}},\theta}$ на E как выше.

Для гладких суммируемых проекторов $\hat{p} \in E^{+}_{\widehat{\mathcal{T}},\theta}$ и унитарных операторов $\hat{u} \in E^{+}_{\widehat{\mathcal{T}},\theta}$ можно рассмотреть индексные спаривания $\langle \mathrm{Ch}_{\widehat{\mathcal{T}},\theta}, [\hat{p}]_0\rangle$ и $\langle \mathrm{Ch}_{\widehat{\mathcal{T}},\theta}, [\hat{u}]_1\rangle$.

Предложение 3. *В условиях из Предложения 2 и в предположении, что гамильтониан $\hat{h}$ удовлетворяет условию CH, будем иметь*

$$\hat{u}_\Delta - 1_N \in E_{\widehat{\mathcal{T}},\theta}, \quad \hat{p}_\Delta - (0_{N/2} \oplus 1_{N/2}) \in E_{\widehat{\mathcal{T}},\theta}.$$

Теорема 1. *(гладкое BB-соответствие) В условиях Предложения 3 имеют место следующие утверждения:*

(1) *Для нечетного n*

$$\langle Ch_{\mathcal{T},\theta\times\xi}, [p_F]_0\rangle = \langle Ch_{\widehat{\mathcal{T}},\theta}, [\hat{u}_\Delta]_1\rangle;$$

(2) *Для четного n и в предположении, что h и $\hat{h}$ удовлетворяют условию CH*

$$\langle Ch_{\mathcal{T},\theta\times\xi}, [u_F]_1\rangle = -\langle Ch_{\widehat{\mathcal{T}},\theta}, [\hat{p}_\Delta]_0\rangle.$$

Характер Черна $\mathrm{Ch}_{\mathcal{T},\theta\times\xi}$ зависит только от гиперплоскости, порождаемой $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n \perp \nu_\xi$. Рассмотрим случай $n = d - 1$. Тогде левые части равенств в Теореме задают сильные инварианты, не зависящие от выбора ν_ξ (с точностью до ориентации). Поэтому и граничные инварианты в правых частях не зависят от ν_ξ.

Доказательство этой теоремы можно найти в книгах [2], [3].

Список литературы

[1] C.Bourne, J.Kellendonk, A.Rennie, The K-theoretic bulk-edge correspondence for topological insulators, Ann. Inst. Poincare, **18**(2017), 1833–1866.

[2] E.Prodan, H.Schulz-Baldes, *Bulk and Boundary Invariants for Complex Topological Insulators*, Mathematical Physics Studies. Springer, 2016.

[3] H.Schulz-Baldes, T.Stoiber, *Harmonic analysis in operator algebras and its applications to index theory and topological solid state systems*, arXiv:2206.07781v2(math-ph), 2022.