ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А.Г.Сергеев

1. Лекция VI. K_0-группа

1.1. **Топологическая K_0-группа.**

Введем на множестве проекторов $\mathcal{P}(A_S)$ в C^*-алгебре A следующее отношение эквивалентности.

Определение 1. Два проектора $p, q \in \mathcal{P}(A_S)$ называются *эквивалентными*, если найдется унитарный оператор $u \in \mathrm{End}_A \mathcal{H}_A$ такой, что

$$q = upu^* = upu^{-1}.$$

Обозначим через

$$V^{\mathrm{top}}(A) = \mathcal{P}(A_S)/\sim$$

фактор пространства $\mathcal{P}(A_S)$ по введенному отношению эквивалентности.

Предложение 1. *Множество $V^{top}(A)$ является унитальной коммутативной полугруппой.*

Доказательство. Определим прямую сумму проекторов $p, q \in \mathcal{P}(A_S)$ по формуле

$$p \oplus q = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

и зададим сложение в $V^{\mathrm{top}}(A)$ как

$$[p] + [q] = [p \oplus q].$$

Оно корректно определено, поскольку

$$upu^{-1} \oplus vqv^{-1} = (u \oplus v)(p \oplus q)(u^{-1} \oplus v^{-1})$$

для унитарных элементов $u, v \in \mathrm{End}_A \mathcal{H}_A$. Далее,

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix},$$

откуда следует, что указанная полугруппа коммутативна. Роль нуля в этой полугруппе играет нулевой класс $[0]$. □

1.2. **Конструкция Гротендика.**

По любой унитальной коммутативной полугруппе S можно каноническим образом построить коммутативную группу K, называемую *группой Гротендика* полугруппы S. Эта группа, заданная вместе с унитальным полугрупповым гомоморфизмом $\vartheta : S \to K$, обладает следующим универсальным свойством: если G – другая коммутативная группа, заданная вместе с унитальным полугрупповым гомоморфизмом $\gamma : S \to G$, то существует единственный групповой гомоморфизм $\kappa : K \to G$ такой, что следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, dashed, "\kappa"] & G \\ S \arrow[u, "\vartheta"] \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. $\gamma = \kappa \circ \vartheta$.

Группа K определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Построить ее можно следующим образом. Рассмотрим на множестве $S \times S$ следующее отношение эквивалентности:

$$(x, y) \sim (x', y') \Longleftrightarrow \text{существует } z \in S \text{ такое, что } x + y' + z = x' + y + z.$$

Тогда группа K определяется как $K = S \times S/\sim$, а гомоморфизм ϑ задается формулой: $\vartheta(x) := [x, 0]$, так что $[x, y] = \vartheta(x) - \vartheta(y)$ в группе K.

Определение 2. *Топологической K_0-группой* унитальной C^*-алгебры A называется группа Гротендика $K_0^{\mathrm{top}}(A)$ полугруппы $V^{\mathrm{top}}(A)$.

Любой элемент из $K_0^{\mathrm{top}}(A)$ представляется в виде $[p] - [q]$, где проекторы $p, q \in \mathcal{P}(A_S)$. Пусть $\varphi : A \to B$ есть унитальный морфизм C^*-алгебр. Обозначим через $K_0\varphi : K_0^{\mathrm{top}}(A) \to K_0^{\mathrm{top}}(B)$ отображение, задаваемое формулой

$$K_0\varphi : [p] - [q] \longrightarrow [\varphi(p)] - [\varphi(q)].$$

Предложение 2. *Соответствие*

$$(A, \varphi) \longmapsto (K_0^{top}(A), K_0\varphi)$$

задает ковариантный функтор из категории унитальных C^*-алгебр в категорию абелевых групп.

Пример 1. (1) $K_0^{\mathrm{top}}(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$.
(2) $K_0^{\mathrm{top}}(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$.

Задача 1. K_0-группа $K_0^{\mathrm{top}}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ алгебры ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ равна нулю.

Перечислим некоторые важные свойства K_0-функтора:

(1) *стабильность*: $K_0^{\mathrm{top}}(A_S) = K_0^{\mathrm{top}}(A)$;
(2) *полуточность*: K_0 переводит короткие точные последовательности гомоморфизмов C^*-алгебр вида $0 \to J \to A \to B \to 0$ в последовательности
$$K_0^{\mathrm{top}}(J) \to K_0^{\mathrm{top}}(A) \to K_0^{\mathrm{top}}(B),$$
точные в среднем члене;
(3) *K_0 коммутирует с индуктивными пределами.*

1.3. **Алгебраическая K_0-группа.**

Задача 2. Пусть $e \in \mathrm{Mat}_n(A)$, $f \in \mathrm{Mat}_m(A)$ – два матричных идемпотента над унитальной C^*-алгеброй A. Рассмотрим отвечающие им C^*-модули eA^n и fA^m, где A^n, A^m – модули вектор-столбцов с компонентами из A. Покажите, что эти C^*-модули изоморфны тогда и только тогда, когда существует обратимая матрица $a \in \mathrm{Mat}_N(A)$ с $N > n, m$ такая, что

$$a \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0_{N-n} \end{pmatrix} a^{-1} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0_{N-m} \end{pmatrix} .$$

Обозначим через $Q_n(A)$ множество идемпотентов в алгебре $\mathrm{Mat}_n(A)$, где A есть унитальная C^*-алгебра, и через $\mathrm{GL}_n(A)$ группу обратимых элементов в $\mathrm{Mat}_n(A)$. Имеются естественные вложения

$$\mathrm{Mat}_n(A) \hookrightarrow \mathrm{Mat}_{n+1}(A) \ , \quad a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\mathrm{GL}_n(A) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1}(A) \ , \quad g \longmapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Первое из них порождает вложение $Q_n(A) \hookrightarrow Q_{n+1}(A)$.

Пользуясь этими вложениями, можно построить индуктивные пределы

$$\mathrm{Mat}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Mat}_n(A) \ , \ \mathrm{GL}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{GL}_n(A) \ , \ Q_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n(A) \, .$$

Определение 3. Два идемпотента $e, f \in Q_m(A)$ называются *эквивалентными*, если они они сопряжены с помощью $\mathrm{GL}_\infty(A)$, т.е. если для некоторого n найдется элемент $g \in \mathrm{GL}_{n+m}(A)$ такой, что

$$g \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix} .$$

Введем множество

$$V^{\mathrm{alg}}(A) = Q_\infty(A)/\sim \ .$$

Определим сложение в $V^{\mathrm{alg}}(A)$ по правилу

$$[e] + [f] = \left[\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \right] ,$$

где последнее равенство вытекает из соотношения: $e \oplus f \sim f \oplus e$. Следовательно, $V^{\mathrm{alg}}(A)$ является унитальной коммутативной полугруппой и мы можем определить группу $K_0^{\mathrm{alg}}(A)$ как группу Гротендика полугруппы $V^{\mathrm{alg}}(A)$.

Теорема 1. *Для произвольной унитальной C^*-алгебры A справедливо равенство*

$$K_0^{top}(A) = K_0^{alg}(A).$$

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [3] из списка литературы.

Список литературы

[1] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. I. Quat. J. Math. Oxford, Ser.(2), **39**(1988), 185–199.

[2] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. II. Pacific J. Math., **134**(1988), 377-392.

[3] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.