ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А.Г.Сергеев

1. Лекция IX. Коциклы Черна и теплицевы продолжения

1.1. Циклические когомологии.

Определение 1. *Циклический n-коцикл* на алгебре A есть $(n+1)$-линейный функционал $\varphi : A^{n+1} \to \mathbb{C}$, который *цикличен*, т.е.

$$\varphi(a_0, \dots, a_n) = (-1)^n \varphi(a_1, \dots, a_n, a_0),$$

и *замкнут*, т.е. $b\varphi = 0$, где b – *оператор Хохшильда*:

$$(b\varphi)(a_0, \dots, a_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \varphi(a_0, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{n+1}) + \\ + (-1)^{n+1} \varphi(a_{n+1} a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Можно также ввести двойственное понятие n-цикла над алгеброй A.

Определение 2. *n-Цикл* на алгебре A — это тройка (Ω, d, φ), состоящая из:

(1) градуированная алгебра $\Omega = \bigoplus_{j \neq 0} \Omega_j$ со свойством $\Omega_{j_1}\Omega_{j_2} \subset \Omega_{j_1+j_2}$, заданная вместе с гомоморфизмом $\rho : A \to \Omega_0$, элементы из Ω_j называются однородными элементами степени j;
(2) градуированный дифференциал $d : \Omega \to \Omega$, т.е. линейное отображение, такое что $d\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$, $d^2 = 0$ и $d(ab) = (da)b + (-1)^{\deg(a)} a(db)$ на однородных элементах;
(3) замкнутый градуированный след $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ высшей степени n, т.е. $\varphi(ab) = (-1)^{\deg(a)\deg(b)} \varphi(ba)$, $\varphi(da) = 0$, и $\varphi(a) = 0$ при $\deg(a) > n$.

По любому n-циклу можно построить $(n+1)$-линейный циклический коцикл над A, пользуясь формулой

$$\varphi(a_0, \dots, a_n) = \varphi(\rho(a_0) d\rho(a_1) \dots d\rho(a_n))$$

и, обратно, каждый циклический n-коцикл определяет n-цикл с помощью поднятия на универсальную градуированную алгебру

$$\Omega(A) = \bigoplus_{j \geq 0} A^+ \otimes A^{\otimes j},$$

обладающую естественным градуированным дифференциалом d, для которого

$$d((a_0 + \lambda 1_{A^+}) \otimes a_1 \dots \otimes a_n) = (a_0 + \lambda 1_{A^+}) \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n.$$

Указанный подъем можно также использовать для продолжения произвольного циклического коцикла φ на матричную алгебру $\mathrm{Mat}_N(A^+)$.

Предположим теперь, что алгебра A унитальна и φ – циклический n-коцикл (или отвечающий ему n-цикл), который можно спаривать с элементами алгебраической K-группы $K_0^{\mathrm{alg}}(A)$, полагая для четного n

$$\langle[\varphi],[e]_0\rangle = \varphi(e,\dots,e) = \varphi(e(de)^n),$$

где $[\varphi]$ обозначает когомологический класс коцикла φ, а класс $[e]_0 \in K_0^{\mathrm{alg}}(A)$ представляется идемпотентом $e \in \mathrm{Mat}_N(A^+)$.

Для нечетного n спаривание с элементами алгебраической K-группы $K_1^{\mathrm{alg}}(A)$ задается формулой

$$\langle[\varphi],[u]_1\rangle = \varphi(u^{-1}-1,u-1,\dots,u^{-1}-1,u-1) = \varphi\left((u^{-1}-1)(du\,du^{-1})^{(n-1)/2}\right),$$

где унитарный элемент $u \in \mathrm{GL}_N(A)$ представляет класс $[u]_1 \in K_1^{\mathrm{alg}}(A)$.

Оба спаривания являются гомоморфизмами и зависят только от когомологического класса цикла φ.

Перейдем теперь к топологическим алгебрам. Напомним, что алгебра Фреше — это алгебра A, являющаяся полным метризуемым локально выпуклым пространством. Его топология задается семейством полунорм $\|\cdot\|_j$, $j \in \mathbb{N}$, непрерывность умножения означает, что для каждого $j \in \mathbb{N}$ существуют $j' \in \mathbb{N}$ и константа $C > 0$ такие, что

$$\|ab\|_j \le C\|a\|_{j'}\|b\|_{j'}$$

для всех $a, b \in A$.

Определение 3. Пусть A_0 есть алгебра Фреше, являющаяся плотной подалгеброй в C^*-алгебре A. Тогда A_0 называется *гладкой* в A, если вложение $i : A_0 \hookrightarrow A$ непрерывно и образ $i(A_0)$ замкнут относительно голоморфного функционального исчисления в A.

Если подалгебра A_0 является гладкой в A, то подалгебра $\mathrm{Mat}_N(A_0^+)$ является гладкой в $\mathrm{Mat}_N(A^+)$ и потому каждый класс из $K_j^{\mathrm{top}}(A)$ может быть представлен элементом из $\mathrm{Mat}_N(A_0^+)$.

Каждый непрерывный циклический n-коцикл над A_0 определяет в этом случае спаривание с элементами топологических K-групп по формуле

$$\langle[\varphi],[e]_0-[1]_0\rangle = \varphi(e,\dots,e)$$

для четных n, где $[e]_0-[1]_0$ представляется любым элементом $e \in \mathrm{Mat}_N(A_0^+)$. Для нечетных n

$$\langle[\varphi],[u]_1\rangle = \varphi(u^{-1}-1,u-1,\dots,u^{-1}-1,u-1),$$

где $[u]_1$ представляется любым обратимым элементом $u \in \mathrm{Mat}_N(A_0^+)$.

1.2. **Коциклы Черна.** Напомним определение алгебр $A_{\mathcal{T}}$ и $A_{\mathcal{T},\alpha}$ из Лекции 8(п.8.1).

Пусть A есть C^*-алгебра с (сильно) непрерывным действием α группы $G = \mathbb{T}^{n_0} \oplus \mathbb{R}^{n_1}$ и допустимым α-инвариантным следом $\mathcal{T}$. Обозначим через A^0 множество положительных элементов $a \in A$, для которых $\mathcal{T}(a) < \infty$, а через $A_{\mathcal{T}}$ замыкание A^0 в множестве положительных элементов из A. Тогда $A_{\mathcal{T}}$ является банаховой подалгеброй в A, а $A_{\mathcal{T},\alpha} = C^\infty(A_{\mathcal{T}}, \alpha)$. Эта алгебра является гладкой плотной подалгеброй в A.

Определение 4. *Коцикл Черна* для действия α есть циклический n-коцикл на алгебре $A_{\mathcal{T},\alpha}$, задаваемый формулой

$$\mathrm{Ch}_{\mathcal{T},\alpha}(a_0, \ldots, a_n) = c_n \sum_{\rho \in S_n} (-1)^{\operatorname{sgn}\rho} \mathcal{T}(a_0 \nabla_{\rho(1)} a_1 \ldots \nabla_{\rho(n)} a_n),$$

где $\nabla_1, \ldots \nabla_n$ – дифференцирования на $A_{\mathcal{T},\alpha}$ относительно ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$ алгебры Ли группы G, а S_n – симметрическая группа. Нормировочный множитель c_n равен $\frac{(2\pi i)^k}{k!}$, если $n = 2k$; и $\frac{i(\pi i)^k}{2k+1!!}$, если $n = 2k+1$.

Этот коцикл корректно определен и непрерывен. Он также инвариантен относительно действия α (с точностью до выбора ориентации).

При четном n коциклы Черна спариваются с проекторами $e \in \mathrm{Mat}_N(A^+_{\mathcal{T},\alpha})$, а при нечетном n – с унитарными элементами $u \in \mathrm{Mat}_N(A^+_{\mathcal{T},\alpha})$:

$$\langle \mathrm{Ch}_{\mathcal{T},\alpha}, [e]_0 \rangle = \mathrm{Ch}_{\mathcal{T}\otimes \mathrm{Tr}_N,\alpha}(e - s(e), \ldots, e - s(e))$$

и

$$\langle \mathrm{Ch}_{\mathcal{T},\alpha}, [u]_1 \rangle = \mathrm{Ch}_{\mathcal{T}\otimes \mathrm{Tr}_N,\alpha}(u^* - s(u^*), u - s(u), \ldots, u^* - s(u^*), u - s(u)),$$

где $s : \mathrm{Mat}_N(A^+) \to \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ – гомоморфизм, выделяющий скалярную часть матрицы.

1.3. **Теплицевы продолжения.** Напомним, что функции от самосопряженного оператора $\mathbb{D}$ определяются с помощью спектрального разложения

$$\mathbb{D} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dP_\lambda(\mathbb{D}),$$

где $P_\lambda(\mathbb{D})$ есть спектральный проектор, ассоциированный с оператором $\mathbb{D}$.

Например, проектор Харди $\mathbb{P} = \chi_{[0,\infty)}(\mathbb{D})$ задается интегралом

$$\mathbb{P} = \int_0^{\infty} \lambda \, dP_\lambda(\mathbb{D}).$$

Определение 5. *Теплицевым оператором* с символом $a \in R$ называется оператор

$$T_a = \mathbb{P}\pi(a)\mathbb{P} \in L^\infty(R \rtimes_\alpha G),$$

где π – (слабо) непрерывное представление R в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Пусть (A, G, ξ) есть C^*-динамическая система, где A есть C^*-алгебра, группа G есть либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{T}$ и ξ – непрерывное действие группы G в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$. Пусть $A \rtimes_\xi G$ есть скрещенное произведение, а $\pi \times U$ – регулярное представление в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L^2(G, \mathcal{H}_0)$. Пусть, далее, $D = (D_1, \ldots, D_n)$ есть набор коммутирующих самосопряженных генераторов отображения $G \ni t \to U(t)$.

Напомним, что $A \rtimes_\xi G$ есть C^*-замыкание вида

$$A \rtimes_\xi G = C^* - \text{замыкание}\,\{\text{span}\{\pi(a)f(D):\ a \in A, f \in C_0(\hat{G})\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})\}.$$

Обозначим через $C_{0,*}(\hat{G})$ пространство непрерывных функций на $\hat{G}$, обращающихся в нуль на $-\infty$ и имеющих предел в $+\infty$.

Определение 6. *Гладкое теплицево продолжение* $T(A, G, \xi)$, ассоциированное с (A, G, ξ), определяется как

$$T(A,G,\xi) = C^* - \text{замыкание}\,\{\text{span}\{\pi(a)f(D):\ a \in A, f \in C_{0,*}(\hat{G})\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})\}.$$

Обозначим через $\chi_s(t) \in C_{0,*}(\hat{G})$ гладкую неубывающую функцию, такую что $\chi_s(t) = 0$ при $t \le 0$ и $\chi_s(t) = 1$ при $t > \epsilon$ для некоторого фиксированного $\epsilon > 0$. Тогда оператор $\mathcal{P} = \chi_s(D)$ является гладкой аппроксимацией проектора $P = \chi(D > 0)$ и можно положить $\mathcal{P} = P$, если $G = \mathbb{T}$, поскольку в этом случае спектр D дискретен. В случае $G = \mathbb{R}$ теплицев оператор $P\pi(a)P$ не принадлежит $T(A, G, \xi)$, поэтому приходится рассматривать его гладкую аппроксимацию $\mathcal{P}\pi(a)\mathcal{P}$.

Задача 1. Докажите, что

$$T(A,G,\xi) = \pi(a)\mathcal{P} + A \rtimes_\xi G,$$

откуда следует, что любой элемент из $T(A, G, \xi)$ представляется единственным образом в виде

$$\pi(a)\mathcal{P} + e,$$

где $a \in A$, $e \in \mathcal{P} + A \rtimes_\xi G$.

Предложение 1. *Определим отображение* $\Pi : T(A, G, \xi) \to A$ *равенством*

$$\Pi(\pi(a)\mathcal{P} + A \rtimes_\xi G) = a.$$

Оно является сюръективным гомоморфизмом, поэтому имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow A \rtimes_\xi G \longrightarrow T(A,G,\xi) \longrightarrow A \to 0, \tag{1}$$

где третья стрелка задается отображением Π.

Рассмотрим теперь гомоморфизмы K-групп, порожденные точной последовательностью (1), а именно:

$$\text{Ind}_G : K_1(A) \longrightarrow K_0(A \rtimes_\xi G)$$

и

$$\text{Exp}_G : K_0(A) \longrightarrow K_1(A \rtimes_\xi G).$$

В случае $G = \mathbb{R}$ известно, что $K_j(A) \cong K_{1-j}(A \rtimes_\xi \mathbb{R})$, $j = 0, 1$, где указанные изоморфизмы задаются отображениями Конна–Тома (см. [2]).

$$\partial_1 : K_1(A) \longrightarrow K_0(A \rtimes_\xi \mathbb{R})$$

и

$$\partial_0 : K_0(A) \longrightarrow K_1(A \rtimes_\xi \mathbb{R}).$$

Список литературы

[1] H.Schulz-Baldes, T.Stoiber, *Harmonic analysis in operator algebras and its applications to index theory and topological solid state systems*, arXiv:2206.07781v2(math-ph), 2022.

[2] A.Connes,*An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of C^*-algebras by an action of* $\mathbb{R}$, Adv. Math. vol. 59(1981), 31-55.

[3] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.