ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А.Г.Сергеев

1. Лекция VII. K_1-группа

1.1. **Топологическая K_1-группа.** Известно, что алгебру $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ компактных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ можно представить в виде индуктивного предела матричных алгебр $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$:

$$\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \varinjlim \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}).$$

По аналогии с этим определим K_1-группу $K_1^{\mathrm{top}}(A)$ унитальной C^*-алгебры A как

$$K_1^{\mathrm{top}}(A) = \varinjlim \mathrm{U}_n(A)/\mathrm{U}_n(A)^0 = \varinjlim \mathrm{GL}_n(A)/\mathrm{GL}_n(A)^0,$$

где $\mathrm{U}_n(A)$ обозначает подгруппу в $\mathrm{Mat}_n(A)$, состоящую из унитарных элементов, а $\mathrm{U}_n(A)^0$ – связную подгруппу единицы в $\mathrm{U}_n(A)$ (и аналогично для $\mathrm{GL}_n(A)$).

Для неунитальных C^*-алгебр A положим

$$K_1^{\mathrm{top}}(A) = K_1^{\mathrm{top}}(A^+),$$

где A^+ – унитализация алгебры A.

Пример 1. (1) $K_1^{\mathrm{top}}(\mathbb{C}) = 0$;
(2) $K_1^{\mathrm{top}}(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})) = 0$.

Умножение в группе $K_1^{\mathrm{top}}(A)$ задается формулой:

$$[u]\cdot[v] = [uv] = \left[\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}\right],$$

где второе равенство и коммутативность умножения вытекают из цепочки гомотопий

$$\begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. **Алгебраическая K_1-группа.** Обозначим через $G' = [G, G]$ коммутант группы G. Это нормальная подгруппа в G, порождаемая элементами вида $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$. Фактор

$$G_{\mathrm{ab}} = G/G'$$

является абелевой группой, называемой *абелизацией* группы G.

Определим *алгебраическую K_1^{alg}-группу* C^*-алгебры A как

$$K_1^{\mathrm{alg}}(A) = \mathrm{GL}_\infty(A)_{\mathrm{ab}} = \mathrm{GL}_\infty(A)/\mathrm{GL}_\infty(A)'.$$

Пример 2. (1) $K_1^{\mathrm{alg}}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$;

(2) если F есть поле, то $K_1^{\mathrm{alg}}(F) = F^\times$, т.е. совпадает с группой обратимых элементов в F.

Для унитальной C^*-алгебры A введенная ранее топологическая K_1-группа

$$K_1^{\mathrm{top}}(A) = \mathrm{GL}_\infty(A)/\mathrm{GL}_\infty(A)^0$$

связана с группой $K_1^{\mathrm{alg}}(A)$ следующим образом. Так как коммутант содержится в связной компоненте единицы, то имеется естественное отображение

$$K_1^{\mathrm{alg}}(A) \longrightarrow K_1^{\mathrm{top}}(A),$$

которое, однако, не всегда является инъективным.

Например, в случае $A = \mathbb{C}$ имеем

$$K_1^{\mathrm{alg}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times \ , \quad K_1^{\mathrm{top}}(\mathbb{C}) = 0.$$

1.3. **Высшие K-группы.** Для того, чтобы определить высшие K-группы, введем понятие *надстройки* над C^*-алгеброй A. Так называется C^*-алгебра вида

$$\Sigma A := A \otimes C_0(\mathbb{R}) \cong C_0(\mathbb{R}, A).$$

Тогда *K-группа порядка n* для C^*-алгебры A определяется как

$$K_n(A) := K_0(\Sigma^n A).$$

Теорема 1 (Теорема периодичности Ботта)**.** *Для любой C^*-алгебры A и любого натурального n имеют место изоморфизмы*

$$K_{2n}(A) \cong K_0(A), \quad K_{2n+1}(A) \cong K_1(A),$$

где $K_0(A)$, $K_1(A)$ обозначают топологические K-группы $K_0^{top}(A)$, $K_1^{top}(A)$ соответственно.

Доказательство этой теоремы можно найти в статьях из списка литературы к этой лекции.

Список литературы

[1] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. I. Quat. J. Math. Oxford, Ser.(2), **39**(1988), 185–199.
[2] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. II. Pacific J. Math., **134**(1988), 377-392.
[3] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.