ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А.Г.Сергеев

1. Лекция IV. C^*-модули и C^*-динамические системы

1.1. C^*-модули.

Определение 1. (Правым) C^*-*предмодулем* над C^*-алгеброй A называется комплексное векторное пространство $\mathcal{E}$, являющееся одновременно (правым) A-модулем, наделенное полуторалинейным спариванием $(\cdot\,,\cdot) : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to A$, обладающим следующими свойствами:

(1) $(r, s+t) = (r,s) + (r,t)$;
(2) $(r, sa) = (r,s)\,a$;
(3) $(r,s) = (s,r)^*$;
(4) $(s,s) > 0$, если $s \neq 0$,

где $r, s, t \in \mathcal{E}$, $a \in A$.

Спаривание $(\cdot,\cdot)$ A-линейно по второму аргументу, антилинейно по первому аргументу и положительно определено. В частности, $(ra, s) = a^*(r,s)$ для $a \in A$, $r, s \in \mathcal{E}$.

Введем на C^*-предмодуле $\mathcal{E}$ норму, полагая

$$\|s\|_{\mathcal{E}} := \sqrt{\|(s,s)\|}$$

для $s \in \mathcal{E}$. Здесь, $\|\cdot\|$ обозначает норму в C^*-алгебре A.

Определение 2. C^*-предмодуль $\mathcal{E}$ называется C^*-*модулем*, если он является полным по введенной норме $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$.

В частности, пополнение произвольного C^*-предмодуля по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ является C^*-модулем.

Пример 1. (1) Комплексное гильбертово пространство является C^*-модулем над алгеброй $\mathbb{C}$, в котором спаривание задается скалярным произведением.

(2) Любая C^*-алгебра A является C^*-модулем над собой со спариванием, задаваемым формулой: $(a,b) = a^*b$.

(3) Свободный A-модуль A^n, составленный из вектор-столбцов с компонентами из A, является C^*-модулем над A со спариванием элементов $a = {}^t(a_1, \ldots, a_n)$ и $b = {}^t(b_1, \ldots, b_n)$, задаваемым формулой:

$$(a,b) = (a_1^*, \ldots, a_n^*)\,{}^t(b_1, \ldots, b_n) = a_1^*b_1 + \ldots + a_n^*b_n.$$

(4) Свободный A-модуль ${}^nA$, составленный из вектор-строк с компонентами из A, является C^*-модулем над $\mathrm{Mat}_n(A)$ со спариванием элементов $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$, задаваемым формулой:

$$(a,b) = {}^t(a_1^*,\dots,a_n^*)(b_1,\dots,b_n) = (a_i^* b_j)_{i,j=1}^n.$$

В дальнейшем мы будем использовать тензорные произведения гильбертова пространства $\mathcal{H}$ на C^*-алгебру A. *Алгебраическим тензорным произведением* $\mathcal{H}\odot A$ называется правый A-модуль, элементами которого являются конечные суммы простых тензоров вида

$$\sum_{k=1}^n \xi_k \odot a_k,$$

где $\xi_k\in\mathcal{H}$, $a_k\in A$.

A-модуль $\mathcal{H}\odot A$ наделяется A-значным спариванием, задаваемым на простых тензорах формулой

$$(\xi\odot a, \eta\odot b) = (\xi,\eta)a^*b,$$

где $a,b\in A$, $\xi,\eta\in\mathcal{H}$.

A-модуль $\mathcal{H}\odot A$ с указанным спариванием является C^*-предмодулем над A, а его пополнение по норме, порождаемой введенным спариванием, является C^*-модулем над A, который обозначается через $\mathcal{H}\otimes A$ и называется *тензорным произведением* гильбертова пространства $\mathcal{H}$ на C^*-алгебру A.

Введем C^*-модуль $\mathcal{H}_A\equiv \ell^2_A$ над C^*-алгеброй A, состоящий из последовательностей $a=\{a_k\}_{k=1}^\infty$, $a_k\in A$, для которых ряд

$$\sum_{k=1}^\infty a_k^* a_k$$

сходится в A. Наделим его полуторалинейным спариванием вида

$$(a,b)=\sum_{k=1}^\infty a_k^* b_k.$$

Вопрос: Почему оно корректно определено?

Можно также определить тензорное произведение произвольных C^*-модулей (см. [3]).

Рассмотрим теперь классы операторов, действующих в C^*-модулях над C^*-алгеброй A.

Кетбра-оператор из C^*-модуля $\mathcal{E}$ в C^*-модуль $\mathcal{F}$ задается отображением вида

$$|r\rangle\langle s|:\ t\longmapsto r(s,t),$$

где $s,t\in\mathcal{E}$, $r\in\mathcal{F}$. Это оператор ранга 1, который A-линеен, так как $r(s,ta) = r(s,t)a$ для $a\in A$, и допускает сопряжение, причем

$$(|r\rangle\langle s|)^* = |s\rangle\langle r| : \mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{E}.$$

Композиция двух кетбра-операторов, действующих в C^*-модуле $\mathcal{E}$, задаваемая формулой

$$|r\rangle\langle s|\circ|t\rangle\langle u| = |r\rangle(s,t)\langle u| = |r\rangle\langle u(t,s)|,$$

является снова кетбра-оператором, так что конечные суммы кетбра-операторов, действующих в $\mathcal{E}$, образуют подалгебру, являющуюся двусторонним идеалом в алгебре $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$.

Эта подалгебра обозначается через $\mathrm{Fin}_A\mathcal{E}$, а ее замыкание по операторной норме обозначается через $\mathcal{K}_A(\mathcal{E})$.

Более общим образом, мы обозначаем через $\mathrm{Fin}_A(\mathcal{E},\mathcal{F})$ пространство кетбра-операторов вида

$$\sum_{k=1}^{n} |r_k\rangle\langle s_k|,$$

называемых иначе операторами *A-конечного ранга*. Замыкание $\mathrm{Fin}_A(\mathcal{E},\mathcal{F})$ по операторной норме обозначается через $\mathcal{K}_A(\mathcal{E},\mathcal{F})$, а его элементы называются *A-компактными операторами*.

Упражнение 1. Для алгебры $A = C(M)$, где M – компактное многообразие, и произвольного эрмитова векторного расслоения $E \to M$ имеет место изоморфизм

$$\mathcal{K}_A(\Gamma(M,E)) \cong \Gamma(M,\mathrm{End}\,E).$$

Введем еще одно важное понятие, ассоциированное с C^*-алгебрами. Рассмотрим тензорное произведение $\mathcal{K}\otimes A$ алгебры компактных операторов $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, на C^*-алгебру A. Алгебра $\mathcal{K}\otimes A$ является пополнением алгебраического тензорного произведения $\mathcal{K}\odot A$ по единственной C^*-норме, обладающей перекрестным свойством:

$$\|\xi\odot a\| = \|\xi\|\cdot\|a\|,$$

где $\xi\in\mathcal{K}$, $a\in A$.

Определение 3. Тензорное произведение $A_S := \mathcal{K}\otimes A$ называется *стабилизацией* C^*-алгебры A. C^*-алгебра A называется *стабильной*, если $A_S \cong A$. Две C^*-алгебры A и B называются *стабильно эквивалентными*, если $A_S \cong B_S$.

Пусть $\mathcal{F}$ есть замкнутый подмодуль в C^*-модуле $\mathcal{E}$. Допустим, что $\mathcal{F}$ имеет ортогональное дополнение $\mathcal{F}^\perp$ в $\mathcal{E}$ такое, что $\mathcal{F}\oplus\mathcal{F}^\perp \cong \mathcal{E}$. Тогда любой элемент $s\in\mathcal{E}$ однозначно представляется в виде $s = t+u$, где $t\in\mathcal{F}$, $u\in\mathcal{F}^\perp$, а отображение $s\mapsto t$ задает проектор $p\in\mathrm{End}_A\mathcal{E}$ с областью значений $\mathcal{F}$. Обратно, если $p\in\mathrm{End}_A\mathcal{E}$ является проектором, то ортогональное дополнение к $\mathrm{Im}\,p$ существует и совпадает с

$$(\mathrm{Im}\,p)^\perp = \mathrm{Im}(1_\mathcal{E} - p) = \mathrm{Ker}\,p.$$

Тем самым, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между дополняемыми C^*-подмодулями в $\mathcal{E}$ и областями значений проекторов из $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$.

Пусть A есть унитальная C^*-алгебра. Тогда A-компактные проекторы в $\mathcal{H}_A$ образуют подмножество в C^*-алгебре A_S, обозначаемое через $\mathcal{P}(A_S)$, которое является замкнутым подмножеством в единичном шаре алгебры A_S.

Примерами операторов из $\mathcal{P}(A_S)$ могут служить проекторы вида

$$P_n = \sum_{j=1}^{n} |e_j\rangle\langle e_j|,$$

где $e_j = (0,\dots,0,1,0,\dots)$ (с 1 на j-м месте).

Рассмотрим модули вида pA^n, где p – проектор в $\mathrm{Mat}_n(A)$.

Задача 1. Если p – проектор в $\mathrm{Mat}_n(A)$, то pA^n является C^*-модулем над C^*-алгеброй A и

$$\mathcal{K}_A(pA^n) \cong p\,\mathrm{Mat}_n(A)p.$$

Определение 4. Пусть $T : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ есть ограниченный A-линейный оператор, действующий из C^*-модуля $\mathcal{E}$ над C^*-алгеброй A в C^*-модуль $\mathcal{F}$ над той же алгеброй. Оператор T допускает *сопряжение*, если существует A-линейный оператор $T^* : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$, называемый *оператором, сопряженным* к T, такой что

$$(r, Ts) = (T^*r, s)$$

для всех $r \in \mathcal{F}$, $s \in \mathcal{E}$.

Сопряженный оператор определяется единственным образом и $T^{**} = T$. Однако не любой ограниченный A-линейный оператор, действующий в C^*-модуле, допускает сопряжение. Причина в том, что не любой замкнутый подмодуль $\mathcal{F}$ в C^*-модуле $\mathcal{E}$ над C^*-алгеброй A допускает ортогональное дополнение $\mathcal{G}$ такое, что $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} = \mathcal{E}$.

Поэтому требование существования сопряженного оператора приходится накладывать дополнительно. Именно, будем обозначать через $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ векторное пространство A-линейных операторов $T : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, допускающих сопряжение. При $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ это пространство обозначается через $\mathrm{End}_A(\mathcal{E})$.

Определение 5. Оператор $U : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, действующий из C^*-модуля $\mathcal{E}$ над C^*-алгеброй A в C^*-модуль $\mathcal{F}$ над той же алгеброй, называется *унитарным*, если $U \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ и

$$U^*U = 1_{\mathcal{E}},\ UU^* = 1_{\mathcal{F}}.$$

Если такой оператор существует, то C^*-модули $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ называются *унитарно эквивалентными*.

Задача 2. Пусть $\mathcal{E}$ есть C^*-модуль над C^*-алгеброй A. Тогда алгебра $\mathrm{End}_A(\mathcal{E})$ ограниченных A-линейных операторов на $\mathcal{E}$, допускающих сопряжение, также является C^*-алгеброй.

Из этого результата вытекает, в частности, что алгебра $\mathcal{K}_A(\mathcal{E})$, состоящая из A-компактных операторов, действующих в C^*-модуле $\mathcal{E}$, является C^*-алгеброй и двусторонним идеалом в алгебре $\mathrm{End}_A(\mathcal{E})$.

1.2. C^*-динамические системы и их представления.

Определение 6. Пусть A есть C^*-алгебра, наделенная сильно непрерывным действием $\alpha : G \to \mathrm{Aut}\,A$ локально компактной группы G. Иными словами, отображение $G \ni g \mapsto \alpha_g(a)$ непрерывно по норме для любого $a \in A$. В этом случае тройка (A, G, α) называется *C^*-динамической системой.*

Определение 7. Пусть (A, G, α) есть C^*-динамическая система. *Ковариантным представлением* этой системы называется пара (π, U), где π – невырожденное унитарное представление алгебры A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а U – (сильно) непрерывное унитарное представление группы G в пространстве $\mathcal{H}$ такое, что

$$\pi(\alpha_g(a)) = U(g)\pi(a)U(g)^*,$$

где $a \in A$, $g \in G$.

C^*-динамическая система, наделенная ковариантным представлением, однозначно (с точностью до изоморфизма) определяет понятие скрещенного произведения алгебры A и группы G.

Но прежде, чем переходить к его определению, напомним понятие *алгебры мультипликаторов* $M(B)$ для произвольной C^*-алгебры B. Это наибольшая унитальная C^*-алгебра, содержащая B в качестве нетривиального идеала. Например, если B есть C^*-алгебра $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ компактных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то $M(B)$ есть C^*-алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$. Для унитальной C^*-алгебры B всегда $M(B) = B$.

Определение 8. Пусть (A, G, α) есть C^*-динамическая система. *Скрещенным произведением* $A \rtimes_\alpha G$ называется C^*-алгебра $B \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, наделенная гомоморфизмом $i_A : A \to M(B)$ и (сильно) непрерывным гомоморфизмом $i_G : G \to UM(b)$ ($UM(b)$ обозначает алгебру унитарных мультипликаторов), обладающими следующими свойствами:

(1) $i_A(\alpha_g(a)) = i_G(g)i_A(a)i_G(g)^*\,,\quad a \in A, g \in G$;
(2) если (π, U) – ковариантное представление динамической системы (A, G, α) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то существует единственное невырожденное представление $\pi \times U$ алгебры B (и ее алгебры мультипликаторов) в $\mathcal{H}$ такое, что
$$\pi = (\pi \times U) \circ i_A\ , U = (\pi \times U) \circ i_G,$$
т.е. ковариантное представление (π, U) продолжается единственным образом до представления скрещенного произведения $A \rtimes_\alpha G$;
(3) i_G продолжается до представления алгебры $C_c(G)$ непрерывных функций на G с компактными носителями, которое порождается интегралами от линейных комбинаций произведений вида $i_A(a)i_G(f)$, $a \in A$, $f \in C_c(G)$, плотных в B.

Остановимся более подробно на последнем свойстве. Оба гомоморфизма i_A и i_G должны быть инъективными ввиду невырожденности представления $\pi \times U$. Введем на алгебре $C_c(G, A)$ операции свертки и сопряжения:

(1) $(f, h)(t) = \int_G f(s)\alpha_s(h(t - s))ds$;
(2) $f^*(t) = \alpha_t(f(-t)^*)$,

где $f, h \in C_c(A, G)$, а интеграл берется по мере Хаара на G. Тогда гомоморфизмы i_A и i_G продолжаются до $*$-гомоморфизма

$$i_A \times i_G : C_c(G, A) \longrightarrow A \rtimes_\alpha G$$

с плотной областью значений. Этот гомоморфизм можно записать в виде

$$(i_A \times i_G)(f) = \int_G i_A(f(t))i_G(t)dt\ ,\quad f \in C_c(G, A). \tag{1}$$

Если задано ковариантное представление (π, U) C^*-динамической системы (A, G, α) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то можно положить

$$i_A(a) = \pi(a),\ i_G(g) = U(g).$$

Тогда формула (1) превратится в проинтегрированное представление $\pi \times U$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, задаваемое формулой

$$(\pi \times U)(f) = \int_G \pi(f(t))U(t)dt,$$

где $f \in C_c(G, A)$.

Перейдем к конкретным примерам C^*-динамических систем в случае, когда группа G имеет вид $G = \mathbb{T}^{n_0} \oplus \mathbb{R}^{n_1}$ и положим $n = n_0 + n_1$, так что G есть n-параметрическая абелева группа.

Пусть $D = (D_1, \dots, D_n)$ есть набор коммутирующих самосопряженных (плотно заданных) генераторов отображения $G \ni t \to U(t)$, выбранных так, что

$$U(t) = e^{2\pi i D\cdot t}\ , \quad D \cdot t = \sum_{j=1}^{n} D_j t_j. \tag{2}$$

Положим $i_A(a) = \pi(a), i_G(t) = U(t)$, где (π, U) – ковариантное представление C^*-динамической системы (A, G, α). Тогда отображение $i_G(f)$, $f \in C_c(G)$, из формулы (1) можно будет выразить в терминах преобразования Фурье, задаваемого формулой

$$(\mathcal{F}f)(k) = \int_G \overline{\langle k, t\rangle} f(t)dt,$$

где $f \in L^1(G)$, k – характер группы G, т.е. непрерывный гомоморфизм $k : G \to S^1$, а $\langle k, t\rangle \in S^1$ – спаривание между G и двойственной группой $\hat{G}$. Для $G = \mathbb{T}^{n_0} \oplus \mathbb{R}^{n_1}$ эта группа совпадает с $\hat{G} = \mathbb{Z}^{n_0} \oplus \mathbb{R}^{n_1}$, а спаривание задается формулой $\langle k, t\rangle = e^{2\pi i\, k\cdot t}$. В этом случае отображение $i_G(f)$ превращается в

$$i_G(f) = (\mathcal{F}f)(D) \qquad f \in C_c(G),$$

где правая часть равенства понимается в смысле непрерывного функционального исчисления генераторов с $\mathcal{F}f \in C_0(\hat{G})$.

Обратное преобразование Фурье задается формулой

$$(\mathcal{F}^{-1}h)(t) = \int_{\hat{G}} \langle k, t\rangle h(k)dk\ , \quad h \in L^1(\hat{G}),$$

а мера Хаара dk на $\hat{G}$ нормализована так, чтобы формула Планшереля имела вид

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\hat{G})} = \|f\|_{L^2(G)},$$

где $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Тогда для $h \in C_c(\hat{G})$ будет выполняться равенство

$$h(D) = (\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}h))(D) = \int_G (\mathcal{F}^{-1}h)(t)e^{2\pi i\, D\cdot t}dt.$$

Поэтому

$$(\pi \times U)(A \rtimes_\alpha G) = C^* - \operatorname{span}\{\pi(a)h)D) : a \in A, h \in C_0(\hat{G})\},$$

где справа берется C^*-замыкание в алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

В качестве ковариантного представления далее будет, как правило, рассматриваться регулярное представление, к определению которого мы переходим.

Пусть A есть C^*-алгебра, являющаяся подалгеброй в алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. *Регулярное представление* (π, U) этой алгебры в гильбертовом пространстве $L^2(G, \mathcal{H})$ задается формулами:

$$(\pi(a)\psi)(s) = \alpha_s^{-1}(a)\psi(s) \ , \quad (U(t)\psi)(s) = \psi(s-t) \ ,$$

где $a \in A, s, t \in G$, $\psi \in L^2(G, \mathcal{H})$.

Генераторы группы U в регулярном представлении принимают вид

$$(D_j\psi)(s) = \frac{i}{2\pi}(\partial_{s_j}\psi)(s),\ i_G(a) = \pi(a),\ i_G(g) = U(g).$$

Тогда формула (1) превратится в проинтегрированное представление $\pi \times U$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, задаваемое формулой

$$(\pi \times U)(f) = \int_G \pi(f(t))U(t)dt,$$

где $f \in C_c(G, A)$.

Перейдем к конкретным примерам C^*-динамических систем в случае, когда группа G имеет вид $G = \mathbb{T}^{n_0} \oplus \mathbb{R}^{n_1}$ и положим $n = n_0 + n_1$, так что G есть n-параметрическая абелева группа.

Пусть $D = (D_1, \ldots, D_n$ есть набор коммутирующих самосопряженных (плотно заданных) генераторов отображения $G \ni t \to U(t)$, выбранных так, что

$$U(t) = e^{2\pi i D\cdot t} \ , \quad D \cdot t = \sum_{j=1}^{n} D_j t_j. \tag{3}$$

Положим $i_A(a) = \pi(a), i_G(t) = U(t)$, где (π, U) – ковариантное представление C^*-динамической системы (A, G, α). Тогда отображение $i_G(f)$, $f \in C_c(G)$, из формулы (1) можно будет выразить в терминах преобразования Фурье, задаваемого формулой

$$(\mathcal{F}f)(k) = \int_G \overline{\langle k, t\rangle} f(t)dt,$$

где $f \in L^1(G)$, k – характер группы G, т.е. непрерывный гомоморфизм $k : G \to S^1$, а $\langle k, t\rangle \in S^1$ – спаривание между G и двойственной группой $\hat{G}$. Для $G = \mathbb{T}^{n_0} \oplus \mathbb{R}^{n_1}$ эта группа совпадает с $\hat{G} = \mathbb{Z}^{n_0} \oplus \mathbb{R}^{n_1}$, а спаривание задается формулой $\langle k, t\rangle = e^{2\pi i\, k\cdot t}$. В этом случае отображение $i_G(f)$ превращается в

$$i_G(f) = (\mathcal{F}f)(D) \quad\ f \in C_c(G),$$

где правая часть равенства понимается в смысле непрерывного функционального исчисления генераторов с $\mathcal{F}f \in C_0(\hat{G})$.

Обратное преобразование Фурье задается формулой

$$(\mathcal{F}^{-1}h)(t) = \int_{\hat{G}} \langle k, t\rangle h(k)dk \ , \quad h \in L^1(\hat{G}),$$

а мера Хаара dk на $\hat{G}$ нормализована так, чтобы формула Планшереля имела вид

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\hat{G})} = \|f\|_{L^2(G)},$$

где $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Тогда для $h \in C_c(\hat{G})$ будет выполняться равенство

$$h(D) = (\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}h))(D) = \int_G (\mathcal{F}^{-1}h)(t)e^{2\pi i\, D\cdot t}dt.$$

Поэтому

$$(\pi \times U)(A \rtimes_\alpha G) = C^* - \mathrm{span}\{\pi(a)h(D) : a \in A, h \in C_0(\hat{G})\},$$

где справа берется C^*-замыкание в алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

В качестве ковариантного представления далее будет, как правило, рассматриваться регулярное представление, к определению которого мы переходим.

Пусть A есть C^*-алгебра, являющаяся подалгеброй в алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. *Регулярное представление* (π, U) этой алгебры в гильбертовом пространстве $L^2(G, \mathcal{H})$ задается формулами:

$$(\pi(a)\psi)(s) = \alpha_s^{-1}(a)\psi(s)\ , \quad (U(t)\psi)(s) = \psi(s-t)\ ,$$

где $a \in A, s, t \in G$, $\psi \in L^2(G, \mathcal{H})$.

Генераторы группы U в регулярном представлении принимают вид

$$(D_j\psi)(s) = \frac{i}{2\pi}(\partial_{s_j}\psi)(s).$$

Список литературы

[1] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.

[2] H.Schulz-Baldes, T.Stoiber, *Harmonic analysis in operator algebras and its applications to index theory and topological solid state systems*, arXiv:2206.07781v2(math-ph), 2022.

[3] G.J.Murphy, *C^*-algebras and Operator Algebras*, Academic Press, San Diego, CA, 1990.