Л. И. ЧИБРИКОВА

ОСНОВНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Л. И. ЧИБРИКОВА

ОСНОВНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1977

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Казанского университета

Основная часть книги посвящена решению двух граничных задач для аналитических функций на плоскости: задачи Римана и задачи Гильберта. Метод решения первой задачи опирается на представление интеграла типа Коши в виде двух слагаемых, одно из которых полностью характеризует его поведение во всех особых точках плоскости. Вторая решается в интегралах типа Шварца. Излагаются новые результаты по исследованию задачи Римана в случае счетного множества контуров.

Книга рассчитана на аспирантов и студентов старших курсов физико-математических факультетов, а также на лиц, занимающихся решением прикладных задач методами теории функций комплексного переменного.

$\text{Ч}\ \dfrac{20203-007}{075(02)-77}\,43-77$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ АВТОРА

Содержание этой книги составляют лекции, которые читались автором неоднократно для студентов и аспирантов механико-математического факультета Казанского государственного университета в качестве спецкурса. При подготовке к печати они были несколько дополнены.

Из оглавления видно, что многие вопросы первых двух глав и частично третьей главы излагались ранее в монографиях Н. И. Мусхелишвили „Сингулярные интегральные уравнения“ и Ф. Д. Гахова „Краевые задачи“. Здесь методика изложения большей части этих вопросов несколько иная. Так, при изучении интегралов типа Коши, плотности которых в конечном числе точек линии интегрирования имеют особенности, используются не локальные формулы Н. И. Мусхелишвили, а представление этого интеграла в виде двух слагаемых: элементарной функции, полностью характеризующей его поведение во всех особых точках плотности, и интеграла типа Коши с плотностью либо без особых точек, либо с особенностями более низкого порядка. Показано, что при решении краевых задач это представление наравне с формулами Н. И. Мусхелишвили может применяться при построении канонической функции. Но наибольший интерес, по-видимому, это представление имеет при решении прикладных задач с точки зрения техники вычислений.

Более полно, чем в монографии Ф. Д. Гахова, изложено в третьей главе решение задачи Римана для автоморфных функций, принадлежащих элементарным группам дробно-линейных преобразований. К сожалению, интересный материал, посвященный исследованию краевых задач на фундаментальных многоугольниках фуксовых групп и на различных моделях замкнутых римановых поверхностей с их применениями при решении прикладных задач остался за пределами этой книги.

Материал последней главы по решению задачи Римана в случае счетного множества контуров излагается впервые.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Л. А. Аксентьеву, проф. Н. Б. Ильинскому и кандидату физико-математических наук И. А. Бикчантаеву за замечания и советы по улучшению качества изложения.

ГЛАВА I

СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ

Основным объектом нашего исследования будут однозначные аналитические функции на комплексной плоскости, у которых наряду с изолированными особыми точками обязательно имеются особые линии. Некоторое представление о структуре таких функций можно получить из следующих соображений.

Возьмем на некоторой линии L конечное число точек $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ и рассмотрим рациональную функцию

$$\frac{c_1}{\tau_1 - z} + \frac{c_2}{\tau_2 - z} + \dots + \frac{c_n}{\tau_n - z} = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\tau_k - z},$$

для которой эти точки являются простыми полюсами. Увеличивая число полюсов до бесконечности, мы при определенных условиях вполне естественно придем к функции такого вида:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - z}.$$

Этот интеграл, разделенный на $2\pi i$ для удобства, называется ***интегралом типа Коши***, а функция $\varphi(\tau)$ — его ***плотностью***.

В более общем случае из рациональной функции с кратными полюсами

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{c_{k1}}{\tau_k - z} + \frac{c_{k2}}{(\tau_k - z)^2} + \dots + \frac{c_{km}}{(\tau_k - z)^m} \right\}$$

таким же предельным переходом можно получить более сложную функцию с особой линией L

$$\int_L \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau - z}\, d\tau + \int_L \frac{\varphi_2(\tau)}{(\tau - z)^2}\, d\tau + \dots + \int_L \frac{\varphi_m(\tau)}{(\tau - z)^m}\, d\tau.$$

Прежде чем приступать к систематическому изучению свойств интеграла типа Коши, условимся заранее, какие линии на плоскости мы будем допускать в качестве особых и какие требования будем накладывать на этих линиях на плотности $\varphi(\tau)$.

§ 1. КУСОЧНО-ГЛАДКИЕ ЛИНИИ

Разомкнутой гладкой дугой или разомкнутым гладким контуром называют всякую кривую L на комплексной плоскости $z = x + iy$, заданную параметрическим уравнением

$$z = t(s) = x(s) + iy(s), \quad s_a \leqslant s \leqslant s_b, \tag{1.1}$$

в котором непрерывные в указанном сегменте функции $x(s)$ и $y(s)$ обладают следующими свойствами: 1) при всех $s \in [s_a, s_b]$ они имеют непрерывные производные $x'(s)$, $y'(s)$, не обращающиеся одновременно в нуль (свойство гладкости); 2) различным значениям параметра s соответствуют различные точки $z = t(s)$ (свойство простоты, то есть отсутствие точек самопересечения).

Точки $a = t(s_a)$ и $b = t(s_b)$ будем называть *концами* контура L и при движении по L за положительное направление будем считать то, которое ведет от a к b и, следовательно, соответствует возрастанию параметра s.

Из свойства гладкости контура L следует его спрямляемость. Поэтому за параметр s будем обычно принимать длину дуги, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки на L и снабженную знаком „+“ или „—“ в зависимости от направления отсчета. Так как при этом

$$[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1, \tag{1.2}$$

то будем иметь

$$\frac{dt}{ds} = x'(s) + iy'(s) = e^{i\theta(s)}, \tag{1.3}$$

где $\theta(s)$ есть угол наклона касательной в точке $t(s) \in L$ к оси OX, отсчитываемый от этой оси. В силу гладкости L угол $\theta(s)$, а также угол, образованный касательной с любым постоянным направлением, изменяется непрерывно вместе с s.

Если в уравнении (1.1) свойство 2) выполняется для всех s, кроме $s = s_a$ и $s = s_b$, которым соответствует одна и та же точка $t = t(s_a) = t(s_b)$, то кривую L называют *гладким замкнутым контуром*. Совокупность конечного числа замкнутых или разомкнутых гладких контуров L_j без общих точек называют *гладкой линией*.

Основные свойства гладких линий, необходимые нам в дальнейшем, сформулируем в виде одной теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть α_0 — произвольно заданный острый угол, отличный от нуля. Для каждой гладкой линии L существует такое положительное число $\rho_0 = \rho_0(\alpha_0)$, зависящее только от α_0, что:*

1°. *Часть L, содержащаяся в круге K_ρ радиуса $\rho \leqslant \rho_0$ с центром в любой точке t_0 на L, состоит только из одной разомкнутой дуги l_ρ.*

2°. *Нетупой угол α между касательными в любых двух точках дуги l_ρ не превосходит α_0.*

3°. *Если Δ есть прямая, проходящая через любую точку $t_0 \in l_\rho$ и составляющая с касательной в t_0 нетупой угол $\beta \geqslant \beta_0$, где $\alpha_0 < \beta_0 \leqslant \pi/2$, то всякая близкая прямая, параллельная Δ, пересекает дугу l_ρ только один раз.*

4°. *Нетупой угол между Δ и хордой, соединяющей t_0 и $t \in l_\rho$ не меньше $\omega_0 = \beta_0 - \alpha_0 > 0$.*

Доказательство, очевидно, достаточно провести для одного гладкого контура L, входящего в рассматриваемую гладкую линию. Обозначим через $\sigma = \sigma(t_1, t_2)$ длину дуги с концами в произвольных точках t_1, t_2 контура L, причем в случае, когда контур L замкнут, будем брать ту дугу, которая имеет меньшую длину. Значит, если $d = s_b - s_a$ есть длина L, то в случае замкнутого контура $0 \leqslant \sigma \leqslant d/2$, а в случае разомкнутого $0 \leqslant \sigma \leqslant d$. Через $r = r(t_1, t_2)$ обозначим расстояние между t_1 и t_2: $r = |t_1(s_1) - t_2(s_2)|$.

Пусть α_0 — заданный острый угол: $0 < \alpha_0 < \pi/2$. Непрерывная на сегменте $[s_a, s_b]$ функция $\theta(s)$ является здесь равномерно непрерывной. Поэтому по α_0 можно подобрать такое число $\sigma_0 = \sigma_0(\alpha_0) > 0$, что как только $\sigma(t_1, t_2) = |s_2 - s_1| < \sigma_0$, так

$$\alpha = |\theta(s_2) - \theta(s_1)| \leqslant \alpha_0 < \frac{\pi}{2}. \tag{1.4}$$

Легко видеть, что α есть угол между касательными к L в точках t_1 и t_2, не являющийся тупым.

Рассмотрим теперь все такие пары точек t_1, t_2 на L, для которых $\sigma(t_1, t_2) \geqslant \sigma_0$. Так как $r(t_1, t_2)$ есть непрерывная функция от s_1 и s_2 на замкнутом множестве $s_a \leqslant s_1, s_2 \leqslant s_b$, то она достигает своего минимума $\min r(t_1, t_2) = r_0(\sigma_0) = r_0$ по крайней мере в одной паре точек t_1, t_2. Этот минимум положителен, ибо при $r_0 = 0$ контур L имел бы точки самопересечения, что невозможно.

Если с центром в любой точке $t_0 \in L$ описать окружность радиуса $r < r_0$, то все точки $t \in L$, для которых $\sigma(t, t_0) \geqslant \sigma_0$, окажутся вне этой окружности, а точки, для которых $\sigma(t, t_0) < \sigma_0$, будут внутри окружности. Обозначим через l_r часть L внутри окружности. Точка t_0 разбивает l_r на две части, для которых $s > s_0$ и $s < s_0$. Покажем, что при движении t по l_r функция $r(s) = r(t; t_0)$ изменяется монотонно на каждой из этих частей. Для этого замечаем, что

$$\frac{dr}{ds} = \pm \cos\gamma, \tag{1.5}$$

где γ — острый угол, образованный хордой t_0t и касательной к L в точке $t(s)$; верхний знак берется при $s > s_0$, нижний — при $s < s_0$. Но на дуге t_0t всегда имеется точка $t_*(s_*)$, касательная в которой к L параллельна хорде t_0t. Поэтому на основании неравенства (1.4)

$$\gamma(s) = |\theta(s_*) - \theta(s)| \leqslant \alpha_0 < \pi/2 \tag{1.6}$$

и на каждой из частей l_r $\cos\gamma \geqslant \cos\alpha_0 = k_0$, $0 < k_0 < 1$. Значит, при $s > s_0$ $dr/ds > 0$, при $s < s_0$ $dr/ds < 0$, что и доказывает монотонность $r(t, t_0)$ на каждой из частей. Попутно из соотношений (1.5) и (1.6) получаем справедливые для всей линии l_r неравенства

$$k_0|ds| \leqslant |dr| \leqslant |ds|, \tag{1.7}$$

или, что все равно,

$$k_0|s - s_0| \leqslant r(t, t_0) \leqslant |s - s_0|, \tag{1.8}$$

которыми мы будем часто пользоваться в дальнейшем.

Обозначим теперь через ρ_0 наименьшее из чисел r_0 и $k_0 \cdot \sigma_0$ и покажем, что это число удовлетворяет всем условиям теоремы.

Проведем с центром в $t_0 \in L$ окружность K_ρ радиуса $\rho \leqslant \rho_0$. Предполагая L замкнутым контуром, заставим точку $t(s)$ двигаться по L от точки $t_0(s_0)$ до $t_*(s_0 + \sigma_0)$. При изменении s от s_0 до $s_0 + \sigma_0$ $r(s) = r(t, t_0)$ монотонно возрастает от нуля до некоторого $r_* \geqslant k_0\sigma_0 \geqslant \rho_0$. Значит, точка $t(s)$ при своем движении встретит окружность K_ρ ровно один раз. Еще одну точку встречи L и K_ρ получим при перемещении $t(s)$ от t_0 до $t_{**}(s_0 - \sigma_0)$. Других точек пересечения L с K_ρ быть не может, ибо для оставшейся части L имеет место условие $\sigma(t, t_0) \geqslant \sigma_0$, а все такие точки, как мы уже видели, лежат вне K_ρ. Значит, внутри K_ρ точки $t \in L$ составляют единственную разомкнутую дугу l_ρ. При помощи тех же рассуждений можно убедиться в наличии двух точек пересечения K_ρ с разомкнутым контуром L, за исключением случая, когда расстояние t_0 до ближайшего конца меньше ρ. Пункт 1° теоремы доказан полностью.

Для любых двух точек t_1, t_2 дуги l_ρ $\sigma(t_1, t_2) < \sigma_0$, так что имеет место неравенство (1.4), что говорит о справедливости пункта 2°.

Из монотонности $r(t_0, t)$ следует, что любая прямая Δ_1, близкая и параллельная Δ, пересекает дугу l_ρ в какой-то точке t_1. Если бы точек пересечения оказалось две, t_1 и t_2, то хорда t_1t_2 пересекла бы касательную в t_0 под углом $\gamma = \beta$, а это невозможно, ибо по условию $\beta \geqslant \beta_0 > \alpha_0$, тогда как по доказанному выше $\gamma \leqslant \alpha_0$.

При доказательстве последнего пункта обозначим нетупой угол между Δ и хордой t_0t через ω. Тогда либо

$\omega = \beta - \gamma \geqslant \beta_0 - \alpha_0$; либо $\omega = \beta + \gamma$, что возможно при $\beta + \gamma \leqslant \pi/2$, так что опять $\omega \geqslant \beta_0 > \beta_0 - \alpha_0$; либо $\omega = \pi - \beta - \gamma$, когда $\beta + \gamma \geqslant \pi/2$, и опять $\omega \geqslant \pi/2 - \gamma \geqslant \beta_0 - \alpha_0$.

Для краткости будем называть $\rho_0 = \rho_0(\alpha_0)$ *стандартным радиусом,* соответствующим заданному углу α_0, окружность K_{ρ_0} — *стандартной окружностью,* а дугу l_{ρ_0} — *стандартной дугой.*

Если гладкие разомкнутые контуры $L_j = a_j b_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ расположены так, что b_j совпадает с a_{j+1} $(j = 1, \ldots, m-1)$ и других общих точек эти контуры не имеют, то они образуют *простой кусочно-гладкий контур* $L = UL_j$ — разомкнутый при $a_1 \neq b_m$ и замкнутый при $a_1 = b_m$. Совокупность конечного числа простых кусочно-гладких контуров без общих точек называется *простой кусочно-гладкой линией,* а при наличии конечного числа общих точек — *кусочно-гладкой линией* (без свойства простоты).

Теорема 1.2. *Если простой кусочно-гладкий контур L не имеет точек возврата, то для любой пары точек на L имеет место неравенство*

$$k_0 |s_1 - s_2| \leqslant |t_1 - t_2| \leqslant |s_1 - s_2|, \quad 0 < k_0 < 1, \tag{1.9}$$

где k_0 — постоянная из указанного интервала, не зависящая от положения точек t_1, t_2 на L.

При доказательстве теоремы приходится различать два случая.

1. Дуга $t_1 t_2 \subset L$ является гладкой.

Когда t_1 и t_2 лежат одновременно справа или слева от t_0, интегрированием обеих частей равенства (1.5) в пределах от s_1 до s_2 и применением теоремы о среднем получаем

$$r_2 - r_1 = \pm \cos \gamma (s_*) (s_2 - s_1), \quad s_1 < s_* < s_2,$$

или, что все равно,

$$|r_1 - r_2| = k |s_1 - s_2|, \quad k = \cos \gamma (s_*).$$

Взяв t_1 в качестве t_0, будем иметь

$$|t_1 - t_2| = k |s_1 - s_2|, \tag{1.10}$$

откуда, учитывая, что

$$0 < k_0 = \cos \alpha_0 \leqslant \cos \gamma (s_*) = k \leqslant 1,$$

получаем неравенство (1.9).

2. Дуга $t_1 t_2$ содержит угловую точку c.

Если окажется, что все три точки c, t_1, t_2 лежат на одной прямой, то $r = |t_1 - t_2| = r_1 + r_2$, где $r_1 = |t_1 - c|$, $r_2 = |t_2 - c|$. Но применяя неравенство (1.9) к гладким дугам ct_1 и ct_2, при почленном сложении получим $k_0(\sigma_1 + \sigma_2) \leqslant r_1 + r_2 \leqslant \sigma_1 + \sigma_2$, если σ_1 и σ_2 — длины дуг ct_1 и ct_2. А так как $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma(t_1, t_2) = |s_1 - s_2|$, то утверждение теоремы доказано.

Если же c, t_1, t_2 не лежат на одной прямой, то из треугольника ct_1t_2 по теореме косинусов имеем

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \omega,$$

где ω есть угол при вершине c. Учитывая, что $2r_1r_2 \leqslant r_1^2 + r_2^2$ получаем $r^2 \geqslant (r_1^2 + r_2^2)(1 - \cos \omega) = 2(r_1^2 + r_2^2)\sin^2 \frac{\omega}{2} \geqslant (r_1 + r_2)^2 \times \sin^2 \frac{\omega}{2}$. Значит, $(r_1 + r_2)\sin \frac{\omega}{2} \leqslant r \leqslant r_1 + r_2$. Но, как мы уже видели, для суммы $r_1 + r_2$ имеют место неравенства $k_0'(\sigma_1 + \sigma_2) \leqslant r_1 + r_2 \leqslant \sigma_1 + \sigma_2$. Кроме того, $\sin \frac{\omega}{2} \geqslant k_0''$, где k_0'' некоторая положительная константа, ибо c есть угловая точка, отличная от точки возврата. Поэтому неравенство (1.9) и в этом случае справедливо, при этом постоянная $k_0 = k_0'k_0''$ по-прежнему не зависит от положения точек t_1 и t_2 на L и удовлетворяет условию $0 < k_0 < 1$.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ НА КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ЛИНИЯХ

Пусть L — произвольная кусочно-гладкая линия. Простые гладкие контуры, составляющие L, будем обозначать через L_k $(k = 1, \ldots, n)$. Точки пересечения этих контуров, угловые точки и даже концы иногда, следуя Н. И. Мусхелишвили, будем называть *узлами* и обозначать c_j $(j = 1, \ldots, m)$ или просто через c, если безразлично, о каком из узлов идет речь. Точки линии L, отличные от узлов, будем иногда называть *обыкновенными*.

Под функцией $\varphi(t)$ на линии L мы будем понимать функцию, определенную равенствами

$$\varphi(t) = \varphi_k(t), \quad t \in L_k, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

где $\varphi_k(t)$ — функции, однозначно определенные соответственно на (закрытых) дугах L_k, $k = 1, \ldots, n$. Очевидно, функция $\varphi(t)$ однозначно определена во всех обыкновенных точках линии L и на ее концах. В узлах же, где сходятся несколько контуров L_k, $\varphi(t)$ является неопределенной и если мы будем говорить иногда о значении $\varphi(t)$ в какомнибудь узле c, то будем относить c к одному из контуров, проходящих через c, и полагать $\varphi(c) = \varphi_j(c)$.

В некоторых случаях нам удобно будет вместо t принимать за аргумент функции $\varphi(t)$ длину дуги s. В этом случае вместо $\varphi(t) = \varphi[t(s)]$ будем писать просто $\varphi(s)$.

Удобная для нас в дальнейшем классификация функций, определенных на кусочно-гладких линиях, опирается на понятие условия Гёльдера или коротко условия H. Для функций, определенных на любом множестве E комплексных чисел ζ это понятие вводится совершенно одинаково. *Функция $\varphi(\zeta)$, заданная на некотором множестве E, называется удовлетворяющей условию Гёльдера на этом множестве, если для любых двух значений ζ_1, $\zeta_2 \in E$ имеет место неравенство*

$$|\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_2)| \leqslant A|\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{2.2}$$

где A и α — положительные постоянные. Постоянная A называется *коэффициентом*, а α — *показателем условия H*. Чтобы указать, что функция $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условию H с показателем α, мы будем коротко писать: $\varphi(\zeta) \in H(\alpha)$. Условие $H(1)$ называют часто условием Липшица.

Из определения условия H вытекает целый ряд простых предложений, которыми часто приходится пользоваться:

1°. Если $\varphi(\zeta) \in H(\alpha)$, то и $|\varphi(\zeta)| \in H(\alpha)$.

2°. Если множество E ограничено и $\varphi(\zeta) \in H(\alpha)$, то $\varphi(\zeta) \in H(\nu)$ при всяком $\nu \leqslant \alpha$.

3°. Если $\varphi(\zeta) \in H(\alpha)$ и $\varphi(\zeta) \neq 0$ всюду на E, то $1/\varphi(\zeta) \in H(\alpha)$.

4°. Если $\varphi(\zeta) \in H(\alpha)$ и $\psi(\zeta) \in H(\beta)$, то $\varphi + \psi \in H(\gamma)$, $\varphi \cdot \psi \in H(\gamma)$, где $\gamma = \min(\alpha, \beta)$.

5°. Если $\psi(\zeta) \in H(\alpha)$ на E, а $\varphi(\eta) \in H(\beta)$ на $\psi(E)$, то $\varphi \circ \psi(\zeta) \in H(\alpha\beta)$ на E.

Очевидно, каждая функция, удовлетворяющая условию H на некотором множестве, непрерывна на этом множестве, так что класс H является одним из подклассов непрерывных функций. Поэтому функцию класса H называют также *непрерывной по Гёльдеру* или просто *гельдеровой*.

Условие H следующим образом обобщается на случай функций нескольких переменных. Говорят, что функция $\varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ удовлетворяет условию $H(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ на некотором множестве изменения переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, если для любых двух совокупностей переменных $\zeta'_1, \ldots, \zeta'_m$ и $\zeta''_1, \ldots, \zeta''_m$ из этого множества

$$|\varphi(\zeta'_1, \ldots, \zeta'_m) - \varphi(\zeta''_1, \ldots, \zeta''_m)| \leqslant \sum_{j=1}^{m} A_j |\zeta'_j - \zeta''_j|^{\alpha_j}, \tag{2.3}$$

где A_j и α_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — положительные постоянные.

Если $\varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_m) \in H(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, то $\varphi \in H(\alpha_j)$ по переменной ζ_j $(j = 1, \ldots, m)$ равномерно относительно остальных переменных, ибо из условия (2.3) имеем

$$|\varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_{j-1}, \zeta'_j, \zeta_{j+1}, \ldots, \zeta_m) - \\ - \varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_{j-1}, \zeta''_j, \zeta_{j+1}, \ldots, \zeta_m)| \leqslant A_j |\zeta'_j - \zeta''_j|^{\alpha_j},$$

при этом коэффициент и показатель α_j не зависят от переменных ζ_k, $k \neq j$. Справедливо и обратное: если $\varphi \in H(\alpha_j)$ по каждой переменной ζ_j в отдельности, причем равномерно относительно остальных переменных, то она удовлетворяет условию $H(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ по совокупности переменных.

В дальнейшем, говоря об условии H по каждой переменной в отдельности, мы будем считать всегда, что оно выполняется равномерно относительно остальных переменных.

Для функций $\varphi(t)$, заданных на гладких линиях, можно получить ряд простейших признаков принадлежности классу H. При этом нам понадобятся два известных неравенства

$$|f|^\alpha + |g|^\alpha \leqslant 2^{1-\alpha}(|f| + |g|)^\alpha, \; 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{2.4}$$

$$0 < |g|^\alpha - |f|^\alpha \leqslant (|g| - |f|)^\alpha, \tag{2.5}$$

устанавливаемых непосредственным вычислением максимумов функций

$$F(\sigma) = \frac{1+\sigma^\alpha}{(1+\sigma)^\alpha}, \quad \Phi(\sigma) = \frac{1-\sigma^\alpha}{(1-\sigma)^\alpha}, \quad \sigma = \frac{|f|}{|g|} < 1.$$

Теорема 2.1. *Пусть гладкий разомкнутый контур $L = ab$ разбит точкой t_0 на две части at_0 и* и *t_0b. Если $\varphi(t)$ непрерывна на L и удовлетворяет условию $H(\alpha)$ на каждой дуге at_0 и t_0b в отдельности, то $\varphi(t) \in H(\alpha)$ на всем контуре L.*

В данном случае справедливость условия (2.1) надо показать лишь для точек t_1 и t_2, расположенных по разные стороны от t_0. Используя это условие для дуг at_0 и t_0b и применяя неравенство (2.5), имеем

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leqslant |\varphi(t_2) - \varphi(t_0)| + |\varphi(t_0) - \varphi(t_1)| \leqslant$$
$$\leqslant A\{|t_2 - t_0|^\alpha + |t_0 - t_1|^\alpha\} \leqslant 2^{1-\alpha}A\,|t_2 - t_1|^\alpha.$$

Теорема 2.2. *По переменному t функция*

$$r^\alpha = |t - t_0|^\alpha, \; 0 < \alpha \leqslant 1,$$

удовлетворяет условию $H(\alpha)$ на любом гладком контуре L.

Действительно, из неравенств (2.5) и (1.9) имеем

$$|r_1^\alpha - r_2^\alpha| \leqslant |r_1 - r_2|^\alpha \leqslant |s_1 - s_2|^\alpha \leqslant k_0^{-\alpha}|t_1 - t_2|^\alpha.$$

Теорема 2.3. *Если функция $\varphi(t, \tau)$ по переменному t на гладком контуре L и по параметру τ на некотором множестве E удовлетворяет условию $H(\alpha)$, то при $0 \leqslant \lambda < \alpha \leqslant 1$ функция*

$$\psi(t, t_0, \tau) = \frac{\varphi(t, \tau) - \varphi(t_0, \tau)}{|t - t_0|^\lambda}$$

удовлетворяет условию $H(\alpha - \lambda)$ по всем трем переменным.

В силу симметрии функции $\psi(t, t_0, \tau)$ по переменным t и t_0 достаточно доказать справедливость теоремы по одному из этих переменных и по параметру τ.

Относительно параметра τ доказательство проще. Разность

$$\Delta = \psi(t, t_0, \tau + h) - \psi(t, t_0, \tau)$$

записываем в двух формах:

$$\Delta = \frac{\varphi(t, \tau+h) - \varphi(t_0, \tau+h)}{|t-t_0|^\lambda} - \frac{\varphi(t, \tau) - \varphi(t_0, \tau)}{|t-t_0|^\lambda} =$$

$$= \frac{\varphi(t, \tau+h) - \varphi(t, \tau)}{|t-t_0|^\lambda} - \frac{\varphi(t_0, \tau+h) - \varphi(t_0, \tau)}{|t-t_0|^\lambda},$$

Из первой формы при $|t - t_0| \leqslant |h|$ получаем

$$|\Delta| \leqslant 2A|t-t_0|^{\alpha-\lambda} \leqslant 2A|h|^{\alpha-\lambda},$$

а при $|t - t_0| \geqslant |h|$ используем вторую форму:

$$|\Delta| \leqslant \frac{2A|h|^\alpha}{|t-t_0|^\lambda} \leqslant 2A|h|^{\alpha-\lambda}.$$

Эти оценки говорят о справедливости теоремы по параметру τ.

При доказательстве по переменному t на основании теоремы 2.1 можно считать, что дуга t_1t_2 не содержит внутри себя точку t_0, так что $s_0 \leqslant s_1 \leqslant s_2$. Полагая для краткости

$$\psi(s) = \psi[t(s), t(s_0), \tau], \quad \omega(s) = \varphi(t, \tau) - \varphi(t_0, \tau),$$

будем иметь

$$|\psi(s_1) - \psi(s_2)| \leqslant \frac{|\omega(s_1) - \omega(s_2)|}{|t_2 - t_0|^\lambda} +$$

$$+ |\omega(s_1)| \frac{\left| |t_2-t_0|^\lambda - |t_1-t_0|^\lambda \right|}{|t_1-t_0|^\lambda |t_2-t_0|^\lambda} = \Delta_1 + \Delta_2.$$

При оценке первого слагаемого Δ_1 принимаем во внимание условие $\varphi(t, \tau) \in H(\alpha)$ по t и неравенство (1.9). Имеем

$$\Delta_1 \leqslant A\frac{|t_1-t_2|^\alpha}{|t_2-t_0|^\lambda} = A\frac{|t_2-t_1|^\lambda}{|t_2-t_0|^\lambda}|t_1-t_2|^{\alpha-\lambda} \leqslant$$

$$\leqslant Ak_0^{-\lambda}\left(\frac{s_2-s_1}{s_2-s_0}\right)^\lambda |t_1-t_2|^{\alpha-\lambda} \leqslant Ak_0^{-\lambda}|t_1-t_2|^{\alpha-\lambda}.$$

Обращаясь ко второму слагаемому Δ_2, учитываем прежде всего, что $|\omega(s_1)| = |\varphi(t_1, \tau) - \varphi(t_0, \tau)| \leqslant A|t_1 - t_0|^\alpha$, а к разности в числителе применяем неравенство (2.5). Получаем

$$\Delta_2 \leqslant A|t_1-t_0|^{\alpha-\lambda}\frac{|t_2-t_1|^\lambda}{|t_2-t_0|^\lambda} \leqslant Ak_0^{-\lambda}|t_1-t_0|^{\alpha-\lambda} =$$

$$= Ak_0^{-1}\left|\frac{t_1-t_0}{t_1-t_2}\right|^{\alpha-\lambda}|t_1-t_2|^{\alpha-\lambda} \leqslant Ak_0^{-\lambda}|t_1-t_2|^{\alpha-\lambda},$$

но лишь при условии $|t_1-t_0|\leqslant|t_1-t_2|$.

Если же $|t_1-t_0|\geqslant|t_1-t_2|$, то при оценке Δ_2 надо разность $||t_2-t_0|^\lambda-|t_1-t_0|^\lambda|$ записать в виде

$$|t_1-t_0|^\lambda\left|\left|\frac{t_2-t_1}{t_1-t_0}+1\right|^\lambda-1\right|\leqslant|t_1-t_0|^\lambda\left|\left(1+\left|\frac{t_1-t_2}{t_1-t_0}\right|\right)-1\right|$$

и учесть, что при любом $x\geqslant 0$ и $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ имеет место неравенство $(1+x)^\lambda-1\leqslant\lambda x$. Тогда будем иметь

$$\Delta_2\leqslant A\lambda\frac{|t_1-t_0|^\alpha}{|t_2-t_0|^\lambda}\left|\frac{t_1-t_2}{t_1-t_0}\right|=$$

$$=A\lambda\left|\frac{t_2-t_1}{t_2-t_0}\right|^\lambda\left|\frac{t_1-t_2}{t_1-t_0}\right|^{1-\alpha}|t_1-t_2|^{\alpha-\lambda}\leqslant A\lambda k_0^{-\lambda}|t_1-t_2|^{\alpha-\lambda},$$

что и завершает доказательство.

Доказанная теорема остается в силе, если $\tau=t_0$.

Теорема 2.4. *Если на гладком контуре L функция $\varphi(t)\in H(\alpha)$, а функция $\omega(t)$ ограничена на L и имеет производную, удовлетворяющую условию*

$$\left|\frac{d\omega}{dt}\right|<\frac{C}{|t-t_0|},\quad t\neq t_0, \tag{2.6}$$

где C — постоянная, а t_0 — некоторая фиксированная точка на L, то функция

$$\psi(t)=\omega(t)[\varphi(t)-\varphi(t_0)]$$

также удовлетворяет условию $H(\alpha)$ на L.

Рассматривая

$$|\psi(t_1)-\psi(t_2)|\leqslant|\omega(t_2)||\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|+$$
$$+|\omega(t_1)-\omega(t_2)||\varphi(t_1)-\varphi(t_0)|=\Delta_1+\Delta_2,$$

опять оцениваем отдельно оба слагаемых. Обозначая через M максимум $|\omega(t)|$ на L, имеем

$$\Delta_1\leqslant AM|t_1-t_2|^\alpha,$$

а также

$$\Delta_2\leqslant 2AM|t_1-t_0|^\alpha=2AM\left|\frac{t_1-t_0}{t_1-t_2}\right|^\alpha|t_1-t_2|^\alpha\leqslant 2AM|t_1-t_2|^\alpha,$$

но при условии $|t_1-t_0|\leqslant|t_1-t_2|$.

Если же $|t_1-t_0|\geqslant|t_1-t_2|$, то при оценке Δ_2 надо использовать условие (2.6), причем вычисления становятся проще, если перейти к параметру s. При этом надо учесть, что

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{ds}:\frac{dt}{ds}=\frac{d\omega}{ds}e^{-i\theta}$$

и условие (2.6) эквивалентно следующему

$$\left|\frac{d\omega}{ds}\right| < \frac{Ck_0^{-1}}{|s-s_0|}, \quad s \neq s_0.$$

Имеем $(0 < \xi < 1)$:

$$\Delta_2 = |\varphi(s_1) - \varphi(s_0)||\omega(s_1) - \omega(s_2)| \leqslant$$
$$\leqslant A|s_1 - s_0|^\alpha |\omega'[s_1 + (s_2 - s_1)\xi]||s_1 - s_2| <$$
$$< \frac{ACk_0^{-1}|s_1 - s_0|^\alpha}{|s_1 - s_0 + (s_2 - s_1)\xi|}|s_1 - s_2| \leqslant ACk_0^{-1}|s_1 - s_0|^{\alpha-1}|s_1 - s_2| \leqslant$$
$$\leqslant ACk_0^{-\alpha-1}|t_1 - t_2|^\alpha \left|\frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_0}\right|^{1-\alpha} \leqslant ACk_0^{-\alpha-1}|t_1 - t_2|^\alpha$$

и теорема полностью доказана.

При помощи этих простых теорем удается проверить выполнимость или невыполнимость условия H для большого числа функций. Рассмотрим в качестве примеров некоторые элементарные функции, с которыми мы будем часто иметь дело в дальнейшем.

1. Логарифмическая функция. Условимся под $\ln(t - z_0)$ на гладком контуре L понимать предельное значение вполне определенной ветви $\ln(z - z_0)$ многозначной функции

$$\operatorname{Ln}(z - z_0) = \ln|z - z_0| + i\operatorname{Arg}(z - z_0),$$

когда z стремится к $t \in L$, оставаясь слева от L (по отношению к положительному обходу). Известно, что выделение однозначных ветвей у $\operatorname{Ln}(z - z_0)$ возможно лишь в плоскости, разрезанной вдоль некоторой простой кусочно-гладкой линии, соединяющей точки ветвления z_0 и ∞. Этот разрез мы будем для краткости обозначать через (z_0, ∞) или же через (z_0, t_*, ∞), когда он пересекает линию L в некоторой точке t_*, и считать его двубережным. Точку z, лежащую на левом берегу (если смотреть вдоль разреза от точки z_0) будем обозначать через z^+, на правом — z^-. Переход от z^+ к z^- можно осуществить лишь по некоторой замкнутой линии, охватывающей точку z_0. Поэтому $\operatorname{Arg}(z^- - z_0) = \operatorname{Arg}(z^+ - z_0) + 2\pi i$, так что для любой ветви $\operatorname{Ln}(z - z_0)$ разрез (z_0, ∞) является линией разрыва первого рода и на берегах разреза имеет место соотношение

$$\operatorname{Ln}(z^- - z_0) = \operatorname{Ln}(z^+ - z_0) + 2\pi i.$$

Если через $\vartheta = \arg(z - z_0)$ обозначить наименьшее по абсолютной величине значение $\operatorname{Arg}(z - z_0)$ и отсчитывать этот угол ϑ от некоторого фиксированного направления, например, от положительного направления касательной к линии L в некоторой точке t_0, а соответствующую ветвь $\operatorname{Ln}(z - z_0)$ обозначить через $\ln(z - z_0)$, то будем иметь

$$\ln(z - z_0) = \ln|z - z_0| + i\vartheta, \quad \theta_0 \leqslant \vartheta < \theta_0 + 2\pi. \tag{2.7}$$

Значения любой другой ветви $\operatorname{Ln}(z-z_0)$ отличаются от $\ln(z-z_0)$ на целое кратное $2\pi i$:

$$\operatorname{Ln}(z-z_0)=\ln(z-z_0)+2\pi ik,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots$$

Отметим некоторые свойства функции (2.7) на контуре L.

Когда $z_0 \overline{\in} L$ и разрез (z_0, ∞) не пересекает L, функция $\ln(t-z_0)$ всюду на L имеет ограниченную производную и, следовательно, удовлетворяет условию $H(1)$. В случае разреза (z_0, t_*, ∞) точка $t_* \in L$ будет для $\ln(t-z_0)$ точкой разрыва первого рода с известной уже нам величиной скачка

$$\ln(t_*^- - z_0)-\ln(t_*^+ - z_0)=2\pi i. \tag{2.8}$$

Допустим теперь, что $z_0 \equiv t_0 \in L$. В этом случае на любой дуге $ab \subset L$, не содержащей t_0, $\ln(t-t_0) \in H(1)$. Если же $t_0 \in ab$, то при переходе через t_0 функция $\ln(t-t_0)$ терпит разрыв, при этом у вещественной части $\ln|t-t_0|$ скачок бесконечен, у мнимой части $\vartheta=\arg(t-t_0)$ скачок равен π, ибо $\vartheta(t_0+0)=\theta_0$, $\vartheta(t_0-0)=\theta_0+\pi$. Однако функция

$$\psi(t)=|t-t_0|^\lambda \ln|t-t_0|,\ 0<\lambda\leqslant 1,$$

удовлетворяет условию $H(\lambda-\varepsilon)$ при любом $\varepsilon>0$ и $\varepsilon<\lambda$ Убедиться в этом можно на основании теоремы 2.4, если положить $\varphi(t)=|t-t_0|^{\lambda-\varepsilon}$, $\omega(t)=|t-t_0|^\varepsilon \ln|t-t_0|$. В более общем случае, если $\varphi(t)\in H(\lambda)$ на L, то переписав функцию

$$\psi_1(t)=[\varphi(t)-\varphi(t_0)]\ln|t-t_0|$$

в таком виде

$$\psi_1(t)=\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{|t-t_0|^\varepsilon}\cdot|t-t_0|^\varepsilon \ln|t-t_0|,\ 0<\varepsilon<\lambda,$$

убеждаемся, что $\psi_1(t)\in H(\lambda-\varepsilon)$.

2. Общая степенная функция по определению

$$(z-z_0)^\gamma=\exp[\gamma \operatorname{Ln}(z-z_0)]$$

многозначна при $\gamma=\alpha+i\beta$ нецелом, с теми же точками ветвления z_0 и ∞, что и логарифмическая функция. В плоскости с разрезом (z_0, ∞) каждой фиксированной ветви логарифма соответствует определенная ветвь функции $(z-z_0)^\gamma$. Остановимся коротко только на свойствах ветви

$$\xi(z, z_0)=\exp[\gamma \ln(z-z_0)], \tag{2.9}$$

соответствующей ветви (2.7) $\operatorname{Ln}(z-z_0)$, ибо все другие ее ветви отличаются от $\xi(z, z_0)$ лишь постоянным множителем

$$(z-z_0)^\gamma=e^{2\pi ik\gamma}\xi(z, z_0),\ k=0,\ \pm 1, \dots$$

Когда $z_0 \overline{\in} L$ и (z_0, ∞) не пересекает L, $\xi(t, z_0) \in H(1)$. В случае разреза (z_0, t_*, ∞) в точке $t_* \in L$ у $\xi(t, z_0)$ будет точка разрыва первого рода и на основании (2.8)

$$\xi(t_*^-, z_0) = e^{2\pi i\gamma} \xi(t_*^+, z_0). \tag{2.10}$$

Свойства функции $\xi(t, t_0)$, $t_0 \in L$, существенно зависят от величины α. Чтобы показать это, запишем $\xi(t, t_0)$ в таком виде

$$\xi(t, t_0) = \exp[\gamma \ln|t - t_0| + i\gamma\vartheta] = |t - t_0|^\alpha \exp[i\beta \ln|t - t_0| + i\gamma\vartheta].$$

Функция

$$\omega(t) = \exp[i\beta \ln|t - t_0| + i\gamma\vartheta] =$$
$$= e^{i\gamma\vartheta}[\cos(\beta \ln|t - t_0|) + i \sin(\beta \ln|t - t_0|)],$$

не являясь непрерывной в точке t_0, всюду на L ограничена и так как при $t \neq t_0$

$$\frac{d}{dt} \ln(t - t_0) = \left[\frac{d \ln|t - t_0|}{ds} + i\frac{d\vartheta}{ds}\right] : \frac{dt}{ds} = \frac{1}{t - t_0},$$

то

$$\left|\frac{d \ln|t - t_0|}{ds}\right| \leqslant \frac{1}{|t - t_0|}, \quad \left|\frac{d\vartheta}{ds}\right| \leqslant \frac{1}{|t - t_0|},$$

откуда следует, что $\omega(t)$ удовлетворяет условию (2.6). Поэтому на основании теорем 2.2 и 2.4 при $0 < \alpha \leqslant 1$ $\xi(t, t_0) \in H(\alpha)$. Когда $\alpha \geqslant 1$, функция $\xi(t, t_0)$ имеет ограниченную на L производную

$$\xi'(t, t_0) = \gamma |t - t_0|^{\alpha-1} \omega(t) e^{-i\vartheta}$$

и потому удовлетворяет условию $H(1)$. При $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ функция $\xi(t, t_0)$ обладает теми же свойствами, что $\omega(t)$: в окрестности точки t_0 условию H она не удовлетворяет, ибо t_0 для нее является точкой разрыва с неопределенным точно, но ограниченным скачком. Однако произведение

$$\psi(t) = |t - t_0|^\lambda \xi(t, t_0), \; 0 < \lambda \leqslant 1,$$

удовлетворяет условию $H(\lambda)$.

Мы изложили столь подробно свойства логарифмической и степенной функций со следующей целью. Рассматривая в дальнейшем функции на гладких и кусочно-гладких линиях, мы будем предполагать их гельдеровыми всюду, за исключением конечного числа точек, в которых будут особенности логарифмического или степенного типа. Все множество таких функций удобно разбить на следующие классы.

1) *Класс H*. Сюда отнесем все функции, однозначно определенные как в обыкновенных точках линии L, так и в узлах, и удовлетворяющие условию H на каждой из закрытых дуг L_k, составляющих L.

2) *К классу* H_0 на L отнесем такие функции $\varphi(t)$, для которых все функции $\varphi_k(t)$ в равенствах (2.1) удовлетворяют условию H на соответствующих закрытых дугах L_k.

При определении следующих двух классов допустимые у $\varphi(t)$ особенности отнесем к числу узлов для упрощения формулировок.

3) Будем говорить, что *функция* $\varphi(t)$ *принадлежит классу* H^*, если она удовлетворяет условию H на каждой закрытой части линии L, не содержащей узлов, а вблизи любого узла представима в виде

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_0(t)}{(t-c)^{\gamma}}, \tag{2.11}$$

где $\gamma = \alpha + i\beta$, причем $0 \leqslant \alpha < 1$, а $\varphi_0(t)$ — функция класса H_0 в окрестности c. Под $(t-c)^{\gamma}$ мы будем обычно понимать $\xi(t, c)$.

4) Будем говорить, что *функция* $\varphi(t)$ *принадлежит к классу* H_{ε}^* *в окрестности узла* c, если она принадлежит классу H^* при сколь угодно малом α в окрестности этого узла, так что при произвольном $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \to c} |t-c|^{\varepsilon} \varphi(t) = 0. \tag{2.12}$$

Примером ограниченной функции класса H_{ε}^* является $\xi(t, c) = (t-c)^{i\beta}$, неограниченной — $\ln(t-c)$.

§ 3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Интегралом от функции $f(t)$ вдоль гладкого или кусочно-гладкого простого контура L, заданного уравнением (1.1) будем называть число

$$\int_L f(t)\,dt = \int_{s_a}^{s_b} f[t(s)]\,t'(s)\,ds, \tag{3.1}$$

где в правой части интеграл от комплексной функции действительного переменного $f[t(s)]\,t'(s) = U(s) + iV(s)$ понимается как соответствующая линейная комбинация интегралов от действительной и мнимой частей. Если $f(t)$ непрерывна на L, то оба вещественных интеграла от $U(s)$ и $V(s)$ будут существовать в смысле Римана как интегралы от непрерывной функции в случае гладкого контура L или разрывной, но ограниченной функции, когда L — кусочно-гладкий контур.

В соответствии со свойствами вещественных интегралов под интегралом от непрерывной функции $f(t)$ по кусочно-гладкой линии L следует понимать сумму интегралов вдоль гладких контуров L_k, составляющих L, от непрерывных функций $f_k(t)$, определяющих $f(t)$:

$$\int_L f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{m} \int_{L_k} f_k(t)\,dt. \qquad (3.2)$$

Если $f(t)$ на L принадлежит классу H^* или H^*_ε, то интегралы от $U(s)$ и $V(s)$ будут существовать как несобственные, так как в силу условий (2.11), (2.12) и неравенства (1.9) в окрестности каждой особой точки $c = t(s_c)$

$$U(s) < \frac{C_1}{|s - s_c|^\nu}, \quad V(s) < \frac{C_2}{|s - s_c|^\nu}, \quad 0 \leqslant \nu < 1.$$

В этом случае криволинейный интеграл (3.1) или (3.2) от $f(t)$ по L будем называть *несобственным*.

Из определения вещественного несобственного интеграла следует, что несобственный криволинейный интеграл можно получить из обычного криволинейного интеграла предельным переходом. Для этого при наличии одного узла c из L надо выбросить некоторую окрестность точки c, например, стандартную дугу t_1t_2 (или дугу ct_1, высеченную стандартной окружностью с центром в c, если c — концевая точка), взять интеграл по линии $L \setminus t_1t_2$ от $f(t)$ (или по $L \setminus ct_1$) и перейти к пределу, заставляя t_1 и t_2 стремиться к c независимо друг от друга:

$$\int_L f(t)\,dt = \lim_{t_1,\, t_2 \to c} \int_{L \setminus t_1t_2} f(t)\,dt. \qquad (3.3)$$

При наличии нескольких узлов надо L разбить на составляющие контуры L_k так, чтобы каждый из них содержал не более одной особой точки c_k. Тогда в силу равенства (3.2) несобственный интеграл по L представится как конечная сумма пределов вида (3.3).

Если несобственный интеграл по линии L существует, то говорят, что $f(t)$ *интегрируема по* L, а в случае существования несобственного интеграла по L от $|f(t)|$, функцию $f(t)$ называют *абсолютно интегрируемой по* L. Ясно, что абсолютно интегрируемая функция является интегрируемой.

Особый интерес для нас представляют интегралы от функций $f(t, z)$, зависящих от параметра. Приведем несколько теорем, характеризующих свойства таких интегралов.

Теорема 3.1. *Если функция $f(t, z)$ определена и непрерывна при $t \in L$, $z \in E$, где L — кусочно-гладкая линия, а E — некоторое множество, и если*

$$\lim_{z \to z_0} f(t, z) = \varphi(t), \quad z \in E,$$

равномерно по $t \in L$, то

$$\lim_{z \to z_0} \int_L f(t, z)\,dt = \int_L \varphi(t)\,dt.$$

В самом деле, из равномерного стремления к пределу следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех $t \in L$ $|f(t, z) - \varphi(t)| < \varepsilon/l$, как только $|z - z_0| < \delta$ (l — длина L). Поэтому, учитывая, что модуль криволинейного интеграла не превосходит произведения максимума модуля подынтегральной функции на длину линии интегрирования, получим

$$\left| \int_L [f(t, z) - \varphi(t)]\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{l} \cdot l = \varepsilon.$$

Теорема 3.2. *Если L и Γ — кусочно-гладкие линии и $f(t, z)$ определена и непрерывна при $t \in L$, $z \in \Gamma$, то функция*

$$F(z) = \int_L f(t, z)\, dt$$

непрерывна при $z \in \Gamma$ и

$$\int_\Gamma \int_L f(t, z)\, dt dz = \int_L \int_\Gamma f(t, z)\, dz dt.$$

Чтобы убедиться в непрерывности $F(z)$, рассмотрим разность

$$F(z) - F(\zeta) = \int_L [f(t, z) - f(t, \zeta)]\, dt.$$

Из непрерывности $f(t, z)$ на замкнутых множествах L и Γ следует ее равномерная непрерывность по совокупности переменных. Это означает, что $|f(t_1, z_1) - f(t_2, z_2)| < \varepsilon$, как только $|t_1 - t_2| + |z_1 - z_2| < \delta$ для любых пар $t_1, t_2 \in L$ и $z_1, z_2 \in \Gamma$. Поэтому $\delta > 0$ можно выбрать так, что $|f(t, z) - f(t, \zeta)| < \varepsilon/l$, если $|z - \zeta| < \delta$ и любое $t \in L$, и тогда $|F(z) - F(\zeta)| < \varepsilon$.

В силу непрерывности $F(z)$ интеграл от нее по Γ: $z = z(\sigma)$, $\sigma_A \leqslant \sigma \leqslant \sigma_B$, существует и равен

$$\int_\Gamma F(z)\, dz = \int_\Gamma \int_L f(t, z)\, dt dz =$$

$$= \int_{\sigma_A}^{\sigma_B} \int_{s_a}^{s_b} f[t(s), z(\sigma)]\, t'(s) z'(\sigma)\, d\sigma ds =$$

$$= \int_{\sigma_A}^{\sigma_B} \int_{s_a}^{s_b} [U(s, \sigma) + iV(s, \sigma)]\, ds d\sigma.$$

Но в двойных вещественных интегралах от непрерывных функций $U(s, \sigma)$ и $V(s, \sigma)$ возможна перестановка порядка интегрирования, что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 3.3. *Если функция $f(t, z)$, непрерывная по $t \in L$, является аналитической по z в некоторой области D (при любом $t \in L$), то функция*

$$F(z) = \int_L f(t, z)\,dt \tag{3.4}$$

является аналитической в D и

$$F'(z) = \int_L f'_z(t, z)\,dt. \tag{3.5}$$

Возьмем некоторую область D_*, лежащую в D вместе с границей Г. По теореме 3.2 функция $F(z)$ непрерывна в $\overline{D}_*$ и

$$\int_\Gamma F(z)\,dz = \int_\Gamma \int_L f(t, z)\,dt dz = \int_L \int_\Gamma f(t, z)\,dz dt.$$

Но интеграл от $f(t, z)$ по Г равен нулю по интегральной теореме Коши. Следовательно, $F(z)$ удовлетворяет условиям теоремы Морера и потому является аналитической в D.

В силу аналитичности $F(z)$ в любой точке z из D_* может быть представлена интегралом Коши, а ее производная $F'(z)$ в виде интеграла

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(\tau)}{(\tau - z)^2}\,d\tau.$$

Отсюда, заменив $F(\tau)$ интегралом от $f(t, \tau)$ по L и изменив порядок интегрирования, получим выражение для $F'(z)$, указанное в формулировке теоремы:

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\tau}{(\tau - z)^2} \int_L f(t, \tau)\,dt =$$

$$= \int_L dt\, \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t, \tau)}{(\tau - z)^2}\,d\tau = \int_L f'_z(t, z)\,dt.$$

При помощи теоремы Морера и теоремы 3.1 легко доказывается

Теорема 3.4. *Если функция $f(t, z)$ аналитическая по z в области D при любом $t \in L$ и если*

$$\lim_{t \to t_0} f(t, z) = \varphi(z)$$

равномерно по z в любой замкнутой части D, то функция $\varphi(z)$ тоже аналитическая в области D.

Так как функция $f(t, z)$ по z непрерывна в области D, то из равномерности стремления к пределу сразу следует, что и предельная функция $\varphi(z)$ непрерывна в любой замкнутой части $\overline{D}_* \subset D$. Если Г есть граница D_*, то по теореме 3.1

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi(z)\, dz = \int\limits_{\Gamma} \lim_{t\to t_0} f(t,\ z)\, dz = \lim_{t\to t_0} \int\limits_{\Gamma} f(t,\ z)\, dz.$$

Но последний интеграл по теореме Коши равен нулю и функция $\varphi(z)$, удовлетворяющая всем условиям теоремы Морера, аналитична в D.

Несобственный интеграл, зависящий от параметра, называется *равномерно сходящимся*, если предел

$$\lim_{t_1,\, t_2\to c} \int\limits_{L \setminus t_1 t_2} f(t,\ z)\, dt = \int\limits_{L} f(t,\ z)\, dt$$

существует равномерно относительно $z \in E$. Одним из признаков равномерной сходимости несобственных интегралов является

Теорема 3.5. *Если при всех $t \in L$ и $z \in E$ имеет место неравенство $|f(t,\ z)| \leqslant |\varphi(t)|$ и функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема по L, то $\int\limits_L f(t,\ z)\, dt$ равномерно сходится по $z \in E$.*

Чтобы убедиться в этом, надо совершить переход к пределу при $t_1,\ t_2 \to c$ в неравенстве

$$\int\limits_{L\setminus t_1 t_2} |f(t,\ z)|\, |dt| \leqslant \int\limits_{L\setminus t_1 t_2} |\varphi(t)|\, |dt|.$$

Для равномерно сходящихся интегралов остаются в силе теоремы 3.1—3.3 при незначительных изменениях в формулировках. Приведем в качестве примера формулировку теоремы 3.3 для этого случая.

Теорема 3.3*. *Если функция $f(t,\ z)$ является аналитической по z в некоторой области D, кусочно-непрерывной по t на линии L и интеграл* (3.4) *сходится равномерно для $z \in D$, то он представляет функцию аналитическую в D, производная от которой вычисляется по формуле* (3.5) *непосредственным дифференцированием под знаком интеграла.*

Выбросив из L сколь угодно малые окрестности точек разрыва функции $f(t,\ z)$, к интегралу по оставшейся части L', где $f(t,\ z)$ непрерывна, применяем теоремы 3.3 и 3.4. Таким путем получим заключение об аналитичности $F(z)$. Справедливость формулы (3.5) доказывается так же, как в теореме 3.3.

§ 4. ГЛАВНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

1°. Интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau \tag{4.1}$$

представляет из себя частный случай криволинейного интеграла, содержащего параметр z, относительно которого подынтегральная функция

$$f(\tau, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}, \quad \tau \in L,$$

является дробно-линейной и, следовательно, аналитической всюду в расширенной плоскости, кроме точек $z = \tau \in L$. Поэтому, когда плотность $\varphi(\tau)$ непрерывна на L, $f(\tau, z)$ при $z \overline{\in} L$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.3 и, значит, интеграл (4.1) вне линии L представляет аналитическую функцию.

В более общем случае, когда $\varphi(\tau)$ определена на L всюду, за исключением, разве, конечного числа точек и абсолютно интегрируема на L, интеграл (4.1) равномерно сходится по z на любом замкнутом множестве E, не содержащем точек линии L. Действительно, обозначим через R радиус круга с центром в начале координат, в котором лежит множество E, а через d — расстояние от E до L. Тогда для $\tau \in L$ и $z \in E$ $|\tau - z| \geqslant d$ для всех $\tau \in L$, а при $|\tau| \geqslant 2R$ $|\tau - z| \geqslant |\tau| - |z| \geqslant R$. Поэтому всегда существует такая постоянная $M = M(d, R) > 0$, что имеет место неравенство

$$|f(\tau, z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} \right| \leqslant M |\varphi(\tau)|$$

при всех $\tau \in L$ и $z \in E$, откуда на основании теоремы 3.5 и вытекает равномерная сходимость интеграла (4.1). А отсюда по теореме 3.3* следует аналитичность интеграла типа Коши в любой области, не содержащей точек линии интегрирования.

Что касается поведения $\Phi(z)$ в бесконечно удаленной точке, то выбросив из L сколь угодно малые окрестности Δ_j особых точек $\varphi(\tau)$ и точек, где $\varphi(\tau)$ не определена, получим линию $L' = L \setminus U\Delta_j$ такую, что при $z \to \infty$ $(z \overline{\in} L)$ $f(\tau, z) \to 0$ равномерно относительно $\tau \in L'$. Значит, по теореме 3.1

$$\lim_{z \to \infty} \int_{L'} f(\tau, z)\, d\tau = 0,$$

откуда путем перехода к пределу при всех $\Delta_j \to 0$ получаем: $\Phi(\infty) = 0$.

Резюмируя изложенное, получаем теорему, полностью характеризующую свойства интеграла типа Коши вне линии интегрирования:

Теорема 4.1. *Если L — кусочно-гладкая линия, на которой функция $\varphi(\tau)$ определена всюду, кроме, может быть, конечного числа точек, и является абсолютно интегрируе-*

мой, то интеграл типа Коши (4.1) *представляет аналитическую функцию в любой области, не содержащей точек линии* L, *при этом* $\Phi(\infty)=0$ *и производные любого порядка от* $\Phi(z)$ *вычисляются по формуле*

$$\Phi^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-z)^{n+1}},\quad n=1,\,2,\,\ldots \tag{4.2}$$

2°. Допустим теперь, что под знаком интеграла (4.1) вместо параметра z стоит параметр $t\in L$, так что формально имеем

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau. \tag{4.3}$$

Легко видеть, что даже при непрерывной плотности $\varphi(t)$ этот интеграл не существует как обычный несобственный. Однако для определенного класса функций $\varphi(t)$ его можно понимать в смысле *главного значения по Коши*. Это понятие состоит в следующем.

Пусть t есть обыкновенная или угловая точка линии L, отличная от концевой. Опишем из t как из центра окружность $|z-t|=\rho$ настолько малого радиуса ρ, чтобы она пересекала линию L ровно в двух точках t_1 и t_2, и обозначим через L_ρ часть L, лежащую вне этой окружности. Если существует предел

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,\quad t\in L, \tag{4.4}$$

то он называется *главным значением интеграла* (4.3).

В этом определении, как и при определении несобственного интеграла, точки t_1 и t_2 стремятся к точке t, но не любым образом, а оставаясь все время на одинаковом расстоянии от нее: $|t-t_1|=|t-t_2|$. Поэтому, если интеграл (4.4) существует как обычный несобственный, то он существует и в смысле главного значения, но не наоборот.

Укажем лишь один из случаев, когда главное значение интеграла типа Коши существует.

Теорема 4.2. *Если* L — *простой кусочно-гладкий контур и плотность* $\varphi(t)$ *удовлетворяет условию* $H(\lambda)$ *на* L, *то главное значение интеграла типа Коши существует для любой точки* $t\in L$, *отличной от концов.*

Для доказательства напишем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho}\frac{d\tau}{\tau-t}.$$

Так как $\varphi(t)\in H(\lambda)$, то при $\rho\to 0$ первый интеграл в правой части имеет пределом обычный несобственный интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau.$$

Поэтому надо лишь доказать существование предела второго интеграла.

Предположим сначала, что контур L *замкнутый*. Обозначим через $C_+(t, \rho)$ дугу окружности $C(t, \rho): |z-t|=\rho$, соединяющую точки t_1 и t_2 в том же направлении, что и линия L_ρ, и расположенную в области D^+, ограниченной контуром L (рис. 1*a*). По теореме Коши

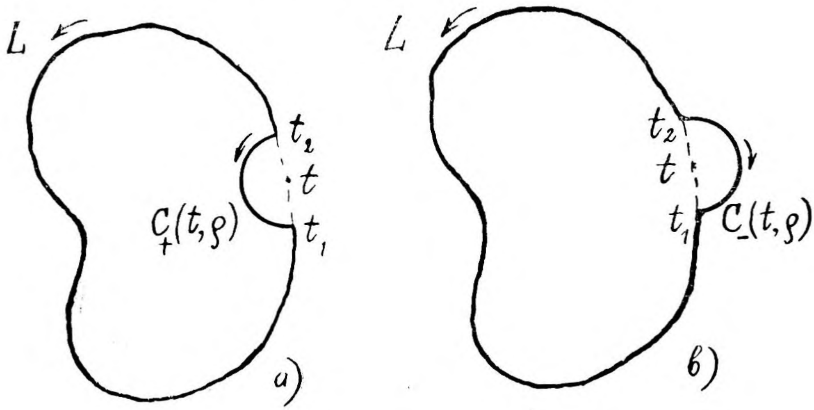

Рис. 1.

$$\int\limits_{L_\rho}\frac{d\tau}{\tau-t}=\int\limits_{C_+(t,\rho)}\frac{d\tau}{\tau-t}.$$

Но последний интеграл легко вычисляется. На $C_+(t, \rho)$ имеем $\tau=t+\rho e^{i\theta}$, где $\arg(t_2-t)\leqslant\theta\leqslant\arg(t_1-t)$. Значит

$$\int\limits_{C_+(t,\rho)}\frac{d\tau}{\tau-t}=i\left[\arg(t_1-t)-\arg(t_2-t)\right]=i\alpha(\rho).$$

Величина $\alpha(\rho)$ представляет собой угловую меру дуги $C_+(t, \rho)$. При $\rho\to 0$ она, очевидно, стремится к углу α между касательными к контуру L в точке t. Следовательно, интересующий нас предел и интеграл (4.3) в смысле главного значения существуют. Для вычисления главного значения получаем формулу

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{\alpha}{2\pi}\varphi(t),\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi. \tag{4.5}$$

Здесь значениям $\alpha=0$ и $\alpha=2\pi$ соответствуют точки возврата. Для неугловых точек $\alpha=\pi$, ибо первая касательная проводится к участку контура L, следующему за точкой t, а вторая — к участку до точки t, так что направление первой касательной совпадает с направлением контура L, а направление второй касательной противоположно направлению контура.

Если же представить L_ρ в таком виде $L_\rho=L_*\bigcup C_-(t,\ \rho)$, где $C_-(t,\ \rho)$ есть дуга той же окружности $C(t,\ \rho)$, ведущая от t_2 к t_1, но расположенная справа от L (рис. 1*в*), а замкнутый контур L_* состоит из L_ρ и дуги $C_-(t,\ \rho)$, проходимой в обратном направлении, то как и раньше

$$\int_{L_\rho}\frac{d\tau}{\tau-t}=\int_{L_*}\frac{d\tau}{\tau-t}+\int_{C_-(t,\ \rho)}\frac{d\tau}{\tau-t}=2\pi i+i\,[\alpha(\rho)-2\pi]=i\alpha(\rho)$$

и для вычисления главного значения получается та же формула (4.5).

В случае *разомкнутого контура* $L=ab$ при вычислении главного значения опять приходится использовать интеграл типа Коши с плотностью $\varphi(t)=1$. Чтобы вычислить этот интеграл при $z\overline{\in}ab$, возьмем одну из первообразных для $(\tau-z)^{-1}$ по переменному τ. По параметру z эта первообразная должна быть однозначной, как и подынтегральная функция. Таковой будет, очевидно, любая ветвь $\ln(\tau-z)$ с разрезом $(\tau,\ b,\ \infty)$ в плоскости z, состоящим из дуги $\tau b\subset L$ и разреза $(b,\ \infty)$ по любой кусочно-гладкой простой кривой. Тогда

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\ln(\tau-z)\Big|_{\tau=a}^{\tau=b}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}[\ln(b-z)-\ln(a-z)]=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{b-z}{a-z}=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z-b}{z-a}$$

будет однозначной в плоскости с разрезом по $L=ab$ функцией, исчезающей на бесконечности, ибо при достаточно больших z

$$\ln\frac{z-b}{z-a}=\frac{a-b}{z}+\frac{a^2-b^2}{2z^2}+\frac{a^3-b^3}{3z^3}+\ldots$$

При вычислении главного значения $\Phi(t)$ в общем случае, обозначая как и раньше через $C_+(t,\ \rho)$ дугу окружности $C(t,\ \rho)$ с положительным направлением, ведущим от t_2 к t_1, и расположенную слева от L, а через L_* простую кусочно-гладкую дугу, состоящую из L_ρ и дуги $C_+(t,\ \rho)$, проходимой по часовой стрелке (рис. 2*а*), можем написать

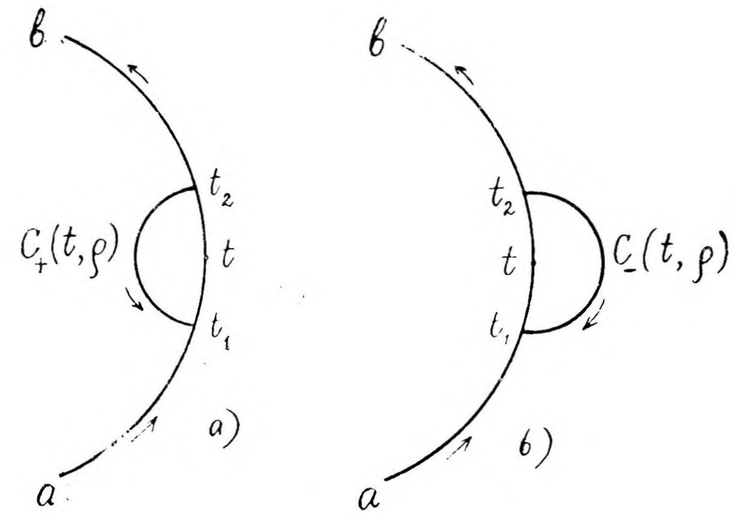

Рис. 12.

$$\int_{L_\rho} \frac{d\tau}{\tau - t} = \int_{L_*} \frac{d\tau}{\tau - t} + \int_{C_+(t,\rho)} \frac{d\tau}{\tau - t}.$$

Обозначим через

$$\left[\ln \frac{z-b}{z-a}\right]_*$$

исчезающую на бесконечности ветвь функции $\mathrm{Ln}\,[(z-b)/(z-a)]$ в плоскости с разрезом по L_*. Так как t не лежит на L_*, то

$$\int_{L_*} \frac{d\tau}{\tau - t} = \left[\ln \frac{t-b}{t-a}\right]_*.$$

Значение второго интеграла по $C_+(t, \rho)$ нам известно, оно равно $i\alpha(\rho)$, так что

$$\int_{L_\rho} \frac{d\tau}{\tau - t} = \left[\ln \frac{t-b}{t-a}\right]_* + i\alpha(\rho).$$

Когда $\rho \to 0$, контур L_* стремится к L так, что точка t все время остается справа от L_*. Поэтому

$$\lim_{\rho \to 0} \left[\ln \frac{t-b}{t-a}\right]_* = \left[\ln \frac{t-b}{t-a}\right]^-$$

есть предельное значение исчезающей на бесконечности однозначной в плоскости с разрезом по $L = ab$ ветви логарифма

$$\ln\frac{z-b}{z-a}=\ln(z-b)-\ln(z-a),$$

когда $z \to t$ *справа* от L. Так как $\alpha(\rho)\to\alpha$ при $\rho\to 0$, то

$$\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{L_\rho}\frac{d\tau}{\tau-t}=\left[\ln\frac{t-b}{t-a}\right]^{-}+i\alpha,$$

на основании чего в качестве главного значения интеграла (4.3) получим такое выражение

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{\alpha}{2\pi}\varphi(t)+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\left[\ln\frac{t-b}{t-a}\right]^{-},\qquad(4.6)$$

$$0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi.$$

Формулу (4.5) можно получить отсюда при $a=b$.

Вместо $C_+(t,\rho)$ можно брать дугу $C_-(t,\rho)$ (рис. 2*в*). Ее дуговая мера равна $\alpha(\rho)-2\pi$, а точка t находится слева от L_*. Поэтому при $\rho\to 0$

$$\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{L_\rho}\frac{d\tau}{\tau-t}=\left[\ln\frac{t-b}{t-a}\right]^{+}+i(\alpha-2\pi)$$

и для вычисления главного значения получается формула

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau+\left(\frac{\alpha}{2\pi}-1\right)\varphi(t)+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\left[\ln\frac{t-b}{t-a}\right]^{+},$$

$$0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi.\qquad(4.6^*)$$

Чтобы убедиться в совпадении правых частей в формулах (4.6) и (4.6*), нужно учесть, что на $L=ab$

$$\left[\ln\frac{t-b}{t-a}\right]^{+}-\left[\ln\frac{t-b}{t-a}\right]^{-}=2\pi i.$$

Сделаем два замечания.

1) Формулу (4.6*) можно получить из формулы (4.6) для интеграла

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ba}\frac{\psi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau,\quad \psi(t)=-\varphi(t).$$

2) При получении формул (4.6) и (4.6*) интегралы от $(\tau-t)^{-1}$ по дугам $C_\pm(t,\rho)$ можно вычислять не заменой переменных $\tau-t=\rho e^{i\theta}$, а рассматривать их как интегралы типа Коши с плотностью $\varphi(t)=1$. Тогда на основании изложенного выше

$$\int\limits_{C_+(t,\rho)}\frac{d\tau}{\tau-t}=\ln\frac{t_1-t}{t_2-t}=\ln\frac{|t-t_1|}{|t-t_2|}+$$

$$+\,i\,[\arg(t_1-t)-\arg(t_2-t)]=i\alpha(\rho).$$

Из этого способа вычислений следует, что при определении главного значения от выделенной дуги t_1t_2 не обязательно требовать, чтобы $|t-t_1|=|t-t_2|$; достаточно, чтобы при $t_1\to t$ и $t_2\to t$ имело место предельное соотношение $|t-t_1|/|t-t_2|\to 1$; в частности, точки t_1 и t_2 можно брать так, чтобы дуги t_1t и tt_2 имели одинаковую длину.

Одно из основных свойств главного значения интеграла типа Коши на линии интегрирования описывает

Теорема 4.3. *Если L — гладкий контур, на котором $\varphi(t)\in H(\lambda)$, $0<\lambda\leqslant 1$, то всюду на L, исключая, может быть, сколь угодно малые окрестности концов, $\Phi(t)\in H(\lambda)$ при $\lambda<1$ и $\Phi(t)\in H(1-\varepsilon)$ при $\lambda=1$, где ε — сколь угодно малое положительное число.*

Поскольку контур L гладкий, главное значение при всех $t\in L$, отличных от концов, определяется формулой

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau-\frac{1}{2}\varphi(t)-\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\left[\ln\frac{t-b}{t-a}\right]^+.$$

Поэтому утверждения теоремы надо доказать лишь для интеграла

$$I(t)=\int\limits_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau.$$

Обозначим через L_ρ часть контура L, лежащую вне окружности $|z-t'|=\rho$, а через l_ρ — часть контура L, лежащую внутри окружности. Тогда можно написать

$$I(t'')-I(t')=I_1+I_2+I_3,$$

где

$$I_1=\int\limits_{l_\rho}\left\{\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'')}{\tau-t''}-\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t')}{\tau-t'}\right\}d\tau,$$

$$I_2=[\varphi(t')-\varphi(t'')]\int\limits_{L_\rho}\frac{d\tau}{\tau-t'},$$

$$I_3=\int\limits_{L_\rho}[\varphi(\tau)-\varphi(t'')]\left(\frac{1}{\tau-t''}-\frac{1}{\tau-t'}\right)d\tau.$$

Оценим по модулю каждый из этих интегралов, положив

$$\rho=m|t''-t'|,\quad m>1. \tag{4.7}$$

Так как $\varphi(t)\in H(\lambda)$, $|d\tau|=|d\sigma|$ и на всей дуге L справедливы неравенства (1.9), то

$$|I_1| \leqslant A\left\{\int_{l_\rho} |\tau - t'|^{\lambda-1} |d\tau| + \int_{l_\rho} |\tau - t''|^{\lambda-1} |d\tau|\right\} \leqslant$$

$$\leqslant A\left\{\int_{s_1}^{s_2} |\sigma - s'|^{\lambda-1} |d\sigma| + \int_{s_1}^{s_2} |\sigma - s''|^{\lambda-1} |d\sigma|\right\}.$$

Оба последних интеграла вычисляются совершенно одинаково:

$$\int_{s_1}^{s_2} |\sigma - s'|^{\lambda-1} |d\sigma| = \int_{s_1}^{s'} (s' - \sigma)^{\lambda-1} d\sigma + \int_{s'}^{s_2} (\sigma - s')^{\lambda-1} d\sigma =$$

$$= \lambda^{-1} [(s' - s_1)^\lambda + (s_2 - s')^\lambda];$$

$$\int_{s_1}^{s_2} |\sigma - s''| |d\sigma| = \lambda^{-1} [(s'' - s_1)^\lambda + (s_2 - s'')^\lambda].$$

Применяя к каждой из полученных величин неравенство (2.4), будем иметь

$$|I_1| \leqslant 2A\lambda^{-1}2^{1-\lambda}(s_2 - s_1)^\lambda,$$

откуда при помощи неравенства (1.9), условия $|t_2 - t_1| \leqslant 2\rho$ и соотношения (4.7) получаем окончательно

$$|I_1| \leqslant 2^{2-\lambda}A\lambda^{-1}k_0^{-\lambda}|t_2 - t_1|^\lambda \leqslant 4A\lambda^{-1}k_0^{-\lambda}m^\lambda |t'' - t'|^\lambda.$$

Второй интеграл I_2 оценивается проще. Так как

$$\int_{L_\rho} \frac{d\tau}{\tau - t} \xrightarrow[\rho \to 0]{} \ln \frac{t' - b}{t' - a} \pm \pi i$$

и t' не совпадает ни с одним из концов L, то этот интеграл ограничен и в силу условия $\varphi(t) \in H(\lambda)$ имеем

$$|I_2| \leqslant A_2 |t'' - t'|^\lambda.$$

При оценке I_3 надо учесть, что при $\tau \in L_\rho$

$$|\tau - t'| \geqslant \rho = m|t'' - t'|, \quad |\tau - t''| \geqslant \rho\left(1 - \frac{1}{m}\right) = (m-1)|t'' - t'|,$$

на основании чего из неравенства $|\tau - t'| \leqslant |\tau - t''| + |t'' - t'|$ имеем

$$\frac{|\tau - t'|}{|\tau - t''|} \leqslant 1 + \frac{|t'' - t'|}{|\tau - t''|} \leqslant \frac{m}{m-1}.$$

Поэтому

$$|I_3| \leqslant A|t'' - t'| \int_{L_\rho} \frac{|d\tau|}{|\tau - t''|^{1-\lambda} |\tau - t'|} =$$

$$= A\,|t'' - t'| \int\limits_{L_\rho} \left|\frac{\tau - t'}{\tau - t''}\right|^{1-\lambda} \frac{|d\tau|}{|\tau - t'|^{2-\lambda}} \leqslant$$

$$\leqslant A\left(\frac{m}{m-1}\right)^{1-\lambda} k_0^{\lambda-2}\,|t'' - t'|\left\{\int\limits_{s_a}^{s_1} \frac{d\sigma}{(s' - \sigma)^{2-\lambda}} + \int\limits_{s_2}^{s_b} \frac{d\sigma}{(\sigma - s')^{2-\lambda}}\right\}.$$

При вычислении последних интегралов приходится различать два случая. При $\lambda < 1$ имеем

$$\int\limits_{s_a}^{s_1} \frac{d\sigma}{(s' - \sigma)^{2-\lambda}} + \int\limits_{s_2}^{s_b} \frac{d\sigma}{(\sigma - s')^{2-\lambda}} =$$

$$= \frac{(s' - s_1)^{\lambda-1} - (s' - s_a)^{\lambda-1} - (s_b - s')^{\lambda-1} + (s_2 - s')^{\lambda-1}}{1-\lambda} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\lambda}\left[(s' - s_1)^{\lambda-1} + (s_2 - s')^{\lambda-1}\right] \leqslant \frac{2m^{\lambda-1}}{1-\lambda}\,|t'' - t'|^{\lambda-1},$$

$$|I_3| \leqslant A_3\,|t'' - t'|^{\lambda}, \quad A_3 = \frac{2A}{1-\lambda}(m-1)^{\lambda-1} k_0^{\lambda-2}.$$

Мы воспользовались здесь тем, что

$$\rho = m\,|t'' - t'| \leqslant |\tau - t'| \leqslant |\sigma - s'|$$

при всех σ из промежутков $s_a \leqslant \sigma \leqslant s_1$, $s_2 \leqslant \sigma \leqslant s_b$. Эти же неравенства при $\sigma = s_1$, s_2, s_a, s_b применяем и в случае $\lambda = 1$:

$$\int\limits_{s_a}^{s_1} \frac{d\sigma}{s' - \sigma} + \int\limits_{s_2}^{s_b} \frac{d\sigma}{\sigma - s'} = \left|\ln \frac{(s' - s_a)(s_b - s')}{(s' - s_1)(s_2 - s')}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\ln \frac{1}{(s' - s_1)(s_2 - s')}\right| + \left|\ln \frac{1}{(s' - s_a)(s_b - s')}\right| \leqslant 4\left|\ln \frac{1}{|t'' - t'|}\right|,$$

$$|I_3| \leqslant 4A\,|t'' - t'|\left|\ln \frac{1}{|t'' - t'|}\right|.$$

Так как при $\rho \to 0$ и любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ имеем $|t'' - t'|^{\varepsilon}\,|\ln|t'' - t'|| \to 0$, то отсюда следует ограниченность этого произведения и окончательная оценка для I_3:

$$|I_3| \leqslant A_3\,|t'' - t'|^{1-\varepsilon}.$$

Чтобы завершить доказательство теоремы при $\lambda = 1$, надо лишь обратить внимание на справедливость оценок для I_1 и I_2 при любом $\lambda_1 = 1 - \varepsilon < \lambda$.

В случае кусочно-гладкого контура L непрерывность интеграла $I(t)$ доказывается аналогично, но главное значение

$\Phi(t)$ не является уже непрерывной функцией: угловые точки контура являются для нее точками разрыва первого рода. Это сразу видно из формулы (4.6).

Теорема 4.3 легко обобщается на случай, когда плотность интеграла $\varphi(\tau, \zeta)$ зависит от некоторого параметра ζ, изменяющегося на некотором множестве E или же на контуре L. Когда $\varphi(\tau, \zeta)$ удовлетворяет условию H по обеим переменным, главное значение интеграла типа Коши удовлетворяет условию H и по τ, и по ζ. Доказательство можно найти в монографии Н. И. Мусхелишвили [41, с. 74—75].

3°. Отметим некоторые свойства, полезные при вычислении главных значений.

Теорема 4.4 (правило замены пути интегрирования). *Если $t = \alpha(\zeta)$ есть гомеоморфизм контура L на контур* Γ, *удовлетворяющий условию $\alpha'(\zeta) \in H$, то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi(\xi)\,d\xi}{\xi - \zeta}, \tag{4.8}$$

$$\psi(\xi) = \frac{(\xi - \zeta)\,\alpha'(\xi)}{\alpha(\xi) - \alpha(\zeta)}\,\varphi[\alpha(\xi)].$$

Главное значение преобразованного интеграла существует, так как при гельдеровой функции $\varphi(\tau)$ плотность его $\psi(\xi)$ также удовлетворяет условию H. Но

$$\int_\Gamma \frac{\psi(\xi)\,d\xi}{\xi - \zeta} = \lim_{\rho\to 0}\int_{\Gamma_\rho} \frac{\psi(\xi)\,d\xi}{\xi - \zeta} = \lim_{t_1, t_2\to t}\int_{L\setminus t_1t_2} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t},$$

при этом точки t_1 и t_2 расположены на L не обязательно симметрично относительно точки t. Однако

$$\lim_{t_1, t_2\to t}\frac{|t_1 - t|}{|t_2 - t|} = \lim_{\zeta_1, \zeta_2\to\zeta}\frac{|\alpha(\zeta_1) - \alpha(\zeta)|}{|\zeta_1 - \zeta|} : \frac{|\alpha(\zeta_2) - \alpha(\zeta)|}{|\zeta_2 - \zeta|} = 1,$$

и, значит, равенство (4.8) действительно имеет место, причем первый интеграл существует также в смысле главного значения.

Теорема 4.5 (правило интегрирования по частям). *Если функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на гладком контуре L, то для любой точки t разомкнутого контура, отличной от концов, справедлива формула*

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = \varphi(b)\ln(b - t) - \varphi(a)\ln(a - t) \pm$$

$$\pm\, i\pi\varphi(t) - \int_L \varphi'(\tau)\ln(\tau - t)\,d\tau, \tag{4.9}$$

где выбор знака зависит от выбора ветви функции $\ln(\tau - t)$. *В случае замкнутого контура*

$$\int\limits_L \frac{\varphi[\tau]\,d\tau}{\tau - t} = \pm i\pi\varphi(t) - \int\limits_L \varphi'(\tau)\ln(\tau - t)\,d\tau. \qquad (4.9^*)$$

При доказательстве формулы (4.9) функцию $\ln(\tau - t)$ будем понимать сначала следующим образом

$$\ln(\tau - t) = \lim_{z \to \tau^{\pm}} \ln(z - t),$$

где $\ln(z - t)$ означает любую однозначную ветвь логарифмической функции в плоскости z с разрезом (t, b, ∞), содержащим дугу tb нашего разомкнутого контура $L = ab$. На дуге tb пределы слева $\ln(\tau^{+} - t)$ и справа $\ln(\tau^{-} - t)$ неодинаковы, и в зависимости от того, с какой из этих функций мы имеем дело, в формуле (4.9) надо брать знак плюс или минус соответственно.

Чтобы убедиться в этом, интеграл в формуле (4.9), содержащий любое из взятых нами значений логарифма, представляем в виде предела

$$\int\limits_L \varphi'(\tau)\ln(\tau - t)\,d\tau = \lim_{\rho \to 0} \int\limits_{L_\rho} \varphi'(\tau)\ln(\tau - t)\,d\tau,$$

что возможно, ибо он существует как обычный несобственный. В обыкновенном интеграле по L_ρ производим интегрирование по частям. Получаем

$$\lim_{\rho \to 0} \int\limits_{L_\rho} \varphi'(\tau)\ln(\tau - t)\,d\tau = \varphi(b)\ln(b^{\pm} - t) - \varphi(a)\ln(a - t) +$$

$$+ \lim_{\rho \to 0}\left\{\varphi(t_1)\ln(t_1 - t) - \varphi(t_2)\ln(t_2^{\pm} - t) - \int\limits_{L_\rho} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t}\right\}.$$

Функция $\varphi(\tau)$, как непрерывно дифференцируемая, удовлетворяет условию $H(1)$. Поэтому предел интеграла по L_ρ существует и равен главному значению интеграла типа Коши. При вычислении предела проинтегрированных членов производим следующие элементарные преобразования:

$$\varphi(t_1)\ln(t_1 - t) - \varphi(t_2)\ln(t_2^{\pm} - t) = \varphi(t)\left[\ln(t_1 - t) - \ln(t_2^{\pm} - t)\right] +$$

$$+ \left[\varphi(t_1) - \varphi(t)\right]\ln(t_1 - t) - \left[\varphi(t_2) - \varphi(t)\right]\ln(t_2^{\pm} - t).$$

Из условия $\varphi(t) \in H(1)$ и предельного соотношения $\lim\limits_{v \to 0} v \ln v = 0$ следует, что предел каждого из двух последних слагаемых равен нулю. Чтобы вычислить предел разности $\ln(t_1 - t) - \ln(t_2^{+} - t) = i\left[\arg(t_1 - t) - \arg(t_2^{+} - t)\right]$, будем отсчитывать углы с вершиной в точке t как обычно против часовой стрелки от положительной касательной к L в этой точке. Имеем

$$\ln(t_1 - t) - \ln(t_2^+ - t) = i\alpha(\rho)$$

и в пределе при $\rho \to 0$ получаем $+i\pi$. В силу соотношения $\ln(t_2^- - t) = \ln(t_2^+ - t) + 2\pi i$ находим

$$\ln(t_1 - t) - \ln(t_2^- - t) = i[\alpha(\rho) - 2\pi],$$

откуда в пределе при $\rho \to 0$ получаем $-i\pi$. Формула (4.9) доказана.

Функцию $\ln(\tau - t)$ можно рассматривать также как предел слева или справа одной из однозначных ветвей функции $\ln(\tau - z)$ в плоскости z с разрезом (τ, b, ∞), содержащим дугу τb контура L:

$$\ln(\tau - t) = \lim_{z \to t^{\pm}} \ln(\tau - z).$$

В этом случае в формуле (4.9) значению $\ln(\tau - t^+)$ соответствует нижний знак, а значению $\ln(\tau - t^-)$ — верхний. Доказательство остается тем же самым, только при его завершении учитываем, что в данном случае

$$\ln(t_1 - t^{\pm}) - \ln(t_2 - t^{\pm}) = \ln\frac{t_1 - t^{\pm}}{t_2 - t^{\pm}} = \lim_{z \to t^{\pm}} \ln\frac{t_1 - z}{t_2 - z},$$

где

$$\ln\frac{t_1 - z}{t_2 - z}$$

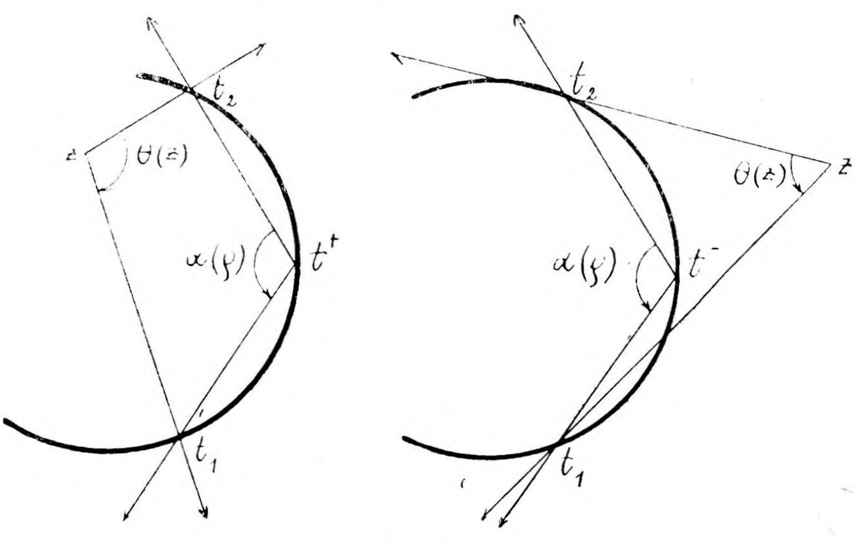

Рис. 3.

есть исчезающая на бесконечности однозначная в плоскости z с разрезом по дуге t_1t_2 контура L ветвь функции $\operatorname{Ln}[(t_1-z)/(t_2-z)]$. Поэтому при помощи рис. 3 получаем

$$\ln\frac{t_1-t^+}{t_2-t^+}=\lim_{z\to t^+}\ln\frac{t_1-z}{t_2-z}=i\lim_{z\to t^+}\arg\frac{t_1-z}{t_2-z}=$$

$$=i\lim_{z\to t^+}\theta(z)=i[\alpha(\rho)-2\pi],$$

$$\ln\frac{t_1-t^-}{t_2-t^-}=i\lim_{z\to t}\theta(z)=i\alpha(\rho)$$

(здесь учтено, что $\theta(\infty)=0$). Значит,

$$\lim_{\rho\to 0}\ln\frac{t_1-t^\pm}{t_2-t^\pm}=\mp i\pi,$$

что и подтверждает указанный выбор знака в рассматриваемых случаях.

Если рассматривать $\ln(\tau-t)$ как контурное значение однозначной ветви $\ln(z-t)$ в плоскости z с разрезом (t,∞) не по L, а вдоль некоторой кривой, расположенной справа от L, или однозначной ветви $\ln(\tau-z)$ с подобным же правым разрезом (τ,∞), то первому случаю в формуле (4.9) будет соответствовать верхний знак, второму — нижний. Доказательство в первом случае (в сочетании со случаем, когда разрез (t,∞) расположен слева от L) по изложенной нами схеме имеется в книге Ф. Д. Гахова [8, с. 35—37]; здесь $\ln(t_1-t)-\ln(t_2-t)$ есть разность значений одной и той же функции $\ln(z-t)$ в двух различных точках t_1 и t_2 контура L, равная $i\alpha(\rho)$, действительно в пределе при $\rho\to 0$ дает $+i\pi$. Во втором случае $\ln(t_1-t)-\ln(t_2-t)$ есть разность значений в одной точке $t\in L$ различных аналитических функций $\ln(t_1-z)$ и $\ln(t_2-z)$, однозначных в плоскости z с различными разрезами (t_1,∞) и (t_2,∞); при вычислении этой разности мы записываем ее в виде $\ln(t_1-t)-\ln(t_2-t)=$ $=i[\arg(t_1-t)-\arg(t_2-t)]=i(\alpha_1-\alpha_2)$ и при вычислении углов $\alpha_1=\arg(t_1-t)$ и $\alpha_2=\arg(t_2-t)$ их отсчет ведем от одного и того же выбранного направления — от направления хорды t_1t_2. По рис. 4 видим, что при $\rho\to 0$ предел $i(\alpha_1-\alpha_2)$ равен $-i\pi$.

Если при тех же двух пониманиях функции $\ln(\tau-t)$ разрезы (t,∞) или (τ,∞) проводить слева от L, то в формуле (4.9) знаки перед $i\pi\varphi(t)$ надо поменять местами.

В случае замкнутого контура L разрезы (t,∞) или (τ,∞) не будут иметь общих точек с L лишь в том случае, если они расположены *справа* от L. Справедливая в этом случае формула (4.9*) получается из соответствующих случаев формулы (4.9) при $a=b$.

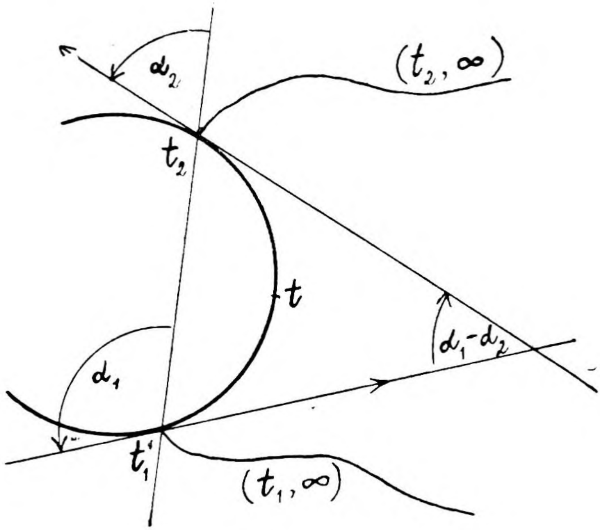

Рис. 4.

Как указано Ю. М. Крикуновым [31], формулы (4.9) и (4.9*) будут иметь место и в более общем случае, когда у производной $\varphi'(t)$ в конечном числе точек $t_1, \ldots, t_q$ контура L имеются интегрируемые особенности. Доказательство справедливости формул для всех $t \neq t_k$ будет отличаться лишь тем, что перед интегрированием по частям интеграла от $\varphi'(\tau)\ln(\tau - t)$ надо будет выделять не только точку t, но и все точки $t_1, \ldots, t_q$.

Теорема 4.6 (правило перестановки порядка интегрирования). *Если L — гладкий контур и функция $\varphi(\tau, \tau_1)$ по обеим переменным $\tau, \tau_1 \in L$ принадлежит классу H, то имеет место следующая формула*

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)\, d\tau_1}{\tau_1 - \tau} = -\pi^2 \varphi(t, t) + \int_L d\tau_1 \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)\, d\tau}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)}. \tag{4.10}$$

Доказательство проведем сначала при дополнительном условии $\varphi(t, t) = 0$, при котором формула (4.10) принимает более простой вид

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)\, d\tau_1}{\tau_1 - \tau} = \int_L d\tau_1 \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)\, d\tau}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)}. \tag{4.11}$$

Оба повторных интеграла в формуле (4.11) имеют вполне определенный смысл. В правой части внутренний интеграл в силу тождества

$$\frac{1}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)} = \frac{1}{\tau_1 - t}\left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{\tau - \tau_1}\right] \tag{4.12}$$

лишь множителем $1/(\tau_1 - t)$ отличается от разности двух интегралов

$$\omega(\tau_1, t) = \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau - t} d\tau, \quad \omega(\tau_1, \tau_1) = \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau - \tau_1} d\tau.$$

Первый из них существует в смысле главного значения, а второй — как обычный несобственный, так как на основании условий $\varphi(\tau_1, \tau_1) = 0$ и $\varphi(\tau, \tau_1) \in H(\alpha)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, при любом λ, удовлетворяющим условию $0 \leqslant \lambda < \alpha \leqslant 1$, имеем

$$\frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} = \frac{\psi(\tau, \tau_1)}{|\tau_1 - \tau|^{1-\lambda}}, \tag{4.13}$$

где функция

$$\psi(\tau, \tau_1) = \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{|\tau_1 - \tau|^{\lambda}} e^{-i\vartheta}, \quad \vartheta = \arg(\tau_1 - \tau),$$

в силу теорем 2.3 и 2.4 удовлетворяет условию $H(\alpha - \lambda)$. Из теоремы 4.3* и условия $\varphi(t, t) = 0$ следует, что $\omega(\tau_1, \tau_1) \in H$ всюду на L, включая концы. Поэтому внешний интеграл в правой части равенства (4.11)

$$\int_L \frac{\omega(\tau_1, t) - \omega(\tau_1, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1$$

существует как несобственный. В левой части равенства (4.11) внутренний интеграл существует как несобственный и определяет функцию $\omega(\tau, \tau)$ класса H на L, в силу чего внешний существует в смысле главного значения.

Покажем, что сходимость всех интегралов в равенстве (4.11) является равномерной по отношению к положению параметров τ, τ_1 или t на L.

Возьмем несобственный интеграл

$$\omega(\tau_1, \tau_1) = \lim_{\tau', \tau'' \to \tau_1} \int_{L \setminus \tau'\tau''} \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau,$$

где концы малой дуги $\tau'\tau''$, содержащей τ_1, стремятся к τ_1 любым образом. Нам надо показать, что по заданному $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, не зависящее от положения τ_1 на L, что при $|\tau' - \tau| < \delta$, $|\tau'' - \tau_1| < \delta$ будет иметь место неравенство

$$\left|\omega(\tau_1, \tau_1) - \int_{L \setminus \tau'\tau''} \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau\right| = \left|\int_{\tau'\tau''} \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau\right| < \varepsilon.$$

Из соотношения (4.13) в силу условия $\varphi(\tau, \tau_1) \in H$ и неравенства (1.9) имеем

$$\left|\frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau}\right| \leqslant \frac{A}{|\tau_1 - \tau|^{1-\lambda}} \leqslant \frac{Ak_0^{\lambda-1}}{|\sigma_1 - \sigma|^{1-\lambda}},$$

где σ и σ_1 суть длины дуг, соответствующие точкам τ и τ_1. Полагая $\sigma' = \sigma_1 - \delta'$, $\sigma'' = \sigma_1 + \delta''$, получим

$$\left|\int\limits_{\tau'\tau''} \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau}\, d\tau\right| \leqslant Ak_0^{\lambda-1} \int\limits_{\sigma_1-\delta'}^{\sigma_1+\delta''} \frac{|d\sigma|}{|\sigma_1 - \sigma|^{1-\lambda}} =$$

$$= Ak_0^{\lambda-1}\left\{\int\limits_{\sigma_1-\delta'}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{(\sigma_1 - \sigma)^{1-\lambda}} + \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_1+\delta''} \frac{d\sigma}{(\sigma - \sigma_1)^{1-\lambda}}\right\} = A\lambda^{-1}k_0^{\lambda-1}\{(\delta')^\lambda + (\delta'')^\lambda\}.$$

Так как при $\tau' \to \tau_1$ и $\tau'' \to \tau_1$ имеют место предельные соотношения $\delta' \to 0$ и $\delta'' \to 0$, то по заданному $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta_0(\varepsilon) > 0$, что при $\delta' \leqslant \delta_0$ и $\delta'' \leqslant \delta_0$ последняя величина будет меньше ε. Такое δ_0 определяется из условия $2A\lambda^{-1}k_0^{\lambda-1}\delta_0^\lambda < \varepsilon$.

Для интеграла $\omega(\tau_1, t)$, существующего в смысле главного значения

$$\omega(\tau_1, t) = \lim_{\rho\to 0} \int\limits_{L_\rho} \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau - t}\, d\tau,$$

стремление к пределу происходит равномерно относительно обоих параметров τ_1 и t. Действительно, если L_ρ есть часть L, лежащая вне окружности $C(t, \rho)$, а $l_\rho = t_1 t_2$ — внутри, то

$$\left|\omega(\tau_1, t) - \int\limits_{L_\rho} \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau - t}\, d\tau\right| = \left|\int\limits_{l_\rho} \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau - t}\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{l_\rho} \frac{\varphi(\tau, \tau_1) - \varphi(t, \tau_1)}{\tau - t}\, d\tau\right| + |\varphi(t, \tau_1)| \left|\int\limits_{l_\rho} \frac{d\tau}{\tau - t}\right|.$$

Условие Гельдера $|\varphi(\tau, \tau_1) - \varphi(t, \tau_1)| \leqslant A|\tau - t|^\alpha$ выполняется равномерно относительно τ_1. Поэтому при оценке первого интеграла приходим к рассмотренному уже интегралу

$$\int\limits_{l_\rho} \frac{d\tau}{|\tau - t|^{1-\alpha}},$$

при $\rho \to 0$ стремящемуся к нулю равномерно по отношению к t. Из непрерывности $\varphi(\tau, \tau_1)$ на замкнутом множестве L следует ее ограниченность: $|\varphi(t, \tau_1)| \leqslant M$, M — постоянная.

Значит, остается убедиться лишь в равномерной сходимости по t главного значения интеграла типа Коши с плотностью единица.

По формулам (4.6) и (4.6*) при $\varphi(t) \equiv 1$ имеем

$$\int_{l_\rho} \frac{d\tau}{\tau - t} = \left[\ln \frac{t_2 - t}{t_1 - t}\right]^{\mp} \pm i\pi.$$

При обосновании формулы (4.9) мы показали, что

$$\lim_{\rho \to 0} \left[\ln \frac{t_2 - t}{t_1 - t}\right]^{\mp} = \mp i\pi$$

для любой точки t гладкого контура L, отличной от концов. Следовательно,

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{l_\rho} \frac{d\tau}{\tau - t} = 0$$

независимо от положения точки t на L.

Чтобы обосновать справедливость равенства (4.11), берем повторный интеграл, стоящий в левой части равенства, и как обычно при вычислении главного значения во внешнем интеграле выбрасываем точку t вместе с дугой l_ρ, высеченной окружностью $C(t, \rho)$. В полученном повторном интеграле внутренний интеграл по L равномерно сходится по τ, а внешний по L_ρ является обыкновенным криволинейным интегралом от непрерывной функции. Поэтому по теореме 3.2* здесь возможна обычная перестановка порядка интегрирования

$$\int_{L_\rho} \frac{d\tau}{\tau - t} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 = \int_L d\tau_1 \int_{L_\rho} \frac{\varphi(\tau, \tau_1)\, d\tau}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)}.$$

В полученном равенстве надо перейти к пределу при $\rho \to 0$. Пределом левой части равенства будет первый интеграл в формуле (4.11). К правой части применима теорема 3.1* о предельном переходе под знаком интеграла, так как внутренний интеграл при $\rho \to 0$ стремится равномерно относительно τ_1 и t к пределу $[\omega(\tau_1, t) - \omega(\tau_1, \tau_1)]/(\tau_1 - t)$, интеграл от которого по L сходится равномерно по отношению к t.

Переходим к общему случаю, когда $\varphi(t, t) \neq 0$. Теперь в левой части формулы (4.10) и внутренний и внешний интегралы существуют, очевидно, в смысле главного значения. В правой части внутренний интеграл представляет собой разность двух интегралов в смысле главного значения $\omega(\tau_1, t)$ и $\omega(\tau_1, \tau_1)$, разделенную на $\tau_1 - t$, поэтому внешний существует как несобственный.

Чтобы доказать справедливость формулы (4.10), запишем тождество

$$\varphi(\tau, \tau_1) = \varphi(\tau, \tau_1) - \varphi(\tau, \tau) + \varphi(\tau, \tau) - \varphi(t, t) + \varphi(t, t),$$

на основании которого первый интеграл представим в виде суммы трех повторных интегралов

$$I_1 = \int\limits_L \frac{d\tau}{\tau - t} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 = \int\limits_L \frac{d\tau}{\tau - t} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1) - \varphi(\tau, \tau)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 +$$

$$+ \int\limits_L \frac{d\tau}{\tau - t} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau, \tau) - \varphi(t, t)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 + \varphi(t, t) \int\limits_L \frac{d\tau}{\tau - t} \int\limits_L \frac{d\tau_1}{\tau_1 - \tau}.$$

В первых двух интегралах в правой части возможна обычная перестановка порядка интегрирования, ибо здесь применима формула (4.11). После этой операции в сумме этих интегралов два слагаемых уничтожаются и после применения тождества (4.12) в итоге получается следующее соотношение между интегралами I_1 и I_2, входящими в формулу (4.10):

$$I_1 = \int\limits_L d\tau_1 \int\limits_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)\, d\tau}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)} +$$

$$+ \varphi(t, t) \left\{ \int\limits_L \frac{d\tau}{\tau - t} \int\limits_L \frac{d\tau_1}{\tau_1 - \tau} - \int\limits_L d\tau_1 \int \frac{d\tau}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)} \right\} =$$

$$= I_2 + \varphi(t, t) \left\{ \int\limits_L \frac{d\tau}{\tau - t} \int\limits_L \frac{d\tau_1}{\tau_1 - \tau} - \int\limits_L \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t} \int\limits_L \frac{d\tau}{\tau - t} + \int\limits_L \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t} \int\limits_L \frac{d\tau}{\tau - \tau_1} \right\}.$$

При вычислении суммы S трех повторных интегралов в фигурных скобках различаем два случая.

В случае замкнутого контура L имеем $S = (i\pi)^2 - (i\pi)^2 + (i\pi)^2 = -\pi^2$ и формула (4.10) доказана.

В случае разомкнутого контура $L = ab$

$$S = 2 \int\limits_L \ln \frac{\tau - b}{\tau - a} \frac{d\tau}{\tau - t} + 2\pi i \left[\ln \frac{t - b}{t - a} + \pi i \right] - \left[\ln \frac{t - b}{t - a} + \pi i \right]^2 =$$

$$= 2 \int\limits_L \ln \frac{\tau - b}{\tau - a} \frac{d\tau}{\tau - t} - \left(\ln \frac{t - b}{t - a} \right)^2 - \pi^2$$

и для завершения доказательства справедливости формулы (4.10) остается вычислить интеграл в смысле главного значения

$$J(t) = \int\limits_L \ln \frac{\tau - b}{\tau - a} \frac{d\tau}{\tau - t}, \quad \ln \frac{\tau - b}{\tau - a} = \left[\ln \frac{\tau - b}{\tau - a} \right]^-,$$

и показать, что он равен $2^{-1} [\ln(t^+ - b) - \ln(t^+ - a)]^2$.

Рассмотрим вспомогательный интеграл

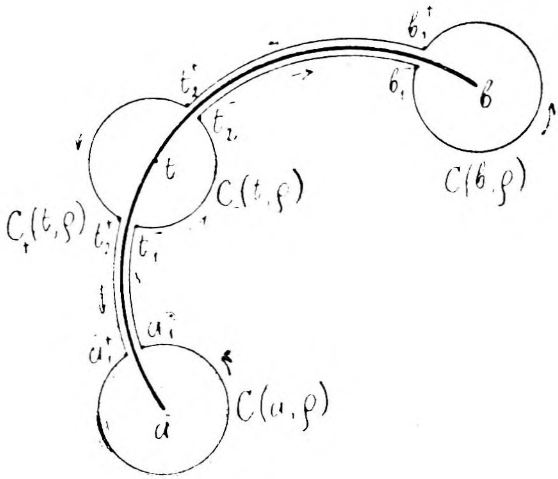

Рис. 5.

$$\int\limits_{\Gamma} \left(\ln \frac{\tau - b}{\tau - a} \right)^2 \frac{d\tau}{\tau - t}$$

по замкнутому контуру **Г**, изображенному на рис. 5. В бесконечной области D, ограниченной контуром Г, функция

$$f(z) = \left(\ln \frac{z-b}{z-a} \right)^2$$

однозначна, голоморфна и на бесконечности обращается в нуль. Так как $t \overline{\in} D$, то по интегральной формуле Коши наш интеграл по Г равен $f(\infty) = 0$. Разбивая путь интегрирования на составляющие его дуги, имеем

$$\int\limits_{\Gamma} = \int\limits_{a_1^- t_1^-} + \int\limits_{C_-(t,\rho)} + \int\limits_{t_2^- b_2^-} + \int\limits_{C(b,\rho)} + \int\limits_{b_1^+ t_2^+} + \int\limits_{C_+(t,\rho)} + \int\limits_{t_1^+ a_1^+} + \int\limits_{C(a,\rho)} = 0. \tag{4.14}$$

Легко показать, что при $\rho \to 0$ интегралы по $C(a, \rho)$ и $C(b, \rho)$ стремятся к нулю. Для этого надо положить на $C(a, \rho)$, например, $\tau = a + \rho e^{i\theta}$ и воспользоваться теоремой 3.1 о возможности перехода к пределу под знаком интеграла.

Через a_1 и b_1 у нас обозначены, соответственно, точки пересечения окружностей $C(a, \rho)$ и $C(b, \rho)$ с контуром L, а через t_1 и t_2 точки пересечения L с $C(t, \rho)$. Так как L в данном случае является двубережным разрезом между точками ветвления подынтегральной функции и при переходе с „—“-берега на „+“-берег приходится совершать полный оборот вокруг точки b против часовой стрелки, то

$$\int\limits_{a_1^- t_1^-} + \int\limits_{t_1^+ a_1^+} = \int\limits_{a_1^-}^{t_1^-} \left(\ln\frac{\tau-b}{\tau-a}\right)^2 \frac{d\tau}{\tau-t} - \int\limits_{a_1^-}^{t_1^-} \left(\ln\frac{\tau-b}{\tau-a} + 2\pi i\right)^2 \frac{d\tau}{\tau-t} =$$

$$= 4\pi^2 \ln\frac{t_1-t}{a_1-t} - 4\pi i \int\limits_{a_1^- t_1^-} \ln\frac{\tau-b}{\tau-a}\frac{d\tau}{\tau-t},$$

$$\int\limits_{t_2^- b_1^-} + \int\limits_{b_1^+ t_2^+} = 4\pi^2 \ln\frac{b_1-t}{t_2-t} - 4\pi i \int\limits_{t_2^- b_1^-} \ln\frac{\tau-b}{\tau-a}\frac{d\tau}{\tau-t}.$$

Отсюда при $\rho \to 0$ получаем

$$\int\limits_{a_1^- t_1^-} + \int\limits_{t_1^+ a_1^+} + \int\limits_{t_2^- b_1^-} + \int\limits_{b_1^+ t_2^+} = 4\pi^2 \left[\ln\frac{b-t^+}{a-t^+} + \pi i\right] - 4\pi i J(t).$$

Здесь $\lim\limits_{\rho\to 0} [\ln(t_1-t) - \ln(t_2-t)] = i\pi$, так как эта разность логарифмов появилась при интегрировании по левому берегу.

Интегралы по половинкам окружности $C(t, \rho)$ также объединяем и в пределе при $\rho \to 0$ получаем

$$\int\limits_{C_-(t,\rho)} + \int\limits_{C_+(t,\rho)} = \int\limits_{\theta_0+\alpha(\rho)}^{2\pi+\theta_0} \left(\ln\frac{t-b+\rho e^{i\theta}}{t-a+\rho e^{i\theta}}\right)^2 i d\theta +$$

$$+ \int\limits_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha(\rho)} \left(\ln\frac{t-b+\rho e^{i\theta}}{t-a+\rho e^{i\theta}} + 2\pi i\right)^2 i d\theta \to i\pi\left(\ln\frac{t^+-b}{t^+-a}\right)^2 +$$

$$+ i\pi\left(\ln\frac{t^+-b}{t^+-a} + 2\pi i\right)^2 = 2\pi i\left(\ln\frac{t^+-b}{t^+-a}\right)^2 - 4\pi^2\ln\frac{t^+-b}{t^+-a} - 4\pi^3 i.$$

Если теперь перейти к пределу при $\rho \to 0$ в равенстве (4.14), то оно примет такой вид

$$4\pi^2\left(\ln\frac{t^+-b}{t^+-a} + i\pi\right) - 4\pi i J(t) + 2\pi i\left(\ln\frac{t^+-b}{t^+-a}\right)^2 -$$

$$- 4\pi^3 i - 4\pi^2 \ln\frac{t^+-b}{t^+-a} = 0.$$

Отсюда находим

$$2J(t) = \left(\ln\frac{t^+-b}{t^+-a}\right)^2.$$

Доказательство формулы (4.10) завершено.

Формулу (4.10) называют обычно *формулой перестановки Пуанкаре — Бертрана* по имени впервые доказавших ее авторов, правда при более жестких ограничениях: аналитичности функции $\varphi(\tau, \tau_1)$ и кривой L. В условиях нашей теоремы в случае $\varphi(t, t) \neq 0$ мы привели доказательство, изложенное в монографии В. Д. Купрадзе [34, с. 220—223].

В случае кусочно-гладкой линии L, на которой $\varphi(\tau, \tau_1)$ принадлежит классу H_0 по обеим переменным, формула (4.10) имеет место для всех точек $t \in L$, отличных от узлов. Это легко вытекает из справедливости этой формулы для гладкого контура и теоремы 3.2. Иное доказательство формулы в этом случае, опирающееся на граничные свойства интегралов типа Коши, имеется в книге Ф. Д. Гахова [8, с. 65—71]. Этим же путем Н. И. Мусхелишвили [41, с. 122—129] получил эту формулу в более общем случае, когда на кусочно-гладкой линии L функция $\varphi(\tau, \tau_1)$ по обеим переменным принадлежит классу H^* и имеет вид

$$\varphi(\tau, \tau_1) = \varphi_*(\tau, \tau_1) \prod_{k=1}^{n} |\tau - c_k|^{-\alpha_k} |\tau_1 - c_k|^{-\beta_k},$$

где $\varphi_*(\tau, \tau_1)$ есть функция класса H_0, а неотрицательные постоянные α_k, β_k подчинены условию $\alpha_k + \beta_k < 1$.

Заметим, что при любом обобщении условий, достаточных для справедливости формулы (4.10), приходится предварительно доказывать справедливость формулы перестановки вида (4.11), когда лишь один из интегралов рассматривается в смысле главного значения. Подобные обобщения можно найти в работах Б. В. Хведелидзе [69], С. Г. Михлина [40], Э. Г. Гордадзе [20], А. Д. Алексеева [1], W. Zakowski [101].

Теорема 4.7 (правило дифференцирования по параметру). *Если $L = ab$ есть гладкий разомкнутый контур и заданная на нем функция $\varphi(t)$ имеет производную, принадлежащую классу H, то во всех точках t, отличных от концевых, справедливы формулы*

$$\frac{d}{dt} \int_L \varphi(\tau) \ln(\tau - t)\, d\tau = \pm i\pi\varphi(t) - \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \tag{4.15}$$

$$\frac{d}{dt} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \frac{\varphi(b)}{t - b} - \frac{\varphi(a)}{t - a} + \int_L \frac{\varphi'(\tau)}{\tau - t}\, d\tau. \tag{4.16}$$

В первой из формул соответствие между знаками перед первым слагаемым в правой части и выбором ветвей функции $\ln(\tau - t)$ точно такое же, как в теореме 4.5.

Докажем сначала формулу (4.15) в предположении, что

$$\ln(\tau - t) = \lim_{z \to \tau^\pm} \ln(z - t),$$

где $\ln(z - t)$ однозначна в плоскости z с разрезом (t, b, ∞), $tb \subset L$. На основании известных нам равенств

$$\ln \frac{t-\tau^{\pm}}{a-\tau^{\pm}} = \int\limits_{at} \frac{d\tau_1}{\tau_1-\tau} \pm \begin{cases} i\pi, & \tau \in at, \\ 0, & \tau \overline{\in} at, \end{cases} \tag{4.17}$$

несобственный интеграл с логарифмическим ядром записываем следующим образом

$$\int\limits_L \varphi(\tau) \ln(\tau^{\pm}-t)\, d\tau = \int\limits_L \varphi(\tau) \ln(\tau^{\pm}-a)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{at} \varphi(\tau) \left[\int\limits_{at} \frac{d\tau_1}{\tau_1-\tau} \pm i\pi \right] d\tau + \int\limits_{tb} \varphi(\tau)\, d\tau \int\limits_{at} \frac{d\tau_1}{\tau_1-\tau}.$$

В повторных интегралах возможна обычная перестановка порядка интегрирования. После этой операции мы эти интегралы опять объединяем и получаем для нашего интеграла представление

$$\int\limits_L \varphi(\tau) \ln(\tau^{\pm}-t)\, d\tau = \int\limits_L \varphi(\tau) \ln(\tau^{\pm}-a)\, d\tau \pm$$

$$\pm i\pi \int\limits_a^t \varphi(\tau)\, d\tau + \int\limits_a^t d\tau_1 \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau_1-\tau}\, d\tau,$$

удобное для дифференцирования.

Чтобы получить формулу (4.16), надо продифференцировать обе части равенства (4.9) и учесть при этом, что по, формуле (4.15)

$$\frac{d}{dt} \int\limits_L \varphi'(\tau) \ln(\tau-t)\, d\tau = \pm i\pi\varphi'(\tau) - \int\limits_L \frac{\varphi'(\tau)}{\tau-t}\, d\tau.$$

Когда мы считаем, что

$$\ln(\tau-t) = \lim_{z\to t^{\pm}} \ln(\tau-z),$$

где $\ln(\tau-z)$ однозначна в плоскости z с разрезом (τ, b, ∞) $\tau b \subset L$, формулу (4.15) можно получить при помощи формул (4.9) и (4.15). Для этого интеграл, содержащий $\ln(\tau-t)$, записываем на основании формулы (4.9) следующим образом

$$\int\limits_L \varphi(\tau) \ln(\tau-t^{\pm})\, d\tau = \psi(b) \ln(b-t^{\pm}) \mp i\pi\psi(t) - \int\limits_L \frac{\psi(\tau)}{\tau-t}\, d\tau,$$

$$\psi(t) = \int\limits_a^t \varphi(\tau_1)\, d\tau_1.$$

Но в таком виде правую часть можно дифференцировать по t:

$$\frac{d}{dt}\int_L \varphi(\tau)\ln(\tau - t^{\pm})\,d\tau = \frac{\psi(b)}{t-b} \mp i\pi\psi'(t) - \frac{d}{dt}\int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau.$$

Учитывая, что $\psi'(t) = \varphi(t)$ и на основании формулы (4.16)

$$\frac{d}{dt}\int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \frac{\psi(b)}{t-b} + \int_L \frac{\psi'(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,$$

получаем формулу 4.15 в этом случае

$$\frac{d}{dt}\int_L \varphi(\tau)\ln(\tau - t^{\pm})\,d\tau = \mp i\pi\varphi(t) - \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau. \qquad (4.15^*)$$

При доказательстве формулы (4.15*) на основании представления вида (4.17) надо было бы предварительно обосновать формулу перестановки порядка интегрирования, когда один интеграл обычный, а второй в смысле главного значения и с переменным пределом интегрирования.

Формулы (4.9) и (4.16) могут быть использованы при доказательстве формулы (4.15) и при других способах фиксирования функции $\ln(\tau - t)$, когда разрез (t, ∞) или (τ, ∞) не имеет общих точек с контуром L.

Аналогичным путем могут быть получены формулы

$$\frac{d}{dt}\int_L \varphi(t, \tau)\ln(\tau - t)\,d\tau = \pm i\pi\varphi(t, t) + \int_L \varphi'_t(t, \tau)\,d\tau - \int_L \frac{\varphi(t, \tau)}{\tau - t}\,d\tau, \qquad (4.18)$$

$$\frac{d}{dt}\int_L \frac{\varphi(t, \tau)}{\tau - t}\,d\tau = \frac{\varphi(t, b)}{t-b} - \frac{\varphi(t, a)}{t-a} +$$

$$+ \int_L \frac{\varphi'_t(t, \tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L \frac{\varphi'_\tau(t, \tau)}{\tau - t}\,d\tau. \qquad (4.19)$$

В формуле (4.18), очевидно, от непрерывной по Гельдеру функции $\varphi(t, \tau)$ достаточно потребовать, чтобы ее производная $\varphi'_t(t, \tau)$ была интегрируемой по τ. В формуле (4.19) обе производные $\varphi'_t(t, \tau)$ и $\varphi'_\tau(t, \tau)$ должны быть функциями класса H.

Формулы (4.16) — (4.19) другими методами, но при более жестких ограничениях на контур, были получены Ю. М. Крикуновым [31, 32] и Р. С. Исахановым [25; 6, с. 333—336]. Первый рассматривал контуры с непрерывной кривизной, второй — контуры Ляпунова (у таких контуров угол наклона касательной к оси OX удовлетворяет условию H). Однако в работах Ю. М. Крикунова рассматривались более широкие классы функций φ, чем указанные нами. Так при получении формулы (4.19) он предполагал, что $\varphi(t, \tau)$ принадлежит классу H по обеим переменным, но у производных $\varphi'_t(t, \tau)$ и $\varphi'_\tau(t, \tau)$ допускал конечное число интегрируемых особенностей. Нетрудно убедиться, что изложенный нами метод остается справедливым и в этом более общем случае. Отличие в доказательстве будет состоять лишь в том, что перед интегрированием по частям точки, где допускаются особенности, надо выделить малыми дужками, а после операции дифференцирования перейти к пределу, стягивая эти дужки в точки. Именно таким путем формулы (4.16) и (4.17) получены А. В. Мерлиным на замкнутой римановой поверхности, где роль логарифмического ядра играет элементарный абелев интеграл третьего рода, а роль ядра Коши — абелев интеграл второго рода [39, с. 25—27].

В случае замкнутого контура L формулы дифференцирования получаются таким же способом, при этом вид формул (4.15) и (4.18) тот же, только перед первым слагаемым в правой части стоит один знак плюс, а в правых частях формул (4.16) и (4.19) отсутствуют первые два слагаемых.

5°. Изложенные свойства главных значений интегралов типа Коши позволяют получить ряд интересных для дальнейшего результатов.

1) Рассмотрим интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = c(t) \tag{4.20}$$

на гладком замкнутом контуре L, где заданная функция $c(t)$ и неизвестная функция $\varphi(t)$ принадлежат классу H. Полагая в уравнении (4.20) $t = \tau_1 \in L$, поделим обе его части на $i\pi(\tau_1 - t)$ и проинтегрируем по τ_1 вдоль L. Применяя формулу перестановки Пуанкаре — Бертрана, получим

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{c(\tau_1)}{\tau_1 - t}\,d\tau_1 = \frac{1}{(\pi i)^2}\int_L \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \tau_1}\,d\tau =$$

$$= \varphi(t) + \frac{1}{(\pi i)^2}\int_L \varphi(\tau)\,d\tau \int_L \frac{d\tau_1}{(\tau_1 - t)(\tau - \tau_1)}.$$

Так как внутренний интеграл равен нулю

$$\int_L \frac{d\tau_1}{(\tau_1 - t)(\tau - \tau_1)} = \frac{1}{\tau - t}\left[\int_L \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t} - \int_L \frac{d\tau_1}{\tau_1 - \tau}\right] = \frac{\pi i - \pi i}{\tau - t} = 0,$$

то

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{c(\tau)}{\tau - t}\,d\tau. \tag{4.21}$$

Эту формулу называют *формулой обращения интеграла типа Коши*.

В случае разомкнутого контура решение уравнения (4.20) отыскивается другим методом, с которым мы познакомимся во II главе.

2) Очень часто приходится иметь дело с вещественным интегралом

$$F(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma, \tag{4.22}$$

который при $\varphi(s)\in H$ существует в смысле главного значения, что сразу видно, если его ядро представить в виде

$$\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}=\frac{1}{\sigma-s}\left[(\sigma-s)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\right]$$

и учесть, что функция $(\sigma-s)\operatorname{ctg}(\sigma-s)/2$ в промежутке $[0, 2\pi]$ непрерывна и дифференцируема.

Если этот интеграл записать следующим образом

$$F(s)=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\frac{e^{i\sigma}+e^{is}}{e^{i\sigma}-e^{is}}\,d\sigma$$

и произвести замену переменных, положив $\tau=e^{i\sigma}$, то отрезок $[0, 2\pi]$ перейдет при этом в единичную окружность $C:|\tau|=1$ и преобразованный интеграл

$$F(t)=\frac{1}{2\pi}\int_C\varphi(\tau)\frac{\tau+t}{\tau-t}\frac{d\tau}{\tau}=\frac{1}{\pi i}\int_C\frac{i\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau-\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{\varphi(\tau)}{\tau}\,d\tau$$

лишь постоянным слагаемым

$$i\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{\varphi(\tau)}{\tau}\,d\tau=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\,d\sigma$$

будет отличаться от удвоенного главного значения интеграла типа Коши с плотностью $i\varphi(\tau)$. Это позволяет все известные нам свойства главных значений интеграла типа Коши перенести на интегралы (4.22). В частности, при $\varphi(\sigma)\equiv 1$ получим

$$F(t)=\frac{1}{\pi}\int_C\frac{d\tau}{\tau-t}-\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{d\tau}{\tau}=\frac{1}{\pi}\cdot\pi i-\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi i=0,$$

так что

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma=0. \tag{4.23}$$

Если равенство (4.22) рассматривать как интегральное уравнение с неизвестной функцией $\varphi(\sigma)\in H$, то из соотношения (4.23) следует, что оно разрешимо лишь при выполнении условия

$$\int_0^{2\pi} F(s)\,ds = 0. \tag{4.24}$$

Считая это условие выполненным, прибавим к обеим частям уравнения (4.22) постоянную $i\alpha$. Тогда это уравнение примет вид

$$\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{i\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = F(t) + i\alpha,$$

и по формуле обращения (4.21) с учетом условия (4.24) получим

$$i\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_C \frac{F(\tau) + i\alpha}{\tau - t}\,d\tau = \frac{1}{\pi i}\int_C \frac{F(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(\tau)}{\tau}\,d\tau + i\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C F(\tau)\frac{\tau + t}{\tau - t}\frac{d\tau}{\tau} + i\alpha.$$

Значит, уравнение (4.22) имеет целое однопараметрическое семейство решений

$$\varphi(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma + \alpha. \tag{4.25}$$

Решение, удовлетворяющее дополнительному ограничению

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\,d\sigma = 0, \tag{4.26}$$

единственное

$$\varphi(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma. \tag{4.27}$$

Формулы (4.22) и (4.27), имеющие место при выполнении условий (4.24) и (4.26), называются *формулами обращения Гильберта*.

§ 5. ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

1°. Мы уже знаем, что интеграл типа Коши вне линии интегрирования L представляет собой аналитическую функцию $\Phi(z)$. На линии L, если понимать его в смысле главного значения, он представляет непрерывную по Гельдеру функцию $\Phi(t)$ в каждой точке, в окрестности которой его плотность $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условию H. Теперь мы займемся изучением поведения интеграла типа Коши вблизи линии интегрирования, предполагая эту линию кусочно-гладкой.

Из свойств кусочно-гладкой линии L следует, что для любой точки $t \in L$, отличной от узлов, существует некоторая, например, стандартная окрестность Δ, разбивающаяся линией L на две части: левую полуокрестность Δ^+ (по отношению к положительному направлению на L) и правую Δ^-. Пределы функции $\Phi(z)$, аналитической в окрестности линии L, при $z \to t$ по любому пути, лежащему целиком в Δ^+ или в Δ^-, называются *граничными или предельными значениями* $\Phi(z)$, соответственно, *слева и справа* и обозначаются через $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$.

Если для некоторой функции $\Phi(z)$ граничные значения $\Phi^+(t)$ или $\Phi^-(t)$ существуют в каждой точке некоторой дуги $L_* \subset L$, то они непрерывны на L_*. В самом деле, из определения граничного значения $\Phi^+(t)$ следует, что для каждого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, зависящее при фиксированном t только от ε, что при всяком $z \in \Delta^+$ и удовлетворяющем условию $|z - t| < \delta$ будем иметь

$$|\Phi(z) - \Phi^+(t)| < \varepsilon.$$

Заставим z, не выходя из δ-окрестности точки t, стремиться к другой точке $t_1 \in L_*$, для которой $|t_1 - t| < \delta$. Так как при этом $\Phi(z)$ будет стремиться к $\Phi^+(t_1)$, то предельный переход в неравенстве дает $|\Phi^+(t_1) - \Phi^+(t)| \leqslant \varepsilon$. Непрерывность $\Phi^-(t)$ доказывается аналогично.

На основании этого свойства любую аналитическую в окрестности линии L функцию $\Phi(z)$, для которой $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ существуют, называют *непрерывно продолжимой на линию L.*

При изучении граничных свойств интеграла типа Коши представим его в таком виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z}\, d\tau + \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - z}. \tag{5.1}$$

Теорема 5.1. *Если плотность $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\lambda)$ на кусочно-гладком контуре $L = ab$, то функция*

$$\psi(z, t) = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z}\, d\tau \tag{5.2}$$

при переходе через L в точке t ведет себя как непрерывная функция: при $z \to t$ по любому пути из Δ^+ или Δ^- она имеет один и тот же предел

$$\psi(t, t) = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau.$$

Для доказательства возьмем произвольную точку z из Δ^+ или Δ^-, обозначим через t_0 ближайшую к точке z точку контура L (если их несколько, то любую из них) и оценим разность $|\psi(z, t_0) - \psi(t_0, t_0)|$ при достаточно малых $|z - t_0|$. С этой целью обозначим как обычно через L_ρ ту часть контура L, которая лежит вне окружности $C(t_0, \rho)$, а через l_ρ — часть, лежащую внутри окружности. При любом ρ

$$\psi(z, t_0) - \psi(t_0, t_0) = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \int\limits_{l} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_0)}{\tau - z} d\tau - \int\limits_{l_\rho} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_0)}{\tau - t_0} d\tau,$$

$$I_2 = \int\limits_{L_\rho} [\varphi(\tau) - \varphi(t_0)] \left(\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau - t_0} \right) d\tau.$$

Если же взять достаточно малое $\rho = |z - t_0|$, не превосходящее, например, стандартный радиус, и учесть, что для всех $\tau \in l_\rho$ имеет место неравенство $|\tau - t_0| \leqslant 2|\tau - z|$, то будем иметь

$$|I_1| \leqslant A \int\limits_{l_\rho} \frac{|\tau - t_0|}{|\tau - z|} \frac{|d\tau|}{|\tau - t_0|^{1-\lambda}} + A \int\limits_{l_\rho} \frac{|d\tau|}{|\tau - t_0|^{1-\lambda}} \leqslant$$

$$\leqslant 3A \int\limits_{l_\rho} \frac{|d\tau|}{|\tau - t_0|^{1-\lambda}} \leqslant 3A\lambda^{-1} 2^{1-\lambda} k_0^{\lambda-1} (s_2 - s_1)^\lambda \leqslant$$

$$\leqslant 3A\lambda^{-1} 2^{1-\lambda} k_0^{-1} |t_2 - t_1|^\lambda,$$

где t_1 и t_2 — концы дуги l_ρ. Так как $|t_2 - t_1| \leqslant 2\rho$, то, полагая $A_1 = 6A\lambda^{-1}k_0^{-1}$, получаем

$$|I_1| \leqslant A_1 \rho^\lambda. \tag{5.3}$$

Аналогично оцениваем I_2:

$$|I_2| \leqslant A|z - t_0| \int\limits_{L_\rho} \left| \frac{\tau - t_0}{\tau - z} \right| \frac{|d\tau|}{|\tau - t_0|^{2-\lambda}} \leqslant 2A\rho \int\limits_{L_\rho} \frac{|d\tau|}{|\tau - t_0|^{2-\lambda}}.$$

В дальнейшем, как и при доказательстве теоремы 4.3, различаем два случая.

При $\lambda < 1$, учитывая, что $|\tau - t_0| \geqslant k_0 |\sigma - s_0|$ при всех σ из промежутков $s_a \leqslant \sigma \leqslant s_1$, $s_2 \leqslant \sigma \leqslant s_b$, получаем

$$|I_2| \leqslant 2A\rho k_0^{\lambda-2} \left\{ \int\limits_{s_2}^{s_1} \frac{d\sigma}{(s_0 - \sigma)^{2-\lambda}} + \int\limits_{s_2}^{s_b} \frac{d\sigma}{(\sigma - s_0)^{2-\lambda}} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2A\rho k_0^{\lambda-2}}{1-\lambda} \left\{ \frac{1}{(s_0 - s_1)^{1-\lambda}} + \frac{1}{(s_2 - s_0)^{1-\lambda}} \right\}.$$

Но при всех $\tau \in L_\rho$

$$\rho \leqslant |\tau - t_0| \leqslant |\sigma - s_0|, \tag{5.4}$$

в том числе и для точек t_1 и t_2. Поэтому

$$|I_2| \leqslant A_2\rho^\lambda, \quad A_2 = 4Ak_0^{\lambda-2}(1-\lambda)^{-1}. \tag{5.5}$$

В случае $\lambda = 1$ применение неравенства (5.4) при $\sigma = s_1$, s_2, s_a, s_b приводит к такому результату

$$|I_2| \leqslant A_2'\rho\,|\ln\rho|, \quad A_2' = 4Ak_0^{-1}. \tag{5.6}$$

Из оценок (5.3), (5.5) и (5.6) следует, что для всех z, лежащих достаточно близко к контуру L, имеют место неравенства

$$|\psi(z, t_0) - \psi(t_0, t_0)| \leqslant (A_1 + A_2)|z - t_0|^\lambda, \ \lambda < 1,$$

$$|\psi(z, t_0) - \psi(t_0, t_0)| \leqslant |z - t_0|\{A_1 + A_2'|\ln|z - t_0||\}, \ \lambda = 1, \tag{5.7}$$

если t_0 — ближайшая к z точка контура L.

Пусть теперь точка z стремится к точке $t \in L$, отличной от концов. Тогда, очевидно, и $t_0 \to t$, и из непрерывности $\psi(t_0, t_0)$ на L (теорема 4.3) следует, что при этом $\psi(t_0, t_0) \to \to \psi(t, t)$. Поэтому из неравенств (5.7) следует, что при стремлении z к t по любому пути

$$\lim \psi(z, t) = \psi(t, t).$$

Теорема доказана.

Следует отметить, что все полученные при доказательстве теоремы оценки остаются справедливыми и в том случае, когда t_0 есть концевая точка L, а вычисления при их получении в этом случае даже несколько упрощаются из-за наличия одной точки пересечения контура L с окружностью $C(t_0, \rho)$. Значит, при стремлении z по любому пути к концевой точке t_0 функция $\psi(z, t_0)$ имеет предел $\psi(t_0, t_0)$.

Теорема 5.2. *Если плотность $\varphi(t)$ на замкнутом или разомкнутом кусочно-гладком контуре L удовлетворяет условию H, то интеграл типа Коши имеет граничные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ во всех точках контура, исключая, быть может, концы, и эти граничные значения выражаются через плотность $\varphi(t)$ и главное значение интеграла $\Phi(t)$ по формулам Сохоцкого*

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \\ \Phi^-(t) &= -\frac{\alpha}{2\pi}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Для доказательства обратимся к равенству (5.1).

Возьмем сначала замкнутый контур L. В этом случае на основании интегральной формулы Коши

$$\int\limits_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 2\pi i, & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^-, \end{cases} \tag{5.9}$$

где через D^+ обозначена внутренность контура L, а через D^- — внешность. Значит, интеграл типа Коши определяет две различные аналитические функции

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau + \varphi(t), \quad z \in D^+,$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in D^-,$$

каждая из которых на основании теоремы 5.1 продолжима на контур L из соответствующей области. Переходом к пределу при $z \to t$ из D^+ и D^-, соответственно, получаем

$$\Phi^+(t) = \psi(t, t)/2\pi i + \varphi(t), \quad \Phi^-(t) = \psi(t, t)/2\pi i.$$

Разбивая интеграл $\psi(t, t)$ на два и принимая во внимание, что

$$\int\limits_L \frac{d\tau}{\tau - t} = i\alpha,$$

получаем формулы (5.8).

Вычитая и складывая почленно равенства (5.8), получим пару равносильных им равенств

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t),$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \tag{5.10}$$

также носящих название формул Сохоцкого.

Когда контур L разомкнут, равенство (5.1) дает нам одну аналитическую функцию в плоскости с разрезом вдоль L

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau + \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \ln \frac{z - b}{z - a}. \tag{5.11}$$

Входящая во второе слагаемое логарифмическая функция на берегах разреза, соединяющего точки ветвления a и b, принимает различные значения

$$\left[\ln \frac{t - b}{t - a}\right]^+ = \ln \frac{t - b}{t - a}, \quad \left[\ln \frac{t - b}{t - a}\right]^- = \ln \frac{t - b}{t - a} - 2\pi i.$$

Поэтому при переходе к пределу в (5.11) при $z \to t^+$ и $z \to t^-$ получим соответственно

$$\Phi^+(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\left[\ln\frac{t-b}{t-a}\right]^+,$$
$$\Phi^-(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\left[\ln\frac{t-b}{t-a}\right]^-. \tag{5.12}$$

Почленное вычитание этих двух равенств сразу приводит к первой из формул (5.10). Если же принять во внимание равенства (4.6) и (4.6*), определяющие главное значение интеграла типа Коши, формулам (5.12) можно придать форму (5.8) и почленным сложением получится вторая формула (5.10).

Формулы (5.12) были получены впервые Ю. В. Сохоцким [62] в 1873 году для прямолинейного отрезка L, когда стремление z к t происходит по нормали к нему. При указанных нами в теореме 5.2 предположениях они были получены Племелем [97], а при более общих предположениях относительно L и $\varphi(t)$ — И. И. Приваловым [47—49].

Формулы Сохоцкого говорят о том, что линия интегрирования для интеграла типа Коши является особой линией, а именно, линией разрывов первого рода, ибо при переходе через нее в любой точке, где плотность удовлетворяет условию H, интеграл претерпевает скачок, равный значению плотности в этой точке: $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t)$.

2°. Мы уже отмечали, что из существования граничных значений $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ тотчас следует их непрерывность в обыкновенных точках контура L. О характере непрерывности граничных значений интеграла типа Коши мы можем сформулировать более точное предложение.

Теорема 5.3. *Если L — гладкий контур и $\varphi(t)$ удовлетворяет на L условию $H(\lambda)$, то граничные значения интеграла типа Коши $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ удовлетворяют на L всюду, кроме, может быть, сколь угодно малых окрестностей концов, условию $H(\lambda)$ при $\lambda<1$ и условию $H(1-\varepsilon)$ при $\lambda=1$, где ε — сколь угодно малое положительное число.*

Справедливость теоремы сразу вытекает из формул Сохоцкого (5.8) и (5.14) и теоремы 4.3.

Угловые точки являются для $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$, очевидно, точками разрыва первого рода.

3°. Поставим теперь вопрос, обратный утверждению теоремы 5.3: всякая ли функция $\varphi(t)$ точек заданного гладкого контура L, удовлетворяющая условию H, является граничным значением аналитической функции?

В случае замкнутого гладкого контура отрицательный ответ можно получить при помощи совершенно элементарных рассуждений. У заданной функции $\varphi[t(s)]=\varphi(s)$ выделяем вещественную и мнимую части $\varphi(s)=\varphi_1(s)+i\varphi_2(s)$ и, решая задачу Дирихле для области D^+ с граничным условием $u=\varphi_1(s)$ на L, получаем вполне определенную в D^+ гармоническую функцию $u(x, y)$. При помощи условий Коши — Римана по $u(x, y)$ строим с точностью до произвольного постоянного слагаемого h гармонически сопряженную с ней функцию $v(x, y)+h$ и в области D^+ получаем целое однопараметрическое семейство аналитических функций $F(z)=$ $=u(x, y)+iv(x, y)+ih$, у которых $\operatorname{Re} F^+(t)=\varphi_1(s)$, что же касается $\operatorname{Im} F^+(t)$, то в общем случае она, конечно, не совпадает с $\varphi_2(s)$ и, следовательно, $\varphi(s)$ не есть граничное значение аналитической в D^+ функции. Аналогичное рассуждение справедливо и для внешней области D^-.

Можно, однако, легко указать дополнительное условие, которому должна удовлетворять функция $\varphi(t)\in H$, являющаяся граничным значением аналитической функции.

Пусть $\varphi(t)$ есть граничное значение функции $\varphi(z)$, аналитической в D^+ или D^-. Тогда по формуле Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=\begin{cases}\varphi(z), & z\in D^+,\\ 0, & z\in D^-,\end{cases}$$

или

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=\begin{cases}\varphi(\infty)-\varphi(z), & z\in D^-,\\ \varphi(\infty), & z\in D^+.\end{cases}$$

Из этих формул на основании формул Сохоцкого (5.8) получим в первом случае

$$-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=0, \tag{5.15}$$

а во втором

$$\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\varphi(\infty). \tag{5.16}$$

Условия (5.15) и (5.16) являются не только необходимыми, но и достаточными. В самом деле, если для $\varphi(t)\in H$ выполнено, например, условие (5.15), то для интеграла типа Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau$$

имеем $\Phi^-(t)=0$. Но тогда $\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\Phi^+(t)$ есть граничное значение функции, аналитической в D^+.

Таким образом, нами доказана

Теорема 5.4. *Условие* (5.15) *или* (5.16) *является необходимым и достаточным для того, чтобы заданная на гладком замкнутом контуре L функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условию H, была граничным значением функции, аналитической в области D^+ или D^- соответственно.*

Впервые условия (5.15) и (5.16) при указанных здесь условиях были получены Племелем [97], а позднее при более общих условиях — В. В. Голубевым [18] и И. И. Приваловым [48], [49].

Теорема 5.4 без изменений остается справедливой и в более общем случае, когда область D^+ многосвязна и ограничена конечным числом гладких замкнутых контуров, один из которых охватывает все остальные.

Формулы (5.15) и (5.16) удобно использовать при вычислении главных значений интеграла типа Коши, когда плотность его является граничным значением аналитической функции. При любой $\varphi(t) \in H$ для этой цели удобна вторая из формул (5.10).

4°. Рассмотренные нами свойства интеграла типа Коши $\Phi(z)$ достаточно полно характеризуют его поведение во всех точках комплексной плоскости, за исключением концевых в случае разомкнутого контура. Покажем, что поведение $\Phi(z)$ в концевых точках (c-точках) зависит от свойств плотности $\varphi(t)$ в этих точках.

Будем считать как и раньше, что $\varphi(t)$ на $L = ab$ принадлежит классу H. Значит, на концах $\varphi(t)$ имеет вполне определенные конечные значения $\varphi(c)$.

Допустим сначала, что $\varphi(c) = 0$. В этом случае, полагая в равенстве (5.11) $t = c$ и применяя теорему 5.1, сразу получаем

$$\lim_{z \to c} 2\pi i \Phi(z) = \lim_{z \to c} \psi(z, c) = \psi(c, c).$$

Таким образом, если в концевой точке $\varphi(c) = 0$, то интеграл $\Phi(z)$ при $z \to c$ имеет вполне определенный конечный предел.

Концевая точка, в которой $\varphi(c) \neq 0$, является для $\Phi(z)$ логарифмической особой точкой. В этом легко убедиться при помощи того же представления (5.11). Положив в нем $t = a$, в окрестности $c = a$ получим

$$\Phi(z) = -\frac{\varphi(a)}{2\pi i} \ln(z-a) + \Phi_a(z), \tag{5.17}$$

$$\Phi_a(z) = \frac{\varphi(a)}{2\pi i} \ln(z-b) + \frac{1}{2\pi i} \psi(z, a),$$

и аналогично для окрестности $c = b$

$$\begin{gathered} \Phi(z) = \frac{\varphi(b)}{2\pi i} \ln(z-b) + \Phi_b(z), \\ \Phi_b(z) = -\frac{\varphi(b)}{2\pi i} \ln(z-a) + \frac{1}{2\pi i} \psi(z, b). \end{gathered} \tag{5.18}$$

Здесь $\psi(z, c)$ имеет вид (5.2), а под $\ln(z-a)$ и $\ln(z-b)$ понимаются вполне определенные фиксированные ветви в плоскости с разрезами (ab, ∞) и (b, ∞) соответственно, разность между которыми в плоскости с разрезом по L представляет однозначную, исчезающую на бесконечности ветвь логарифмической функции $\operatorname{Ln}[(z-b)/(z-a)]$. При этих условиях функции $\Phi_a(z)$ и $\Phi_b(z)$ имеют вполне определенные пределы при стремлении z к a или b по любым путям, расположенным в плоскости с разрезом (ab, ∞) или (b, ∞) соответственно.

Вместо локальных формул (5.17) и (5.18), описывающих поведение $\Phi(z)$ в окрестностях концов, можно дать удобное представление интеграла $\Phi(z)$ через интеграл типа Коши с гельдеровой плотностью

$$\omega(t)=\varphi(t)-\varphi(a)-\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}(t-a), \qquad \omega(a)=0,\ \omega(b)=0, \tag{5.19}$$

выделив логарифмические особенности на обеих концах одновременно. Для этого запишем $\Phi(z)$ в таком виде

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-z}d\tau+\frac{\varphi(a)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{d\tau}{\tau-z}+\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\tau-a}{\tau-z}d\tau.$$

Оба последних интеграла легко вычисляются

$$\int\limits_L\frac{d\tau}{\tau-z}=\ln\frac{z-b}{z-a},$$

$$\int\limits_L\frac{\tau-a}{\tau-z}d\tau=b-a+(z-a)\ln\frac{z-b}{z-a},$$

и мы получим окончательно

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-z}d\tau+\frac{\varphi(a)}{2\pi i}\ln\frac{z-b}{z-a}+ \\ +\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2\pi i(b-a)}\left[b-a+(z-a)\ln\frac{z-b}{z-a}\right]. \tag{5.20}$$

Вместо этого представления, справедливого при любом $z\overline{\in}L$, вблизи L удобно пользоваться формулой

$$\Phi(z)=-\frac{\varphi(a)}{2\pi i}\ln(z-a)+\frac{\varphi(b)}{2\pi i}\ln(z-b)+\Omega(z), \tag{5.21}$$

где функция

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-z}d\tau+ \\ +\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2\pi i(b-a)}[b-a+(z-b)\ln(z-b)-(z-a)\ln(z-a)] \tag{5.22}$$

в точках a и b принимает вполне определенные конечные значения $\Omega(a)$ и $\Omega(b)$.

Формула (5.21) является, очевидно, аналогом формул (5.17) и (5.18). Это одно из представлений непрерывной вне L функции $\Phi(z)$ через функции, каждая из которых при переходе через бесконечный разрез (b, ∞) претерпевает разрыв первого рода. Ясно, что при этом величина скачка каждого слагаемого лишь знаком отличается от общего скачка всех остальных.

Формулы, определяющие поведение $\Phi(z)$, когда плотность $\varphi(t)$ в концевых точках имеет особенности некоторых типов, будут получены в следующем параграфе.

5°. Если L есть гладкая или кусочно-гладкая простая линия, состоящая из нескольких разомкнутых контуров $L_1, \ldots, L_m$, то интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k} \frac{\varphi_k(\tau)}{\tau - z}\,d\tau \tag{5.23}$$

в плоскости с разрезом по L по-прежнему определяет *одну* аналитическую функцию, для которой каждая точка t линии L, отличная от концевой, является точкой разрыва первого рода с величиной скачка, равной $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi_k(t)$, $t \in L_k$. Это сразу следует из представления (5.23); при переходе через точку $t \in L_k$ скачкообразно меняется лишь одно слагаемое, представляющее из себя интеграл типа Коши с плотностью $\varphi_k(t)$ по контуру L_k; сумма остальных слагаемых на L_k есть аналитическая функция.

Если же простая кусочно-гладкая линия L состоит из m замкнутых контуров, то комплексная плоскость разобьется ими на $m+1$ связных областей D_k и в каждой из них интеграл $\Phi(z)$ будет определять свою аналитическую функцию $F_k(z)$. Значения этих функций выражаются через значения интегралов типа Коши по каждому контуру L_k. На рис. 6

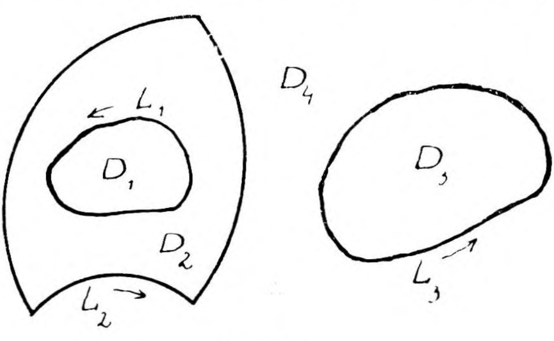

Рис. 6.

три контура L_1, L_2, L_3 разбили плоскость на четыре области D_1, D_2, D_3 и D_4. Если через $\Phi_k^+(z)$ и $\Phi_k^-(z)$ выразить значения интеграла типа Коши по $L_k (k=1, 2, 3)$ внутри и вне L_k соответственно, то будем иметь

$$F_1(z)=\Phi_1^+(z)+\Phi_2^+(z)+\Phi_3^-(z),$$

$$F_2(z)=\Phi_1^-(z)+\Phi_2^+(z)+\Phi_3^-(z),$$

$$F_3(z)=\Phi_1^-(z)+\Phi_2^-(z)+\Phi_3^+(z),$$

$$F_4(z)=\Phi_1^-(z)+\Phi_2^-(z)+\Phi_3^-(z).$$

На общем участке границы двух соседних областей предельные значения этих функций связаны формулами Сохоцкого (5.10), в частности, $F_1^+(t)-F_2^-(t)=\Phi_1^+(t)-\Phi_1^-(t)=\varphi_1(t)$, $F_2^+(t)-F_4^-(t)=\Phi_2^+(t)-\Phi_2^-(t)=\varphi_2(t)$, $F_3^+(t)-F_4^-(t)=\Phi_3^+(t)-$ $-\Phi_3^-(t)=\varphi_3(t)$.

Единое интегральное представление функций $F_k(z)$ указывает на возможность рассматривать их совокупность как единую *кусочно-аналитическую* или, что все равно, *кусочно-голоморфную функцию*

$$\Phi(z)=F_k(z),\ z\in D_k,\ k=1, 2, \ldots, m+1, \tag{5.24}$$

для которой каждая точка t линии L есть точка разрыва первого рода, в которой $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t)$. Справедлива при этом и вторая формула Сохоцкого (5.10). Линию L называют линией скачков кусочно-голоморфной функции (5.24).

Введенная терминология удобна тем, что она распространяется и на интегралы типа Коши по простым разомкнутым линиям, ибо рассеченная по ней плоскость представляет одну область, один кусок, и формулы Сохоцкого (5.8) и (5.10), полученные нами для одного контура, сохраняют свою форму и для любой простой кусочно-гладкой линии L.

6°. Любая кусочно-гладкая линия L, состоящая как из замкнутых, так и разомкнутых пересекающихся контуров, также разобьет плоскость на несколько связных областей D_k, в каждой из которых значением интеграла (5.23) будет соответствующая аналитическая функция $F_k(z)$. Значит и в этом случае интеграл типа Коши $\Phi(z)$ представляет из себя кусочно-голоморфную функцию вида (5.24) с линией скачков L, в каждой обыкновенной точке t которой величина скачка у $\Phi(z)$ равна значению плотности $\varphi(t)$.

Поведение $\Phi(z)$ в узлах может быть различным в зависимости от характера узла. Если узел c является одним из концов линии L, где $\varphi(c)\neq 0$, то он будет для $\Phi(z)$ логарифмической особой точкой и поведение $\Phi(z)$ в его окрестности будет определяться формулой вида (5.17) или (5.18). Когда в c соединены концы нескольких контуров L_k, логарифмические особенности в c у интегралов $\Phi_k(z)$ по этим L_k объединятся и для интеграла (5.23) в окрестности c получится такое представление

$$\Phi(z) = \sum \mp \frac{\varphi_k(c)}{2\pi i} \ln(z - c) + \Phi_c(z).$$

Здесь знак минус берется в том случае, когда $c = a_k$, знак плюс — когда $c = b_k$; функция $\Phi_c(z)$ при $z \to c$ по любому пути имеет конечный предел.

Когда узел c есть точка пересечения нескольких контуров L_k, окрестность c этими контурами разбивается на несколько секторов Δ_j (рис. 7) и, следуя Д. А. Квеселава [30], мы будем говорить лишь о предельных значениях $\Phi(z)$ по путям, расположенным в определенном секторе, понимая это предельное значение как сумму граничных значений всех интегралов $\Phi_k(z)$, входящих в сумму (5.23). Этот подсчет осуществляется просто. Обратимся к рис. 7. Через точку c здесь проходит два контура L_1 и L_2, при этом для L_1 точка c является угловой с углом $\alpha_1 \neq \pi$, для L_2 — обыкновенной, так что $\alpha_2 = \pi$. Рассматривая интеграл (5.23), видим, что только у $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ в точке c будет точка разрыва, сумма $\Phi_*(z)$ всех остальных интегралов $\Phi_3(z), \ldots, \Phi_m(z)$ является аналитической функцией в точке c. Записав для удобства интеграл 5.23 в виде

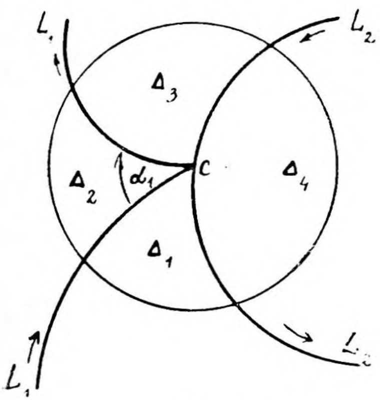

Рис. 7.

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_*(z),$$

легко находим

$$\lim_{z \to c,\ z \in \Delta_1} \Phi(z) = \Phi_1^-(c) + \Phi_2^-(c) + \Phi_*(c),$$

$$\lim_{z \to c,\ z \in \Delta_2} \Phi(z) = \Phi_1^+(c) + \Phi_2^-(c) + \Phi_*(c),$$

и т. д. Величины $\Phi_1^\pm(c)$ и $\Phi_2^\pm(c)$ вычисляются здесь по формулам (5.8). Эти пределы в общем случае между собой неодинаковы и, следовательно, интеграл (5.23) в окрестности c ограничен, но определенного значения в точке c не имеет.

§ 6. ПОВЕДЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК ПЛОТНОСТИ

До сих пор мы рассматривали интегралы типа Коши с плотностями, принадлежащими классу H или H_0. Сейчас будем рассматривать плотности $\varphi(t)$ с особыми точками различных типов и покажем, что каждая такая точка является особой и для интеграла $\Phi(z)$. Для простоты в качестве контура интегрирования будем брать один гладкий контур.

1°. Пусть плотность $\varphi(t)$ в m точках $t_1, t_2, \ldots, t_m$ гладкого замкнутого контура L имеет разрывы первого рода со скачками $\Delta_k = \varphi(t_k - 0) - \varphi(t_k + 0) \neq 0$, а на каждой замкнутой дуге $t_k t_{k+1}$ $(t_{m+1} \equiv t_1)$ удовлетворяет условию $H(\lambda)$, $0<\lambda\leqslant 1$. Возьмем функции

$$\psi_k(t) = \frac{\Delta_k}{2\pi i} \ln(t - z_0), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{6.1}$$

где под $\ln(t - z_0)$ при фиксированном k понимается граничное значение определенной ветви $\ln(z - z_0)$, однозначной в плоскости с разрезом (z_0, t_k, ∞), соединяющим точки $z_0 \in D^+$ и ∞ и проходящим через t_k. При этом

$$\psi_k(t_k + 0) = \frac{\Delta_k}{2\pi i} \ln(t_k - z_0), \quad \psi_k(t_k - 0) = \frac{\Delta_k}{2\pi i} [\ln(t_k - z_0) + 2\pi i],$$

так что $\psi_k(t_k - 0) - \psi_k(t_k + 0) = \Delta_k$, а в остальных точках контура $\psi_k(t)$ непрерывна и, как дифференцируемая функция, удовлетворяет условию $H(1)$. Поэтому функция

$$\varphi_1(t) = \varphi(t) - \sum_{k=1}^{m} \psi_k(t) \tag{6.2}$$

всюду на L по теореме (2.1) удовлетворяет условию $H(\lambda)$.

Запишем теперь интеграл типа Коши по L с плотностью $\varphi(t)$ в таком виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau - z} d\tau + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi_k(\tau)}{\tau - z} d\tau. \tag{6.3}$$

Интегралы типа Коши с плотностями $\psi_k(t)$ легко вычислить, применяя интегральную теорему Коши и формулу Коши к интегралу по замкнутому контуру, состоящему из L, берегов разреза между z_0 и t_k и малой окружности с центром z_0:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi_k(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} \dfrac{\Delta_k}{2\pi i} \ln(z - t_k), & z \in D^+, \\ \dfrac{\Delta_k}{2\pi i} \ln \dfrac{z - t_k}{z - z_0}, & z \in D^-. \end{cases} \tag{6.4}$$

Подставляя эти значения в правую часть равенства (6.3), получаем формулу, выражающую интеграл типа Коши с разрывной плотностью $\varphi(t)$ через интеграл с непрерывной плотностью $\varphi_1(t)$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \frac{\Delta_k}{2\pi i}\ln(z - t_k), & z \in D^+, \\ \sum_{k=1}^{m} \frac{\Delta_k}{2\pi i}\ln\frac{z - t_k}{z - z_0}, & z \in D^-, \end{cases} \tag{6.5}$$

где $\varphi_1(t)$ определяется формулами (6.2) и (6.1). В каждой точке разрыва первого рода у $\varphi(t)$ интеграл $\Phi(z)$ имеет логарифмическую особую точку.

2°. В случае разомкнутого контура L использовать функции (6.1) в качестве устраняющих разрывы у $\varphi(t)$ неудобно, ибо интегралы типа Коши с плотностями $\psi_k(t)$ вычислить в явном виде уже не удается. Но здесь можно поступить следующим образом. Интеграл $\Phi(z)$ разбиваем на два: по дуге at_1 и дуге t_1b. Затем в одном из них, например, в интеграле по at_1, из $\varphi(\tau)$ вычитаем Δ_1 и прибавляем Δ_1, и записываем его в свою очередь в виде суммы двух интегралов. Получаем

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{at_1} \frac{\varphi(\tau) - \Delta_1}{\tau - z}\,d\tau + \frac{\Delta_1}{2\pi i}\int_{at_1} \frac{d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{t_1b} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau.$$

Полагая

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \varphi(t) - \Delta_1, & t \in at_1, \\ \varphi(t), & t \in t_1b, \end{cases} \tag{6.6}$$

видим, что предельные значения $\varphi_1(t)$ слева и справа в точке t_1 одинаковы: $\varphi_1(t_1 - 0) = \varphi(t_1 - 0) - \Delta_1 = \varphi(t_1 + 0)$, $\varphi_1(t_1 + 0) = \varphi(t_1 + 0)$. Значит, функция $\varphi_1(t)$ всюду на L непрерывна, на каждой из дуг at_1 и t_1b удовлетворяет условию $H(\lambda)$ и потому на основании теоремы 2.1 она удовлетворяет условию $H(\lambda)$ на всем контуре $L = ab$. Используя функцию (6.6), получаем для нашего интеграла $\Phi(z)$ с разрывной в точке t_1 плотностью выражение через интеграл типа Коши с непрерывной плотностью $\varphi_1(t)$:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + \frac{\Delta_1}{2\pi i}\ln\frac{z - t_1}{z - a}\,. \tag{6.7}$$

В точке t_1 здесь опять логарифмическая особенность.

Если разбивать на сумму двух интегралов интеграл по дуге t_1b, то можно получить для $\Phi(z)$ представление, аналогичное (6.7), где вместо a во втором слагаемом будет стоять b, а функция $\varphi_1(t)$ будет определяться соотношениями

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in at_1, \\ \varphi(t) + \Delta_1, & t \in t_1b. \end{cases} \tag{6.6*}$$

При наличии двух точек разрыва t_1 и t_2 только что указанным способом устраняем разрыв сначала в одной точке t_1, и для $\Phi(z)$ получаем представление (6.7), но здесь функция $\varphi_1(t)$, определенная равенствами (6.6), в точке t_2 разрывна и $\varphi_1(t_2-0)-\varphi_1(t_2+0)=\varphi(t_2-0)-\varphi(t_2+0)=\Delta_2$. Поэтому к интегралу с плотностью $\varphi_1(t)$ в свою очередь применяем формулу (6.7)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi_2(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+\frac{\Delta_2}{2\pi i}\ln\frac{z-t_2}{z-a}.$$

Здесь функция

$$\varphi_2(t)=\begin{cases}\varphi_1(t)-\Delta_2, & t\in at_2,\\ \varphi_1(t), & t\in t_2b,\end{cases}$$

или, что все равно, функция

$$\varphi_2(t)=\begin{cases}\varphi(t)-\Delta_1-\Delta_2, & t\in at_1,\\ \varphi(t)-\Delta_2, & t\in t_1t_2,\\ \varphi(t), & t\in t_2b,\end{cases}\tag{6.8}$$

удовлетворяет условию $H(\lambda)$ всюду на L. Формула (6.7) принимает в этом случае вид

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi_2(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+\frac{\Delta_1}{2\pi i}\ln\frac{z-t_1}{z-a}+\frac{\Delta_2}{2\pi i}\ln\frac{z-t_2}{z-a}.\tag{6.9}$$

Когда $\varphi(t)$ имеет на $L=ab$ m точек разрыва $t_1,\dots,t_m$ со скачками $\Delta_1,\dots,\Delta_m$ соответственно, убирая одну точку разрыва за другой, получим

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+\sum_{k=1}^{m}\frac{\Delta_k}{2\pi i}\ln\frac{z-t_k}{z-a},\tag{6.10}$$

где функция

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}\varphi(t)-\Delta_1-\Delta_2-\dots-\Delta_m, & t\in at_1,\\ \varphi(t)-\Delta_2-\dots-\Delta_m, & t\in t_1t_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \varphi(t)-\Delta_m, & t\in t_{m-1}t_m,\\ \varphi(t), & t\in t_mb,\end{cases}\tag{6.11}$$

на L удовлетворяет условию $H(\lambda)$.

Очевидно, во всех точках $t\in L$, отличных от концов и от точек разрыва t_k, граничные значения у интеграла с разрывной плотностью существуют и вычисляются при помощи формул Сохоцкого. Из формулы (6.10), например, получаем

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi_1(t) + \Phi_1(t) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\Delta_k}{2\pi i} \ln \frac{t-t_k}{t-a},$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi_1(t) + \Phi_1(t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \frac{\Delta_k}{2\pi i}\left[\ln \frac{t-t_k}{t-a} - 2\pi i \delta(t, at_k)\right],$$

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\Delta_k}{2\pi i}\left[\ln \frac{t-t_k}{t-a} - \pi i \delta(t, at_k)\right],$$

$$\delta(t, at_k) = \begin{cases} 1, & t \in at_k, \\ 0, & t \overline{\in} at_k, \end{cases} \quad k = 1, \ldots, m,$$

откуда видно, что в точках t_k и граничные значения $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ и главное значение $\Phi(t)$ имеют логарифмические особенности и, следовательно, являются на L функциями класса H_ε^*.

Итог изложенного в этих двух пунктах сформулируем в виде теоремы:

Теорема 6.1. *Если на гладком контуре L плотность $\varphi(t)$ имеет m точек разрыва первого рода $t_1, \ldots, t_m$, то интеграл типа Коши в этих точках имеет логарифмические особенности и выражается через интеграл с непрерывной плотностью по формулам* (6.5), (6.2), (6.1) *в случае замкнутого контура и по формулам* (6.10), (6.11) *в случае разомкнутого. Граничные значения $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ и главное значение интеграла $\Phi(t)$ принадлежат на L классу H_ε^*.*

3°. Рассмотрим плотность $\varphi(t)$, имеющую вид

$$\varphi(t) = \varphi^*(t) \prod_{k=1}^{m} (t-t_k)^{-\gamma_k}, \quad \gamma_k = \alpha_k + i\beta_k, \ 0 \leqslant \alpha_k < 1, \tag{6.12}$$

где функция $\varphi^*(t)$ удовлетворяет условию $H(\lambda)$ на каждой замкнутой дуге $t_k t_{k+1}$, а точки $t_1, \ldots, t_m$ могут быть для нее точками разрыва первого рода. Покажем, что в некоторых случаях интеграл типа Коши с плотностью (6.12) можно выразить через интеграл типа Коши с непрерывной плотностью, выделив все его особенности одновременно, в других случаях — через интеграл с плотностью того же класса, но со степенной особенностью в точках t_k более низкого порядка.

Исследуем сначала случай одной особой точки t_1 на замкнутом контуре L, когда всюду на L

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-t_1)^\gamma}, \quad \gamma = \alpha + i\beta, \ 0 < \alpha < 1, \tag{6.13}$$

при этом $\varphi^*(t_1-0) \neq \varphi^*(t_1+0)$ и на каждой замкнутой дуге, одним из концов которой является t_1, $\varphi^*(t) \in H(\lambda)$. Взяв на L произвольную точку $t' \neq t_1$, функцию $\varphi(t)$ представим в виде

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-t')^\gamma}\left(\frac{t-t'}{t-t_1}\right)^\gamma = \omega(t)\left(\frac{t-t'}{t-t_1}\right)^\gamma. \tag{6.14}$$

Лишь в точке t' функция $\omega(t)$ имеет точку разрыва; на каждой дуге t_1t', $t't_1$, включая точку t_1, $\omega(t) \in H(\lambda)$. Правый множитель в представлении (6.14) мы будем понимать как предел при $z \to t$ из D^+ функции

$$\left(\frac{z-t'}{z-t_1}\right)^\gamma = \frac{(z-t')^\gamma}{(z-t_1)^\gamma}, \tag{6.15}$$

вернее той ее однозначной ветви, которая фиксируется выбором однозначных ветвей функций $(z-t_1)^\gamma$ и $(z-t')^\gamma$. Под $(z-t_1)^\gamma$ мы будем понимать одну из однозначных ветвей, на которые распадается эта многозначная функция, когда в плоскости проведен разрез (t_1, ∞) в виде простой кривой, целиком лежащей в D^-. Ветви функции $(z-t')^\gamma$ удобно выбирать по-разному. Когда $t \in t_1t'$, $(t-t')^\gamma$ будем рассматривать как предел из D^+ той однозначной ветви $(z-t')^\gamma$ в плоскости с разрезом по дуге $t_1t' \in L$ и проведенному ранее разрезу (t_1, ∞), при которой соответствующая однозначная в плоскости с разрезом (t_1, t') ветвь функции (6.15) обращается в единицу на ∞. Эту ветвь функции (6.15) обозначим через $\xi(z)$. Если же $t \in t't_1$, то $(t-t')^\gamma$ будем принимать за предел из D^+ той однозначной ветви $(z-t')^\gamma$ в плоскости, рассеченной по дуге $t't_1 \in L$ и разрезу (t_1, ∞), при которой получим однозначную в плоскости с разрезом (t', t_1) ветвь $\eta(z)$ функции (6.15), удовлетворяющую тому же условию $\eta(\infty) = 1$. Отметим, кстати, что на берегах разреза (t_1, t')

$$\xi(t^+) = \xi(t) = \left(\frac{t-t'}{t-t_1}\right)^\gamma, \quad \xi(t^-) = e^{-2\pi i\gamma}\xi(t). \tag{6.16}$$

на берегах разреза (t', t_1)

$$\eta(t^+) = \eta(t) = \left(\frac{t-t'}{t-t_1}\right)^\gamma, \quad \eta(t^-) = e^{2\pi i\gamma}\eta(t). \tag{6.17}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \varphi(t) - \omega(t_1+0)\,\xi(t), & t \in t_1t', \\ \varphi(t) - \omega(t_1-0)\,\eta(t), & t \in t't_1. \end{cases} \tag{6.18}$$

Свойства $\varphi_1(t)$ зависят от соотношения величин α и λ.

а) Пусть $\alpha > 0$ и $\lambda > \alpha$. В этом случае $\varphi_1(t) \in H$ всюду на L и $\varphi_1(t_1) = 0$. Чтобы убедиться в этом, достаточно переписать $\varphi_1(t)$ с учетом (6.14), (6.16) и (6.17) в виде

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}\dfrac{\omega(t)-\omega(t_1+0)}{(t-t_1)^\gamma}(t-t')^\gamma, & t\in t_1t',\\[2ex] \dfrac{\omega(t)-\omega(t_1-0)}{(t-t_1)^\gamma}(t-t')^\gamma, & t\in t't_1,\end{cases} \tag{6.19}$$

и применить теоремы § 2. В точке t' на основании (6.18) имеем $\varphi_1(t')=\varphi(t')$. При помощи функции $\varphi_1(t)$ интеграл типа Коши с плотностью (6.13) можно записать так:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau-z}d\tau+\\ +\frac{\omega(t_1+0)}{2\pi i}\int\limits_{t_1t'}\frac{\xi(\tau)}{\tau-z}d\tau+\frac{\omega(t_1-0)}{2\pi i}\int\limits_{t't_1}\frac{\eta(\tau)}{\tau-z}d\tau.\end{gathered} \tag{6.20}$$

Два последних интеграла легко вычислить. Так как $\xi(z)$ есть однозначная аналитическая функция в плоскости с разрезом $(t_1,\ t')$ и $\xi(\infty)=1$, то по интегральной формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_1t'}\frac{\xi(\tau^+)}{\tau-z}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_1t'}\frac{\xi(\tau^-)}{\tau-z}d\tau=\xi(z)-1,$$

откуда, учитывая соотношения (6.16), получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_1t'}\frac{\xi(\tau)}{\tau-z}d\tau=\frac{e^{\pi i\gamma}}{2i\sin\pi\gamma}[\xi(z)-1]. \tag{6.21}$$

Таким же путем с учетом соотношений (6.17) в плоскости с разрезом $(t',\ t_1)$ найдем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t't_1}\frac{\eta(\tau)}{\tau-z}d\tau=-\frac{e^{-\pi i\gamma}}{2i\sin\pi\gamma}[\eta(z)-1]. \tag{6.22}$$

Подставляя (6.21) и (6.22) в равенство (6.20), получим окончательно

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau-z}d\tau+\\ +\frac{e^{\pi i\gamma}\omega(t_1+0)}{2i\sin\pi\gamma}[\xi(z)-1]-\frac{e^{-\pi i\gamma}\omega(t_1-0)}{2i\sin\pi\gamma}[\eta(z)-1].\end{gathered} \tag{6.23}$$

б) Если $\alpha>0$ и $\lambda<\alpha$, то на основании равенства (6.19) функцию $\varphi_1(t)$ можно представить в таком виде

$$\varphi_1(t)=\varphi_1^*(t)(t-t_1)^{-\gamma_1},\quad \gamma_1=\alpha_1+i\beta,$$

при этом $\alpha_1=\alpha-\lambda+\varepsilon$, где ε — положительное и настолько малое число, что $\alpha_1<\alpha$, а $\varphi_1^*(t)$, обладая теми же свойствами, что и $\varphi^*(t)$ в представлении (6.13), имеет ε показателем

Гёльдера. Значит, в этом случае плотности обоих интегралов в формуле (6.23) имеют в точке t_1 разный порядок степенной особенности. Если к интегралу с плотностью $\varphi_1(t)$ применить формулу (6.23), то будет видно, что он ведет себя в точке t_1 как $(z-t_1)^{-\gamma_1}$, но через интеграл с непрерывной плотностью также не выражается, ибо $\lambda_1 = \varepsilon \leqslant \alpha$.

в) При $\alpha = 0$ функция $\varphi_1(t)$, являясь непрерывной в точке t_1, имеет в t' особенность того же типа, что $\varphi(t)$ в t_1. Поэтому формула (6.23) в этом случае может служить лишь для оценки интеграла с плотностью $\varphi(t)$ в окрестности t_1. Из нее следует, что $\Phi(z)$ ведет себя вблизи t_1 как $(z-t_1)^{-i\beta}$.

Укажем один из случаев, когда при $\alpha = 0$ интеграл $\Phi(z)$ с плотностью (6.13) выражается через интеграл типа Коши с непрерывной плотностью. Это возможно, когда в представлении

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-z_0)^{i\beta}}\left(\frac{t-z_0}{t-t_1}\right)^{i\beta} = \sigma(t)\left(\frac{t-z_0}{t-t_1}\right)^{i\beta}, \quad z_0 \in D^+,$$

функция $\sigma(t) = \varphi^*(t)(t-z_0)^{-i\beta}$ всюду на L непрерывна, то есть когда

$$\varphi^*(t_1-0)/\varphi^*(t_1+0) = e^{-2\pi\beta}. \tag{6.24}$$

Переписав $\Phi(z)$ в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + \frac{\sigma(t_1)}{2\pi i}\int\limits_L \left(\frac{\tau-z_0}{\tau-t_1}\right)^{i\beta}\frac{d\tau}{\tau-z},$$

видим, что на основании теоремы 2.4 функция

$$\varphi_1(t) = [\sigma(t) - \sigma(t_1)]\left(\frac{t-z_0}{t-t_1}\right)^{i\beta} \tag{6.25}$$

всюду на L удовлетворяет условию $H(\lambda)$, а по формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \left(\frac{\tau-z_0}{\tau-t_1}\right)^{i\beta}\frac{d\tau}{\tau-z} = \begin{cases} 1, & z \in D^+, \\ 1-\left(\dfrac{z-z_0}{z-t_1}\right)^{i\beta}, & z \in D^-, \end{cases}$$

так что окончательно имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau-z}\,d\tau + \begin{cases} \sigma(t_1), & z \in D^+, \\ \sigma(t_1)\left[1-\left(\dfrac{z-z_0}{z-t_1}\right)^{i\beta}\right], & z \in D^-. \end{cases} \tag{6.26}$$

Отсюда видно, что интеграл $\Phi(z)$, ограниченный во всей окрестности точки t_1, при $\alpha = 0$ по путям, расположенным в D^-, определенного предела не имеет в силу свойств $(z-t_1)^{i\beta}$.

К сожалению, другие условия, отличные от (6.24), при которых в случае $\alpha=0$ интеграл $\Phi(z)$ выражался бы через интеграл с непрерывной плотностью, нам неизвестны.

4°. В случае нескольких особых точек, когда $\varphi(t)$ на L имеет вид (6.12) и все $\alpha_k>0$, можно поступить следующим образом. Записать интеграл $\Phi(z)$ в виде суммы интегралов

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau \quad (t_{m+1}\equiv t_1) \tag{6.27}$$

и на каждой дуге $t_k t_{k+1}$ представить $\varphi(t)$ в двух формах

$$\varphi(t)=\frac{\varphi^*(t)}{(t-t_{k+1})^{\gamma_k}\prod\limits_{j=1,\, j\neq k}^{m}(t-t_j)^{\gamma_j}}\left(\frac{t-t_{k+1}}{t-t_k}\right)^{\gamma_k}=\mu_k(t)\,\theta_k(t),$$

$$\varphi(t)=\frac{\varphi^*(t)}{(t-t_k)^{\gamma_{k+1}}\prod\limits_{j=1,\, j\neq k+1}^{m}(t-t_j)^{\gamma_j}}\left(\frac{t-t_k}{t-t_{k+1}}\right)^{\gamma_{k+1}}=\nu_k(t)\,\zeta_k(t). \tag{6.28}$$

При всех $j=1,2,\ldots,m$ за $(t-t_j)^{\gamma_j}$ (здесь у t_j и γ_j одинаковые номера) принимаем предельное значение из D^+ одной из однозначных ветвей функции $(z-t_j)^{\gamma_j}$, на которые она распадается в плоскости с разрезом (t_j,∞), лежащим в D^-. Функции $(t-t_{k+1})^{\gamma_k}$ и $(t-t_k)^{\gamma_{k+1}}$ (здесь индекс у показателя степени не совпадает с номером t_j) введены нами в представлениях (6.28) для удобства, и мы распорядимся выбором их ветвей следующим образом. За $(t-t_{k+1})^{\gamma_k}$ возьмем предел из D^+ той однозначной ветви функции $(z-t_{k+1})^{\gamma_k}$ в плоскости с разрезом (t_{k+1}, t_k, ∞), идущим по дуге $t_k t_{k+1}$ в обратном направлении и разрезу (t_k,∞), при которой

$$\theta_k(z)=\frac{(z-t_{k+1})^{\gamma_k}}{(z-t_k)^{\gamma_k}}=\left(\frac{z-t_{k+1}}{z-t_k}\right)^{\gamma_k},\ \theta_k(\infty)=1, \tag{6.29}$$

является однозначной аналитической функцией в плоскости, разрезанной по дуге $t_k t_{k+1}$; $(z-t_k)^{\gamma_{k+1}}$ рассматриваем в плоскости с разрезом (t_k, t_{k+1}, ∞) по дуге $t_k t_{k+1}$ и сечению (t_{k+1},∞) и берем ту ветвь, чтобы

$$\zeta_k(z)=\frac{(z-t_k)^{\gamma_{k+1}}}{(z-t_{k+1})^{\gamma_{k+1}}}=\left(\frac{z-t_k}{z-t_{k+1}}\right)^{\gamma_{k+1}},\ \zeta_k(\infty)=1, \tag{6.30}$$

также была однозначной в плоскости с разрезом по дуге $t_k t_{k+1}$. В равенствах (6.28) $\theta_k(t)$ и $\zeta_k(t)$ есть предельные значения функций (6.29) и (6.30) из D^+:

$$\theta_k(t^+) = \theta_k(t), \ \zeta_k(t^+) = \zeta_k(t), \tag{6.31}$$

а в качестве предельных значений из D^- на основании (6.29) и (6.30) получаем

$$\theta_k(t^-) = e^{-2\pi i\gamma_k}\theta_k(t), \ \zeta_k(t^-) = e^{2\pi i\gamma_{k+1}}\zeta_k(t). \tag{6.32}$$

Функции $\mu_k(t)$ и $\nu_k(t)$ на дуге $t_k t_{k+1}$ имеют по одной точке разрыва: $\mu_k(t)$ — конец t_{k+1}, $\nu_k(t)$ — конец t_k. В остальных точках дуги, включая вторые концы (конец t_k для $\mu_k(t)$ и конец t_{k+1} для $\nu_k(t)$), они удовлетворяют условию H.

Если на дуге $t_k t_{k+1}$ ввести функцию

$$\varphi_k(t) = \varphi(t) - \mu_k(t_k+0)\,\theta_k(t) - \nu_k(t_{k+1}-0)\,\zeta_k(t), \tag{6.33}$$

то можно написать

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}} \frac{\varphi(z)}{\tau - z}\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}} \frac{\varphi_k(\tau)}{\tau - z}\,d\tau +$$

$$+ \frac{\mu_k(t_k+0)}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}} \frac{\theta_k(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + \frac{\nu_k(t_{k+1}-0)}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}} \frac{\zeta_k(\tau)}{\tau - z}\,d\tau.$$

Применяя интегральную формулу Коши в плоскости с двубережным разрезом $t_k t_{k+1}$ к функции $\theta_k(z)$, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}} \frac{\theta_k(\tau^+)}{\tau - z}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}} \frac{\theta_k(\tau^-)}{\tau - z}\,d\tau = \theta_k(z) - 1,$$

откуда на основании (6.31) и (6.32)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}} \frac{\theta_k(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \frac{e^{\pi i\gamma_k}}{2i\sin\pi\gamma_k}\,[\theta_k(z) - 1]. \tag{6.34}$$

Таким же путем находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}} \frac{\zeta_k(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = -\frac{e^{-\pi i\gamma_{k+1}}}{2i\sin\pi\gamma_{k+1}}\,[\zeta_k(z) - 1] \tag{6.35}$$

и, значит,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}} \frac{\varphi_k(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + \tag{6.36}$$

$$+ \frac{e^{\pi i\gamma_k}\mu_k(t_k+0)}{2i\sin\pi\gamma_k}\,[\theta_k(z) - 1] - \frac{e^{-\pi i\gamma_{k+1}}\nu_k(t_{k+1}-0)}{2i\sin\pi\gamma_{k+1}}\,[\zeta_k(z) - 1].$$

Если эти значения подставить в равенство (6.27) и положить

$$F(t)=\varphi_k(t), \quad t \in t_k t_{k+1}, \quad k=1, 2, \ldots, m, \tag{6.37}$$

получим окончательно

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+\\ +\frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{e^{\pi i\gamma_k}\mu_k(t_k+0)}{\sin\pi\gamma_k}[\theta_k(z)-1]-\frac{e^{-\pi i\gamma_{k+1}}\nu_k(t_{k+1}-0)}{\sin\pi\gamma_{k+1}}[\zeta_k(z)-1]\right\}.\end{gathered} \tag{6.38}$$

При изучении свойств функции (6.37) надо $\varphi_k(t)$ с учетом (6.33) и (6.28) представить в двух формах

$$\varphi_k(t)=\frac{\mu_k(t)-\mu_k(t_k+0)}{(t-t_k)^{\gamma_k}}(t-t_{k+1})^{\gamma_k}-\nu_k(t_{k+1}-0)\left(\frac{t-t_k}{t-t_{k+1}}\right)^{\gamma_{k+1}}=$$

$$=\frac{\nu_k(t)-\nu_k(t_{k+1}-0)}{(t-t_{k+1})^{\gamma_{k+1}}}(t-t_k)^{\gamma_{k+1}}-\mu_k(t_k+0)\left(\frac{t-t_{k+1}}{t-t_k}\right)^{\gamma_k}.$$

Отсюда видно, что в тех точках t_k, где $\lambda>\alpha_k>0$, $F(t)$ непрерывна и $F(t_k)=0$; в тех, где $\alpha_k>0$, но $\lambda\leqslant\alpha_k$ $F(t)$ имеет особую точку того же типа, что и $\varphi(t)$, но с меньшим порядком степенной особенности; в точках $t\neq t_k$ $F(t)$ удовлетворяет условию H.

Заметим, что формула (6.36) имеет самостоятельный интерес при изучении интеграла по разомкнутому контуру $t_k t_{k+1}$, когда его плотность имеет вид

$$\varphi(t)=\frac{\tilde{\varphi}(t)}{(t-t_k)^{\gamma_k}(t-t_{k+1})^{\gamma_{k+1}}}, \quad \alpha_k>0, \ \alpha_{k+1}>0, \tag{6.39}$$

где $\tilde{\varphi}(t)\in H(\lambda)$, включая концы t_k и t_{k+1}. В этом случае $\theta_k(z)$ и $\zeta_k(z)$ имеют тот же смысл, что в (6.29) и (6.30), а $\mu_k(t)$ и $\nu_k(t)$ на основании (6.39) определяются равенствами

$$\mu_k(t)=\tilde{\varphi}(t)(t-t_{k+1})^{-\gamma_k}(t-t_{k+1})^{-\gamma_{k+1}}$$

и

$$\nu_k(t)=\tilde{\varphi}(t)(t-t_k)^{-\gamma_k}(t-t_k)^{-\gamma_{k+1}}.$$

Если в формуле (6.38) в сумме отбросить последнее слагаемое ($k=m$), то получим представление интеграла типа Коши по разомкнутому контуру $t_1 t_m$ с известным нам поведением плотности в концевых точках t_1 и t_m и в $m-2$ внутренних $t_2, \ldots, t_{m-1}$.

Из представления (6.38) видно, что особые точки $t_1, \ldots, t_m$ плотности $\varphi(t)$ будут особыми и для граничных значений

$\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$, и для главного значения интеграла $\Phi(t)$. Учитывая соотношения (6.31) и (6.32), нетрудно вычислить, что для $t \in t_j t_{j+1}$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}[\Phi^+(t) + \Phi^-(t)] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - $$
$$- \frac{1}{2}\mu_j(t_j+0)\,\theta_j(t) - \frac{1}{2}\nu_j(t_{j+1}-0)\,\zeta_j(t) + \tag{6.40}$$
$$+ \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{e^{\pi i\gamma_k}\mu_k(t_k+0)}{\sin\pi\gamma_k}[\theta_k(t)-1] - \right.$$
$$\left. - \frac{e^{-\pi i\gamma_{k+1}}\nu_k(t_{k+1}-0)}{\sin\pi\gamma_{k+1}}[\zeta_k(t)-1]\right\},$$
$$\Phi^\pm(t) = \pm\frac{1}{2}\varphi(t) + \Phi(t).$$

Чтобы исследовать поведение $\Phi(t)$ в окрестности точки t_j, надо взять выражение $\Phi(t)$ на дугах $t_j t_{j+1}$ и $t_{j-1} t_j$ и учесть, что точка t_j будет особой лишь для тех слагаемых, которые содержат функции $\theta_j(t)$ и $\zeta_{j-1}(t)$. Выделив эти слагаемые, получим

$$\Phi(t) = \frac{\operatorname{ctg}\pi\gamma_j}{2i}\mu_j(t_j+0)\,\theta_j(t) - \tag{6.41}$$
$$- \frac{e^{-\pi i\gamma_j}}{2i\sin\pi\gamma_j}\nu_{j-1}(t_j-0)\,\zeta_{j-1}(t) + \Phi^*(t), \quad t \in t_j t_{j+1},$$
$$\Phi(t) = \frac{e^{\pi i\gamma_j}}{2i\sin\pi\gamma_j}\mu_j(t_j+0)\,\theta_j(t) - $$
$$- \frac{\operatorname{ctg}\pi\gamma_j}{2i}\nu_{j-1}(t_j-0)\,\zeta_{j-1}(t) + \Phi^{**}(t), \quad t \in t_{j-1}t_j. \tag{6.42}$$

Когда $\lambda > \alpha_k > 0$ для всех $k = 1, \ldots, m$, главное значение интеграла с плотностью $F(t)$ удовлетворяет условию $H(\lambda)$. Этим же свойством обладают, очевидно, и функции $\Phi^*(t)$, $\Phi^{**}(t)$ в формулах (6.41), (6.42), так что вблизи t_j главное значение $\Phi(t)$ можно представить в таком виде

$$\Phi(t) = \widetilde{\Phi}(t)(t - t_j)^{-\gamma_j}, \tag{6.43}$$

где функция $\widetilde{\Phi}(t)$ в точке t_j терпит разрыв первого рода и на каждой замкнутой дуге, одним из концов которой является t_j, $\widetilde{\Phi}(t)$ удовлетворяет условию $H(\lambda)$. Вместо локальных представлений (6.41) — (6.43) из формулы (6.40) для $\Phi(t)$ сразу получается представление вида (6.12)

$$\Phi(t)=\Phi_0(t)\prod_{k=1}^{m}(t-t_k)^{-\gamma_k}, \qquad (6.44)$$

справедливое для всех $t \in L$, $t \neq t_k$.

Когда среди $\alpha_k > 0$ есть такие, что $\lambda \leqslant \alpha_k$, в формуле (6.40) интеграл с плотностью $F(t)$ в соответствующих точках будет иметь степенные особенности, в чем можно убедиться, применив к нему ту же формулу (6.40). Но порядок этих особенностей α'_k меньше α_k. Эти же самые особенности будут иметь функции $\Phi^*(t)$, $\Phi^{**}(t)$ в формулах (6.41), (6.42). Что касается представлений (6.43) и (6.44), то они в данном случае сохраняют свою форму.

5°. Рассмотрим теперь случай, когда в представлении (6.12) $\alpha_k=0$ для некоторых точек t_k. На случае разомкнутого контура $L=ab$ покажем, как все особенности рассматриваемого типа у плотности можно сосредоточить в одной из концевых точек.

Допустим, что t_j и t_p, $p>j$, имеют $\alpha_j=0$ и $\alpha_p=0$. Разбиваем интеграл $\Phi(z)$ на сумму трех интегралов: по дуге at_j, по дуге t_jt_p и по дуге t_pb. На at_j плотность $\varphi(t)$ записываем в таком виде

$$\varphi(t)=\frac{\varphi^*(t)}{(t-a)^{i\beta_j}\prod\limits_{k=1,\ k\neq j}^{m}(t-t_k)^{\gamma_k}}\left(\frac{t-a}{t-t_j}\right)^{i\beta_j}=\sigma_j(t)\left(\frac{t-a}{t-t_j}\right)^{i\beta_j},$$

а на дуге t_jt_p в виде

$$\varphi(t)=\frac{\varphi^*(t)}{(t-t_p)^{i\beta_j}\prod\limits_{k=1,\ k\neq j}^{m}(t-t_k)^{\gamma_k}}\left(\frac{t-t_p}{t-t_j}\right)^{i\beta_j}=\delta_j(t)\left(\frac{t-t_p}{t-t_j}\right)^{i\beta_j}$$

и представляем интеграл $\Phi(z)$ в такой форме

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{at_j}\left(\frac{\tau-a}{\tau-t_j}\right)^{i\beta_j}\frac{\sigma_j(\tau)-\sigma_j(t_j-0)}{\tau-z}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_jt_p}\left(\frac{\tau-t_p}{\tau-t_j}\right)^{i\beta_j}\frac{\delta_j(\tau)-\delta_j(t_j+0)}{\tau-z}\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_pb}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+$$

$$+\frac{\sigma_j(t_j-0)}{2\pi i}\int\limits_{at_j}\left(\frac{\tau-a}{\tau-t_j}\right)^{i\beta_j}\frac{d\tau}{\tau-z}+\frac{\delta_j(t_j+0)}{2\pi i}\int\limits_{t_jt_p}\left(\frac{\tau-t_p}{\tau-t_j}\right)^{i\beta_j}\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Два последних интеграла вычисляются в явном виде известным уже нам способом, а первые три можно записать в виде одного интеграла типа Коши с плотностью

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}[\sigma_j(t)-\sigma_j(t_j-0)]\left(\dfrac{t-a}{t-t_j}\right)^{i\beta_j}, & t\in at_j,\\[2mm] [\delta_j(t)-\delta_j(t_j+0)]\left(\dfrac{t-t_p}{t-t_j}\right)^{i\beta_j}, & t\in t_jt_p,\\[2mm] \varphi(t), \ t\in t_pb,\end{cases}$$

у которой в отличие от $\varphi(t)$ в точке t_j нет особенности. На основании теорем 2.4 и 2.1 функция $\varphi_1(t)$ на дуге $t_{j-1}t_{j+1}$ удовлетворяет условию $H(\lambda)$ и $\varphi_1(t_j)=0$. Из полученного представления

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau-z}d\tau+\frac{e^{-\pi\beta_j}\sigma_j(t_j-0)}{2\operatorname{sh}\pi\beta_j}\left[\left(\frac{z-a}{z-t_j}\right)^{i\beta_j}-1\right]-$$

$$-\frac{e^{-\pi\beta_j}\delta_j(t_j+0)}{2\operatorname{sh}\pi\beta_j}\left[\left(\frac{z-t_p}{z-t_j}\right)^{i\beta_j}-1\right]$$

видно, что проинтегрированные члены полностью характеризуют поведение $\Phi(z)$ в окрестности t_j. Если на дуге t_pb есть еще особая точка t_q того же типа, то проделываем эту операцию еще раз, разбивая $\Phi_1(z)$ на три интеграла по дугам at_p, t_pt_q и t_qb. Если же на t_pb нет особенностей рассматриваемого типа, то интеграл с плотностью $\varphi_1(t)$ разбиваем на два интеграла по дугам at_p и t_pb и тем же самым приемом избавляемся от особенности в точке t_p. Получаем

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi_2(\tau)}{\tau-z}d\tau+\frac{e^{-\pi\beta_p}\overset{1}{\sigma}_p(t_p-0)}{2\operatorname{sh}\pi\beta_p}\left[\left(\frac{z-a}{z-t_p}\right)^{i\beta_p}-1\right]-$$

$$-\frac{e^{-\pi\beta_p}\overset{1}{\delta}_p(t_p+0)}{2\operatorname{sh}\pi\beta_p}\left[\left(\frac{z-b}{z-t_p}\right)^{i\beta_p}-1\right],$$

где плотность $\varphi_2(t)$ имеет особенности только в концевых точках:

$$\varphi_2(t)=\begin{cases}[\overset{1}{\sigma}_p(t)-\overset{1}{\sigma}_p(t_p-0)]\left(\dfrac{t-a}{t-t_p}\right)^{i\beta_p}, & t\in at_p,\\[2mm] [\overset{1}{\delta}_p(t)-\overset{1}{\delta}_p(t_p+0)]\left(\dfrac{t-b}{t-t_p}\right)^{i\beta_p}, & t\in t_pb.\end{cases}$$

Этот же прием позволяет избавиться от особенности на одном из концов.

В случае замкнутого контура таким путем особенности с $\alpha_k=0$ можно сосредоточить в какой-либо одной точке или перебросить в те точки t_k, где $\alpha_k > 0$. С этой операции и надо обычно начинать, если у $\varphi(t)$ имеются особые точки и с $\alpha_k = 0$ и с $\alpha_k > 0$, а затем уже применять представление (6.38).

Итогом изложенного в пунктах $3^\circ - 5^\circ$ является

Теорема 6.2. *Если на гладком контуре L плотность $\varphi(t)$ имеет конечное число особых точек $t_1, \ldots, t_m$, в каждой из которых совмещаются точка разрыва первого рода и степенная особенность, и $\varphi(t)$ может быть представлена на L в форме* (6.12), *то интеграл типа Коши можно представить в виде* (6.38), *где в качестве отдельного слагаемого выделена элементарная функция, полностью характеризующая его поведение во всех точках t_k. В каждой из точек t_k интеграл $\Phi(z)$ имеет степенную особенность с тем же показателем $\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$, что и $\varphi(t)$. В тех точках t_k, где $0 \leqslant \alpha_k < \lambda$, плотность $F(t)$ входящего в формулу* (6.38) *интеграла непрерывна, в точках, где $\alpha_k \geqslant \lambda$, $F(t)$ имеет особенности того же типа, что и $\varphi(t)$, но с $\alpha'_k < \alpha_k$. Лишь в случае, когда $\varphi(t)$ имеет единственную особую точку t_1 с показателем $\gamma_1 = i\beta_1$, особенность у $F(t)$ с тем же показателем появляется в общем случае в какой-либо другой точке контура L. Граничные значения $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ и главное значение $\Phi(t)$ принадлежат на L тому же классу, что и $\varphi(t)$, и представляются в виде* (6.12) *с теми же показателями γ_k.*

6°. Тем же самым методом можно получить представление интеграла типа Коши в более общем случае, когда к разрывам первого рода и степенным особенностям плотности в точках $t_1, \ldots, t_m$ добавляются логарифмические особенности.

Пусть на замкнутом контуре L

$$\varphi(t) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \varphi_k^*(t) \ln(t - t_k)}{\prod\limits_{k=1}^{m} (t - t_k)^{\gamma_k}}, \quad \gamma_k = \alpha_k + i\beta_k, \; 0 < \alpha_k < 1, \tag{6.45}$$

где функции $\varphi_k^*(t)$ имеют те же свойства, что $\varphi^*(t)$ в (6.12), а за $\ln(t - t_k)$ примем предельное значение из D^+ некоторой однозначной ветви $\ln(z - t_k)$ в плоскости с разрезом (t_k, ∞), тем же самым, что и при фиксировании ветви $(z - t_k)^{\gamma_k}$. Записав равенство (6.27), представляем на дуге $t_k t_{k+1}$ функцию (6.45) в двух формах

$$\varphi(t)=\left(\frac{t-t_{k+1}}{t-t_k}\right)^{\gamma_k}\times$$

$$\times\frac{\varphi_k^*(t)\ln\dfrac{t-t_k}{t-t_{k+1}}+\varphi_k^*(t)\ln(t-t_{k+1})+\sum\limits_{j=1,\ j\neq k}^{m}\varphi_j^*(t)\ln(t-t_j)}{(t-t_{k+1})^{\gamma_k}\prod\limits_{j=1,\ j\neq k}^{m}(t-t_j)^{\gamma_j}}=$$

$$=a_k(t)\,\Omega_k(t)+b_k(t)\,\theta_k(t), \tag{6.46}$$

где однозначная в плоскости с разрезом $(t_k,\ t_{k+1})\in L$ ветвь функции

$$\Omega_k(z)=\theta_k(z)\left[\ln(z-t_k)-\ln(z-t_{k+1})\right]=\theta_k(z)\ln\frac{z-t_k}{z-t_{k+1}},$$

$$\Omega_k(\infty)=0, \tag{6.47}$$

фиксируется при выборе ветвей $(z-t_k)^{\gamma_k}$ и $(z-t_{k+1})^{\gamma_k}$ в процессе построения функции $\theta_k(z)$;

$$\varphi(t)=\left(\frac{t-t_k}{t-t_{k+1}}\right)^{\gamma_{k+1}}\times$$

$$\times\frac{\varphi_{k+1}^*(t)\ln\dfrac{t-t_{k+1}}{t-t_k}+\varphi_{k+1}^*(t)\ln(t-t_k)+\sum\limits_{j=1,\ j\neq k+1}\varphi_j^*(t)\ln(t-t_j)}{(t-t_k)^{\gamma_{k+1}}\prod\limits_{j=1,\ j\neq k+1}^{m}(t-t_j)^{\gamma_j}}=$$

$$=A_k(t)\,\chi_k(t)+B_k(t)\,\zeta_k(t), \tag{6.48}$$

где под $\chi_k(t)$ понимаем предел из D^+ ветви функции

$$\chi_k(z)=\zeta_k(z)\left[\ln(z-t_{k+1})-\ln(z-t_k)\right]=\zeta_k(z)\ln\frac{z-t_{k+1}}{z-t_k},\quad \chi(\infty)=0, \tag{6.49}$$

когда ветви логарифмов фиксируются так же, как ветви $(z-t_k)^{\gamma_{k+1}}$ и $(z-t_{k+1})^{\gamma_{k+1}}$ при построении $\zeta_k(z)$. Смысл функций $a_k(t)$, $b_k(t)$, $A_k(t)$, $B_k(t)$ очевиден; $a_k(t)$ и $b_k(t)$ на t_kt_{k+1} непрерывны по Гёльдеру всюду, кроме конца t_{k+1}; $A_k(t)$ и $B_k(t)$ имеют единственной точкой разрыва конец t_k. Если положить

$$\varphi_k(t)=\varphi(t)-\left[a_k(t_k+0)\,\Omega_k(t)+b_k(t_k+0)\,\theta_k(t)\right]-$$

$$-\left[A_k(t_{k+1}-0)\,\chi_k(t)+B_k(t_{k+1}-0)\,\zeta_k(t)\right], \tag{6.50}$$

то будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}}\frac{\varphi_k(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+\frac{a_k(t_k+0)}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}}\frac{\Omega_k(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+$$
$$+\frac{b_k(t_k+0)}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}}\frac{\theta_k(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+\frac{A_k(t_{k+1}-0)}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}}\frac{\chi_k(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+$$
$$+\frac{B_k(t_{k+1}-0)}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}}\frac{\zeta_k(\tau)}{\tau-z}\,d\tau. \tag{6.51}$$

В плоскости с двубережным разрезом $t_k t_{k+1}$ к функции $\Omega_k(z)$ применяем интегральную формулу Коши:

$$\Omega_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}}\frac{\Omega_k(\tau^+)}{\tau-z}\,d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}}\frac{\Omega_k(\tau^-)}{\tau-z}\,d\tau.$$

С учетом первого из соотношений (6.32) имеем

$$\Omega_k(\tau^+)=\Omega_k(\tau),\quad \Omega_k(\tau^-)=e^{-2\pi i\gamma_k}[\Omega_k(\tau)+2\pi i\theta_k(\tau)],$$

так что

$$\Omega_k(z)=\frac{1-e^{-2\pi i\gamma_k}}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}}\frac{\Omega_k(\tau)}{\tau-z}\,d\tau-e^{-2\pi i\gamma_k}\int\limits_{t_k t_{k+1}}\frac{\theta_k(\tau)}{\tau-z}\,d\tau.$$

Отсюда, принимая во внимание (6.34), получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}}\frac{\Omega_k(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=\frac{e^{\pi i\gamma_k}}{2i\sin\pi\gamma_k}\,\Omega_k(z)+\frac{\pi}{2i\sin^2\pi\gamma_k}\,[\theta_k(z)-1]. \tag{6.52}$$

Аналогично, учитывая (6.35), находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}}\frac{\chi_k(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=-\frac{e^{-\pi i\gamma_{k+1}}}{2i\sin\pi\gamma_{k+1}}\,\chi_k(z)-\frac{\pi}{2i\sin^2\pi\gamma_{k+1}}\,[\zeta_k(z)-1]. \tag{6.53}$$

Значения интегралов (6.52), (6.34), (6.53), (6.35) подставляем в правую часть равенства (6.51):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_k t_{k+1}}\frac{\varphi_k(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+\frac{e^{\pi i\gamma_k}a_k(t_k+0)}{2i\sin\pi\gamma_k}\,\Omega_k(z)-$$
$$-\frac{e^{-\pi i\gamma_{k+1}}A_k(t_{k+1}-0)}{2i\sin\pi\gamma_{k+1}}\,\chi_k(z)+\left[\frac{\pi a_k(t_k+0)}{2i\sin^2\pi\gamma_k}+\frac{e^{\pi i\gamma_k}b_k(t_k+0)}{2i\sin\pi\gamma_k}\right]\times$$
$$\times[\theta_k(z)-1]-\left[\frac{\pi A_k(t_{k+1}-0)}{2i\sin^2\pi\gamma_{k+1}}+\frac{e^{-\pi i\gamma_{k+1}}B_k(t_{k+1}-0)}{2i\sin\pi\gamma_{k+1}}\right][\zeta_k(z)-1]. \tag{6.54}$$

Это аналог формулы (6.36). Подставляя (6.54) в равенство (6.27), получим для плотности вида (6.45) аналог формулы (6.38). При этом для удобства следует опять ввести функцию $F(t)$ равенствами (6.37), где за $\varphi_k(t)$ надо взять функции (6.50). Свойства $F(t)$ легко исследуются на основании соотношений (6.45) — (6.50)

7°. Содержание всего § 6 представляет несколько дополненную нашу статью [74]. Ранее эти идеи применялись нами к интегралам типа Шварца [77]. Некоторые формулы пунктов 4° и 6° независимо от нас получены Р. Б. Салимовым [56].

Вместо предлагаемых нами формул, характеризующих поведение интеграла типа Коши одновременно во всех рассматриваемых особых точках, до сих пор использовались локальные формулы, справедливые в окрестности одной особой точки, полученные впервые в 1941 году Н. И. Мусхелишвили, а затем Б. Погожельским. Подробное изложение этих результатов имеется в монографии Н. И. Мусхелишвили [41, с. 89—122]. Там же можно найти перечень статей В. Погожельского [2—7], посвященных данному вопросу.

Можно было бы пойти дальше в направлении усложнения характера особенностей и рассмотреть, например, плотность вида (6.45), когда вместо $\ln(t-t_k)$ стоят $\ln^{p_k}(t-t_k)$, где $p_k > 0$ — целые числа [38], или в более общем случае плотность вида

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^*(t)\,\omega_j(t),$$

где $\omega_j(t)$ являются граничными значениями функций, аналитических в D^+ или D^-, с различными особенностями в точках $t_1, \ldots, t_m$. В целом схема исследования интеграла $\Phi(z)$ остается той же. Трудности могут быть лишь при вычислении интегралов типа Коши с плотностями $\omega_j(t)$ или некоторыми комбинациями этих функций. От результата этих вычислений зависит и компактность или громоздкость окончательной формулы вида (6.38).

Относительная простота исследования поведения интеграла типа Коши в указанных нами случаях объясняется тем, что все особые точки плотности были особенностями однозначных или многозначных аналитических функций. При наличии особых точек неаналитического характера исследование резко усложняется и требует применения очень тонких свойств теории функций вещественного переменного. Ряд важных свойств интегралов типа Коши с плотностями, принадлежащими различным классам суммируемых функций, изложены в монографии И. И. Привалова [50]. Большой интерес представляет итоговая работа Б. В. Хведелидзе [70], посвященная интегралам типа Коши с плотностями, интегрируемыми в степени $p > 1$ с некоторым весом $\rho(t)$. В настоящее время исследования в этом направлении продолжаются как самим Б. В. Хведелидзе, так и его учениками (В. А. Пааташвили и др.).

§ 7. О ПОВЕДЕНИИ ПРОИЗВОДНЫХ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ ВБЛИЗИ ЛИНИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1°. Производная интеграла типа Коши любого порядка $n \geqslant 1$

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - z)^{n+1}} \tag{7.1}$$

в условиях теоремы 4.1 вне линии L является аналитической функцией, как и сам интеграл $\Phi(z)$. Но при $z = t \in L$ и гельдеровой плотности $\varphi(t)$ интеграл (7.1) не существует даже в смысле главного значения. Чтобы выяснить, как ведет себя $\Phi^{(n)}(z)$ вблизи линии L, оценим ее по модулю.

Когда контур L замкнутый, берем произвольную точку z из Δ^+ или Δ^- и через t_0 обозначаем точку контура L, ближайшую к z. Как при доказательстве теоремы 5.1 берем достаточно малое $\rho = |z - t_0|$, не превосходящее стандартный радиус, соответствующий некоторому заданному острому углу α_0 и представляем $\Phi^{(n)}(z)$ в таком виде

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - z)^{n+1}} + \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{l_\rho} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_0)}{(\tau - z)^{n+1}}\,d\tau +$$

$$+ \frac{(n-1)!}{2\pi i}\left[\frac{1}{(t_1 - z)^n} - \frac{1}{(t_2 - z)^n}\right]\varphi(t_0), \tag{7.2}$$

где L_ρ и l_ρ суть части L, лежащие соответственно вне и внутри окружности $C(t_0, \rho)$. Для таких z первое и третье слагаемые, очевидно, ограничены, и нам остается оценить лишь интеграл

$$I = \int\limits_{l_\rho} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_0)}{(\tau - z)^{n+1}}\,d\tau.$$

Так как для всех $\tau \in l_\rho$ имеют место неравенства $|\tau - t_0| \leqslant 2|\tau - z|$ и $|\tau - z| \geqslant \rho$, то при $\varphi(t) \in H(A, \lambda)$ имеем

$$|I| \leqslant A\int\limits_{l_\rho} \left|\frac{\tau - t_0}{\tau - z}\right|^\lambda \frac{|d\tau|}{|\tau - z|^{n+1-\lambda}} \leqslant 2^\lambda A\rho^{\lambda - n - 1}|s_2 - s_1|.$$

Но из неравенства (1.9) $|s_2 - s_1| \leqslant k_0^{-1}|t_2 - t_1| \leqslant 2\rho k_0^{-1}$. Поэтому

$$|I| \leqslant 2^{\lambda+1}Ak_0^{-1}\rho^{\lambda-n} = C|z - t_0|^{\lambda-n},$$

если $\lambda \neq n$.

Равенство $\lambda = n$ возможно лишь при $\lambda = 1$. В этом случае на основании тех же неравенств имеем

$$|I| \leqslant A \int\limits_{l_\rho} \left|\frac{\tau - t_0}{\tau - z}\right|^2 \frac{|d\tau|}{|\tau - t|} \leqslant 4A \int\limits_{l_\rho} \frac{|d\tau|}{|\tau - t_0|} \leqslant 4Ak_0^{-1} \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{|d\sigma|}{|\sigma - s_0|} =$$

$$= 4Ak_0^{-1} \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int\limits_{s_1}^{s_0 - \varepsilon} \frac{d\sigma}{s_0 - \sigma} + \int\limits_{s_0 + \varepsilon}^{s_2} \frac{d\sigma}{\sigma - s_0} \right\} = 4Ak_0^{-1} \left| \ln \frac{s_2 - s_0}{s_0 - s_1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 4Ak_0^{-1} \{|\ln (s_2 - s_0)| + |\ln (s_0 - s_1)|\} \leqslant 8Ak_0^{-1} \{|\ln \rho| + \ln k_0^{-1}\}.$$

Эти оценки справедливы и для разомкнутого контура, если точка t_0 находится на конечном расстоянии от концов, большем ρ. Если же $C(t_0, \rho)$ пересекает L только в одной точке t_1, то в представлении (7.2) при $n = 1$ основное значение при оценке будет иметь третье слагаемое и при выполнении всех остальных условий в расположении z получим

$$|\Phi'(z)| < C |z - t_0|^{-1}. \tag{7.3}$$

Таким образом, для любого гладкого контура L имеет место следующий результат.

Теорема 7.1. *Если на гладком контуре $\varphi(t) \in H(\lambda)$ и z находится внутри стандартной окрестности некоторой точки $t \in L$, то для производных интеграла типа Коши имеют место следующие оценки:*

$$|\Phi'(z)| < M |z - t|^{\lambda - 1}, \ \lambda < 1; \ |\Phi'(z)| < M |\ln |z - t||, \ \lambda = 1, \tag{7.4}$$

когда стандартная окружность пересекает L в двух точках, и оценка (7.3) — *в случае одной точки пересечения; при всех $n > 1$*

$$|\Phi^{(n)}(z)| < M |z - t|^{\lambda - n}. \tag{7.5}$$

Несколько иное доказательство этого предложения для $n = 1$ можно найти в монографии [41, с. 83—84]. Там на расположение z накладывается требование: нетупой угол между отрезком tz и касательной к L в t не меньше некоторой заданной величины $\beta_0 > \alpha_0$. Это позволяет использовать при доказательстве оценок (7.4) пункт 4° теоремы 1.1.

Оценки (7.3) — (7.5) показывают, что для производных интеграла типа Коши линия интегрирования является особой линией, в каждой точке которой модуль их сколь угодно велик. По характеру роста линия L для $\Phi^{(n)}(z)$ подобна изолированному полюсу для аналитической функции. Поэтому, используя терминологию В. В. Голубева [18, с. 99, 101, 192, 200], можно сказать, что *линия интегрирования является для производной $\Phi^{(n)}(z)$ полярной линией порядка $n + 1$.*

2°. Из теоремы 7.1 можно получить ряд интересных следствий.

Пусть z_1 и z_2 — две точки, расположенные по одну сторону от L на прямой, проходящей через t. Если взять разность

$$\Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \Phi'(z)\, dz,$$

где за путь интегрирования можно считать прямолинейный отрезок $z_1 z_2$, и оценить ее по модулю, то при $\lambda < 1$, например, в силу первого неравенства (7.4) получаем:

$$|\Phi(z_2) - \Phi(z_1)| \leqslant \frac{C}{\lambda} |\delta_2^\lambda - \delta_1^\lambda| \leqslant C_0 |\delta_2 - \delta_1|^\lambda = C_0 |z_2 - z_1|^\lambda, \quad (7.6)$$

где C_0 — постоянная, а $\delta_1 = |z_1 - t|$, $\delta_2 = |z_2 - t|$.

При $\lambda = 1$ аналогично получим

$$|\Phi(z_2) - \Phi(z_1)| \leqslant C_0 |\delta_2 - \delta_1|^{1-\varepsilon} = C_0 |z_2 - z_1|^{1-\varepsilon}, \quad (7.7)$$

где ε — произвольно зафиксированное положительное число.

Если в неравенствах (7.6) и (7.7) положить $z_2 = z$, $\delta_2 = \delta$ и заставить $z_1 \to t$, оставаясь, скажем, слева от L, то получим еще два интересных неравенства:

$$|\Phi(z) - \Phi^+(t)| \leqslant C_0 \delta^\lambda, \ \lambda < 1, \quad (7.8)$$

$$|\Phi(z) - \Phi^+(t)| \leqslant C_0 \delta^{1-\varepsilon}, \ \lambda = 1. \quad (7.9)$$

Аналогичные оценки имеют место для z, расположенных справа от L.

Неравенства (7.6) и (7.7) дают представление о близости значений интеграла типа Коши в зависимости от расстояния между рассматриваемыми точками z_1 и z_2. Оценки (7.8) и (7.9) позволяют судить о скорости стремления интеграла $\Phi(z)$ к своим граничным значениям $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$. Основной характеристикой этих свойств является, как мы видим, показатель Гёльдера плотности $\varphi(t)$. Все четыре неравенства являются частными случаями теоремы, доказанной в работе [99]:

Теорема 7.2. *Пусть L — замкнутая жорданова кривая и D — ограниченная ею конечная область. Если для функции $F(z)$, голоморфной в D и непрерывной в $D \cup L$, для всех z_1, z_2 на L имеет место неравенство*

$$\frac{|F(z_2) - F(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\lambda} \leqslant K = \text{const}, \ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

то оно справедливо и для всех z_1, z_2 в $D \cup L$.

3°. Когда плотность $\varphi(t)$ дифференцируема m раз на L, производные интеграла типа Коши обладают более простыми свойствами.

Если контур L замкнутый, то

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi^{(n)}(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad n = 1, 2, \ldots, m. \tag{7.10}$$

Чтобы убедиться в этом, надо интеграл в правой части равенства (7.1) взять n раз по частям. В силу замкнутости контура проинтегрированная часть каждый раз будет обращаться в нуль.

Когда контур L разомкнут, $\Phi^{(n)}(z)$ отличается от интеграла типа Коши с плотностью $\varphi^{(n)}(t)$ на рациональную функцию с полюсами в концевых точках контура:

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\varphi^{(n)}(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \frac{\varphi^{(j)}(a)}{(a-z)^{n-j}} - \frac{\varphi^{(j)}(b)}{(b-z)^{n-j}} \right\}. \tag{7.11}$$

Справедлива следующая

Теорема 7.3. *Если у плотности $\varphi(t)$ на гладком контуре L производная $\varphi^{(m)}(t)$ удовлетворяет условию H, то все производные интеграла типа Коши $\Phi^{(n)}(z)$, $n = 1, \ldots, m$ имеют предельные значения $[\Phi^{(n)}(t)]^{\pm}$, совпадающие во всех точках t, отличных от концевых, с производными от его предельных значений*:

$$[\Phi^{(n)}(t)]^{\pm} = [\Phi^{\pm}(t)]^{(n)}, \quad n = 1, \ldots, m. \tag{7.12}$$

Так как $\varphi^{(n)}(t) \in H$ при всех $n = 1, \ldots, m$, то граничные значения производных $[\Phi^{(n)}(t)]^{\pm}$ существуют и на основании представлений (7.10) и (7.11) при всех $t \neq a, b$ определяются формулами Сохоцкого

$$[\Phi^{(n)}(t)]^{\pm} = \pm \frac{1}{2} \varphi^{(n)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\varphi^{(n)}(\tau)}{\tau - t} d\tau +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-j-1)!}{2\pi i} \left\{ \frac{\varphi^{(j)}(a)}{(a-t)^{n-j}} - \frac{\varphi^{(j)}(b)}{(b-t)^{n-j}} \right\}, \tag{7.13}$$

при этом в случае замкнутого контура здесь надо положить $a = b$.

Чтобы доказать справедливость равенств (7.12), берем граничные значения интеграла $\Phi(z)$

$$\Phi^{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Каждое слагаемое в правой части дифференцируемо, при этом производная от интеграла в смысле главного значения вычисляется по формуле (4.16). Поэтому

$$[\Phi^{\pm}(t)]' = \pm\frac{1}{2}\varphi'(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{\varphi'(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{\varphi(a)}{a-t} - \frac{\varphi(b)}{b-t}\right\}.$$

Повторное дифференцирование, очевидно, также возможно и, применяя опять формулу (4.16), получим:

$$[\Phi^{\pm}(t)]'' = \pm\frac{1}{2}\varphi''(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{\varphi''(\tau)}{\tau - t}\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{\varphi'(a)}{a-t} - \frac{\varphi'(b)}{b-t}\right\} + \frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{\varphi(a)}{(a-t)^2} - \frac{\varphi(b)}{(b-t)^2}\right\}.$$

После n-кратного дифференцирования мы получаем в качестве $[\Phi^{\pm}(t)]^{(n)}$ выражение, стоящее в правой части равенства (7.13), что и завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 7.3 даже при более общих, чем указанные нами, предположениях на $\varphi(t)$, принадлежит Ю. М. Крикунову [31]. Доказательство, изложенное в книге [8, с. 47—49], содержит неточность.

§ 8. КУСОЧНО-ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ, ПРЕДСТАВЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛАМИ, ОТЛИЧНЫМИ ОТ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ

Используя свойства интегралов типа Коши, легко построить другие кусочно-голоморфные функции, которые при переходе через заданный гладкий контур терпят разрыв первого рода.

1°. Возьмем гладкий разомкнутый контур $L = ab$ и на нем функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую условию H. Положим

$$F(z, \tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a}^{\tau}\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1 - z}\,d\tau_1, \quad \tau \in ab. \tag{8.1}$$

По переменному z для любого фиксированного τ эта функция обладает всеми свойствами интеграла типа Коши. По τ она определена и непрерывна всюду на ab и имеет непрерывную производную $F'_\tau(z, \tau)$ при всех $z \overline{\in} ab$. При $z = t \in ab$ интеграл (8.1) понимается в смысле главного значения и вычисляется по любой из формул (4.6) или (4.6*):

$$F(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a}^{\tau}\frac{\varphi(\tau_1) - \varphi(t)}{\tau_1 - t}\,d\tau_1 \mp \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\left[\ln\frac{t-\tau}{t-a}\right]^{\pm}. \tag{8.2}$$

Отсюда видно, что $F(t, \tau)$ по τ на ab имеет подвижную логарифмическую особенность.

Рассмотрим интеграл

$$\Phi(z) = \int\limits_{a}^{b}\psi(\tau)F(z, \tau)\,d\tau. \tag{8.3}$$

Легко показать, что если $\psi(\tau)$ является абсолютно интегрируемой на ab, то $\Phi(z)$ будет аналитической функцией в любой ограниченной области, не содержащей точек контура интегрирования. На бесконечности $\Phi(z)$ обращается в нуль: $\Phi(\infty)=0$. При $z=t\in ab$ интеграл

$$\Phi(t)=\int_a^b \psi(\tau) F(t,\ \tau)\, d\tau \tag{8.4}$$

на основании формулы (8.2) существует как обычный несобственный.

Для простоты рассуждений ниже мы будем считать функцию $\psi(\tau)$ непрерывной на ab.

Покажем, что функция (8.3) непрерывно продолжима на контур $L=ab$ и получим формулы для вычисления ее граничных значений.

Запишем функцию (8.3) с учетом (8.1) в таком виде

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \psi(\tau)\, d\tau \int_a^\tau \frac{\varphi(\tau_1)\, d\tau_1}{\tau_1-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\varphi(\tau_1)\, d\tau_1}{\tau_1-z}\int_{\tau_1}^b \psi(\tau)\, d\tau.$$

Здесь в последнем равенстве мы изменили порядок интегрирования в повторном интеграле, применив формулу перестановки Дирихле. Справедливость ее в данном случае, когда оба криволинейных интеграла берутся от непрерывных функций, очевидна. Но теперь функция $\Phi(z)$ записана у нас в виде интеграла типа Коши с плотностью

$$\varphi(\tau_1)\int_{\tau_1}^b \psi(\tau)\, d\tau,$$

удовлетворяющей всюду на $L=ab$ условию H. Значит, граничные значения функции $\Phi(z)$ существуют в каждой точке $t\in ab$, отличной от концов, и вычисляются по формулам Сохоцкого

$$\Phi^\pm(t)=\pm\frac{1}{2}\varphi(t)\int_t^b \psi(\tau)\, d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\varphi(\tau_1)\, d\tau_1}{\tau_1-t}\int_{\tau_1}^b \psi(\tau)\, d\tau.$$

Этим формулам можно придать несколько иной вид, если учесть, что формула Дирихле

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau_1)\, d\tau_1}{\tau_1-t}\int_{\tau_1}^b \psi(\tau)\, d\tau=\int_a^b \psi(\tau)\, d\tau\int_a^\tau \frac{\varphi(\tau_1)\, d\tau_1}{\tau_1-t} \tag{8.5}$$

справедлива и в том случае, когда один из криволинейных интегралов существует в смысле главного значения. На основании этой формулы получаем окончательно

$$\Phi^{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t) \int_t^b \psi(\tau)\, d\tau + \int_a^b \psi(\tau) F(t, \tau)\, d\tau. \tag{8.6}$$

Из этих формул видно, что каждая точка t контура ab, отличная от концов, для функции (8.3) является точкой разрыва первого рода и в этой точке

$$\Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = \varphi(t) \int_t^b \psi(\tau)\, d\tau. \tag{8.7}$$

Из концевых точек лишь точка a является логарифмической особой точкой интеграла (8.3); в точке b этот интеграл имеет вполне определенное конечное значение

$$\Phi(b) = \int_a^b \psi(\tau) F(b, \tau)\, d\tau.$$

2°. При получении формул (8.6) можно обойтись и без формулы перестановки Дирихле (8.5). Надо лишь заметить, что при наших условиях к интегралу (8.3) по параметру z применима теорема 3.1 о предельном переходе под знаком интеграла. Поэтому

$$\begin{aligned} \Phi^{\pm}(t) &= \int_a^b \psi(\tau) \lim_{z \to t^{\pm}} F(z, \tau)\, d\tau = \\ &= \int_a^t \psi(\tau) F(t^{\pm}, \tau)\, d\tau + \int_t^b \psi(\tau) F(t^{\pm}, \tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Когда $\tau \in at$, точка t лежит на дуге τb; значит в этом случае

$$F(t^{\pm}, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^{\tau} \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1 - t}\, d\tau_1 = F(t, \tau).$$

Когда $\tau \in tb$, то $t \in a\tau$ и по формулам Сохоцкого

$$F(t^{\pm}, \tau) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t) + F(t, \tau).$$

Подставляя эти выражения в формулы (8.8), имеем

$$\Phi^{\pm}(t) = \int_a^t \psi(\tau) F(t, \tau)\, d\tau \pm \frac{1}{2} \varphi(t) \int_t^b \psi(\tau)\, d\tau + \int_t^b \psi(\tau) F(t, \tau)\, d\tau.$$

Чтобы получить формулы (8.6), надо лишь объединить крайние интегралы.

3°. Последний метод вычисления граничных значений интеграла (8.3) применим и в более общем случае, когда рассматривается кусочно-голоморфная функция

$$f(z) = \int_a^b \psi(\tau)\,\Omega[F(z, \tau)]\,d\tau, \tag{8.9}$$

где $\Omega(u)$ — некоторая целая функция, для которой интеграл

$$f(t) = \int_a^b \psi(\tau)\,\Omega[F(t, \tau)]\,d\tau$$

существует в некотором смысле. В силу непрерывности Ω при $z \to t^{\pm}$ имеем

$$f^{\pm}(t) = \int_a^b \psi(\tau)\,\Omega[F(t^{\pm}, \tau)]\,d\tau.$$

Разбивая интеграл по ab на сумму интегралов по дугам at и tb и учитывая значения $F(t^{\pm}, \tau)$ на этих дугах, получим

$$f^{\pm}(t) = \int_a^t \psi(\tau)\,\Omega[F(t, \tau)]\,d\tau + \int_t^b \psi(\tau)\,\Omega\left[F(t, \tau) \pm \frac{1}{2}\varphi(t)\right]d\tau. \tag{8.10}$$

Во всех случаях, когда $\Omega(u+v) \neq \Omega(u-v)$, граничные значения $f^+(t)$ и $f^-(t)$ неодинаковы и

$$f^+(t) - f^-(t) = \int_t^b \psi(\tau)\left\{\Omega\left[F(t, \tau) + \frac{1}{2}\varphi(t)\right] - \right.$$

$$\left. - \Omega\left[F(t, \tau) - \frac{1}{2}\varphi(t)\right]\right\} d\tau. \tag{8.11}$$

В формулы (8.10) и (8.11) функция Ω входит при трех различных значениях аргумента. Можно указать ряд интересных частных случаев, когда эти значения связаны некоторым соотношением, позволяющим несколько упростить эти формулы.

1) Пусть функция $\Omega(u)$ обладает следующим свойством:

$$\Omega(u + v) = \Omega(u)\,A(v) + B(v), \tag{8.12}$$

где A и B — некоторые функции. В этом случае формулы (8.10) примут такой вид

$$f^{\pm}(t) = \int_a^t \psi(\tau)\,\Omega[F(t, \tau)]\,d\tau +$$

$$+ A\left[\pm \frac{1}{2}\varphi(t)\right] \int_t^b \psi(\tau)\,\Omega[F(t, \tau)]\,d\tau + B\left[\pm \frac{1}{2}\varphi(t)\right] \int_t^b \psi(\tau)\,d\tau.$$

Если соотношение (8.12) рассматривать как функциональное уравнение, то, как известно [92, с. 120—121], оно имеет два решения:

а) $\Omega(u) = \alpha u + \beta$, $A(u) = 1$, $B(u) = \alpha u$;

б) $\Omega(u) = \gamma e^{\alpha u} + \beta$, $A(u) = e^{\alpha u}$, $B(u) = \beta(1 - e^{\alpha u})$,

где α, β и γ — постоянные.

Случай а) нам уже знаком, ибо здесь функция $f(z)$, определенная интегралом (8.9), записывается в таком виде $f(z) = \alpha\Phi(z) + \beta$, где $\Phi(z)$ есть рассмотренная нами функция (8.3). Напомним, что в этом случае интеграл $f(t)$ существует как обычный несобственный, ибо у ядра $F(t, \tau)$ на $L = ab$, как видно из формулы (8.2), подвижная логарифмическая особенность. При постоянной $\varphi(t)$ этот случай приводит к интегралам с логарифмическими ядрами, исследованными в работах Ф. Д. Гахова [11] и его учеников К. Д. Сакалюка [54, 55], Ф. В. Чумакова [90, 91] и С. Г. Самко [59, 60].

В случае б) из структуры функции $\Omega(u)$ и формулы (8.2) следует, что ядро интеграла (8.9) на линии интегрирования

$$\Omega[F(t, \tau)] = \beta + \gamma \exp\{\alpha F(t, \tau)\} =$$

$$= \beta + \gamma\left(\frac{t-\tau}{t-a}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi i}\varphi(t)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_a^\tau \frac{\varphi(\tau_1) - \varphi(t)}{\tau_1 - t}\, d\tau_1 \mp \frac{1}{2}\varphi(t)\right\}$$

имеет подвижную степенную особенность с показателем степени $\alpha\varphi(t)/2\pi i$. Подбором функции $\varphi(t)$ и постоянной α можно добиться, чтобы интеграл $f(t)$ существовал либо как несобственный, либо в смысле главного значения. При постоянной $\varphi(t)$ получаются интегралы со степенными ядрами, близкими к изученным в перечисленных выше работах.

2) $$\Omega(u + v) + \Omega(u - v) = 2\Omega(u)\,\Omega(v). \tag{8.13}$$

Это функциональное соотношение возможно лишь в том случае, если [92, с. 101—104]

$$\Omega(u) = \cos \alpha u \quad \text{или} \quad \Omega(u) = \operatorname{ch} \alpha u.$$

При постоянной функции $\varphi(t)$ вновь получаются ядра со степенной особенностью.

3) Функциональное уравнение [92, с. 123—127]

$$\Omega(u + v) + \Omega(u - v) = 2\Omega(u)\, g(v)$$

является более общим, чем уравнение (8.13). Оно имеет два интересных для нас решения

а) $\Omega(u) = A \cos \alpha u + B \sin \alpha u$, $g(u) = \cos \alpha u$;

б) $\Omega(u) = A \operatorname{ch} \alpha u + B \operatorname{sh} \alpha u$, $g(u) = \operatorname{ch} \alpha u$.

Функциональные уравнения, которым удовлетворяет функция Ω, в приведенных частных случаях, являются определенной формой теоремы сложения. Эта теорема справедлива, как известно, не только для некоторых целых функций; алгебраической теореме сложения подчиняются тригонометрические, эллиптические и многие другие функции. Значит, разнообразные кусочно-голоморфные функции вида (8.9) можно получить за счет выбора функции $\Omega(u)$. При этом Ω может зависеть не от одного, а от двух переменных $\Omega[F(z, \tau), \tau]$.

Интегралы (8.3) и (8.9) в свою очередь могут быть источником образования новых разрывных ядер

$$\Phi(z, \tau) = \int_a^\tau \psi(\tau_1) F(z, \tau_1)\, d\tau_1, \quad f(z, \tau) = \int_a^\tau \psi(\tau_1)\, \Omega[F(z, \tau_1)]\, d\tau_1,$$

с помощью которых можно получить кусочно-голоморфные функции вида (8.3) или (8.9). Одним из основных вопросов при их изучении является вопрос о наиболее целесообразном выборе класса функций $\psi(t)$, допустимых в качестве плотности этих интегралов. В простейших случаях логарифмических и степенных ядер этот вопрос наиболее полно рассмотрен в работах С. Г. Самко.

Изложенный в этом параграфе материал принадлежит Н. Б. Плещинскому.

ГЛАВА II

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА

Изучая в предыдущей главе интегралы типа Коши, мы видели, что они представляют из себя исчезающие на ∞ кусочно-аналитические функции, граничные значения которых в обыкновенных точках линии интегрирования связаны формулой Сохоцкого $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t)$. В этой главе, используя свойства интегралов типа Коши, мы построим кусочно-аналитические функции с более сложным заранее заданным соотношением, связывающим их граничные значения на заданной линии.

Задачи об отыскании аналитических или кусочно-аналитических функций по заданным свойствам на границе области аналитичности называют обычно *краевыми или граничными задачами.* В теории аналитических функций такие задачи встречаются очень часто. Так, известную интегральную формулу Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} F(z), & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^-, \end{cases}$$

для конечной области D^+, ограниченной гладким замкнутым контуром L, или для бесконечной области

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} F(\infty), & z \in D^+, \\ F(\infty) - F(z), & z \in D^-, \end{cases}$$

можно интерпретировать как решение простейшей граничной задачи: найти функцию $F(z)$, аналитическую в области D^+ или D^- и непрерывную в $D^+ \cup L$ или $D^- \cup L$, по заданным ее граничным значениям $F(t)$.

Четкая формулировка различных краевых задач встречается впервые в работах Римана [52, с. 79, 177], но у него нет никаких указаний на методы их решения. Позднее Гильберт и его ученики занялись изучением частных случаев поставленных Риманом задач, когда заданное граничное соотношение является линейным. Им удалось привести эти задачи к интегральным уравнениям Фредгольма, но с достаточно сложным ядром, что не позволило получить полного заключения о разрешимости и числе решений. Лишь в 1937 году Ф. Д. Гахову удалось дать простое и вполне законченное решение одной линейной задачи, нашедшей позднее применение при решении ряда интересных прикладных задач из теории упругости, гидромеханики, теории фильтрации и т. д. Эту задачу в настоящее время называют чаще всего *краевой задачей Римана* или *задачей линейного сопряжения*. Решению этой задачи в различных интересных для приложений случаях отведено много места в монографиях Ф. Д. Гахова [8] и Н. И. Мусхелишвили [41]. Мы изложим здесь единый во всех случаях метод решения, в отдельных деталях отличающийся от методов этих двух монографий.

Приведем постановку задачи Римана.

Пусть L есть заданная кусочно-гладкая линия и пусть функция $\Phi(z)$ является

1) аналитической всюду вне L, исключая, разве, бесконечно удаленную точку, в которой она может иметь полюс;

2) имеющей непрерывные граничные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ всюду на L, кроме, может быть, конечного числа точек (они могут быть узлами линии, а могут и не быть), вблизи которых $\Phi(z)$ удовлетворяет условию

$$|\Phi(z)| < \frac{C}{|z-c|^{\alpha}}, \tag{II.1}$$

где C и α — некоторые положительные постоянные.

Такую функцию мы будем называть *кусочно-аналитической* или *кусочно-голоморфной функцией с линией скачков L*.

Предположим, что на линии L заданы две функции $G(t)$ и $g(t)$, удовлетворяющие условию H всюду, за исключением, разве, конечного числа точек, в которых они имеют особенности. Краевой задачей Римана называется следующая задача:

Найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ с линией скачков L, имеющую на бесконечности полюс порядка не выше n, по граничному условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t). \tag{II.2}$$

Функции $G(t)$ и $g(t)$ будем называть *коэффициентами данной задачи*. Краевое условие (II.2) будем считать выполняющимся всюду, кроме узлов линии L и особых точек коэффициентов задачи. Эти точки мы будем иногда называть *исключительными точками*. При решении задачи мы увидим, что в зависимости от характера исключительных точек каждый раз придется уточнять класс кусочно-голоморфных функций, допустимых в качестве решений задачи, что сведется к уточнению характера неравенства (II.1). Иногда мы будем допускать в решениях задачи в исключительных точках только интегрируемые бесконечности ($\alpha < 1$), а иногда вынуждены будем иметь дело и с особенностями неинтегрируемого порядка.

§ 9. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГЛАДКИХ ЗАМКНУТЫХ КОНТУРОВ И НЕПРЕРЫВНЫХ ПО ГЁЛЬДЕРУ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Предположим сначала, что линия L состоит из непересекающихся между собой гладких контуров $L_1, \ldots, L_m$, что $G(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условию H и что всюду на L коэффициент $G(t)$ отличен от нуля. При этих условиях задача Римана не имеет исключительных точек и потому ее решения можно отыскивать среди кусочно-голоморфных функций с непрерывными всюду на L граничными значениями $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$.

1°. Рассмотрим сначала частный случай задачи Римана, когда $G(t) = 1$. Граничное условие можно записать в виде

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \quad t \in L, \tag{9.1}$$

и, следовательно, надо найти кусочно-аналитическую функцию $\Phi(z)$ по заданному скачку $g(t)$, который она испытывает при переходе через линию L.

Нам известно одно частное решение этой задачи. Это интеграл типа Коши

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{\tau - z} \, d\tau. \tag{9.2}$$

Действительно, функция $\Phi_1(z)$, определяемая этим интегралом, кусочно-голоморфна, на ∞ обращается в нуль и в силу формул Сохоцкого (5.8) удовлетворяют условию (9.1).

Чтобы найти решение задачи (9.1) с полюсом на ∞ порядка n, берем разность между искомым решением $\Phi(z)$ и известным частным решением $\Phi_1(z)$: $\psi(z) = \Phi(z) - \Phi_1(z)$. В силу условия (9.1) $\psi^+(t) = \psi^-(t)$ на L. Это означает, что совокупность функций $\psi_1(z), \ldots \ldots, \psi_{m+1}(z)$, аналитических соответственно в областях $D_1, \ldots, D_{m+1}$, на которые линия L разбивает всю плоскость, являются на основании принципа непрерывности [35, с. 87] непосредственными аналитическими продолжениями друг друга через соответствующие участки линии L и, следовательно, функция $\psi(z) = \psi_k(z)$, $z \in D_k$, $k = 1, \ldots, m+1$, является аналитической во всей плоскости, кроме бесконечно удаленной точки, где у нее полюс порядка n, и представляет из себя полином степени не выше n: $\psi(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n = P_n(z)$, где $c_0, \ldots, c_n$ — произвольные комплексные числа. Значит, искомое решение $\Phi(z)$ определится формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau + P_n(z). \tag{9.3}$$

Формула (9.3) определяет общее решение задачи (9.1). Чтобы убедиться в этом, надо взять разность между решением (9.3) и любым другим решением и повторить те же рассуждения, что и при построении функции $\psi(z)$.

Наличие в правой части формулы (9.3) произвольного полинома $P_n(z)$ позволяет сформулировать окончательный вывод в следующей форме:

Теорема 9.1. *Задача определения кусочно-голоморфной функции с линией скачков, состоящей из конечного числа гладких непересекающихся замкнутых контуров, разрешима при любом непрерывном по Гёльдеру скачке $g(t)$ и имеет $n+1$ линейно-независимых решений, имеющих на ∞ порядок не выше n. Единственное исчезающее на ∞ решение этой задачи есть интеграл типа Коши с плотностью $g(t)$.*

2°. Когда в краевом условии (II.2) $g(t) \equiv 0$, задача Римана называется *однородной*. На первый взгляд кажется, что при решении однородной задачи

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \ t \in L, \tag{9.4}$$

надо при помощи логарифмирования привести краевое условие (9.4) к виду (9.1):

$$[\ln \Phi(t)]^+ - [\ln \Phi(t)]^- = \ln G(t). \tag{9.5}$$

Но, к сожалению, эта операция в общем случае не приводит нас к только что рассмотренной задаче о скачке. Объясняется это следующими причинами.

Во-первых, любая фиксированная ветвь $\ln G(t)$ на каждом из контуров $L_1, \ldots, L_m$ может быть разрывной, хотя $G(t) \in H$. Чтобы убедиться в этом, надо заставить точку t от некоторого положения $t_k \in L_k$ обойти один раз контур L_k в положительном направлении и проследить, какую (тоже замкнутую) кривую Γ_k опишет при этом точка $\zeta = \ln G(t)$. Когда Γ_k охватывает начало координат, это означает, что у функции

$$\ln G(t) = \ln |G(t)| + i \arg G(t)$$

мнимая часть $\arg G(t)$ приобретает при обходе приращение $[\arg G(t)]_{L_k} = 2\pi\varkappa_k$, где $\varkappa_k$ есть целое число, равное числу петель Γ_k вокруг начала, положительное или отрицательное в зависимости от того, как движется точка ζ по этим петлям — против или по часовой стрелке. Если до начала обхода положить

$$\ln G(t_k+0)=\ln|G(t_k)|+i\arg G(t_k),$$

то после обхода получим

$$\ln G(t_k-0)=\ln G(t_k+0)+2\pi i\varkappa_k,$$

так что в точке t_k функция $\ln G(t)$ претерпевает разрыв первого рода с величиной скачка

$$\Delta_k=\ln G(t_k-0)-\ln G(t_k+0)=2\pi i\varkappa_k. \tag{9.6}$$

Разделенное на 2π приращение аргумента функции $G(t)$ при одном обходе контура L_k в положительном направлении называют *индексом функции* $G(t)$ относительно контура L_k. Имеем:

$$\varkappa_k=\operatorname{Ind}_{L_k}G(t)=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{L_k}=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_{L_k}. \tag{9.7}$$

Когда Γ_k не охватывает начала, $\varkappa_k=0$.

Таким образом, если функция $G(t)$ имеет отличный от нуля индекс относительно хотя бы одного контура L_k, входящего в L, то правая часть в краевом условии (9.5) имеет точку разрыва первого рода в некоторой точке t_k, принятой на L_k за начало обхода.

Второе отличие задачи (9.5) от задачи, рассмотренной нами в пункте 1°, состоит в том, что $\ln\Phi(z)$ в общем случае есть функция неоднозначная и, следовательно, не принадлежит к рассматриваемому нами классу кусочно-голоморфных функций. Причиной многозначности $\ln\Phi(z)$ являются нули функции $\Phi(z)$. Когда в краевом условии (9.4) $\Phi^+(t)\neq 0$ и $\Phi^-(t)\neq 0$ всюду на L, не решая задачи, можно установить связь между числом нулей и величиной индекса $G(t)$ относительно всей линии, то есть суммой всех $\varkappa_k$, $k=1,\dots,m$. Для этого заставим в краевом условии (9.4) точку t обойти один раз в положительном направлении всю линию L и подсчитаем полученное при этом приращение аргумента обеих частей равенства. Имеем

$$[\arg\Phi^+(t)]_L-[\arg\Phi^-(t)]_L=[\arg G(t)]_L. \tag{9.8}$$

Значение правой части подсчитывается просто

$$[\arg G(t)]_L=2\pi(\varkappa_1+\dots+\varkappa_m)=2\pi\varkappa.$$

Что касается левой части, то очевидно

$$[\arg \Phi^+(t)]_L - [\arg \Phi^-(t)]_L = \sum_{k=1}^{m+1} [\arg \Phi_k(t)]_{\partial D_k},$$

где через $\Phi_k(t)$ обозначено граничное значение $\Phi(z) = \Phi_k(z)$ из области D_k, а через ∂D_k — граница этой области. Функции $\Phi_k(z)$ удовлетворяют всем требованиям принципа аргумента [35, с. 82—83]. Поэтому, обозначая через n_k число нулей $\Phi_k(z)$ в D_k и предполагая, что ∞ принадлежит области D_{m+1}, будем иметь

$$[\arg \Phi_k(t)]_{\partial D_k} = 2\pi n_k, \quad k = 1, \dots, m;$$

$$[\arg \Phi_{m+1}(t)]_{\partial D_{m+1}} = 2\pi(n_{m+1} - n).$$

Если общее число нулей $\Phi(z)$ обозначить через $N = n_1 + \dots + n_{m+1}$, то равенство (9.8) запишется в таком виде:

$$N = n + \varkappa. \tag{9.9}$$

Число N — неотрицательное. Поэтому из равенства (9.9) получаем два интересных вывода:

1. Условие $n + \varkappa \geqslant 0$ является необходимым для разрешимости однородной задачи Римана.

2. При $n + \varkappa > 0$ решение однородной задачи Римана имеет ровно $n + \varkappa$ нулей. Необращающееся в нуль решение задача имеет только при $n + \varkappa = 0$.

Заметим, что при нашем требовании, чтобы $\Phi^+(t) \neq 0$ и $\Phi^-(t) \neq 0$ всюду на L, соотношение (9.9) имеет место не только в том случае, когда решение однородной задачи $\Phi(z)$ имеет на ∞ полюс $(n > 0)$, но и в том случае, когда оно на ∞ ограничено $(n = 0)$ или обращается в нуль $(n < 0)$. Это означает, что под $(-n)$ в соотношении (9.9) можно понимать *порядок* $\Phi(z)$ на ∞.

Каким же образом решается однородная задача Римана, если непосредственный переход к задаче (9.1) невозможен?

Основным моментом при решении является *факторизация коэффициента* $G(t)$, то есть представление его в виде произведения или, что более удобно, в виде отношения граничных значений $X^+(t)$ и $X^-(t)$ некоторой кусочно-голоморфной функции $X(z)$ с той же линией скачков L. Когда такая функция $X(z)$ известна, краевое условие (9.4) на основании равенства

$$G(t) = X^+(t)/X^-(t) \tag{9.10}$$

переписывается в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}. \tag{9.11}$$

Это равенство будет выполняться для всех $t \in L$, если всюду на L

$$X^+(t) \neq 0, \quad X^-(t) \neq 0. \tag{9.12}$$

При выполнении этих условий задача сводится к построению функции $\Omega(z) = \Phi(z)/X(z)$, аналитической всюду, кроме, может быть, бесконечно удаленной точки и нулей функции $X(z)$; во всех этих точках $\Omega(z)$ может иметь только полюсы. Число их конечно, ибо в силу условий (9.10) и (9.12) для нашей функции $X(z)$ имеет место соотношение (9.9): $N = \nu + \varkappa$, где ν есть порядок $X(z)$ на ∞. Точное значение N нам будет известно при фиксированном ν. Очевидно, что разумнее всего строить $X(z)$ с таким порядком на ∞, чтобы $N = 0$, то есть чтобы

$$\nu = -\varkappa. \tag{9.13}$$

Если и это требование выполнено, то функция $\Omega(z) = \Phi(z)/X(z)$ является аналитической всюду, кроме бесконечно удаленной точки, где она имеет порядок $n + \varkappa$. Значит, при $n + \varkappa \geqslant 0$ функция $\Omega(z)$ есть полином степени $n + \varkappa$ с произвольными коэффициентами: $\Omega(z) = P_{n+\varkappa}(z)$. При $n + \varkappa < 0$ по теореме Лиувилля [35, с. 61] $\Omega(z) \equiv 0$.

Итогом изложенного является

Теорема 9.2. *Если функция $X(z)$ известна и $n + \varkappa \geqslant 0$, где $\varkappa$ — индекс коэффициента $G(t)$, а n — порядок искомого решения на бесконечности, то однородная задача разрешима и все ее решения определяются формулой*

$$\Phi(z) = X(z)\, P_{n+\varkappa}(z), \tag{9.14}$$

где $P_{n+\varkappa}(z)$ — полином с произвольными коэффициентами. При $n + \varkappa < 0$ однородная задача отличных от нуля решений не имеет.

Функцию $X(z)$ с указанными выше свойствами (9.10), (9.12) и (9.13) принято называть *канонической функцией однородной задачи Римана.* Коротко можно сказать, что *каноническая функция есть такое решение однородной задачи Римана, которое нигде в конечной плоскости не обращается в нуль.* Это определение, очевидно, равносильно следующему: *каноническая функция $X(z)$ есть решение однородной задачи, которое одновременно с $1/X(z)$ принадлежит классу допустимых функций.*

Остается убедиться в существовании канонической функции.

Обращаемся к краевому условию (9.4). Так как $G(t) \neq 0$ всюду на L, то путем фиксирования значений $\ln G(t)$ на каждом из контуров L_k получим вполне определенную ветвь этой функции на линии L. Мы уже знаем, что в некоторых точках $t_1 \ldots, t_m$, принятых соответственно на контурах $L_1, \ldots, L_m$ за начало обхода, функция $\ln G(t)$ имеет разрывы первого рода и в точке $t_k \in L_k$ величина скачка определяется формулой (9.6). Если положить

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau, \tag{9.15}$$

то непосредственной проверкой легко убедиться, что функция $\exp \Gamma(z)$ при всех $t \neq t_k$ удовлетворяет краевому условию (9.4), так что при $t \neq t_k$

$$G(t) = e^{\Gamma^+(t)} e^{-\Gamma^-(t)}. \tag{9.16}$$

Однако эта факторизация коэффициента $G(t)$ не удовлетворяет всем нашим требованиям, ибо при $\varkappa_k \neq 0$ в точках t_k функция $\exp \Gamma(z)$ имеет нули или бесконечности. Чтобы убедиться в этом, записываем интеграл (9.15) в виде суммы интегралов по всем контурам

$$\Gamma(z) = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_k(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{\ln G_k(\tau)}{\tau - z} d\tau. \tag{9.17}$$

Плотность каждого из интегралов $\Gamma_k(z)$ в точке t_k имеет разрыв первого рода и потому каждый $\Gamma_k(z)$ можно представить по формуле (6.5). Будем иметь

$$\Gamma_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{\ln \widetilde{G}_k(\tau)}{\tau - z} d\tau + \begin{cases} \varkappa_k \ln(z - t_k), & z \text{ внутри } L_k, \\ \varkappa_k \ln \dfrac{z - t_k}{z - z_k}, & z \text{ вне } L_k. \end{cases} \tag{9.18}$$

Здесь мы объединили оба возможных случая: и когда D_k^+, как в формуле (6.5), являясь конечной, находится внутри L_k, и когда D_k^+ бесконечна. В соответствии с этим

$$\widetilde{G}_k(t) = (t - z_k)^{\mp \varkappa_k} G_k(t), \tag{9.19}$$

при этом произвольная точка z_k в обоих случаях берется внутри L_k. Допустим, что точка z находится внутри $L_{\lambda_1}, \ldots, L_{\lambda_q}$ и, следовательно, вне остальных контуров L_k, $k \neq \lambda_j$. На основании формул (9.17) — (9.19) получим

$$\Gamma(z) = \widetilde{\Gamma}(z) + \sum_{k=\lambda_j} \varkappa_k \ln(z - t_k) + \sum_{k \neq \lambda_j} \varkappa_k \ln \frac{z - t_k}{z - z_k}, \tag{9.20}$$

$$e^{\Gamma(z)} = e^{\widetilde{\Gamma}(z)} \prod_{k=1}^{m} (z - t_k)^{\varkappa_k} \prod_{k \neq \lambda_j} (z - z_k)^{-\varkappa_k}, \tag{9.21}$$

где

$$\widetilde{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\ln \widetilde{G}(\tau)}{\tau - z}\, d\tau, \quad \widetilde{G}(t) = \widetilde{G}_k(t), \; t \in L_k. \tag{9.22}$$

Из формулы (9.21) видно, что в каждой точке t_k при $\varkappa_k \neq 0$ функция $\exp \Gamma(z)$ действительно обращается в нуль или бесконечность.

Из той же формулы (9.21) сразу видно, что если умножением $\exp \Gamma(z)$ на рациональную функцию $\prod\limits_{k=1}^{m} (z - t_k)^{-\varkappa_k}$ мы избавимся от нулей и бесконечностей в точках t_k, то получим искомую каноническую функцию

$$X(z) = e^{\Gamma(z)} \prod_{k=1}^{m} (z - t_k)^{-\varkappa_k}. \tag{9.23}$$

Действительно, если вычислить $X^+(t)$ и $X^-(t)$, не обращающиеся в нуль по построению, и учесть равенство (9.16), то будем иметь

$$\frac{X^+(t)}{X^-(t)} = e^{\Gamma^+(t)} \prod_{k=1}^{m} (t - t_k)^{-\varkappa_k} e^{-\Gamma^-(t)} \prod_{k=1}^{m} (t - t_k)^{\varkappa_k} = G(t).$$

Из представления (9.23) видно, что $X(z)$ на ∞ имеет порядок $(-\varkappa)$ и, значит, в силу соотношения (9.9) нигде на конечном расстоянии нулей не имеет.

Построение канонической функции $X(z)$ завершает решение однородной задачи. Заметим только, что так как $X(z)$ функция кусочно-голоморфная, формула (9.23) определяет $m+1$ разных функций, аналитических, соответственно в областях $D_1, \ldots, D_{m+1}$, на которые линия L разбивает комплексную плоскость. Поэтому при конкретных вычислениях надо обращаться к формулам (9.19) — (9.22), в силу которых

$$X(z) = e^{\widetilde{\Gamma}(z)} \prod_{k \neq \lambda_j} (z - z_k)^{-\varkappa_k}, \tag{9.24}$$

когда z есть любая точка того куска, который находится внутри контуров $L_{\lambda_1}, \ldots, L_{\lambda_q}$. Интеграл типа Коши $\widetilde{\Gamma}(z)$

с плотностью $\ln \widetilde{G}(t) \in H$ всюду на L вычисляется при помощи формул (9.22) и (9.19).

Из формул (9.23), (9.22) и (9.19) следует, что как $X^+(t)$, $X^-(t)$, так и граничные значения $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ любого решения (9.14) однородной задачи Римана принадлежат всюду на L классу H.

3°. Неоднородная задача Римана с граничным условием (II.2), где $g(t) \not\equiv 0$, решается просто. Пусть $X(z)$ — каноническая функция соответствующей однородной задачи. На основании равенства (9.10) краевое условие (II.2) переписываем в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}.$$

Отношение $g(t)/X^+(t)$ всюду на L удовлетворяет условию H, функция $\Phi(z)/X(z)$ на бесконечности имеет конечный порядок $n + \varkappa$. Значит, получили задачу, рассмотренную в пункте 1° этого параграфа. Решая ее, получим

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)\, d\tau}{X^+(\tau)(\tau - z)} + P_{n+\varkappa}(z),$$

откуда

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z) P_{n+\varkappa}(z). \tag{9.25}$$

Это и есть общее решение неоднородной задачи. При $n + \varkappa \geqslant 0$ оно содержит $n + \varkappa + 1$ произвольных постоянных.

При решении многих прикладных задач часто приходится отыскивать решение неоднородной задачи Римана, исчезающее на бесконечности, то есть порядка не выше $n = -1$. Так как порядок $X(z)$ на бесконечности равен $(-\varkappa)$, то при $\varkappa < 0$ все такие решения получаются из той же формулы (9.25), если в ней положить $n = -1$, а при $\varkappa = 0$ в этой формуле надо считать $P_{-1} \equiv 0$. При $\varkappa < 0$ мы должны положить $P_{\varkappa-1} \equiv 0$ и потребовать, чтобы в разложении Лорана

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} = -\frac{z^{-1}}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\, d\tau - \frac{z^{-2}}{2\pi i} \int_L \frac{\tau g(\tau)}{X^+(\tau)}\, d\tau - \ldots$$

коэффициенты при z^{-1}, $z^{-2}, \ldots, z^{\varkappa}$ были равны нулю. Имеем, таким образом, следующий результат.

Теорема 9.3. *Если* $\varkappa \geqslant 0$, *общее решение неоднородной задачи Римана* (II.2), *исчезающее на бесконечности, дается формулой*

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z) P_{\varkappa-1}(z), \tag{9.26}$$

где $P_{\varkappa-1}(z)$ — *произвольный полином степени не выше* $\varkappa-1$, *причем* $P_{\varkappa-1}\equiv 0$ *при* $\varkappa=0$. *При* $\varkappa<0$ *единственное решение*

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z} \tag{9.27}$$

существует тогда и только тогда, если выполнены следующие дополнительные условия

$$\int\limits_L \frac{\tau^k}{X^+(\tau)}\,g(\tau)\,d\tau=0,\quad k=0,\ 1,\dots,\ -\varkappa-1. \tag{9.28}$$

Условия разрешимости (9.28) часто записываются в другой форме, через решения так называемой союзной однородной задачи. Однородные задачи Римана с граничными условиями

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t),\quad \psi^+(t)=[G(t)]^{-1}\psi^-(t) \tag{9.29}$$

называются *союзными*.

Из сказанного выше следует, что если $\varkappa$ и $X(z)$ — индекс и каноническая функция первой задачи (9.29), то $(-\varkappa)$ и $[X(z)]^{-1}$ будут индексом и канонической функцией второй. При $\varkappa<0$, как видно из формулы (9.14), первая задача не имеет отличных от нуля исчезающих на бесконечности решений, в то время как союзная с ней имеет их ровно $(-\varkappa)$:

$$\psi_k(z)=\frac{z^k}{X(z)},\quad k=0,\ 1,\dots,\ -\varkappa-1. \tag{9.30}$$

Обращаясь теперь к равенствам (9.28), видим, что их можно переписать в таком виде

$$\int\limits_L \psi_k^+(\tau)\,g(\tau)\,d\tau=0,\quad k=0,\ 1,\dots,\ -\varkappa-1. \tag{9.31}$$

4°. При построении канонической функции $X(z)$ внутри каждого контура L_k мы ввели произвольную точку z_k. Формула (9.23), определяющая $X(z)$, наводит на мысль, что $X(z)$ фактически не зависит от выбора $z_1, z_2, \dots, z_m$. Проверить это можно непосредственным вычислением, но при этом удобнее пользоваться не формулой (9.23), а эквивалентной ей формулой (9.24).

Допустим, что кроме канонической функции $X(z)$, мы построили еще одну такую же функцию $X_*(z)$, заменив точки $z_1,\dots,z_m$ на точки $z_1^*,\dots,z_m^*$, так же расположенные внутри контуров $L_1,\dots,L_m$ соответственно. На основании формул (9.24), (9.22) и (9.19) будем иметь

$$\frac{X(z)}{X_*(z)} = e^{\widetilde{\Gamma}(z) - \widetilde{\Gamma}_*(z)} \prod_{k \neq \lambda_j} \left(\frac{z - z_k}{z - z_k^*} \right)^{-\varkappa_k},$$

$$\widetilde{\Gamma}_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \widetilde{G}_*(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad \widetilde{G}_*(t) = (t - z_k^*)^{\mp \varkappa_k} G_k(t), \ t \in L_k,$$

$$\widetilde{\Gamma}(z) - \widetilde{\Gamma}_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \widetilde{G}(\tau) - \ln \widetilde{G}_*(\tau)}{\tau - z} d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\mp \varkappa_k}{2\pi i} \int_{L_k} \ln \left(\frac{\tau - z_k}{\tau - z_k^*} \right) \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

В соответствии с нашим выбором ветвей логарифмов $\ln(z - z_k)$ и $\ln(z - z_k^*)$ под $\ln[(\tau - z_k)/(\tau - z_k^*)]$ мы можем понимать значение соответствующей ветви $\ln[(z - z_k)/(z - z_k^*)]$ на контуре L_k. Вне L_k эта ветвь голоморфна и обращается в нуль на бесконечности. Поэтому на основании интегральной формулы Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \ln \left(\frac{\tau - z_k}{\tau - z_k^*} \right) \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 0, & z \text{ внутри } L_k, \\ \mp \ln \dfrac{z - z_k}{z - z_k^*}, & z \text{ вне } L_k, \end{cases}$$

где, как и раньше, верхний знак соответствует тому случаю, когда при обходе L_k в положительном направлении внутренность L_k остается слева, а нижний знак — когда справа. Отсюда для любой точки z, находящейся внутри контуров $L_{\lambda_1}, \ldots, L_{\lambda_q}$, получаем

$$\widetilde{\Gamma}(z) - \widetilde{\Gamma}_*(z) = \sum_{k \neq \lambda_j} \varkappa_k \ln \frac{z - z_k}{z - z_k^*}$$

и, значит, $X(z)/X_*(z) = 1$.

Таким образом, *каноническая функция, а следовательно, и любое решение задачи Римана не зависит от выбора точек* $z_1, \ldots, z_m$.

5°. Пусть теперь контуры $L_1, \ldots, L_m$, составляющие линию L, имеют конечное число общих точек — точек пересечения и касания. Эти точки для краткости мы будем называть d-точками.

Под коэффициентами $G(t)$ и $g(t)$ при формулировке задачи мы будем понимать функции, определенные следующим образом: $G(t) = G_k(t)$ и $g(t) = g_k(t)$ на L, кроме

d-точек, при этом функции $G_k(t)$ и $g_k(t)$, заданные на контурах L_k $(k=1, \ldots, m)$, удовлетворяют на них условию H. В d-точках функции $G(t)$ и $g(t)$ не определены вообще.

Неопределенными в d-точках будут и граничные значения искомой функции $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ даже в том случае, когда они существуют при стремлении z к d из каждой области D_k. Поэтому в формулировке задачи Римана естественно требовать, чтобы граничное условие (II.2) выполнялось всюду на L, кроме d-точек, и отыскивать решение задачи в классе кусочно-аналитических функций, непрерывно продолжимых на L всюду, кроме d-точек, в окрестности которых они должны быть ограничены.

При этих условиях все изложенное в пунктах 1°—4° этого параграфа останется в силе и решение задачи во всех случаях определится по тем же формулам, как и при отсутствии общих точек. Проверить, выполнимы ли требования ограниченности решения вблизи d-точек, на основании сказанного в п. 6° § 5 очень просто.

Задача Римана для пересекающихся контуров впервые была решена В. Тржицинским [98]. Значительные упрощения в методе решения были сделаны Д. А. Квеселава [30] и в совместной работе Ф. Д. Гахова и Л. И. Чибриковой [13].

В случае замкнутых непересекающихся контуров основная заслуга при решении задачи Римана, как уже указывалось ранее, принадлежит Ф. Д. Гахову. В 1937 году он дал полное решение задачи для одного замкнутого гладкого контура путем приведения к случаю нулевого индекса [9; 8, с. 111—123]. На случай нескольких замкнутых контуров этот метод был обобщен Б. Х. Хведелидзе [68; 41, с. 146—163].

§ 10. СЛУЧАЙ РАЗОМКНУТЫХ КОНТУРОВ

1°. Предположим сначала, что линия L состоит из гладких разомкнутых контуров $L_k=a_kb_k$ $(k=1, \ldots, m)$ без общих точек. В отличие от случая замкнутых контуров здесь линия L не разбивает комплексную плоскость на куски, и мы имеем одну область D, содержащую бесконечно удаленную точку и ограниченную двубережными разрезами вдоль контуров $L_1, \ldots, L_m$, так что $\partial D=\bigcup\limits_{k=1}^{m}(L_k^+\bigcup L_k^-)$.

Задача Римана состоит в данном случае в отыскании *одной однозначной функции* $\Phi(z)$, аналитической в области D всюду, кроме, может быть, бесконечно удаленной точки, где она должна иметь заданный порядок n, если ее граничные значения $\Phi^+(t)=\Phi(t^+)$ и $\Phi^-(t)=\Phi(t^-)$ связаны соотношением

$$\Phi(t^+)=G(t)\Phi(t^-)+g(t) \tag{10.1}$$

или же соотношением

$$\Phi(t^-) = G_*(t)\,\Phi(t^+) + g_*(t), \tag{10.1*}$$

где $G(t)$, $G_*(t)$ и $g(t)$, $g_*(t)$ — заданные на L функции класса H_0.

Ясно, что задавать надо лишь одно из этих соотношений, например, соотношение (10.1), так как при одновременном задании соотношений (10.1) и (10.1*) на L должно было бы выполняться тождество

$$\Phi(t^+)\,[1 - G(t)\,G_*(t)] = G(t)\,g_*(t) + g(t),$$

а это возможно лишь в двух случаях: либо при $G(t)\,G_*(t) \neq 1$ должно быть

$$\Phi(t^+) = \frac{G(t)\,g_*(t) + g(t)}{1 - G(t)\,G_*(t)},$$

либо

$$G(t)\,G_*(t) = 1, \quad g(t) + G(t)\,g_*(t) = 0. \tag{10.2}$$

В первом случае задача восстановления функции $\Phi(z)$ тривиальна и интереса не представляет; выполнение же равенств (10.2) говорит о том, что условие (10.1*) есть следствие условия (10.1) и получается из него разрешением относительно $\Phi(t^-)$.

Наша форма записи граничного условия (10.1) хорошо подчеркивает принципиальную разницу между задачами Римана в случае замкнутых и разомкнутых непересекающихся контуров. В случае разомкнутых контуров граничное условие связывает предельные значения искомой функции $\Phi(z)$ *в разных точках* t^+ и t^- границы области D, расположенных друг против друга на берегах разреза L.

При решении задачи мы будем считать, что граничное условие (10.1) выполняется всюду на L, кроме, может быть, концевых точек (c-точек).

Чтобы уточнить условия (II.1), определяющие поведение искомой функции в окрестности исключительных c-точек, рассмотрим простейшую задачу

$$\Phi(t^+) - \Phi(t^-) = g(t). \tag{10.3}$$

Зная граничные свойства интегралов типа Коши (§ 5), мы можем утверждать, что одним из частных решений задачи (10.3), исчезающим на бесконечности, является интеграл

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{\tau - z}\,d\tau. \tag{10.4}$$

Все c-точки, в которых $g(c) \neq 0$, будут для $\Phi_1(z)$ логарифмическими особыми точками, то есть особыми точками интегрируемого порядка. Легко убедиться, что задача (10.3) других исчезающих на бесконечности решений с интегрируемыми особенностями в c-точках не имеет. Если $\Phi(z)$ есть такое решение, удовлетворяющее в окрестности c-точек условиям

$$|\Phi(z)| < \frac{C}{|z-c|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \tag{10.5}$$

то разность $\psi(z) = \Phi(z) - \Phi_1(z)$ удовлетворяет на L условию $\psi(t^+) = \psi(t^-)$ при всех $t \neq c$. Значит, $\psi(z)$ аналитически продолжима через дуги $L_1, \ldots, L_m$ и представляет аналитическую на плоскости функцию с изолированными особенностями в c-точках, в окрестности которых для нее справедлива оценка вида (10.5). В силу этой оценки c-точки не могут быть для $\psi(z)$ ни полюсами, ни существенно особыми точками. Ни могут они быть и точками ветвления, так как любая однозначная функция с точками ветвления имеет линии разрыва с концами в этих точках, а наша функция $\psi(z)$ при всех $z \neq c$ непрерывна. Следовательно, c-точки являются для $\psi(z)$ устранимыми особенностями и по теореме Лиувилля с учетом условия $\psi(\infty) = 0$ получаем $\psi(z) \equiv 0$.

Решение задачи (10.3), имеющее на бесконечности полюс порядка не выше n, а в окрестности c-точек удовлетворяющее тем же условиям (10.5), получается при помощи аналогичных рассуждений, но здесь функция $\psi(z)$ имеет на бесконечности полюс порядка n. Поэтому получаем

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{g(\tau)}{\tau - z}\, d\tau + P_n(z), \tag{10.6}$$

где $P_n(z)$ — многочлен с произвольными коэффициентами.

Таким образом, решения задачи (10.3), удовлетворяющие в окрестности c-точек условиям (10.5), имеют тот же вид, что и решения соответствующей задачи (9.1) в случае замкнутых контуров. И вывод об условиях разрешимости и числе линейно-независимых решений является почти дословным повторением теоремы 9.1. Немного усложнилась лишь схема рассуждений при получении решений в связи с дополнительным исследованием поведения $\psi(z)$ вблизи c-точек.

Заметим, что если бы за исходное граничное условие мы взяли соотношение (10.1), то в качестве аналога задачи (10.3) имели бы задачу с граничным условием

$$\Phi(t^-) - \Phi(t^+) = g_*(t). \tag{10.3*}$$

Учитывая, что в силу второго из равенств (10.2), если положить там $G \equiv 1$, функции $g(t)$ и $g_*(t)$ связаны соотношением

$$g(t) + g_*(t) = 0, \tag{10.7}$$

заключаем, что задачи (10.3) и (10.3*) тождественны между собой.

Условия интегрируемости (10.5) появились у нас как следствие наших требований, наложенных на функцию $g(t)$: интеграл типа Коши с гельдеровой плотностью в концевых точках может иметь лишь интегрируемые особенности. Из результатов § 6 вытекает, что допущение у $g(t)$ в c-точках некоторых интегрируемых особенностей при решении задачи (10.3) также не приведет к расширению класса решений. Поэтому вполне естественно и решения задачи (10.1) в общем случае отыскивать также в классе однозначных аналитических в D функций, имеющих в точке $z=\infty$ порядок не выше n и допускающих вблизи c-точек оценку (10.5).

2°. Так же как в случае гладких замкнутых контуров, при решении однородной и неоднородной задачи (10.1) нам понадобится каноническая функция, осуществляющая факторизацию коэффициента $G(t)$.

Канонической функцией мы назовем такое решение $X(z)$ однородной задачи

$$\Phi(t^+) = G(t)\,\Phi(t^-), \tag{10.8}$$

которое одновременно с $1/X(z)$ принадлежит к классу функций, допустимых в качестве решений.

В силу этого определения вблизи c-точек обе функции $X(z)$ и $1/X(z)$ должны удовлетворять условиям вида (10.5).

При построении канонической функции обращаемся к граничному условию (10.8). На каждом из контуров $L_1, \ldots, L_m$ фиксируем какое-либо из непрерывных значений $\ln G_k(t)$, в результате чего на линии L получаем вполне определенную функцию $\ln G(t)$ класса H_0. Берем функцию

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_k} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_k(z). \tag{10.9}$$

Применяя формулы Сохоцкого, видим, что функция $\exp\Gamma(z)$ удовлетворяет граничному условию (10.8), так что при всех $t \neq c$

$$G(t) = e^{\Gamma(t^+)}\,e^{-\Gamma(t^-)}. \tag{10.10}$$

Чтобы знать поведение $\exp\Gamma(z)$ вблизи c-точек, запишем каждый из интегралов $\Gamma_k(z)$ в (10.9) в виде (5.21):

$$\Gamma_k(z) = -\frac{\ln G(a_k)}{2\pi i}\ln(z-a_k) + \frac{\ln G(b_k)}{2\pi i}\ln(z-b_k) + \Omega_k(z),$$

где в соответствии с формулами (5.22) и (5.19)

$$\Omega_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{\omega_k(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + \frac{\ln G(b_k) - \ln G(a_k)}{2\pi i\,(b_k - a_k)}\times$$

$$\times\,[b_k - a_k + (z-b_k)\ln(z-b_k) - (z-a_k)\ln(z-a_k)], \quad (10.11)$$

$$\omega_k(t) = \ln G(t) - \ln G(a_k) - \frac{\ln G(b_k) - \ln G(a_k)}{b_k - a_k}(t-a_k). \quad (10.12)$$

Если для удобства расположить все c-точки в некотором порядке $c_1, c_2, \ldots, c_{2m}$ и положить

$$\mp\frac{\ln G(c_k)}{2\pi i} = \alpha_k + i\beta_k, \quad (10.13)$$

то для функций $\Gamma(z)$ и $\exp\Gamma(z)$ получим такие представления

$$\Gamma(z) = \sum_{k=1}^{2m}(\alpha_k + i\beta_k)\ln(z-c_k) + \Omega(z),$$
$$e^{\Gamma(z)} = e^{\Omega(z)}\prod_{k=1}^{2m}(z-c_k)^{\alpha_k+i\beta_k}, \quad (10.14)$$

где функция $\Omega(z) = \Omega_1(z) + \ldots + \Omega_m(z)$ является однозначной и аналитической в области D с разрезами (b_k, ∞), $k=1,\ldots,m$, вдоль некоторых простых непересекающихся между собой линий. Из представления (10.14) видно, что в тех точках c_k, где $\alpha_k \neq 0$, функция $\exp\Gamma(z)$ имеет нуль или бесконечность, порядок которых может быть больше единицы, и тогда $\exp\Gamma(z)$ и $\exp[-\Gamma(z)]$ не будут одновременно принадлежать классу функций, среди которых ищется решение задачи. Поэтому перепишем равенство (10.10) в таком виде

$$G(t) = e^{\Gamma(t^+)}\prod_{k=1}^{2m}(t-c_k)^{-\varkappa_k} e^{-\Gamma(t^-)}\prod_{k=1}^{2m}(t-c_k)^{\varkappa_k} = X^+(t)/X^-(t) \quad (10.15)$$

и подберем целые числа $\varkappa_k$ так, чтобы функция

$$X(z) = e^{\Gamma(z)}\prod_{k=1}^{2m}(z-c_k)^{-\varkappa_k} \quad (10.16)$$

и функция $1/X(z)$ принадлежали множеству допустимых функций. Если на основании формулы (10.14) функцию $X(z)$ записать в такой форме

$$X(z) = e^{\Omega(z)} \prod_{k=1}^{2m} (z - c_k)^{\alpha_k - \varkappa_k + i\beta_k}, \tag{10.16*}$$

то сразу видно, что свобода выбора чисел $\varkappa_k$ в разных точках c_k неодинакова. Следуя Н. И. Мусхелишвили, назовем точки c_k *особенными*, если в них α_k есть целое число или нуль. Ясно, что для этих точек числа $\varkappa_k$ можно взять лишь такими, чтобы $\alpha_k - \varkappa_k = 0$. В неособенных точках $\varkappa_k$ можно выбирать двумя способами: или так, чтобы $0 < \alpha_k - \varkappa_k < 1$, если хотим получить решение, ограниченное в окрестности c_k, либо так, чтобы $-1 < \alpha_k - \varkappa_k < 0$, если у решения в точке c_k допускать бесконечность интегрируемого порядка. Поэтому удобно, по Мусхелишвили, разбить множество допустимых функций на классы, относя к классу $h_q = h\ (c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_q})$ решения, ограниченные в окрестности q указанных неособенных точек и имеющие бесконечности порядка меньше единицы в остальных неособенных c-точках. Если выбор чисел $\varkappa_k$ соответствует одному из классов h_q, то функция $X(z)$, определенная формулой (10.14), будет канонической функцией класса h_q.

Очевидно, каноническая функция $X(z)$ нигде в D, кроме, может быть, бесконечно удаленной точки, в нуль не обращается; во всех обыкновенных точках линии L граничные значения $X(t^+)$ и $X(t^-)$ также отличны от нуля. На бесконечности $X(z)$ имеет порядок $(-\varkappa)$, где

$$\varkappa = \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_{2m}. \tag{10.17}$$

Целое число $\varkappa$, определяемое формулой (10.17), будем называть *индексом задачи* (10.1) *класса* h_q.

Индекс $\varkappa$ не зависит от выбора значений функции $\ln G(t)$, так как если заменить выбранную ветвь $\ln G_j(t)$ на контуре L_j другой ветвью $\ln G_j(t) + 2\pi ip$, где p — некоторое целое число, то из формулы (10.13) видно, что в точке $c_k = a_j$ вместо α_k вещественная часть станет равной $\alpha_k - p$, а в точке $c_l = b_j$ вместо α_l будет $\alpha_l + p$, в результате чего при вычислении индекса по формуле (10.17) слагаемое $\varkappa_k$ заменится на $\varkappa_k + p$, а слагаемое $\varkappa_l$ — на $\varkappa_l - p$ и вся сумма останется неизменной.

Сравним между собой индексы двух классов

$$h_q = h\ (c_{j_1}, \ldots, c_{j_q}) \text{ и } h_{q+r} = h\,(c_{j_1}, \ldots, c_{j_q}, c_{j_{q+1}}, \ldots, c_{j_{q+r}}).$$

Второй класс отличается от первого условиями ограниченности решений в дополнительных r неособенных точках $c_{j_{q+1}}, \ldots, c_{j_{q+r}}$. Значит, при построении канонической функции класса h_{q+r} вместо неравенств

$$-1 < \alpha_k - \varkappa_k < 0 \quad (k = j_{q+1}, \ldots, j_{q+r})$$

мы имеем неравенства $0 < \alpha_k - (\varkappa_k - 1) < 1 \quad (k = j_{q+1}, \ldots, j_{q+r})$ и индексом класса h_{q+r} будет $\tilde{\varkappa} = \varkappa - r$. Таким образом, требование ограниченности решения в r дополнительных неособенных c-точках уменьшает индекс задачи на r единиц, так что индекс класса h_0 больше индексов всех других классов, а индекс класса h_p, где p — число всех неособенных концов линии L, является наименьшим.

Заметим кстати, что число всех классов легко подсчитывается. Класс h_0 один; классов $h_1 = h(c_j)$, очевидно, столько, сколько всех неособенных c-точек, то есть p; $p(p-1)/2$ классов $h_2 = h(c_j, c_k)$ и т. д. Всего получаем

$$1 + p + \frac{p(p-1)}{2} + \ldots + 1 = 2^p.$$

Назвав порядок канонической функции на бесконечности, взятый со знаком минус, индексом задачи Римана в рассматриваемом классе h_q, мы добились единообразия в терминологии и в случае замкнутых, и в случае разомкнутых контуров. Однако надо иметь в виду, что если в случае замкнутых контуров индекс задачи в указанном здесь смысле являлся индексом коэффициента $G(t)$, то в случае разомкнутых контуров этого нет.

3°. Общее решение однородной задачи в любом классе h_q отыскивается следующим образом. При помощи канонической функции $X(z)$ этого класса краевое условие (10.8) приводится к виду

$$\frac{\Phi(t^+)}{X(t^+)} = \frac{\Phi(t^-)}{X(t^-)}, \quad t \in L, \; t \neq c.$$

Это равенство говорит о том, что функция $\Phi(z)/X(z)$ является аналитической на всей плоскости, кроме, может быть, c-точек и бесконечно удаленной точки. Вблизи c-точек она может обращаться в бесконечность интегрируемого порядка, так что c-точки могут быть лишь устранимыми особыми точками. На бесконечности эта функция имеет порядок $n + \varkappa$ и, следовательно, при $n + \varkappa \geqslant 0$ представляет полином, а при $n + \varkappa < 0$ есть нуль тождественный. Таким образом, при $n + \varkappa < 0$ однородная задача не имеет отличных от нуля решений, а при $n+\varkappa \geqslant 0$ все решения определяются формулой

$$\Phi(z) = X(z) P_{n+\varkappa}(z). \tag{10.18}$$

Из формулы (10.18) вытекает, что все решения однородной задачи ограничены вблизи всех особенных концов, ибо этим свойством, как показывают формула (10.16*) и условие $\alpha_k - \varkappa_k = 0$, обладает каноническая функция $X(z)$.

Если решение ограничено в окрестности некоторого неособенного конца, оно обязательно обращается в нуль на этом конце. Для c-точек, определяющих рассматриваемый класс h_q, при $z = c$ обращается в нуль сама каноническая функция. Если же $\Phi(z)$ ограничено вблизи другой неособенной c-точки, в которой $X(z)$ по построению имеет бесконечность, то при этом полином $P_{n+\varkappa}(z)$ необходимо имеет множитель $z - c$, и тогда опять при $z = c$ имеет $\Phi(z) = 0$.

Последнее свойство говорит о том, что принадлежность решения $\Phi(z)$ классу h_q не исключает его принадлежности более узким классам h_{q+r}, $r > 0$, хотя для канонической функции класса h_q это невозможно.

4°. Найдем решения неоднородной задачи класса h_q, относя к этому классу решения, ограниченные вблизи заданных q неособенных c-точек. На поведение решения вблизи остальных c-точек, как неособенных, так и особенных, никаких дополнительных условий не накладывается, кроме обычного требования интегрируемости.

Схема построения таких решений нам уже знакома. Берем каноническую функцию $X(z)$ данного класса h_q и на основании равенства $G(t) = X(t^+)/X(t^-)$ переписываем граничное условие (10.1) в таком виде

$$\frac{\Phi(t^+)}{X(t^+)} - \frac{\Phi(t^-)}{X(t^-)} = \frac{g(t)}{X(t^+)}.$$

Получили граничное условие вида (10.3), при этом искомая функция $\Phi(z)/X(z)$ вблизи c-точек, определяющих класс h_q, где $X(z)$ обращается в нуль, а $\Phi(z)$ по условию ограничена, удовлетворяет неравенствам

$$\left| \frac{\Phi(z)}{X(z)} \right| < \frac{M}{|z-c|^{\nu}}, \quad \nu < 1.$$

На бесконечности $\Phi(z)/X(z)$ имеет порядок $n+\varkappa$. Поэтому на основании результатов п. 1° этого параграфа получаем

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{g(\tau)}{X(\tau^+)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z) P_{n+\varkappa}(z). \tag{10.19}$$

Это и есть общее решение неоднородной задачи данного класса h_q, состоящее, как обычно, из общего решения соответствующей однородной задачи и частного решения задачи неоднородной.

Чтобы изучить поведение решения (10.19) в окрестности c-точек, надо знать поведение интеграла типа Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X(\tau^+)} \frac{d\tau}{\tau - z} \tag{10.20}$$

в их окрестности. На основании формулы (10.16*) плотность этого интеграла можно представить в таком виде

$$\frac{g(t)}{X(t^+)} = \frac{g_*(t)}{\prod\limits_{k=1}^{2m} (t - c_k)^{\alpha_k - \varkappa_k + i\beta_k}}, \tag{10.21}$$

где функция $g_*(t) = g(t) \exp[-\Omega(t^+)]$ принадлежит на L классу H_0. Отсюда следует, что в неособенных c-точках, определяющих рассматриваемый класс h_q, и в тех особенных, где $\beta_k \neq 0$, плотность $g(t)/X(t^+)$ имеет интегрируемую степенную особенность. Если к интегралу с такой плотностью по каждому контуру L_k применить формулу (6.36), то сразу увидим, что интеграл $\varphi(z)$ в каждой из этих c-точек имеет степенную особенность с тем же показателем $\alpha_k - \varkappa_k + i\beta_k$ и, следовательно, решение (10.19) во всех этих c-точках ограничено; при этом в отличие от решений однородной задачи решение (10.19), ограниченное в неособенной c-точке, вообще говоря, не обращается в нуль в этой точке. Остальные c-точки, как видно из представления (10.21), особыми точками плотности не являются, причем в неособенных точках, где $-1 < \alpha_k - \varkappa_k < 0$, плотность обращается в нуль, поэтому интеграл $\varphi(z)$ принимает в этой точке вполне определенное конечное значение $\varphi(c)$ и решение (10.19) ведет себя так же, как $X(z)$: оно обращается в этой точке в бесконечность порядка меньше 1. В особенных c-точках, где $\beta_k = 0$, плотность (10.21), будучи ограниченной, может быть отличной от нуля и тогда у интеграла $\varphi(z)$ и у решения (10.19) в этой точке может быть логарифмическая особая точка.

Если отыскивать решения неоднородной задачи класса h_q, исчезающие на бесконечности, то в формуле 10.19 надо положить $n = -1$ и $P_{\varkappa-1} \equiv 0$ при $\varkappa \leqslant 0$. Тогда аналогично случаю замкнутых контуров получим следующий результат:

Теорема 10.1. *При $\varkappa \geqslant 0$ неоднородная задача имеет в классе h_q ровно $\varkappa$ исчезающих на бесконечности линейно-независимых решений, определяемых формулой*

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X(\tau^+)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z) P_{\varkappa-1}(z), \tag{10.22}$$

где $P_{\varkappa-1}(z)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa - 1$, равный нулю при $\varkappa = 0$.

При $\varkappa < 0$ решения класса h_q, исчезающие на бесконечности, существуют тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\int_L \frac{\tau^k}{X(\tau^+)} g(\tau) d\tau = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1. \tag{10.23}$$

При выполнении этих условий единственное решение задачи дается той же формулой (10.22) *при $P_{\varkappa-1} \equiv 0$.*

Как и в случае замкнутых контуров, условиям разрешимости (10.23) можно придать другую форму, если привлечь однородную союзную задачу

$$\psi(t^+) = [G(t)]^{-1} \psi(t^-). \tag{10.24}$$

Но чтобы сохранить в данном случае ту же связь между решениями двух однородных союзных задач, надо ввести понятие *союзных классов решений.*

Из определения особенных и неособенных концов следует, что они будут особенными или неособенными одновременно для обеих союзных задач. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_p$ все неособенные концы и пусть мы построили каноническую функцию $X(z)$ данной однородной задачи (10.8) в одном из классов h_q, например, в классе $h_q = h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$. Тогда функция $[X(z)]^{-1}$ принадлежит, очевидно, классу $h_{p-q} = h(c_{q+1}, \ldots, c_p)$ и в этом классе обладает всеми свойствами канонической функции для задачи (10.24). Классы $h_q = h(c_1, \ldots, c_q)$ и $h_{p-q} = h(c_{q+1}, \ldots, c_p)$, следуя Н. И. Мусхелишвили, будем называть союзными классами.

Индексы союзных задач в союзных классах отличаются только знаком и если индекс $\varkappa$ исходной задачи в классе h_q отрицателен, то индекс $(-\varkappa)$ задачи (10.24) в соответствующем союзном классе h_{p-q} положителен и задача (10.24) в этом классе имеет ровно $(-\varkappa)$ линейно-независимых решений

$$\psi_k(z) = \frac{z^k}{X(z)}, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1,$$

исчезающих на бесконечности. Обращаясь к условиям (10.23), видим, что их можно переписать в следующей форме:

$$\int_L g(\tau)\,\psi_k(\tau^+)\,d\tau = 0, \quad k = 0,\ 1, \ldots,\ -\varkappa - 1. \tag{10.25}$$

Изложенный метод решения является некоторым видоизменением метода Н. И. Мусхелишвили [42] и Н. И. Мусхелишвили и Д. А. Квеселава [43]. В отличие от этих авторов мы используем не локальные формулы (5.17) и (5.18), оценивающие интеграл типа Коши в окрестности концов, а данные нами формулы (5.21), (5.22), при помощи которых любой интеграл типа Коши по разомкнутому контуру выражается через такой же интеграл с плотностью, обращающейся в нуль на концах; логарифмические функции, характеризующие поведение исходного интеграла на концах, выделены в формуле (5.21) в виде отдельных слагаемых. Ф. Д. Гахов [10; 8, с. 478—482] решает задачу для совокупности непересекающихся разомкнутых контуров путем приведения к случаю одного замкнутого гладкого контура, но разрывных коэффициентов.

5°. Если разомкнутые контуры $L_1, \ldots, L_m$ имеют общие концы, то метод решения задачи остается тем же самым, только при построении канонической функции в представлении (10.14) будем иметь

$$\alpha_k + i\beta_k = \sum \mp \frac{\ln G(c_j)}{2\pi i}, \tag{10.13*}$$

где сумма распространяется на все номера j контуров L_j, имеющих общий конец c_k, при этом, как и в формуле (10.13), верхний знак соответствует случаю, когда c_j является началом контура L_j, то есть a-точкой, а верхний знак, когда c_j есть b-точка.

При наличии у контуров $L_1, \ldots, L_m$ других общих точек (d-точек), отличных от концов, надо считать, как в п. 5° § 9, что краевое условие (10.1) выполняется всюду на L, кроме c-точек и d-точек, и искать решения класса h_q, ограниченные вблизи d-точек. При отыскании решений можно поступить следующим образом: разбить линию L на совокупность разомкнутых дуг $L'_1, L'_2, \ldots, L'_r$ так, чтобы все d-точки стали концевыми точками. Применяя изложенный метод, сразу видим, что если d-точка не совпадает с одной из c-точек, то она будет относиться к числу особенных концов с $\beta_j = 0$, ибо в правую часть формулы (10.13*) от каждого гладкого контура L_j, проходящего через d, войдут одновременно два слагаемых $\ln G_j(d)/2\pi i$ и $-\ln G_j(d)/2\pi i$, отличающиеся только знаком. Значит, решение задачи вблизи таких d-точек будет действительно ограниченным.

6°. Не представляет труда решение задачи Римана и в более общем случае, когда L есть кусочно-гладкая линия, состоящая из любого конечного числа замкнутых и разомкнутых контуров с конечным числом общих точек. Некоторое упрощение при построении канонической функции может быть в силу следующего обстоятельства.

Если внимательно посмотреть на структуру канонических функций (9.23) и (10.16), то легко заметить, что каждую из них можно представить в виде произведения

$$X(z) = \prod_{k=1}^{m} X_k(z), \tag{10.26}$$

где $X_k(z) = (z - t_k)^{-\varkappa_k} \exp \Gamma_k(z)$ или $X_k(z) = (z - a_k)^{-\varkappa_k} \times \times (z - b_k)^{-\varkappa'_k} \exp \Gamma_k(z)$ суть канонические функции для каждого отдельного контура $L_k = a_k b_k$. Это является прямым следствием свойства аддитивности криволинейного интеграла.

Значит, в случае гладкой линии L, состоящей из m замкнутых или разомкнутых контуров $L_1, \ldots, L_m$, можно построить сначала канонические функции $X_k(z)$ для каждого контура L_k в отдельности, отбросив все остальные, и взять произведение (10.26). Легко проверить, что это произведение действительно обладает всеми свойствами канонической функции. При этом при вычислении граничных значений $X(t^+)$ и $X(t^-)$ надо учитывать, что при $t \in L_k$

$$X_k^+(t) = G(t) X_k^-(t), \quad X_j^+(t) = X_j^-(t) \quad j \neq k,$$

так что $X_j(z)$, $j \neq k$, на контуре L_k непрерывна и ее граничное значение в точке $t \in L_k$ получается простой заменой z на t. Поэтому имеем

$$X^{\pm}(t) = X_1(t) \ldots X_{k-1}(t) X_k^{\pm}(t) X_{k+1}(t) \ldots X_m(t), \quad t \in L_k. \tag{10.27}$$

Это свойство остается справедливым и для любой кусочно-гладкой линии L. Если эту линию разбить на несколько также кусочно-гладких линий $L_1, \ldots, L_m$ без общих узлов (c-точек и d-точек), то для получения канонической функции $X(z)$ некоторого класса достаточно построить канонические функции $X_k(z)$ соответствующих классов и взять их произведение (10.26). Формулы (10.27) для вычисления граничных значений $X(z)$ и в этом случае остаются в силе.

При наличии у линий L_k общих узлов $c_1, \ldots, c_l$ произведение (10.27) может не удовлетворять наложенным требованиям вблизи этих узлов. Поэтому для получения канонической функции для L это произведение надо „подправить“, умножив его на рациональную функцию $(z - c_1)^{\lambda_1} \ldots \ldots (z - c_l)^{\lambda_l}$ и подобрав целые числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ так, чтобы функция

$$(z-c_1)^{\lambda_1}\ldots(z-c_l)^{\lambda_l}X(z)$$

была канонической.

7°. При постановке задачи Римана для разомкнутых непересекающихся контуров мы уже отмечали ее принципиальное отличие от подобной задачи для замкнутых контуров. Если в случае замкнутых контуров граничное условие связывает предельные значения *разных функций*, аналитических в областях, имеющих общий участок границы, то в случае разомкнутых контуров искомая функция *одна* и заданное граничное условие связывает ее предельные значения *в разных граничных точках* t^+ и t^-, расположенных друг против друга на разных берегах разрезов вдоль заданных контуров $L_1, \ldots, L_m$. Граничное условие (10.1) говорит о том, что искомая функция $\Phi(z)$ в плоскости с разрезами вдоль $L_1, \ldots, L_m$ должна быть однозначной ветвью некоторой многозначной функции, для которой c-точки являются точками ветвления, и все многообразие классов допустимых функций зависит от условий, налагаемых на $\Phi(z)$ вблизи этих точек.

Указанное различие подчеркивается иногда следующей терминологией. Если граничное условие связывает предельные значения функций, аналитических в различных областях, задача называется *двусторонней* или *задачей сопряжения*. При наличии одной области граничная задача называется *односторонней*.

Односторонний характер задачи Римана для разомкнутых непересекающихся контуров становится еще более отчетливым, если отобразить конформно и однолистно плоскость с разрезами $L_1, \ldots, L_m$ на одну из канонических областей, например, на круговую m-связную область, и посмотреть, какая граничная задача получается при этом для преобразованной функции.

Сначала для простоты рассмотрим случай, когда область D есть плоскость с одним разрезом вдоль гладкого контура $L = ab$. В силу односвязности область D можно отобразить конформно на внутренность (или внешность) единичного круга D^* так, чтобы точка $z = \infty$ перешла в заданную точку, например, в $w = 0$ (или в $w = \infty$). Так как в нашем случае граница ∂D^* не содержит бесконечных ветвей, то на основании теоремы о соответствии границ [35, с. 107] отображающая функция $w = f(z)$ непрерывна на $\partial D = L^+ \bigcup L^-$ и граничная функция $\zeta = f(t)$ равная $f(t^+)$ на L^+ и $f(t^-)$ на L^-, осуществляет взаимно однозначное соответствие между ∂D и ∂D^*. Конформность отображения нарушается, очевидно, лишь в c-точках границы ∂D. Углы с вершинами в этих точках уменьшается в два раза. Значит,

$f(z)$ является однозначной ветвью некоторой многозначной функции $F(z)$ с точками ветвления в c-точках и для ее граничных значений $\zeta = f(t^+)$ и $\zeta_1 = f(t^-)$ в силу взаимно однозначного соответствия между ∂D и ∂D^* имеют место соотношения $\zeta_1 = \alpha(\zeta)$ и $\zeta = \alpha(\zeta_1)$, или что все равно

$$f(t^-) = \alpha[f(t^+)], \quad f(t^+) = \alpha[f(t^-)], \tag{10.28}$$

где функция α осуществляет непрерывный переход от одной ветви $F(z)$ к другой при обходе любой из c-точек. Очевидно, α определена всюду на ∂D^* и совпадает со своей обратной:

$$\alpha[\alpha(\zeta)] = \zeta. \tag{10.29}$$

Когда ζ обойдет ∂D^* в положительном направлении один раз, точка $\zeta_1 = \alpha(\zeta)$ опишет ∂D^* тоже один раз, но в отрицательном направлении. Это является следствием того, что точки t^+ и t^- движутся по ∂D одновременно обязательно в противоположных направлениях. Точки ζ_c, являющиеся образами c-точек, будут для $\alpha(\zeta)$ неподвижными точками, ибо в c-точках $f(c^+) = f(c^-) = f(c) = \zeta_c$ и из соотношения (10.28) получаем $\zeta_c = \alpha(\zeta_c)$.

Из теории конформных отображений известно, что при требованиях, наложенных нами на контур L, непрерывной по Гёльдеру является не только граничная функция $\zeta = f(t)$, но и обратная к ней функция $t = \theta(\zeta)$, а граничные значения производных $f'(t)$ и $\theta'(\zeta)$ существуют, отличны от нуля и удовлетворяют условию H всюду на ∂D и ∂D^* соответственно, кроме c-точек и точек ζ_c. Значит, в силу соотношения (10.28) функция $\alpha(\zeta)$ также имеет производную $\alpha'(\zeta)$, удовлетворяющую условию H всюду на ∂D^*, включая точки ζ_c, причем

$$\alpha'(\zeta_c) = \lim_{\zeta \to \zeta_c} \frac{\alpha(\zeta) - \zeta_c}{\zeta - \zeta_c} = -1.$$

Возьмем теперь функцию $z = \theta(w)$, обратную к $w = f(z)$, и учитывая, что $t^+ = \theta(\zeta)$ и $t^- = \theta(\zeta_1)$, подставим эти значения в краевое условие (10.1*)

$$\Phi[\theta(\zeta_1)] = G[\theta(\zeta)]\Phi[\theta(\zeta)] + g[\theta(\zeta)]. \tag{10.30}$$

Если в D^* ввести функцию

$$\psi(w) = \Phi[\theta(w)] \tag{10.31}$$

и для краткости положить $G_0(\zeta) = G[\theta(\zeta)]$, $g_0(\zeta) = g[\theta(\zeta)]$, то равенство (10.30) примет такой вид

$$\psi[\alpha(\zeta)] = G_0(\zeta)\psi(\zeta) + g_0(\zeta), \tag{10.32}$$

а из соотношений (10.2) получим

$$G_0(\zeta)\, G_0[\alpha(\zeta)] = 1, \; g_0(\zeta) + G_0(\zeta)\, g_0[\alpha(\zeta)] = 0. \qquad (10.33)$$

Для преобразованной функции (10.31) получили следующую задачу:

В области D *найти функцию* $\psi(w)$, *аналитическую всюду, кроме, может быть, точки* $w=0$ *(или* $w=\infty$*), где она должна иметь заданный порядок* n, *по граничному условию* (10.32), *связывающему предельные значения искомой функции в разных точках границы* ζ *и* $\alpha(\zeta)$, *если функция* $\alpha(\zeta)$, *удовлетворяющая условию* (10.29), *осуществляет гомеоморфизм границы* ∂D^* *на себя с изменением направления обхода.*

Подобная же задача получается и в случае m-связной области D. Если взять единственную функцию $w = f(z)$, конформно отображающую D на n-связную круговую область D^*, содержащую точку $w=\infty$, и имеющую в окрестности разложение $f(z) = z + A_1 z^{-1} + \ldots$, то она будет однозначной ветвью функции $F(z)$ с $2m$ точками ветвления в c-точках. Возникающая таким путем связь между граничными значениями $f(t^+)$ и $f(t^-)$ на каждом из контуров $L_k = a_k b_k$, порождает на ∂D^* гомеоморфизм в себя, при котором каждая окружность L_k^*, являющаяся образом разреза L_k, переводится в себя с изменением направления обхода некоторой функцией $\alpha_k(\zeta)$, совпадающей со своей обратной. Поэтому для функции (10.31) и в этом случае на ∂D^* получим краевое условие вида (10.32), где $\alpha(\zeta) = \alpha_k(\zeta)$, $\zeta \in L_k^*$. Тот же вид (10.33) будут иметь необходимые условия разрешимости задачи (10.32).

Полученная нами задача с краевым условием (10.32) вне всякой связи с задачей Римана была впервые сформулирована в 1932 году на Цюрихском международном математическом конгрессе Т. Карлеманом и подробно исследована в случае односвязной области Д. А. Квеселава [29] в числе других задач со сдвигом (сдвигом называют гомеоморфизм $\alpha(\zeta)$). Можно показать, что задача Карлемана на основании результатов Д. А. Квеселава может быть приведена к задаче Римана для разомкнутых контуров, и таким путем установить конформную эквивалентность этих задач. Доказательство в случае одного контура имеется в работе [83, с. 36], а в случае нескольких контуров — в работе [73].

§ 11. ЗАДАЧА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

У коэффициентов $G(t)$ и $g(t)$ мы допускаем здесь только разрывы первого рода в конечном числе точек $t_1, t_2, \ldots, t_m$ линии L, а линию L для простоты считаем замкнутым или разомкнутым кусочно-гладким контуром, не имеющим угловых точек, отличных от точек $t_1, \ldots, t_m$.

Контур L можно рассматривать как объединение конечного числа разомкнутых гладких дуг $t_k t_{k+1}$. Каждая точка t_k является концом одной из этих дуг и началом другой. Поэтому задачу Римана с разрывными коэффициентами можно рассматривать как один из частных случаев задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Именно таким путем удобно получить решение задачи с разрывными коэффициентами в случае разомкнутого контура $L = ab$. Если начало контура обозначить через c_0, точки t_k в порядке их следования друг за другом через $c_1, \ldots, c_m$ и конец контура через c_{m+1}, то L будет объединением $m+1$ гладких дуг $L_k = c_k c_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, m$. Каноническая функция некоторого класса h_q, например, $h_q = h(c_0, c_1, \ldots, c_{q-1})$, на основании изложенного в пунктах 2° и 5° предыдущего параграфа может быть записана в следующих двух формах

$$X(z) = e^{\Gamma(z)} \prod_{k=0}^{m+1} (z - c_k)^{-\varkappa_k} = e^{\Omega(z)} \prod_{k=0}^{m+1} (z - c_k)^{\alpha_k - \varkappa_k + i\beta_k},$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\, d\tau;$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - z}\, d\tau + \sum_{k=0}^{m} \frac{\ln G(c_{k+1} - 0) - \ln G(c_k + 0)}{2\pi i\,(c_{k+1} - c_k)} \times$$

$$\times \{c_{k+1} - c_k + (z - c_{k+1}) \ln (z - c_{k+1}) - (z - c_k) \ln (z - c_k)\},$$

$$\omega(t) = \omega_k(t) = \ln G(t) - \ln G(c_k + 0) -$$

$$- \frac{\ln G(c_{k+1} - 0) - \ln G(c_k + 0)}{c_{k+1} - c_k} (t - c_k), \quad t \in c_k c_{k+1},$$

$$k = 0, 1, \ldots, m;$$

$$\alpha_0 + i\beta_0 = -\frac{\ln G(a)}{2\pi i}, \quad \alpha_{m+1} + i\beta_{m+1} = \frac{\ln G(b)}{2\pi i},$$

$$\alpha_k + i\beta_k = \frac{\ln G(t_k - 0) - \ln G(t_k + 0)}{2\pi i}, \quad k = 1, 2, \ldots, m;$$

целые числа $\varkappa_k$ подобраны так, что

$$0 < \alpha_k - \varkappa_k < 1, \quad k = 0, 1, \ldots, q-1,$$

$$-1 < \alpha_k - \varkappa_k < 0, \quad k = q, \ldots, p-1.$$

$$\alpha_k - \varkappa_k = 0, \quad k = p, \dots, m+1,$$

при условии, что неособенными являются первые p точек c_k.

Когда контур L замкнут, каноническая функция, как и любое другое решение задачи Римана, будет представлять собой две различные функции, одна из которых определена внутри L, а другая вне. Чтобы получить удобное представление этих функций, проще всего построить их тем же методом, каким была построена каноническая функция для совокупности замкнутых контуров.

Фиксируем некоторую ветвь $\ln G(t)$. Это разрывная в точках $t_1, \dots, t_m$ функция. Пусть $\alpha_k + i\beta_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{G(t_k - 0)}{G(t_k + 0)}$. На основании свойств интегралов типа Коши при всех $t \neq t_k$ имеем

$$\ln G(t) = \Gamma^+(t) - \Gamma^-(t), \tag{11.1}$$

где

$$\Gamma(z) = \Gamma_1(z) + \begin{cases} \sum\limits_{k=1} (\alpha_k + i\beta_k) \ln(z - t_k), & z \in D^+, \\ \sum\limits_{k=1}^{m} (\alpha_k + i\beta_k) \ln\left(\dfrac{z - t_k}{z - z_0}\right), & z \in D^-, \ z_0 \in D^+, \end{cases} \tag{11.2}$$

если через $\Gamma_1(z)$ обозначить интеграл типа Коши с непрерывной на L плотностью $\ln G_1(t) = \ln G(t) - \sum\limits_{k=1}^{m} \psi_k(t)$. Из (11.1) следует, что функция $\exp \Gamma(z)$ удовлетворяет однородному краевому условию, так как при всех $t \neq t_k$

$$G(t) = e^{\Gamma^+(t)} e^{-\Gamma^-(t)}. \tag{11.3}$$

В силу формул (11.2)

$$e^{\Gamma(z)} = \begin{cases} e^{\Gamma_1(z)} \prod\limits_{k=1}^{m} (z - t_k)^{\alpha_k + i\beta_k}, & z \in D^+, \\ e^{\Gamma_1(z)} \prod\limits_{k=1}^{m} \left(\dfrac{z - t_k}{z - z_0}\right)^{\alpha_k + i\beta_k}, & z \in D^-, \end{cases}$$

откуда видно, что в тех точках t_k, где $\alpha_k \neq 0$, функция $\exp \Gamma(z)$ имеет нуль или бесконечность, порядок которых может быть больше единицы и потому $\exp \Gamma(z)$ и $\exp[-\Gamma(z)]$

не могут одновременно принадлежать классу функций, имеющих во всех точках $t_1, \ldots, t_m$ особенности интегрируемого порядка. Поэтому перепишем равенство (11.3) в таком виде

$$G(t) = e^{\Gamma^+(t)} \prod_{k=1}^{m} (t - t_k)^{-\varkappa_k} e^{-\Gamma^-(t)} \prod_{k=1}^{m} (t - t_k)^{\varkappa_k} = X^+(t)/X^-(t),$$

подбирая целые числа $\varkappa_k$ так, чтобы функция

$$X(z) = e^{\Gamma(z)} \prod_{k=1}^{m} (z - t_k)^{-\varkappa_k} =$$

$$= \begin{cases} e^{\Gamma_1(z)} \prod\limits_{k=1}^{m} (z - t_k)^{\alpha_k - \varkappa_k + i\beta_k}, & z \in D^+, \\ (z - z_0)^{-\varkappa} e^{\qquad)} \prod\limits_{k=1}^{m} \left(\dfrac{z - t_k}{z - z_0}\right)^{\alpha_k - \varkappa_k + i\beta_k}, & z \in D^-, \end{cases} \tag{11.4}$$

и $1/X(z)$ принадлежали множеству допустимых функций. Если среди точек $t_1, \ldots, t_m$ неособенными являются $t_1, \ldots, t_p$, $p \leqslant m$, и нас интересует каноническая функция класса $h_q = h(t_1, \ldots, t_q)$, $q \leqslant p$, то числа $\varkappa_k$ надо выбрать так, чтобы выполнялись условия

$$\begin{gathered} 0 < \alpha_k - \varkappa_k < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, q, \\ -1 < \alpha_k - \varkappa_k < 0, \quad k = q + 1, \ldots, p, \\ \alpha_k - \varkappa_k = 0, \quad k = p + 1, \ldots, m. \end{gathered} \tag{11.5}$$

Порядок $X(z)$ в бесконечно удаленной точке, взятый со знаком минус, равный $\varkappa = \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_m$, будет индексом задачи в рассматриваемом классе h_q.

Общее решение однородной и неоднородной задачи класса h_q находится при помощи тех же рассуждений, как и в случае разомкнутых контуров, и записывается в виде тех же формул.

Если свободный член $g(t)$ имеет разрывы в точках, отличных от точек разрыва коэффициента $G(t)$, то метод решения задачи остается тем же самым и решение получится в той же форме, но оно в этих точках будет иметь логарифмические особые точки.

§ 12. ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ РИМАНА

До сих пор мы рассматривали задачу Римана с ограниченным, нигде не обращающимся в нуль коэффициентом $G(t)$. Оба требования были существенными, ибо при построении канонической функции приходилось фиксировать вполне определенную ветвь $\ln G(t)$. Здесь мы откажемся от этих ограничений и рассмотрим задачу с коэффициентом такого вида

$$G(t) = G_*(t) \prod_{k=1}^{m} (t - t_k)^{\nu_k}, \tag{12.1}$$

где $\operatorname{Re} \nu_k \neq 0$, а функция $G_*(t)$ на L ограничена и всюду отлична от нуля. В тех точках $t_k \in L$, где $\operatorname{Re} \nu_k > 0$, $G(t)$ обращается в нуль, а в тех, где $\operatorname{Re} \nu_k < 0$, $G(t)$ обращается в бесконечность.

Для простоты будем предполагать, что L состоит из одного замкнутого гладкого контура. У свободного члена $g(t)$ в точках $t_1, \ldots, t_m$ также будем допускать особенности.

1°. Рассмотрим сначала частный случай задачи

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \quad \Phi(\infty) = 0, \tag{12.2}$$

когда

$$g(t) = g_*(t)/\omega(t), \quad \omega(t) = \prod_{k=1}^{m} (t - t_k)^{n_k}, \tag{12.3}$$

n_k — целые положительные числа, $g_*(t) \in H$ и $g_*(t_k) \neq 0$, $k = 1, \ldots, m$. Краевое условие (12.2) считаем заданным при $t \neq t_k$.

Полагая

$$g_*(t) = \psi^+(t) - \psi^-(t), \quad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_*(\tau)}{\tau - z} d\tau, \tag{12.4}$$

переписываем краевое условие (12.2) в таком виде

$$\Phi^+(t) - \frac{\psi^+(t)}{\omega(t)} = \Phi^-(t) - \frac{\psi^-(t)}{\omega(t)}.$$

Отсюда следует, что функция $\Phi(z) - \psi(z)/\omega(z)$ является однозначной аналитической функцией в расширенной плоскости, исключая точки $t_1, \ldots, t_m$, в которых она имеет полюсы порядков не выше $n_1, \ldots, n_m$ соответственно; на бесконечности эта функция обращается в нуль. Значит, это есть рациональная функция вида

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}}{(z - t_k)^j} = -\frac{Q_{n-1}(z)}{\omega(z)}, \quad n = n_1 + \ldots + n_m,$$

и все решения задачи (12.2) определяются формулой

$$\Phi(z) = [\psi(z) - Q_{n-1}(z)]/\omega(z). \tag{12.5}$$

Легко видеть, что каждое из n полученных линейно-независимых исчезающих на бесконечности решений имеет граничные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ с неинтегрируемыми особенностями во всех точках t_k того же порядка, что и функция $g(t)$.

Когда гельдеровой является не только функция $g_*(t)$, но и ее производные до некоторого порядка n_* включительно, произволом коэффициентов многочлена $Q_{n-1}(z)$ можно распорядиться так, чтобы $\Phi^+(t)$ или $\Phi^-(t)$ хотя бы в некоторых точках t_k были ограниченными. Так, в случае, когда n_* есть наибольшее из чисел $n_1, \ldots, n_m$, среди решений (12.5) можно искать такое, чтобы во всех точках t_k у него было ограниченным или $\Phi^+(t)$, или $\Phi^-(t)$. Для этого многочлен $Q_{n-1}(z)$ должен удовлетворять, соответственно, условиям

$$Q_{n-1}^{(j)}(t_k) = \psi^{+(j)}(t_k), \quad j = 0, 1, \ldots, n_k - 1; \; k = 1, \ldots, m,$$

или же условиям

$$Q_{n-1}^{(j)}(t_k) = \psi^{-(j)}(t_k), \quad j = 0, 1, \ldots, n_k - 1; \; k = 1, \ldots, m.$$

Можно добиваться ограниченности $\Phi^+(t)$ в точках $t_1, \ldots, t_p$, например, и ограниченности $\Phi^-(t)$ в остальных $q = m - p$ точках $t_{p+1}, \ldots, t_m$, налагая на $Q_{n-1}(z)$ условия

$$Q_{n-1}^{(j)}(t_k) = \begin{cases} \psi^{+(j)}(t_k), & j = 0, 1, \ldots, n_k - 1; \; k = 1, \ldots, p, \\ \psi^{-(j)}(t_k), & j = 0, 1, \ldots, n_k - 1; \; k = p+1, \ldots, m. \end{cases} \tag{12.6}$$

Во всех трех случаях все коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(z)$ определятся единственным образом и $Q_{n-1}(z)$ будет интерполяционным многочленом для аналитических функций $\psi(z)$, $z \in D^+$, и $\psi(z)$, $z \in D^-$, в первых двух случаях и для кусочно-голоморфной функции $\psi(z)$ в последнем случае. Решений, у которых $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ одновременно ограничены во всех точках t_k, задача (12.2) не имеет.

Для удобства решение задачи (12.2), удовлетворяющее условиям (12.6), будем называть принадлежащим классу h_{pq} ($p + q = m$, $p = 0, 1, \ldots, m$). Из изложенного следует, что если $g_*^{(n_*)}(t) \in H$, задача (12.2) имеет единственное исчезающее на бесконечности решение, принадлежащее любому классу h_{pq}.

Чтобы получить все решения задачи (12.2) класса h_{pq} порядка $\varkappa \geqslant 0$ на бесконечности, надо к исчезающему на бесконечности решению (12.5) этого класса добавить слагаемое в виде произвольного полинома $P_\varkappa(z)$.

Когда в краевом условии (12.2) показатель ν_k степенной неинтегрируемой особенности у скачка $g(t)$ в точке t_k не является целым числом, можно по-прежнему представить

$g(t)$ в виде (12.3), где $n_k = \mathrm{En}(\mathrm{Re}\,\nu_k)$, а функция $g_*(t)$ в точках t_k имеет особенности интегрируемого порядка, и, повторяя почти дословно изложенную выше схему рассуждений, получить исчезающие на бесконечности решения в виде той же формулы (12.5). Учитывая поведение интеграла типа Коши $\psi(z)$ в окрестности особых точек t_k степенного типа, заключаем, что предельные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ всех этих решений в точках t_k имеют неинтегрируемые особенности того же типа, что и $g(t)$. Подбором коэффициентов многочлена $Q_{n-1}(z)$ добиться интегрируемости $\Phi^+(t)$ в некоторых p точках t_k и интегрируемости $\Phi^-(t)$ в остальных $q = m - p$ точках в данном случае, очевидно, невозможно. Можно указать лишь случай, когда можно построить частное решение задачи (12.2), состоящее из двух слагаемых: одно из них представляет функцию класса h_{pq}, а второе — элементарную функцию с неинтегрируемыми особенностями того же типа, как у $g(t)$. Это тот случай, когда интеграл $\psi(z)$ записывается в виде элементарной функции, характеризующей все его интегрируемые особенности, и интеграла типа Коши $\psi_1(z)$ плотность которого имеет непрерывную по Гёльдеру производную порядка n_*. В качестве $Q_{n-1}(z)$ в этом случае берется интерполяционный многочлен функции $\psi_1(z)$.

2°. Рассмотрим однородную задачу, когда ее коэффициент имеет вид (12.1). При нецелых ν_k под $(t - t_k)^{\nu_k}$ будем понимать предельные значения из D^+ одной из однозначных ветвей функции $(z - t_k)^{\nu_k} = \exp[\nu_k \ln(z - t_k)]$, на которые она распадается в плоскости с разрезом (t_k, ∞) вдоль некоторой простой кусочно-гладкой кривой, целиком лежащей в D^-. Будем считать, что $G_*(t) \in H$ на каждой замкнутой дуге $t_k t_{k+1}$, что точки t_k являются для $G_*(t)$ точками разрыва первого рода и что $G_*(t) \neq 0$ всюду на L, в том числе $G_*(t_k \pm 0) \neq 0$.

Так как ветви $\ln(t - t_k)^{\nu_k}$ у нас уже фиксированы, то выбором определенных значений $\ln G_*(t)$ на дугах $t_k t_{k+1}$ мы фиксируем вполне определенную ветвь многозначной функции $\ln G(t)$. Тогда при всех $t \neq t_k$ будем иметь

$$\ln G(t) = \Gamma^+(t) - \Gamma^-(t), \tag{12.7}$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\, d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\ln G_*(\tau)}{\tau - z}\, d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{\nu_k}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\ln(\tau-t_k)}{\tau-z}\,d\tau.$$

$\Gamma(z)$ можно записать в более удобной для дальнейшего форме. Для этого учтем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\ln(\tau-t_k)}{\tau-z}\,d\tau=\begin{cases}\ln(z-t_k), & z\in D^+,\\ 0 & , z\in D^-,\end{cases}\tag{12.8}$$

а интеграл с разрывной плотностью $\ln G_*(t)$, $\Delta_k=\ln G_*(t_k-0)-\ln G_*(t_k+0)$, по формулам (6.5) выразим через интеграл $\Gamma_1(z)$ с непрерывной плотностью

$$\ln G_1(t)=\ln G_*(t)-\sum_{k=1}^{m}\psi_k(t).\tag{12.9}$$

Получим

$$\Gamma(z)=\Gamma_1(z)+\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m}\left(\dfrac{\Delta_k}{2\pi i}+\nu_k\right)\ln(z-t_k), & z\in D^+,\\ \sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\Delta_k}{2\pi i}\ln\dfrac{z-t_k}{z-z_0}, & z\in D^-,\ z_0\in D^+.\end{cases}\tag{12.10}$$

Возьмем теперь произведение

$$X(z)=e^{\Gamma(z)}\prod_{k=1}^{m}(z-t_k)^{-\varkappa_k}=$$

$$=\begin{cases}e^{\Gamma_1(z)}\prod\limits_{k=1}^{m}(z-t_k)^{\nu_k+\gamma_k}, & z\in D^+,\\ (z-z_0)^{-\varkappa}e^{\Gamma_1(z)}\prod\limits_{k=1}^{m}\left(\dfrac{z-t_k}{z-z_0}\right)^{\gamma_k}, & z\in D^-,\end{cases}\tag{12.11}$$

где $\varkappa_1,\ldots,\varkappa_m$ — некоторые целые числа, $\varkappa=\varkappa_1+\ldots+\varkappa_m$ и $\gamma_k=\Delta_k/2\pi i-\varkappa_k$. Числа $\varkappa_1,\ldots,\varkappa_m$ надо подобрать так, чтобы $X(z)$ и $1/X(z)$ одновременно принадлежали множеству допустимых в качестве решений функций. Так как $X(z)$ имеет разные представления в областях D^+ и D^- и разность $z-t_k$ входит в них в разных степенях, то здесь в отличие от случая, когда все $\nu_k=0$, подбором $\varkappa_k$ не всегда можно добиться даже одновременной интегрируемости $X^+(t)$ и $X^-(t)$. Так, если $\varkappa_k$ подобрать так, чтобы $X^+(t)$ и $1/X^+(t)$ были интегрируемыми, то есть так, чтобы для всех t_k имели бы $-1 < \operatorname{Re}(\nu_k + \gamma_k) < 1$, то при этом $\operatorname{Re}\gamma_k$ могут быть отрицательными и по модулю больше единицы, так что $X^-(t)$ не будет интегрируемой. Если одновременно для всех t_k окажутся выполненными условия $-1 < \operatorname{Re}(\nu_k + \gamma_k) < 1$ и $\operatorname{Re}\gamma_k > 0$, обеспечивающие интегрируемость $X^+(t)$ и $X^-(t)$, неинтегрируемой может оказаться функция $1/X^-(t)$. Поэтому здесь опять *целесообразно расширить множество допустимых функций и отыскивать решения однородной задачи в классе кусочно-голоморфных функций* $\Phi(z)$, *имеющих на бесконечности конечный порядок и непрерывно продолжимых на* L *всюду, кроме точек* t_k, *в которых одно из граничных значений* $\Phi^+(t)$ *или* $\Phi^-(t)$ *может обращаться в бесконечность неинтегрируемого порядка.* Это множество допустимых функций удобно разбить на классы, относя к классу h_{pq}, $p+q=m$, те функции $\Phi(z)$, у которых в $p \leqslant m$ фиксированных точках t_k могут иметь интегрируемые бесконечности лишь $\Phi^+(t)$ и $1/\Phi^+(t)$, а в остальных $q=m-p$ точках t_k должны быть интегрируемыми $\Phi^-(t)$ и $1/\Phi^-(t)$. Очевидно, что $\Phi^+(t)$ может обращаться в бесконечность неинтегрируемого порядка в тех точках t_k, в которых для $\Phi^-(t)$ выполнены условия интегрируемости, и наоборот.

Это разбиение на классы аналогично классификации Н. И. Мусхелишвили при наличии у коэффициента $G(t)$ в точках t_k только разрывов первого рода.

Допустим, что в формулах (12.11) числа $\varkappa_k$ подобраны так, чтобы $X(z)$ принадлежала следующему классу h_{pq}:

$$\begin{gathered} 0 \leqslant \operatorname{Re}(\nu_k + \gamma_k) < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, s; \\ -1 < \operatorname{Re}(\nu_k + \gamma_k) < 0, \quad k = s+1, \ldots, p; \\ 0 \leqslant \operatorname{Re}\gamma_k < 1, \quad k = p+1, \ldots, r; \\ -1 < \operatorname{Re}\gamma_k < 0, \quad k = r+1, \ldots, m. \end{gathered} \tag{12.12}$$

Такую функцию $X(z)$ будем называть канонической функцией однородной задачи в рассматриваемом классе h_{pq}, а ее порядок на бесконечности со знаком минус, то есть $\varkappa = \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_m$, индексом задачи в классе h_{pq}. На основании соотношений (12.7) и (12.11) при всех $t \neq t_k$ имеем

$$G(t) = X^+(t)/X^-(t). \tag{12.13}$$

При известной канонической функции общее решение однородной задачи класса h_{pq} находится без всяких затруднений. На основании равенства (12.13) краевое условие приводится к виду $\Phi^+(t)/X^+(t) = \Phi^-(t)/X^-(t)$, откуда следует, что отношение $\Phi(z)/X(z)$ будет аналитическим всюду, кроме, разве, точек t_k и бесконечно удаленной точки. Но из-за принадлежности $\Phi(z)$ и $X(z)$ к одному и тому же классу h_{pq} точки t_k для $\Phi(z)/X(z)$ могут быть лишь устранимыми особыми точками, а бесконечно удаленная точка — полюсом. Поэтому имеем $\Phi(z) = X(z) P(z)$, где степень многочлена $P(z)$ равна разности порядков $\Phi(z)$ и $X(z)$ на бесконечности.

3°. При отыскании решений неоднородной задачи, принадлежащих некоторому классу h_{pq} и исчезающему на бесконечности, остановимся подробно на одном случае, когда в представлении (12.1) числа $\nu_k = n_k$ являются целыми, а функция $G_*(t) \in H$ всюду на L. В этом случае любую ветвь $\ln G_*(t)$ можно считать разрывной с разрывом первого рода лишь в какой-то одной точке $t_0 \in L$ и

$$\Delta_0 = \ln G_*(t_0 - 0) - \ln G_*(t_0 + 0) = 2\pi i n_0,$$

где n_0 целое число, равное индексу $G_*(t)$. Соотношения (12.10) и (12.9) примут такой вид

$$\Gamma(z) = \Gamma_1(z) + \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{m} n_k \ln(z - t_k), & z \in D^+, \\ n_0 \ln \dfrac{z - t_0}{z - z_0}, & z \in D^-, \ z_0 \in D^+, \end{cases}$$

$$\ln G_1(t) = \ln G_*(t) - n_0 \ln(t - z_0);$$

вместо условий (12.12) имеем $\varkappa_k = n_k$, $k = 0, 1, \ldots, p$, $\varkappa_k = 0$, $k = p + 1, \ldots, m$ и канонической функцией класса h_{pq} будет функция

$$X(z) = e^{\Gamma(z)} \prod_{k=0}^{p} (z - t_k)^{-n_k} =$$

$$= \begin{cases} e^{\Gamma_1(z)} \prod\limits_{k=p+1}^{m} (z - t_k)^{n_k}, & z \in D^+, \\ (z - z_0)^{-\varkappa} e^{\Gamma_1(z)} \prod\limits_{k=1}^{p} \left(\dfrac{z - t_k}{z - z_0}\right)^{-n_k}, & z \in D^-, \end{cases} \tag{12.14}$$

где $\varkappa = n_0 + n_1 + \ldots + n_p$. Пусть для определенности $n_k < 0$ при $k = p + 1, \ldots, r$ $(r < m)$ и $n_k > 0$ при $k = r + 1, \ldots, m$. Используя (12.14), вычислим $X^+(t)$ и $X^-(t)$ и с учетом равенства (12.13) перепишем граничное условие в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}. \tag{12.15}$$

Если $g(t) \in H$, то скачок $g(t)/X^+(t)$ можно записать в форме (12.3)

$$\frac{g(t)}{X^+(t)} = \frac{g_*(t)}{\omega(t)}, \quad \omega(t) = \prod_{k=r+1}^{m} (z - t_k)^{n_k},$$

и, построив общее решение задачи (12.15) порядка не выше $\varkappa - 1$ на бесконечности, получим

$$\Phi(z) = X(z)\left\{\frac{\psi(z) - Q_{n-1}(z)}{\omega(z)} + P_{\varkappa-1}(z)\right\}, \tag{12.16}$$

где $\psi(z)$ есть интеграл (12.4), а $n = n_{r+1} + \ldots + n_m$. Формула (12.16) определяет все исчезающие на бесконечности решения неоднородной задачи. Классу h_{pq} эти решения будут принадлежать лишь в том случае, если $\Phi^-(t)$ будет ограниченной в точках $t_{r+1}, \ldots, t_m$, что сразу видно из формул (12.14) и (12.16). Это будет иметь место, если полином $Q_{n-1}(z)$ будет интерполяционным для $\psi(z)$, $z \in D^-$. При дополнительном условии, что $g_*(t)$ имеет производную порядка n_*, удовлетворяющую условию H, где n_* — наибольшее из чисел $n_{r+1}, \ldots, n_m$, мы этот полином построим, и тогда при $\varkappa \geqslant 0$ задача будет иметь ровно $\varkappa$ линейно-независимых решений класса h_{pq}, исчезающих на бесконечности.

При $\varkappa < 0$ в формуле (12.16) надо положить $P_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$ и, разложив исчезающий на бесконечности множитель при $X(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, приравнять к нулю первые $(-\varkappa)$ коэффициентов этого разложения. Это дает $(-\varkappa)$ дополнительных условий, которым должна удовлетворять функция $g_*(t)$, чтобы обеспечить существование единственного решения задачи в рассматриваемом классе h_{pq}.

Наличие бесконечностей целого порядка у свободного члена в точках t_k или иных точках контура схемы исследования задачи не меняет.

4°. Когда в представлении (12.1) числа ν_k не являются целыми или когда функция $G_*(t)$ в точках t_k имеет разрывы первого рода, а также в общем случае, когда и то и другое имеет место, все исчезающие на бесконечности решения задачи отыскиваются тем же методом: при помощи канонической функции любого класса h_{pq} задача сводится к отысканию всех решений задачи (12.15) порядка не выше $\varkappa - 1$ на бесконечности. Таким путем получается формула (12.16), содержащая все искомые решения. В нее входит $\varkappa + n$ произвольных параметров, где $\varkappa$ — индекс задачи некоторого класса h_{pq}, а n есть сумма тех $\mathrm{En}\,[\mathrm{Re}\,(\nu_k+\gamma_k)]$, $k=p+1, \ldots, m$, которые являются положительными. Если положительных среди этих чисел нет и $n=0$, задача имеет ровно $\varkappa$ линейно-независимых решений класса h_{pq}. При наличии положительных среди чисел $\mathrm{En}\,[\mathrm{Re}\,(\nu_k+\gamma_k)]$, $k=p+1, \ldots, m$ у $\Phi^-(t)$ в соответствующих точках t_k будет особенность неинтегрируемого порядка. Обеспечить интегрируемость подбором коэффициентов полинома $Q_{n-1}(z)$ в данном случае нельзя, ибо интеграл $\psi(z)$ в этих точках имеет особенности. Значит, в данном случае задача не имеет решений в рассматриваемом классе h_{pq} даже при положительном индексе.

5°. Впервые задача Римана с коэффициентами, обращающимися в нуль и в бесконечность в конечном числе точек контура, исследовалась Ф. Д. Гаховым [10]. Решения отыскивались в классе кусочно-аналитических функций, граничные значения которых в исключительных точках могли иметь лишь интегрируемые особенности. Чтобы обеспечить разрешимость задачи в этом классе функций, коэффициенты $g(t)$ и $G_*(t)$ предполагались гельдеровыми и дифференцируемыми в окрестности точек t_k достаточное число раз.

Продолжением и углублением этих исследований является работа Л. А. Чикина [89]. Здесь класс искомых функций расширяется: в исключительных точках допускаются бесконечности неинтегрируемого порядка, что приводит к необходимости использовать при решении обобщенные интегралы типа Коши с плотностями, имеющими в некоторых исключительных точках неинтегрируемые особенности. Смысл этим расходящимся интегралам придавался на основании понятия интеграла в смысле Адамара [7]. Позднее В. С. Рогожин [53] включил результаты Л. А. Чикина в единую теорию краевых задач в пространстве обобщенных аналитических функций.

Основу построений Л. А. Чикина составляет переход к так называемой „приведенной задаче“. Это обычная задача Римана с гельдеровым необращающимся в нуль коэффициентом $G_0(t)$, но не для исходного контура L, а для контура L_0, не проходящего через исключительные точки и отличающегося от L дугами окружностей с центрами в точках t_k, включающими эти точки в D^+ или в D^- в зависимости от класса допустимых решений. $G_0(t)$ вводится на L_0 так, чтобы решения исходной задачи получались из решений „приведенной задачи“ предельным переходом при $L_0 \to L$.

На наш взгляд, у Л. А. Чикина нет строгого обоснования законности подобного предельного перехода, и потому мы изложили здесь другой метод решения, не требующий перехода к „приведенной задаче“ и привлечения понятия интеграла в смысле Адамара [75].

§ 13. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Краевая задача Римана в настоящее время применяется при решении многих прикладных и теоретических задач. Со многими из них можно подробно ознакомиться по монографиям Н. И. Мусхелишвили [41] и Ф. Д. Гахова [8]. В частности, в этих монографиях хорошо показана важная роль задачи Римана в построении теории сингулярных интегральных уравнений. Так называют интегральные уравнения вида

$$a(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)\,d\tau=c(t), \tag{13.1}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Некоторые из этих уравнений приведением к задаче Римана решаются в замкнутой форме. Таковым является уравнение

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=c(t), \tag{13.2}$$

называемое *характеристическим*. Предполагая линию L гладкой, а заданные на ней функции $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ принадлежащими классу H_0, мы установим сначала эквивалентность между уравнением (13.2) и некоторой задачей Римана, а затем найдем общее решение этого уравнения в классе функций, удовлетворяющих условию H всюду на L, кроме, может быть, концевых точек, в которых будем допускать обращение в бесконечность интегрируемого порядка.

1°. Примем искомое решение характеристического уравнения (13.2) за плотность интеграла типа Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau. \tag{13.3}$$

Для него во всех точках линии L, отличных от концов, имеют место формулы Сохоцкого

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t), \tag{13.4}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\Phi^+(t)+\Phi^-(t), \tag{13.5}$$

на основании которых уравнение (13.2) можно записать в таком виде

$$[a(t)+b(t)]\,\Phi^+(t)-[a(t)-b(t)]\,\Phi^-(t)=c(t). \tag{13.6}$$

Значит, вспомогательная функция $\Phi(z)$, удовлетворяющая условию $\Phi(\infty)=0$, должна быть решением задачи Римана (13.6), исчезающим на бесконечности.

Обратно, если функция $\Phi(z)$ есть некоторое исчезающее на бесконечности решение задачи Римана (13.6), принадлежащее вполне определенному классу h_q при наличии в составе L разомкнутых контуров, то по первой из формул Сохоцкого мы вычислим функцию $\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)$ во всех точках $t \in L$, отличных от концевых. Но это означает, что функция $\Phi(z)$ является решением задачи о скачке, исчезающим на бесконечности, и потому единственным образом представима в виде интеграла типа Коши вида (13.3), для которого, наряду с формулой (13.4), справедлива и вторая формула Сохоцкого (13.5). Выразив $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ через $\varphi(t)$ и главное значение интеграла, подставим их в краевое условие (13.6) и убедимся, что функция $\varphi(t)$ является решением уравнения (13.2).

Очевидно, интеграл типа Коши равен тождественно нулю вне линии интегрирования тогда и только тогда, когда его плотность есть нуль тождественный. Поэтому линейно-независимым решениям задачи (13.6) соответствуют линейно-независимые решения уравнения (13.2), и наоборот.

Нами доказана, таким образом,

Теорема 13.1. *Характеристическое сингулярное уравнение* (13.2) *и краевая задача Римана* (13.6) *эквивалентны между собой в том смысле, что каждому решению уравнения* (13.2) *соответствует по формуле* (13.3) *исчезающее на бесконечности решение задачи* (13.6) *того же класса* h_q *и, обратно, каждому исчезающему на бесконечности решению задачи* (13.6) *класса* h_q *формула* (13.4) *ставит в соответствие решение уравнения* (13.2) *того же класса. При этом линейно-независимым решениям уравнения соответствуют линейно-независимые решения краевой задачи, и наоборот.*

2°. Из теоремы 13.1 сразу следует и метод решения характеристического уравнения: для этого надо найти общее решение краевой задачи (13.6) некоторого класса h_q, исчезающее на бесконечности, и по формуле (13.4) вычислить общее решение уравнения того же класса.

Для простоты мы ограничимся рассмотрением нормального (не исключительного) случая, когда функции

$$a(t)+b(t), \quad a(t)-b(t) \tag{13.7}$$

не обращаются в нуль нигде на L. Это значит, что краевое условие (13.6) можно переписать в обычной для нас форме

$$\Phi^+(t)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\Phi^-(t)+\frac{c(t)}{a(t)+b(t)}, \tag{13.8}$$

при этом коэффициенты

$$G(t)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}, \quad g(t)=\frac{c(t)}{a(t)+b(t)} \tag{13.9}$$

будут принадлежать классу H_0 и $G(t)\neq 0$ всюду на L.

Будем считать, что линия L состоит из m замкнутых и n разомкнутых контуров. На основании пункта 6° § 10 каноническую функцию $X(z)$ задачи (13.8) избранного класса h_q можно записать в виде произведения канонической функции $X_1(z)$ для замкнутых контуров $L_1, \ldots, L_m$ и канонической функции $X_2(z)$ для разомкнутых контуров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, определяемых формулами (9.23) и (10.16) соответственно. Получим

$$X(z)=e^{\Gamma(z)}\prod_{k=1}^{m}(z-t_k)^{-\varkappa_k}\prod_{j=1}^{2n}(z-c_j)^{-\nu_j}, \tag{13.10}$$

где

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln\frac{a(\tau)-b(\tau)}{a(\tau)+b(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau-z},$$

ветви функций $\ln[(a-b)/(a+b)]$ на каждом контуре линии L фиксированы; $\varkappa_k$ и ν_j — целые числа, среди которых

$$\varkappa_k=\operatorname{Ind}\left[\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\right]_{L_k}, \quad k=1,\ldots,m,$$

а ν_j подобраны так, чтобы $X(z)$ принадлежала классу $h_q=h(c_1,\ldots,c_q)$: $0<\alpha_j-\nu_j<1$, $j=1,\ldots,q$; $-1<\alpha_j-\nu_j<0$, $j=q+1,\ldots,p$; $\alpha_j-\nu_j=0$, $j=p+1,\ldots,2n$, если при этом

$$\alpha_j+i\beta_j=\mp\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{a(c_j)-b(c_j)}{a(c_j)+b(c_j)}.$$

Если порядок $X(z)$ на бесконечности со знаком минус обозначить через $\varkappa=\varkappa_1+\ldots+\varkappa_m+\nu_1+\ldots+\nu_{2n}$, то общее решение нашей задачи класса h_q, исчезающее на бесконечности, запишется в таком виде

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{c(\tau)}{[a(\tau)+b(\tau)]X^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau-z}+X(z)P_{\varkappa-1}(z), \tag{13.11}$$

где $P_{\varkappa-1}(z)$ — произвольный полином степени $\varkappa-1$ при $\varkappa>0$ и $P_{\varkappa-1}(z)\equiv 0$ при $\varkappa\leqslant 0$. При этом в случае $\varkappa<0$ решение задачи существует только при выполнении условий

$$\int\limits_L\frac{\tau^k c(\tau)\,d\tau}{[a(\tau)+b(\tau)]X^+(\tau)}=0, \quad k=0,1,\ldots,-\varkappa-1. \tag{13.12}$$

Общее решение исходного уравнения (13.2) найдем как разность $\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$, вычислив $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ из (13.11) по формулам Сохоцкого:

$$\Phi^+(t) = X^+(t)\left\{\frac{c(t)}{2[a(t)+b(t)]X^+(t)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{c(\tau)}{(a+b)X^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau - t} + P_{\varkappa-1}(t)\right\},$$

$$\Phi^-(t) = X^-(t)\left\{\frac{-c(t)}{2[a(t)+b(t)]X^+(t)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{c(\tau)}{(a+b)X^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau - t} + P_{\varkappa-1}(t)\right\}.$$

Отсюда

$$\varphi(t) = \frac{[X^+(t) + X^-(t)]\,c(t)}{2[a(t)+b(t)]X^+(t)} +$$

$$+ \frac{X^+(t) - X^-(t)}{2\pi i}\int_L \frac{c(\tau)}{(a+b)X^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau - t} +$$

$$+ [X^+(t) - X^-(t)]\,P_{\varkappa-1}(t).$$

Из формулы (13.10) находим

$$X^+(t) = \sqrt{\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}}\,e^{\Gamma(t)}\prod_{k=1}^{m}(t-t_k)^{-\varkappa_k}\prod_{j=1}^{2n}(t-c_j)^{-\nu_j},$$

$$X^-(t) = \sqrt{\frac{a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)}}\,e^{\Gamma(t)}\prod_{k=1}^{m}(t-t_k)^{-\varkappa_k}\prod_{j=1}^{2n}(t-c_j)^{-\nu_j},$$

откуда, полагая

$$Z(t) = X^+(t)[a(t)+b(t)] = X^-(t)[a(t)-b(t)], \tag{13.13}$$

$$A(t) = \frac{a(t)}{a^2(t) - b^2(t)}, \quad B(t) = \frac{b(t)}{a^2(t) - b^2(t)}, \tag{13.14}$$

получаем

$$X^+(t) + X^-(t) = 2A(t)Z(t),$$

$$X^+(t) - X^-(t) = -2B(t)Z(t).$$

Вставляя эти выражения, получаем окончательно

$$\varphi(t) = A(t)c(t) - \frac{B(t)Z(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{c(\tau)}{Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} -$$

$$-2B(t)Z(t)P_{\varkappa-1}(t). \tag{13.15}$$

При $\varkappa < 0$ к этой формуле надо присоединить условия разрешимости (13.12), которые на основании соотношений (13.13) можно переписать в таком виде

$$\int\limits_L \frac{c(\tau)}{Z(\tau)}\tau^k d\tau = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1. \tag{13.16}$$

Привлекая результаты § 6 и повторяя почти дословно рассуждения, проведенные в 6° § 10, можно показать, что все решения, определяемые формулой (13.15), действительно принадлежат классу h_q.

Итогом исследований является

Теорема 13.2. *При $\varkappa > 0$ характеристическое уравнение* (13.2) *имеет $\varkappa$ линейно-независимых решений класса $h(c_1, \ldots, c_q)$; все они определяются формулой* (13.15). *При $\varkappa = 0$ решение единственно и определяется той же формулой* (13.15), *если в ней положить $P_{-1} \equiv 0$. При $\varkappa < 0$ единственное решение существует тогда и только тогда, когда выполнены дополнительные условия* (13.16).

3°. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = c(t). \tag{13.17}$$

Оно получается из уравнения (13.2) при $a(t) = 0$, $b(t) = 1$, так что соответствующая ему задача Римана имеет краевое условие

$$\Phi^+(t) = -\Phi^-(t) + c(t). \tag{13.18}$$

Предположим сначала, что линия L состоит лишь из замкнутых контуров $L_1, \ldots, L_m$. Так как на каждом из них $G(t) = -1$, то все $\varkappa_k = 0$ и $\varkappa = 0$. Если на каждом L_k положить $\ln(-1) = \pi i$, то $X(z) = \exp\Gamma(z)$ легко вычисляется. Она оказывается равной $+1$ или -1 на кусках, на которые линия L разбивает плоскость. Поэтому $z(t)$ на всех L_k равна либо $+1$, либо -1 и из формулы (13.15) для интеграла (13.17) получаем такую формулу обращения

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{c(\tau)}{\tau - t}d\tau. \tag{13.19}$$

Для одного гладкого замкнутого контура эта формула другим путем была получена в п. 5° § 4.

Когда L состоит лишь из разомкнутых контуров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\alpha_j + i\beta_j = -1/2$ во всех a-точках и $\alpha_j + i\beta_j = 1/2$ во всех b-точках, так что все концы неособенные. Здесь

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \ln \frac{z-b_j}{z-a_j}$$

и канонической функцией класса $h(c_1, \ldots, c_q)$ будет

$$X(z) = \left[\prod_{j=1}^{q}(z-c_j)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\prod_{j=q+1}^{2n}(z-c_j)\right]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}. \qquad (13.20)$$

Под радикалом можно понимать любую из однозначных ветвей, на которые этот радикал распадается в плоскости с разрезами вдоль L, например, ветвь, имеющую в окрестности бесконечно удаленной точки такое разложение

$$\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}} = z^{q-n} + d_1 z^{q-n-1} + \ldots \qquad (13.21)$$

Отсюда сразу получаем величину индекса рассматриваемого класса $h(c_1, \ldots, c_q)$: $\varkappa = n - q$.

Если положить

$$X^+(t) = \sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}},$$

то

$$z(t) = X^+(t) = -X^-(t) = \sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}},$$

и по формуле (13.15) решение класса $h(c_1, \ldots, c_q)$ уравнения (13.17) получится в виде

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}\int_L \sqrt{\frac{R_2(\tau)}{R_1(\tau)}}\frac{c(\tau)\,d\tau}{\tau - t} +$$

$$+ P_{n-q-1}(t)\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}, \qquad (13.22)$$

где $P_{n-q-1}(t)$ — произвольный полином степени $n-q-1$ при $q < n$ и $P_{n-q-1} \equiv 0$ при $q \geqslant n$. При $q > n$ для существования решения необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_L \sqrt{\frac{R_2(\tau)}{R_1(\tau)}}\, c(\tau)\,\tau^k d\tau = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, q-n-1. \qquad (13.23)$$

4°. Путем приведения к краевой задаче Римана решается обычно еще одно сингулярное уравнение

$$a(t)\psi(t)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=f(t), \tag{13.24}$$

называемое союзным характеристическому. Ядра уравнений (13.2) и (13.24)

$$\frac{1}{\pi i}\,\frac{b(t)}{\tau-t},\quad -\frac{1}{\pi i}\,\frac{b(\tau)}{\tau-t}$$

получаются друг из друга перестановкой переменных τ и t.

Легко показать, что уравнение (13.24) эквивалентно краевой задаче

$$\Psi^+(t)=\frac{a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)}\,\Psi^-(t)+\frac{b(t)f(t)}{a(t)-b(t)}, \tag{13.25}$$

союзной по отношению к задаче (13.6). Поэтому на основании сказанного в п. 4° § 10 при наличии в составе L разомкнутых контуров можно одновременно вести речь о решениях обоих союзных друг другу уравнений лишь в союзных классах $h(c_1,\ldots,c_q)$ и $h(c_{q+1},\ldots,c_p)$, индексы которых отличаются друг от друга знаком, а канонические функции обратны по величине. Из общего решения задачи (13.25)

$$\Psi(z)=\frac{[\mathrm{X}(z)]^{-1}}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mathrm{X}^+(\tau)\,b(\tau)f(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-z)}\,d\tau+[\mathrm{X}(z)]^{-1}Q_{-\varkappa-1}(z)$$

решение уравнения (13.24) вычисляется по любой из формул

$$\psi(t)=\frac{2\Psi^+(t)+f(t)}{a(t)+b(t)},\quad \psi(t)=\frac{2\Psi^-(t)+f(t)}{a(t)-b(t)}.$$

В тех же обозначениях, что и при решении характеристического уравнения, оно записывается в таком виде

$$\psi(t)=A(t)f(t)+\frac{1}{\pi i z(t)}\int\limits_L \frac{z(\tau)B(\tau)f(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{2Q_{-\varkappa-1}(t)}{z(t)}. \tag{13.26}$$

При $\varkappa\geqslant 0$ в этой формуле надо положить $Q_{-\varkappa-1}(t)\equiv 0$, а при $\varkappa>0$ надо присоединить к ней условия разрешимости

$$\int\limits_L z(\tau)B(\tau)f(\tau)\tau^k d\tau=0,\quad k=0,\ 1,\ldots,\ \varkappa-1. \tag{13.27}$$

Пусть $\varkappa < 0$. В этом случае уравнение (13.24) разрешимо при любой правой части $f(t) \in H_0$ и имеет $(-\varkappa)$ линейно-независимых решений. Если положить $f(t) \equiv 0$, то из формулы (13.26) получим общее решение однородного союзного уравнения

$$\psi(t) = 2Q_{-\varkappa-1}(t)/z(t).$$

Оно представляет линейную комбинацию функций

$$\psi_k(t) = t^k/z(t), \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1, \tag{13.28}$$

составляющих полную систему линейно-независимых решений этого однородного уравнения. Возвращаясь к условиям разрешимости характеристического уравнения (13.16), видим, что они могут быть переписаны в таком виде

$$\int\limits_L c(\tau)\psi_k(\tau)\,d\tau = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1. \tag{13.29}$$

Аналогично, при $\varkappa > 0$ условия разрешимости (13.27) союзного с характеристическим уравнения (13.24) таким же образом можно записать через линейно-независимые решения однородного характеристического уравнения $\varphi_k(t) = t^k z(t) B(t)$, $k = 0, 1, \ldots, \varkappa - 1$.

Значит, справедлива

Теорема 13.3. *При $\varkappa < 0$ неоднородное характеристическое уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть $c(t)$ удовлетворяет условиям* (13.29), *где функции $\psi_k(t)$, определяемые формулами* (13.28), *составляют полную систему линейно-независимых решений однородного союзного уравнения.*

Аналогичная теорема имеет место и для уравнения (13.24).

5°. Полное сингулярное интегральное уравнение вида (13.1) исследуется путем *регуляризации*, то есть путем приведения к интегральному уравнению Фредгольма. Один из методов регуляризации основан на решении характеристического уравнения. Суть его состоит в следующем.

Левая часть уравнения (13.1) представляет собой вполне определенный интегральный оператор, примененный к функции $\varphi(t)$. Обозначим его через $K\varphi$ и представим в такой форме

$$K\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K(t,\tau) - K(t,t)}{\tau - t}\varphi(\tau)\,d\tau, \; b(t) = K(t, t).$$

На основании известных нам свойств функций класса H_0 (§ 2) легко показать, что функция $k(t, \tau)$, представляющая ядро второго интеграла, может быть представлена в виде

$$k(t, \tau) = \frac{K(t, \tau) - K(t, t)}{\tau - t} = \frac{k_0(t, \tau)}{|\tau - t|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1,$$

где $k_0(t, \tau)$ принадлежит классу H_0 по обеим переменным. Поэтому оператор $K\varphi$ можно представить в виде суммы двух операторов

$$K\varphi = K^0\varphi + k\varphi,$$

$$K^0\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,$$

$$k\varphi \equiv \frac{1}{\pi i}\int_L k(t, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau,$$

первый из которых является характеристическим сингулярным оператором, а второй — регулярным или квазирегулярным оператором Фредгольма. При решении полного сингулярного уравнения $K\varphi = c(t)$ переписываем его в виде $K^0\varphi = c(t) - k\varphi$ и, считая правую часть известной, решаем это уравнение как характеристическое. Формула (13.15), определяющая общее решение характеристического уравнения, нам известна. Заменим в этой формуле $c(t)$ на $c(t) - k\varphi$, а затем перенесем все члены, содержащие $\varphi(t)$, в левую часть равенства, а не содержащие $\varphi(t)$ — в правую. В результате для определения функции $\varphi(t)$ получим интегральное уравнение

$$\varphi(t) + \int_L M(t, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau = F(t), \tag{13.30}$$

ядро которого $M(t, \tau)$ является либо ограниченным на линии L, либо имеет подвижную особенность интегрируемого порядка. Значит, интегральное уравнение (13.30) является уравнением Фредгольма.

Уравнение (13.30) эквивалентно исходному сингулярному уравнению $K\varphi = c(t)$ в том смысле, что оба они одновременно разрешимы или неразрешимы, и в случае разрешимости каждому решению уравнения $K\varphi = c(t)$ соответствует решение уравнения (13.30) и наоборот. При этом к уравнению (13.30) надо присоединить $(-\varkappa)$ дополнительных условий (13.16), заменив в них $c(t)$ на $c(t) - k\varphi$, если $\varkappa < 0$.

Основные факты теории уравнений Фредгольма составляют содержание трех теорем Фредгольма (см., например, [47, гл. 1]). Применяя их к уравнению (13.30), можно получить основные выводы теории сингулярных уравнений в виде трех теорем, известных под названием *теорем Нётера*. Если через $K'\psi$ обозначить сингулярный оператор, союзный к оператору $K\varphi$, а под $\varkappa$ по-прежнему понимать индекс краевой задачи Римана, эквивалентной характеристическому уравнению $K^0\varphi = c_1$, то теоремы Нётера можно сформулировать следующим образом:

1. *Сингулярное интегральное уравнение* $K\varphi = c(t)$ *всегда имеет конечное число решений.*

2. *Необходимым и достаточным условием разрешимости неоднородного уравнения* $K\varphi = c(t)$ *является выполнение равенств*

$$\int_L c(t)\,\psi_k(t)\,dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n',$$

где $\psi_1(t), \ldots, \psi_{n'}(t)$ — *полная система линейно-независимых решений союзного однородного уравнения* $K'\psi = 0$.

3. *Разность числа n линейно-независимых решений уравнения* $K\varphi = 0$ *и числа n' линейно-независимых решений союзного ему уравнения* $K'\psi = 0$ *зависит лишь от характеристической части оператора K и равна индексу* $\varkappa$: $n - n' = \varkappa$.

Первые две теоремы характеризуют свойства сингулярных уравнений, совпадающие со свойствами уравнений Фредгольма, третья говорит об их различии, ибо однородные взаимно союзные фредгольмовы уравнения в случае разрешимости всегда имеют одинаковое число решений, что у сингулярных уравнений имеет место только в случае $\varkappa = 0$.

Подробное изложение теории сингулярных уравнений по этой схеме дано И. Н. Векуа в работах [3] и [4]. В монографиях Н. И. Мусхелишвили и Ф. Д. Гахова это делается при помощи других методов регуляризации.

ГЛАВА III

ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В этой главе мы изложим решение задачи Римана для функций, в распределении значений которых, а следовательно, и в расположении их особых линий, наблюдается некоторая закономерность.

§ 14. КУСОЧНО-ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ УСЛОВИЮ СИММЕТРИИ

1°. Известно, что любая окружность C является линией симметрии расширенной комплексной плоскости и связь между парой симметричных точек z и z^* относительно C можно получить из уравнения окружности

$$C: \alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0, \ \alpha = \bar{\alpha}, \ \gamma = \bar{\gamma}, \tag{14.1}$$

если в нем, оставляя на месте $\bar{z}$, заменить z на z^*:

$$\alpha z^* \bar{z} + \beta z^* + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0. \tag{14.2}$$

При $\alpha = 0$ уравнение (14.1) определяет некоторую прямую на плоскости, а уравнение (14.2) связывает между собой точки z и z^*, являющиеся зеркальными отражениями друг друга в этой прямой. Например, в случае вещественной оси, уравнение которой $y = 0$ в комплексной форме имеет вид $z - \bar{z} = 0$, получаем хорошо известный закон отражения $z^* = \bar{z}$.

В общем случае из уравнения (14.2) получаем

$$z^* = -\frac{\bar{\beta}\bar{z} + \gamma}{\alpha\bar{z} + \beta}. \tag{14.3}$$

Значит, *симметрия относительно окружности* (14.1) *есть взаимно однозначное антиконформное преобразование расширенной плоскости в себя*, состоящее в последовательном выполнении симметрии относительно вещественной оси и вполне определенного дробно-линейного преобразования.

Очевидно, $(z^*)^* \equiv z$, то есть преобразование (14.3) совпадает со своим обратным.

Функцию $\Phi(z)$, принимающую в симметричных точках относительно некоторой окружности комплексно сопряженные значения, будем называть для краткости *симметричной*, а соотношение

$$\overline{\Phi(z^*)} = \Phi(z) \tag{14.4}$$

условием симметрии.

Из этого определения следует, что множество, на котором рассматривается симметричная функция, всегда симметрично относительно рассматриваемой окружности C. Для простоты в дальнейшем мы будем брать в качестве C единичную окружность $L_0: |z| = 1$. Если в ее комплексном уравнении $z\bar{z} = 1$ заменим z, не трогая $\bar{z}$, на z^*, получим хорошо известный закон симметрии относительно L_0

$$z^* = \frac{1}{\bar{z}}, \tag{14.5}$$

представляющий из себя преобразование инверсии. Точке $z = 0$ при этом соответствует бесконечно удаленная точка $z = \infty$.

Допустим, что симметричная функция $\Phi(z)$ относительно L_0 является аналитической в некоторой области S. Тогда она будет аналитической и в симметричной области S^*. В самом деле, когда в S мы знаем $\Phi(z)$ и $\Phi'(z)$, то по определению значения симметричной функции в области S^* будут совпадать со значениями функции $\Phi_1(z) = \overline{\Phi(z^*)}$. При $z,\ z + \Delta z \in S^*$ точки $z^* = 1/\bar{z}$ и $(z + \Delta z)^* = 1/\overline{z + \Delta z}$ будут находиться в S, при этом когда $\Delta z \to 0$, то

$$\Delta z^* = (z + \Delta z)^* - z^* = \frac{1}{\bar{z} + \overline{\Delta z}} - \frac{1}{\bar{z}} = -\frac{\overline{\Delta z}}{\bar{z}(\bar{z} + \overline{\Delta z})}$$

тоже стремится к нулю. Поэтому

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Phi_1(z + \Delta z) - \Phi_1(z)}{\Delta z} = \overline{\lim_{\Delta z^* \to 0} \frac{\Phi(z^* + \Delta z^*) - \Phi(z^*)}{\Delta z^*}} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z^*}}{\Delta z} =$$

$$= \overline{\Phi'(z^*)} \lim_{\Delta z \to 0} \left[-\frac{1}{z(z + \Delta z)} \right] = -\frac{1}{z^2} \overline{\Phi'(z^*)}.$$

Если в окрестности некоторой точки z_0 для симметричной функции имеет место представление

$$\Phi(z) = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

где n — целое число, а $\varphi(z)$ — аналитическая вблизи z_0 функция, для которой $\varphi(z_0) \neq 0$ при $n > 0$, то в окрестности точки $z_0^* = 1/\bar{z}_0$ будем иметь

$$\overline{\Phi(z^*)} = \left(\frac{1}{z} - \bar{z}_0\right)^n \overline{\varphi(z^*)}.$$

Значит, симметричная функция в точках z_0 и z_0^* одновременно имеет нули или полюсы одного и того же порядка.

Если область аналитичности S симметричной функции имеет в качестве участка границы некоторую дугу t_1t_2 окружности L_0, то область S^* будет примыкать к S вдоль дуги t_1t_2. Допустим, что $\Phi(z)$ непрерывно продолжима из S на дугу t_1t_2. Тогда она будет непрерывно продолжимой на эту дугу и из S^* и так как при $z \to t \in t_1t_2$ из S точка $z^* \to t$ из S^*, то из условия симметрии (14.4) получаем

$$\Phi^-(t) = \overline{\Phi^+(t)}. \tag{14.6}$$

Значит, в этом случае каждая точка дуги t_1t_2 является для функции $\Phi(z)$ точкой разрыва первого рода с чисто мнимым скачком $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 2i \operatorname{Im} \Phi^+(t)$. Если $\operatorname{Im} \Phi^+(t) = 0$ на дуге t_1t_2, то $\Phi^+(t) = \Phi^-(t)$ и, следовательно, $\Phi(z)$ аналитически продолжима через эту дугу.

Когда у симметричной функции $\Phi(z)$ имеется линия L разрывов первого рода, отличная от L_0, при переходе через линию L^* функция $\Phi(z)$ будет тоже испытывать разрывы первого рода, и так как в силу антиконформности преобразования (14.5) ориентация на L^* противоположна ориентации на L, то из условия симметрии (14.4) имеем

$$\Phi^\pm(t) = \overline{\Phi^\mp(t^*)}. \tag{14.7}$$

На основании этих равенств из любого соотношения, связывающего $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ на L, легко получить соответствующее соотношение между $\Phi^+(t^*)$ и $\Phi^-(t^*)$ на L^*. Так, если на L имеем условие Римана

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t),$$

то, учитывая равенства (14.7) и известную нам связь $t = 1/\bar{t}^*$ между точками $t \in L$ и $t^* \in L^*$, на L^* будем иметь равенство

$$\Phi^-(t^*) = \overline{G\left(\frac{1}{\bar{t}^*}\right)}\Phi^+(t^*) + \overline{g\left(\frac{1}{\bar{t}^*}\right)},$$

разрешая которое относительно $\Phi^+(t^*)$, получим условие Римана с коэффициентами

$$1/\overline{G\left(\frac{1}{\bar{t}^*}\right)}, \quad -\overline{g\left(\frac{1}{\bar{t}^*}\right)}\Big/\overline{G\left(\frac{1}{\bar{t}^*}\right)}. \tag{14.8}$$

Из изложенного следует, что при изучении кусочно-голоморфных симметричных функций надо исследовать их только на L_0 и в одной из двух частей плоскости, на которые ее разбивает L_0; во второй симметричной относительно L_0 части плоскости свойства этой функции будут определяться условием симметрии. При постановке краевых задач это позволяет выписывать краевые условия лишь на L_0 и на особых линиях, лежащих, например, внутри L_0.

Отметим еще следующее обстоятельство. Если $\Phi_1(z), \ldots$ $\ldots, \Phi_n(z)$ линейно-независимые симметричные функции, то их линейная комбинация $\Phi(z) = c_1\Phi_1(z) + \ldots + c_n\Phi_n(z)$ будет симметричной функцией, очевидно, тогда и только тогда, если постоянные $c_1, \ldots, c_n$ вещественны. Поэтому *всюду в дальнейшем линейная комбинация симметричных функций будет рассматриваться над полем вещественных чисел.*

2°. Задача Римана для симметричных функций решается просто, если линия симметрии L не входит в число особых линий [76]. Мы изложим здесь решение этой задачи в простейшем случае, когда особая линия L, расположенная внутри L_0, состоит из гладких замкнутых непересекающихся контуров, лежащих вне друг друга. Краевое условие возьмем в обычном виде

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \tag{14.9}$$

и будем считать, что функции $G(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют на L условию H и $G(t) \neq 0$.

При решении задачи мы должны помнить, что у искомой функции наряду с L есть еще особая линия L^*, на которой $\Phi(z)$ также удовлетворяет краевому условию того же вида (14.9) с коэффициентами (14.8). Поэтому при определении симметричной функции $\Phi(z)$ по заданным скачкам на L

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t) \tag{14.10}$$

мы выписываем и соответствующее краевое условие, которое должно выполняться на L^*

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = -\overline{g(t^*)}. \tag{14.11}$$

Мы знаем, что условию (14.10) удовлетворяет интеграл типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)}{\tau - z}\, d\tau, \tag{14.12}$$

а условию (14.11) — функция

$$\overline{F(z^*)} = \overline{F\left(\frac{1}{\bar z}\right)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^*} \frac{\overline{g(\tau_1^*)}}{\tau_1}\, d\tau_1 - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^*} \frac{\overline{g(\tau_1^*)}}{\tau_1 - z}\, d\tau_1. \tag{14.13}$$

Отличаясь от интеграла типа Коши по L^* лишь постоянным слагаемым, функция $\overline{F(z^*)}$ других особых линий, кроме L^*, или особых точек не имеет. Значит, сумма

$$\Phi_1(z) = F(z) + \overline{F(z^*)}, \tag{14.14}$$

представляющая из себя симметричную функцию по построению, удовлетворяет обоим краевым условиям (14.10) и (14.11) и является одним из частных решений задачи о скачке. На бесконечности $\Phi_1(z)$ ограничена, при этом

$$\Phi_1(0) = \overline{\Phi_1(\infty)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)}{\tau}\,d\tau. \tag{14.15}$$

Чтобы найти решения задачи (14.10), имеющие на бесконечности полюс порядка не выше n, берем разность $\psi(z) = \Phi(z) - \Phi_1(z)$. Так как обе функции $\Phi(z)$ и $\Phi_1(z)$ на L и L^* удовлетворяют одним и тем же краевым условиям (14.10) и (14.11), то $\psi^+(t) = \psi^-(t)$ на L и L^*. Значит, $\psi(z)$ аналитична во всей плоскости, кроме точек $z=0$ и $z=\infty$, где у нее полюсы порядка не выше n, и является рациональной функцией вида

$$\psi(z) = P_n(z) + Q_n(1/z),$$

где P_n и Q_n — произвольные полиномы. Условие симметрии для $\psi(z)$ будет выполнено тогда и только тогда, если

$$P_n(z) + Q_n(1/z) = \overline{P_n(1/\bar z)} + \overline{Q_n(\bar z)},$$

то есть, если $Q_n(1/z) = \overline{P_n(1/\bar z)}$. Окончательно имеем $\psi(z) = P_n(z) + \overline{P_n(z^*)}$ и общее решение задачи (14.10) порядка не выше n на бесконечности запишется в виде

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + P_n(z) + \overline{P_n(z^*)}, \tag{14.16}$$

где функция $\Phi_1(z)$ определяется формулами (14.12)—(14.14).

Пусть $c_k = \alpha_k + i\beta_k$ есть коэффициенты полинома $P_n(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$. Тогда

$$P_n(z) + \overline{P_n(z^*)} = 2\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k \Omega_k(z) + \beta_k \omega_k(z)].$$

Обе функции

$$\Omega_k(z) = z^k + z^{-k},\ \omega_k(z) = i(z^k - z^{-k}) \tag{14.17}$$

удовлетворяют условию симметрии (14.4), в точках $z=0$ и $z=\infty$ имеют полюсы порядка k и между собой линейно-независимы. Следовательно, задача (14.10) имеет $2n+1$ линейно-независимых решений над полем вещественных чисел порядка не выше n на бесконечности.

Исчезающих на бесконечности решений задача (14.10) при любой функции $g(t) \in H$ не имеет и, как показывает равенство (14.15), лишь при выполнении условия

$$\int_L g(\tau)\tau^{-1}\,d\tau = 0 \tag{14.18}$$

функция $\Phi_1(z)$ будет единственным решением задачи о скачке, обращающимся в нуль как при $z=0$, так и при $z=\infty$.

При решении однородной задачи, получающейся из задачи (14.9) при $g(t)\equiv 0$, мы строим прежде всего известным нам способом каноническую функцию

$$\chi(z) = e^{\Gamma(z)}\prod_{j=1}^{m}(z-t_j)^{-\varkappa_j}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\,d\tau,$$

принимая во внимание только краевое условие $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$ на L. Затем берем функцию $\overline{\chi(z^*)}$; непрерывная на L, она будет иметь особую линию L^* и удовлетворять на ней однородному условию с коэффициентом $1/\overline{G(t^*)}$; вне линии L^* она нигде не обращается в нуль, кроме, может быть, точки $z=0$. Таким образом, $\overline{\chi(z^*)}$ обладает всеми свойствами канонической функции, только отличный от нуля порядок имеет не в бесконечно удаленной точке, а в точке $z=0$. Но ведь и при построении функции $\chi(z)$ от нулей или бесконечностей у $\exp\Gamma(z)$ в точках $t_1, \ldots, t_m$ можно было избавиться не домножением на $(z-t_1)^{-\varkappa_1}\ldots(z-t_m)^{-\varkappa_m}$, а на какую-либо другую рациональную функцию, например, на

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{z-t_j}{z-z_j}\right)^{-\varkappa_j}, \quad z_j \overline{\in} L,$$

ограниченную на бесконечности. В этом случае отличный от нуля порядок у $\chi(z)$ был бы в точках $z_1, \ldots, z_m$. Общий суммарный порядок $\chi(z)$ на расширенной плоскости и в этом случае будет равен $(-\varkappa)$, $\varkappa = \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_m$.

Итак, функция $\overline{\chi(z^*)}$ обладает всеми свойствами канонической функции однородной задачи Римана для линии L^* с коэффициентом $1/\overline{G(t^*)}$. Поэтому произведение

$$X(z) = \chi(z)\overline{\chi(z^*)} = e^{\Gamma(z)+\overline{\Gamma(z^*)}}\prod_{j=1}^{m}(z-t_j)^{-\varkappa_j}\left(\frac{1}{z}-\overline{t}_j\right)^{-\varkappa_j} \tag{14.19}$$

будет канонической функцией рассматриваемой нами задачи (14.9) для симметричных функций. Она имеет одинаковый порядок $(-\varkappa)$ в точках $z=0$ и $z=\infty$.

Чтобы получить общее решение однородной задачи порядка не выше n на бесконечности, на основании равенства $G(t) = X^+(t)/X^-(t)$ записываем однородное условие на L в виде $\Phi^+(t)/X^+(t) = \Phi^-(t)/X^-(t)$. Отсюда заключаем, что при $n+\varkappa \geqslant 0$ отношение $\Phi(z)/X(z)$ представляет симметричную рациональную функцию, имеющую полюсы порядка $n+\varkappa$ в точках $z=0$ и $z=\infty$. Но выше мы видели, что такая функция имеет вид $P_{n+\varkappa}(z) + \overline{P_{n+\varkappa}(z^*)}$, где $P_{n+\varkappa}(z)$ есть произвольный полином степени $n+\varkappa$. Значит,

$$\Phi(z) = X(z)\{P_{n+\varkappa}(z) + \overline{P_{n+\varkappa}(z^*)}\} \tag{14.20}$$

и однородная задача имеет при $n+\varkappa \geqslant 0$ ровно $2n+2\varkappa+1$ линейно-независимых решений. При $n+\varkappa < 0$ нетривиальных решений порядка не выше n на бесконечности однородная задача не имеет.

При $n=0$ формула (14.20) определяет все ограниченные решения однородной задачи в классе симметричных функций. В случае $\varkappa \geqslant 1$ имеется $2\varkappa+1$ таких линейно-независимых решений при $\varkappa < 0$ нетривиальных ограниченных решений нет.

При решении *неоднородной задачи* (14.9) ее краевое условие при помощи канонической функции (14.19) переписываем в виде

$$\Phi^+(t)/X^+(t) = \Phi^-(t)/X^-(t) + g(t)/X^+(t)$$

и известным уже нам способом получаем одно из ее частных решений

$$\Phi_*(z) = f(z) + \overline{f(z^*)},$$

$$f(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau - z}, \tag{14.21}$$

Прибавляя к нему общее решение соответствующей однородной задачи, определяемое формулой (14.20), получим общее решение задачи неоднородной. Произвести подсчет числа линейно-независимых решений и выписать дополнительные условия, обеспечивающие существование ограниченного всюду решения при $\varkappa < 0$, здесь нетрудно. Не останавливаясь на этом, перейдем к случаю, когда особой линией является линия симметрии L_0. Этот случай мы рассмотрим подробно, выделив его отдельным параграфом, ибо как раз этот случай часто встречается в приложениях. После этого самый общий случай, когда к особым линиям относится и окружность L_0 и линии, отличные от L_0, никакого труда не представит.

§ 15. СЛУЧАЙ, КОГДА ОСОБОЙ ЛИНИЕЙ ЯВЛЯЕТСЯ ЛИНИЯ СИММЕТРИИ

1. Пусть на единичной окружности L_0 заданы две функции $G(t)$ и $g(t)$, удовлетворяющие условию H, причем $G(t) \neq 0$ всюду на L_0. *Найдем симметричную кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, имеющую на бесконечности порядок не выше n, по заданному граничному условию*

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L_0. \tag{15.1}$$

Из свойства симметрии искомой функции на L_0 имеем $\Phi^+(t) = \overline{\Phi^-(t)}$ и $\Phi^-(t) = \overline{\Phi^+(t)}$. Подставляя эти выражения в условие (15.1) и переходя к комплексно сопряженным значениям, получим

$$\Phi^-(t) = \overline{G(t)}\,\Phi^+(t) + \overline{g(t)}.$$

Если это выражение для $\Phi^-(t)$ подставить в правую часть равенства (15.1), то будем иметь на L_0

$$\Phi^+(t)\,[1 - G(t)\,\overline{G(t)}] = g(t) + G(t)\,\overline{g(t)}.$$

Это — необходимое условие разрешимости задачи (15.1). Мы будем рассматривать в дальнейшем лишь наиболее интересный случай, когда оно выполняется:

$$G(t)\,\overline{G(t)} = 1, \quad g(t) + G(t)\,\overline{g(t)} = 0. \tag{15.2}$$

Нетрудно убедиться, что при выполнении этих условий краевое условие (15.1) является вещественным.

Рассмотрим сначала *задачу о скачке*

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t). \tag{15.3}$$

Условия (15.2) в этом случае сводятся к одному

$$g(t) + \overline{g(t)} = 0. \tag{15.4}$$

Значит, скачок симметричной кусочно-голоморфной функции на L_0 необходимо является чисто мнимым.

При выполнении условия (15.4) наряду с интегралом типа Коши $F(z)$, имеющим плотность $g(t)$, краевому условию (15.3) будут удовлетворять также функции

$$\overline{F(z^*)}, \ \Phi_1(z) = \frac{1}{2}\,[F(z) + \overline{F(z^*)}],$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой. При этом вторая из этих функций является симметричной.

Таким образом, функция

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_0} g(\tau)\,\frac{\tau + z}{\tau - z}\,\frac{d\tau}{\tau} \tag{15.5}$$

является одним из частных симметричных решений задачи (15.3). Ее значение

$$\Phi_1(0) = \overline{\Phi_1(\infty)} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{i\sigma})\,d\sigma \tag{15.6}$$

является чисто мнимым.

Ядро интеграла (15.5)

$$\frac{\tau + z}{\tau(\tau - z)} = \frac{2}{\tau - z} - \frac{1}{\tau} \tag{15.7}$$

называют обычно *ядром Шварца*, а сам интеграл (15.5) — *интегралом типа Шварца*. Интеграл типа Шварца в силу равенства (15.7), устанавливающего связь между ядром Шварца и ядром Коши, является своеобразным аналогом интеграла типа Коши среди симметричных функций. Аналогом формул Сохоцкого для него являются формулы

$$\Phi_1^+(t) = \overline{\Phi_1^-(t)} = \frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{4\pi i}\int_{L_0} g(\tau)\frac{\tau + t}{\tau - t}\frac{d\tau}{\tau} =$$

$$= \frac{1}{2}g(s) + \frac{1}{4\pi i}\int_0^{2\pi} g(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma. \tag{15.8}$$

В силу условия (15.4) интеграл в этих формулах, понимаемый в смысле главного значения, является вещественным.

Общее решение задачи (15.3) с полюсом порядка не выше n в точках $z = 0$ и $z = \infty$ имеет вид

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + P_n(z) + \overline{P_n(z^*)}. \tag{15.9}$$

При известном частном решении $\Phi_1(z)$ оно строится при помощи тех же рассуждений, которые изложены в предыдущем параграфе.

2°. Рассмотрим теперь *однородную задачу*

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \tag{15.10}$$

предполагая выполненным первое из условий (15.2).

Чтобы решить эту задачу, нам прежде всего надо построить каноническую функцию, одним из основных свойств которой является необращение в нуль ее предельных значений $X^+(t)$ и $X^-(t)$. Допустим, что такая функция для нашей задачи (15.10) построена. Тогда из соотношений $X^+(t) = G(t)X^-(t)$ и $X^-(t) = \overline{X^+(t)}$ имеем

$$\operatorname{Ind} G(t) = \operatorname{Ind} X^+(t) - \operatorname{Ind} X^-(t) = 2\operatorname{Ind} X^+(t).$$

Следовательно, в этом случае индекс $G(t)$ обязательно четный.

Обратно, пусть $\operatorname{Ind} G(t) = 2\varkappa$ — четное число. Покажем, что в этом случае каноническую функцию можно построить почти тем же приемом, что и в предыдущем параграфе.

Замечая, что из условия $G(t)\overline{G(t)} = 1$ следует $|G(t)| = 1$, фиксируем вполне определенную ветвь функции

$$\ln G(t) = i \arg G(t) = i\theta(t)$$

и, не заботясь об условии симметрии, запишем каноническую функцию обычной задачи Римана с краевым условием (15.10):

$$\chi(z) = (z - t_0)^{-2\varkappa} e^{\Gamma(z)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \frac{i\theta(\tau)}{\tau - z} d\tau;$$

здесь t_0 есть произвольная точка, принятая на L_0 за начало обхода. Затем берем функцию $\chi_1(z) = \overline{\chi(z^*)}$. Так как $\chi_1^+(t) = \overline{\chi^-(t)}$, $\chi_1^-(t) = \overline{\chi^+(t)}$, то внося эти значения в соотношение $\chi^+(t) = \exp[i\theta(t)]\chi^-(t)$, получим $\chi_1^+(t) = \exp[i\theta(t)]\chi_1^-(t)$. Перемножив почленно эти равенства

$$\chi^+(t)\chi_1^+(t) = e^{2i\theta(t)}\chi^-(t)\chi_1^-(t),$$

видим, что функция

$$X(z) = \sqrt{\chi(z)\overline{\chi(z^*)}} = (z - t_0)^{-\varkappa}\left(\frac{1}{z} - \bar{t}_0\right)^{-\varkappa} e^{\frac{1}{2}[\Gamma(z) + \overline{\Gamma(z^*)}]}, \tag{15.11}$$

$$\frac{1}{2}[\Gamma(z) + \overline{\Gamma(z^*)}] = \frac{1}{4\pi}\int_{L_0} \theta(\tau)\frac{\tau + z}{\tau - z}\frac{d\tau}{\tau},$$

однозначна, симметрична и обладает всеми свойствами канонической функции.

Любое решение однородной задачи порядка не выше n в точках $z = 0$ и $z = \infty$ определится формулой (14.20), если в ней под $X(z)$ понимать функцию (15.11).

Если $\operatorname{Ind} G(t) = 2\varkappa - 1$ — нечетное число, указанный метод построения канонической функции непригоден, так как в этом случае в выражении $\chi(z)$ вместо $2\varkappa$ будет стоять $2\varkappa - 1$ и операция извлечения квадратного корня из произведения $\chi(z)\overline{\chi(z^*)}$ не даст нам однозначной функции.

Здесь общее решение однородной задачи можно получить таким путем. Перепишем краевое условие (15.10) в таком виде:

$$\Phi^+(t) = (-tt_0)^{-1}[-tt_0 G(t)]\Phi^-(t),$$

Функция

$$G_1(t) = -tt_0 G(t) \tag{15.12}$$

имеет четный индекс $\operatorname{Ind} G_1(t) = 2\varkappa$ и удовлетворяет условию $G_1(t)\overline{G_1(t)} = 1$. Следовательно, ее можно представить в виде отношения

$$G_1(t) = X^+(t)/X^-(t), \tag{15.13}$$

где $X(z)$ есть каноническая функция однородной задачи с коэффициентом $G_1(t)$ вида (15.11). Далее, полагая

$$\delta(z) = \begin{cases} z - t_0, & z \in D_0^+, \\ \dfrac{1}{z} - \bar{t}_0, & z \in D_0^-, \end{cases} \tag{15.14}$$

видим, что $\delta^+(t) = -tt_0\delta^-(t)$, так что

$$(-tt_0)^{-1} = \delta^-(t)/\delta^+(t). \tag{15.15}$$

На основании равенств (15.13) и (15.15) однородное условие (15.10) примет такую форму

$$\delta^+(t)\Phi^+(t)/X^+(t) = \delta^-(t)\Phi^-(t)/X^-(t).$$

Значит, функция $\psi(z) = \delta(z)\Phi(z)/X(z)$ является симметричной и аналитической всюду, кроме $z = 0$ и $z = \infty$, где в случае ограниченности $\Phi(z)$ она имеет порядок $\varkappa$. Следовательно, при $\varkappa \geqslant 0$ она имеет вид

$$\psi(z) = P_\varkappa(z) + \overline{P_\varkappa(z^*)} = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\varkappa}[\alpha_k\Omega_k(z) + \beta_k\omega_k(z)].$$

В силу свойств функции $\delta(z)$ в точке $z = t_0$ функция $\psi(z)$ обращается в нуль. Из уравнения $\psi(t_0) = 0$ определяем

$$\alpha_0 = -\sum_{k=1}^{\varkappa}[\alpha_k\Omega_k(t_0) + \beta_k\omega_k(t_0)]$$

и общее всюду ограниченное решение однородной задачи получается в таком виде

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{\delta(z)}\sum_{k=1}^{\varkappa}\{\alpha_k[\Omega_k(z) - \Omega_k(t_0)] + \beta_k[\omega_k(z) - \omega_k(t_0)]\}. \tag{15.16}$$

Оно при $\varkappa > 0$ содержит $2\varkappa$ произвольных вещественных постоянных. При $\varkappa \leqslant 0$ ограниченных решений однородная задача не имеет.

3°. *Неоднородная задача* при известной канонической функции решается так же просто, как и однородная. Однако здесь приходится различать два случая: а) $g(t) \neq 0$ всюду на L_0 и б) $g(t)$ в конечном числе точек окружности L_0 обращается в нуль.

Рассмотрим первый случай, когда $g(t) \neq 0$ всюду на L_0. На основании равенства $X^+(t) = G(t) X^-(t)$ записываем краевое условие (15.1) в виде

$$\Phi^+(t)/X^+(t) = \Phi^-(t)/X^-(t) + g(t)/X^+(t).$$

Для отношения $\Phi(z)/X(z)$ получили рассмотренную уже задачу о скачке. Скачок $g_1(t) = g(t)/X^+(t)$ в силу симметричности $X(z)$ и условий (15.2) является чисто мнимым. В самом деле,

$$\overline{g_1(t)} = \overline{g(t)}/X^-(t) = -g(t)/X^+(t) = -g_1(t).$$

Значит, при $\varkappa + n \geqslant 0$ общее решение неоднородной задачи порядка не выше n в точках $z = 0$ и $z = \infty$ имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{\tau + z}{\tau - z} \frac{d\tau}{\tau} +$$

$$+ X(z) \left\{ \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n+\varkappa} [\alpha_k \Omega_k(z) + \beta_k \omega_k(z)] \right\} \tag{15.17}$$

и содержит $2n + 2\varkappa + 1$ произвольных вещественных постоянных.

При $n = 0$ и $\varkappa \geqslant 0$ формула (15.17) определяет $2\varkappa + 1$ линейно-независимых ограниченных решений неоднородной задачи. При $\varkappa < 0$ функция

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{\tau + z}{\tau - z} \frac{d\tau}{\tau} \tag{15.18}$$

будет ограниченным решением задачи тогда и только тогда, если в разложении

$$\frac{1}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{\tau + z}{\tau - z} \frac{d\tau}{\tau} = A_0 + A_1 z + \ldots + A_{-\varkappa-1} z^{-\varkappa-1} + A_{-\varkappa} z^{-\varkappa} + \ldots$$

первые $(-\varkappa)$ коэффициентов равны нулю: $A_0 = \ldots = A_{-\varkappa-1} = 0$. Но

$$A_0 = \frac{1}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau}, \quad A_k = \frac{1}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{2d\tau}{\tau^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Значит, должны выполняться условия

$$\int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau^{k+1}} = 0, \; k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1,$$

или, что то же самое, условия

$$\int_0^{2\pi} e^{-ik\sigma} g(e^{i\sigma})/X^+(e^{i\sigma})\, d\sigma = 0, \ k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1.$$

Первое из этих условий вещественное, остальные — комплексные. Выделяя вещественные и мнимые части, получим $-2\varkappa-1$ вещественных условий разрешимости:

$$i \int_0^{2\pi} g(e^{i\sigma})/X^+(e^{i\sigma})\, d\sigma = 0,$$

$$i \int_0^{2\pi} \frac{g(e^{i\sigma})}{X^+(e^{i\sigma})} \begin{Bmatrix} \cos k\sigma \\ \sin k\sigma \end{Bmatrix} d\sigma = 0, \ k = 1, \ldots, -\varkappa - 1. \qquad (15.19)$$

Условия разрешимости (15.19) можно истолковать как условие ортогональности функции $g(t)$ к решениям однородной сопряженной задачи

$$\psi^+(t) = \overline{G(t)}\, \psi^-(t), \qquad (15.20)$$

исчезающим на бесконечности и удовлетворяющим условию симметрии. В самом деле, индекс сопряженной задачи в рассматриваемом случае

$$2\varkappa' = \operatorname{Ind} \overline{G(t)} = -2\varkappa,$$

канонической функцией будет $X'(z) = 1/X(z)$ и при $\varkappa' > 0$, то есть при $\varkappa < 0$, общее решение задачи (15.20), исчезающее в точке $z = \infty$, будет иметь следующий вид

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{-\varkappa-1} \{a_k \Omega_k(z) + b_k \omega_k(z)\}/X(z).$$

Всего имеем $2\varkappa' - 1 = -2\varkappa - 1$ линейно-независимых решений

$$\psi_0(z) = \frac{1}{X(z)}, \quad \psi_k(z) = \frac{1}{X(z)} \begin{Bmatrix} \Omega_k(z) \\ \omega_k(z) \end{Bmatrix}, \ k = 1, \ldots, -\varkappa - 1. \ (15.21)$$

Известно, что две функции $f(z)$ и $F(z)$ называются ортогональными на L_0, если их скалярное произведение

$$(f, F) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\sigma}) \overline{F(e^{i\sigma})}\, d\sigma$$

равно нулю: $(f, F) = 0$. Если хотя бы одна из функций $f(z)$ или $F(z)$ кусочно-голоморфна и окружность L_0 — ее особая линия, то под значением функции в точках L_0 надо понимать одно из ее граничных значений.

Вычисляя

$$(g,\ \psi_{\bar{k}}) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{g(e^{i\sigma})}{X^-(e^{i\sigma})} \left\{\overline{\begin{matrix}\Omega_k(e^{i\sigma})\\ \omega_k(e^{i\sigma})\end{matrix}}\right\} d\sigma = 2\int\limits_0^{2\pi} \frac{g(e^{i\sigma})}{X^+(e^{i\sigma})} \begin{Bmatrix}\cos k\sigma\\ \sin k\sigma\end{Bmatrix} d\sigma,$$

убеждаемся, что условия разрешимости (15.19) эквивалентны равенствам

$$(g,\ \psi_{\bar{k}}) = 0, \tag{15.22}$$

где $\psi_k(z)$ определены формулами (15.21).

Если рассматривать задачу (15.1) как одностороннюю, а именно, внутреннюю задачу

$$\Phi^+(t) = G(t)\overline{\Phi^+(t)} + g(t),$$

то соответствующая ей однородная сопряженная задача (15.20) будет внешней. Действительно, чтобы получить краевое условие (15.20), достаточно в однородном краевом условии $\Phi^+(t) = G(t)\overline{\Phi^+(t)}$ перейти к комплексно сопряженным значениям $\overline{\Phi^+(t)} = \overline{G(t)}\Phi^+(t)$ и воспользоваться соотношением $\overline{\Phi^+(t)} = \Phi^-(t)$. Таким образом, внутренняя и внешняя задачи

$$\Phi^+(t) = G(t)\overline{\Phi^+(t)},\ \Phi^-(t) = \overline{G(t)}\,\overline{\Phi^-(t)}$$

являются взаимно сопряженными.

4°. Рассмотрим теперь случай, когда $g(t)$ в точках $a_1, \dots, a_n$ окружности L_0 обращается в нуль так, что

$$g(t) = g_1(t)\prod_{j=1}^{n}(t-a_j)^{\mu_j},\ \operatorname{Re}\mu_j > 0,$$

при этом $g_1(t) \neq 0$ на L_0 и удовлетворяет условию H. В точках t, отличных от точек $a_1, \dots, a_n$, в силу второго условия (15.2)

$$G(t) = -\frac{g(t)}{\overline{g(t)}} = -\frac{g_1(t)}{\overline{g_1(t)}}\prod_{j=1}^{n}(t-a_j)^{\mu_j}(\bar{t}-\bar{a}_j)^{-\bar{\mu}_j},$$

откуда видно, что при нецелых μ_j точки a_j будут точками разрыва первого рода для коэффициента $G(t)$. Разрыв у каждой пары множителей $(t-a_j)^{\mu_j}(\bar{t}-\bar{a}_j)^{-\bar{\mu}_j} = (t-a_j)^{\mu_j-\bar{\mu}_j} \times \times(-t\bar{a}_j)^{\bar{\mu}_j} = \varphi_j(t)$ может быть разного характера. Когда $\mu_j = \bar{\mu}_j$, величину скачка $\varphi_j(t) = (-t\bar{a}_j)^{\mu_j}$ в точке a_j просто вычислить: положить $\varphi_j(a_j+0) = (-a_j^2)^{\mu_j}$ и считать, как обычно, что в левую полуокрестность точки a_j мы приходим из правой полуокрестности путем обхода L_0 в положительном направлении; тогда будем иметь $\varphi_j(a_j-0)=$ $=\varphi_j(a_j+0)\exp(2\pi i\mu_j)$. При $\mu_j\neq\bar{\mu}_j$ в выражении $\varphi_j(t)$ содержится разность $t-a_j$ в чисто мнимой степени, о которой мы знаем, что вблизи a_j она ограничена, но более точно охарактеризовать ее не умеем.

Несмотря на наличие таких необычных разрывов у $G(t)$, задача чрезвычайно просто приводится к рассмотренной уже задаче с непрерывным коэффициентом $G_1(t)$ и свободным членом $g_1(t)\neq 0$. Для этого запишем краевое условие (15.1) в виде

$$\Phi^+(t)=-\frac{g_1(t)}{\overline{g_1(t)}}\,\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(t-a_j)^{\mu_j}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(\bar{t}-\bar{a}_j)^{\bar{\mu}_j}}\,\Phi^-(t)+g_1(t)\prod_{j=1}^{n}(t-a_j)^{\mu_j}$$

и, полагая

$$\Phi(z)=\Delta(z)\,\Phi_1(z), \tag{15.23}$$

где $\Delta(z)$ есть симметричная кусочно-голоморфная функция

$$\Delta(z)=\begin{cases}\prod\limits_{j=1}^{n}(z-a_j)^{\mu_j}, & z\in D_0^+,\\ \prod\limits_{j=1}^{n}\left(\dfrac{1}{z}-\bar{a}_j\right)^{\bar{\mu}_j}, & z\in D_0^-,\end{cases} \tag{15.24}$$

получаем для определения симметричной функции $\Phi_1(z)$ задачу

$$\Phi_1^+(t)=-\frac{g_1(t)}{\overline{g_1(t)}}\,\Phi_1^-(t)+g_1(t).$$

Индекс этой задачи четный, он равен $2\operatorname{Ind} g_1(t)$. Порядок искомой функции $\Phi_1(z)$ в точках $z=0$ и $z=\infty$ тот же, что и у функции $\Phi(z)$.

Из формул (15.23) и (15.24) видно, что в нулях функции $g(t)$ решение задачи (15.1) также обращается в нуль. К этому заключению можно прийти и не решая задачу, а переписав граничное условие (15.1) в виде $\Phi^+(t)=G(t)\,\overline{\Phi^+(t)}+g(t)$ или же в виде $\overline{\Phi^-(t)}=G(t)\,\Phi^-(t)+g(t)$.

5°. Близким к рассмотренному является случай, когда функция $g(t)$ в точках $b_1,\ldots,b_r$ обращается в бесконечность так, что

$$g(t)=g_1(t)\prod_{k=1}^{r}(t-b_k)^{-\nu_k},\ g_1(t)\in H,\ g_1(t)\neq 0,$$

и $0<\operatorname{Re}\nu_k<1$. Записывая краевое условие (15.1) в виде

$$\Phi^+(t)=-\frac{g_1(t)}{\overline{g_1(t)}}\,\frac{\prod_{k=1}^{r}(\bar t-\bar b_k)^{\bar\nu_k}}{\prod_{k=1}^{r}(t-b_k)^{\nu_k}}\,\Phi^-(t)+\frac{g_1(t)}{\prod_{k=1}^{r}(t-b_k)^{\nu_k}}$$

и вводя новую неизвестную функцию $\Phi_1(z)$ при помощи равенств

$$\Phi_1(z)=\Delta_1(z)\,\Phi(z),$$

$$\Delta_1(z)=\begin{cases}\prod_{k=1}^{r}(z-b_k)^{\nu_k}, & z\in D_0^+,\\ \prod_{k=1}^{r}\left(\dfrac{1}{z}-\bar b_k\right)^{\bar\nu_k}, & z\in D_0^-,\end{cases}\tag{15.25}$$

опять приходим к задаче

$$\Phi_1^+(t)=-\frac{g_1(t)}{\overline{g_1(t)}}\,\Phi_1^-(t)+g_1(t)$$

с непрерывными коэффициентами и четным индексом. Решив ее, по формулам (15.25) найдем решение исходной задачи. Оно в точках $b_1,\ldots,b_r$ имеет бесконечности интегрируемого порядка.

6°. Все рассмотренные случаи неоднородной задачи сводились в конечном счете к случаю, когда соответствующая однородная задача имеет четный индекс. При каких же $g(t)$ коэффициент $G(t)=-g(t)/\overline{g(t)}$, являясь непрерывным, имеет нечетный индекс?

Мы уже знаем, что при гельдеровой функции $g(t)$ или при наличии у нее интегрируемых бесконечностей степенного типа этого быть не может. Но вот если у $g(t)$ в некоторых точках t_j окружности L_0 имеются разрывы первого рода, то несмотря на $g(t_j+0)\neq g(t_j-0)$ функция $G(t)$ в точке t_j не имеет разрыва, *если скачок аргумента отношения* $g(t)/\overline{g(t)}$ *кратен* 2π, как, например, в случае $g(t)=t^{m-1/2}$, m — целое; здесь $G(t)=-t^{2m-1}$.

Построить решение неоднородной задачи в этом случае проще всего таким же путем, как это мы делали для соответствующей однородной задачи при $\operatorname{Ind}G(t)=2\varkappa-1$. Используя формулы (15.12)—(15.15), представляем коэффициент $G(t)$ в такой форме

$$G(t) = (-tt_0)^{-1} G_1(t) = \frac{\delta^-(t)}{\delta^+(t)} \frac{X^+(t)}{X^-(t)}$$

и, совершенно не обращая внимания на разрывность свободного члена $g(t)$, приводим краевое условие (15.1) к виду

$$\psi^+(t) = \psi^-(t) + g(t)\,\delta^+(t)/X^+(t),$$

где $\psi(z) = \delta(z)\,\Phi(z)/X(z)$. Будем считать функцию $\Phi(z)$ всюду ограниченной. Тогда симметричная функция $\psi(z)$ имеет порядок $\varkappa$ в точках $z=0$ и $z=\infty$ и при $\varkappa \geqslant 0$ имеет вид

$$\psi(z) = \psi_1(z) + \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\varkappa} [\alpha_k \Omega_k(z) + \beta_k \omega_k(z)],$$

$$\psi_1(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)\,\delta^+(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{\tau + z}{\tau - z} \frac{d\tau}{\tau}.$$

Из условия $\psi(t_0) = 0$ определяем

$$\alpha_0 = -\psi_1(t_0) - \sum_{k=1}^{\varkappa} [\alpha_k \Omega_k(t_0) + \beta_k \omega_k(t_0)]$$

и получаем общее решение исходной неоднородной задачи в виде

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{\delta(z)} \Big\{ \psi_1(z) - \psi_1(t_0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} \alpha_k [\Omega_k(z) - \Omega_k(t_0)] + \\ + \beta_k [\omega_k(z) - \omega_k(t_0)] \Big\}. \tag{15.26}$$

Таким образом, при $\varkappa > 0$ задача имеет $2\varkappa$ линейно-независимых ограниченных решений. При $\varkappa = 0$ единственным решением является

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{\delta(z)} [\psi_1(z) - \psi_1(t_0)]. \tag{15.27}$$

При $\varkappa < 0$ задача будет иметь единственное решение, определяемое той же формулой (15.27), тогда и только тогда, если в разложении

$$[\psi_1(z) - \psi_1(t_0)]/\delta(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_{-\varkappa-1} z^{-\varkappa-1} + A_{-\varkappa} z^{-\varkappa} + \ldots$$

первые $-\varkappa$ коэффициентов равны нулю: $A_0 = \ldots = A_{-\varkappa-1} = 0$. Но

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Значит, должны выполняться условия

$$\int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau^{k+1}} = 0, \ k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1.$$

Все они комплексные. Чтобы выделить в них вещественные и мнимые части, положим, как обычно, $\tau = e^{i\sigma}$ и, принимая за начало обхода $t_0 = 1$, получим

$$i \int_0^{2\pi} e^{-ik\sigma} g(e^{i\sigma})/X^+(e^{i\sigma})\, d\sigma = 0.$$

Отношение $g(\tau)/X^+(\tau)$ является комплексным, но произведение его с $\delta^+(\tau) = \tau - 1$ как скачок симметричной функции $\varphi_1(z)$ будет чисто мнимым. Поэтому перепишем последние равенства в таком виде

$$i \int_0^{2\pi} \frac{g(e^{i\sigma})(e^{i\sigma} - 1)}{X^+(e^{i\sigma})} \frac{e^{-ik\sigma} d\sigma}{e^{i\sigma} - 1} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{g(\tau)\delta^+(\tau)}{X^+(\tau)\sin\frac{\sigma}{2}} e^{-i\sigma\left(k + \frac{1}{2}\right)} d\sigma = 0.$$

Отсюда получаем окончательно

$$\int_0^{2\pi} \frac{g(\tau)\delta^+(\tau)}{X^+(\tau)\sin\frac{\sigma}{2}} \left\{ \begin{matrix} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\sigma \\ \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\sigma \end{matrix} \right\} d\sigma = 0, \ k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1. \tag{15.28}$$

Обратим внимание на то, что полученные условия (15.28) отличаются по форме от полученных ранее условий разрешимости (15.19) той же неоднородной задачи, но при четном индексе.

В точках разрыва свободного члена $g(t)$ любое решение нашей задачи имеет логарифмические особенности. Это сразу вытекает из связи интеграла $\psi_1(z)$ с ядром Шварца с интегралом типа Коши с той же самой разрывной плотностью. Логарифмические члены из интеграла $\psi_1(z)$ нетрудно выделить в виде отдельного слагаемого.

7°. При решении задачи (15.1) с коэффициентами $G(t)$ и $g(t)$, имеющими точки разрыва первого рода $t_1, \ldots, t_m$, удобно применять метод приведения к случаю непрерывных коэффициентов, разработанный в общем случае Ф. Д. Гаховым [8, с. 465—478]. Надо иметь в виду, что у коэффициента $G(t)$ точки разрыва $t_1, \ldots, t_m$ являются точками разрыва $\arg G(t) = \theta(t)$, ибо в силу первого из условий (15.2) $|G(t)| = 1$ и в точках разрыва. Непрерывную ветвь $\theta(t)$ фиксируем на каждой дуге $t_k t_{k+1}$ и вычисляем значения

$$\alpha_k + i\beta_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{G(t_k - 0)}{G(t_k + 0)} = \frac{\theta(t_k - 0) - \theta(t_k + 0)}{2\pi}.$$

Все они вещественны, так что все $\beta_k = 0$. Допустим, что $\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_m$ — целые числа, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ — не целые. Возьмем класс $h(t_1, \ldots, t_q)$ и, подобрав целые числа $\varkappa_k$ так, чтобы разности $\alpha_k - \varkappa_k = \lambda_k$ удовлетворяли условиям

$$0 < \lambda_k < 1, \; k = 1, \ldots, q; \; -1 < \lambda_k < 0, \; k = q+1, \ldots, p,$$

введем новую неизвестную функцию $\Phi_1(z)$ при помощи равенства

$$\Phi(z) = \Delta(z)\,\Phi_1(z), \tag{15.29}$$

где функция $\Delta(z)$ определена следующим образом

$$\Delta(z) = \begin{cases} \prod\limits_{k=1}^{p} (z - t_k)^{\lambda_k}, & z \in D_0^+, \\ \prod\limits_{k=1}^{p} \left(\dfrac{1}{z} - \bar{t}_k\right)^{\lambda_k}, & z \in D_0^-. \end{cases}$$

Исходное краевое условие (15.1) переходит в условие

$$\Phi_1^+(t) = G_0(t)\,\Phi_1^-(t) + g_0(t)$$

с коэффициентами

$$G_0(t) = G(t)\,\Delta^-(t)/\Delta^+(t), \; g_0(t) = g(t)/\Delta^+(t).$$

Покажем, что $G_0(t)$ непрерывна на L_0. Для этого представим $G_0(t)$ в таком виде

$$G_0(t) = G(t) \prod_{k=1}^{p} \left(\frac{\bar{t} - \bar{t}_k}{t - t_k}\right)^{\lambda_k} = G(t) \prod_{k=1}^{p} (-t t_k)^{-\lambda_k}.$$

Чтобы выяснить поведение функций $\varphi_k(t) = (-t t_k)^{-\lambda_k}$ на L_0, вспомним, что в выражении $\Delta(z)$ под

$$\left(\frac{1}{z} - \bar{t}_k\right)^{\lambda_k} = (z - t_k)^{\lambda_k} (-z t_k)^{-\lambda_k}$$

мы понимаем произведение любых однозначных ветвей функций $(z - t_k)^{\lambda_k}$ и $\varphi_k(z) = (-z t_k)^{-\lambda_k}$, на которые распадаются эти функции в плоскости с разрезами (t_k, ∞) и $(0, t_k, \infty)$ соответственно вдоль некоторой кривой, соединяющей точки $z = 0$ и $z = \infty$ и проходящей через точку t_k. Функция $\varphi_k(t)$ есть предельное значение $\varphi_k(z)$ при $z \to t \in L_0$ из D_0^-, непрерывная всюду на L_0, кроме одной точки t_k, в которой

$$\frac{\varphi_k(t_k - 0)}{\varphi_k(t_k + 0)} = e^{-2\pi i \lambda_k}.$$

В силу этого свойства

$$\frac{G_0(t_k-0)}{G_0(t_k+0)}=\frac{G(t_k-0)}{G(t_k+0)}\cdot\frac{\varphi_k(t_k-0)}{\varphi_k(t_k+0)}=e^{2\pi i(\alpha_k-\lambda_k)}=e^{2\pi i \varkappa_k}=1.$$

Из симметричности функции $\Delta(z)$ следует, что $\Delta^+(t)=\overline{\Delta^-(t)}$. Поэтому

$$G_0(t)\overline{G_0(t)}=G(t)\Delta^-(t)\overline{G(t)}\,\overline{\Delta^-(t)}/\Delta^+(t)\overline{\Delta^+(t)}=1.$$

Подсчитаем индекс функции $G_0(t)$. Для этого рассматриваем приращение аргумента $G_0(t)$ по всей окружности L_0 как сумму приращений по дугам $t_k t_{k+1}$. Получим

$$\operatorname{Ind} G_0(t)=\frac{1}{2\pi i}\{\ln G_0(t)\}_{L_0}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\{\ln G_0(t)\}_{t_k t_{k+1}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{p}\ln\frac{G(t_k-0)\,\varphi_k(t_k-0)}{G(t_k+0)\,\varphi_k(t_k+0)}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=p+1}^{m}\ln\frac{G(t_k-0)}{G(t_k+0)}=$$

$$=\varkappa_1+\ldots+\varkappa_p+\alpha_{p+1}+\ldots+\alpha_m.$$

Это число может быть как четным, так и нечетным. В обоих случаях решение задачи нам известно.

8°. Можно рассматривать задачу (15.1), задавая граничное условие не на всей окружности L_0, а лишь на конечном числе ее дуг $a_k b_k$. В этом случае задачу известным способом [8, с. 478—481] можно привести к рассмотренной в пункте 7° задаче с разрывными коэффициентами. Для этого обозначим через L_1 совокупность всех дуг $a_k b_k$, а через L_2 — остальные дуги, так что $L_0=L_1\cup L_2$. В точках линии L_2 искомая функция аналитическая и потому здесь $\Phi^+(t)=\Phi^-(t)$. Но это равенство и краевое условие (15.1), заданное на L_1, можно записать в виде одного соотношения на всей окружности L_0

$$\Phi^+(t)=G_*(t)\Phi^-(t)+g_*(t),$$

$$G_*(t)=\begin{cases}G(t), & t\in L_1,\\ 1, & t\in L_2,\end{cases}\quad g_*(t)=\begin{cases}g(t), & t\in L_1,\\ 0, & t\in L_2.\end{cases}$$

Необходимые условия разрешимости вида (15.2) здесь, очевидно, выполнены.

§ 16. СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЯДРОМ ГИЛЬБЕРТА И КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА

1°. Применим результаты предыдущего параграфа к решению вещественного сингулярного интегрального уравнения

$$a(s)\varphi(s)-\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma=c(s). \tag{16.1}$$

Будем считать, что заданные периодические с периодом 2π функции $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ удовлетворяют условию H и что $a^2(s)+b^2(s)\neq 0$. Решения будем отыскивать также в классе вещественных функций, удовлетворяющих условию H.

Покажем, что уравнение (16.1) эквивалентно некоторой задаче Римана в классе симметричных функций.

Для этого введем вспомогательную кусочно-голоморфную функцию, которая представляет собой интеграл с ядром Шварца и плотностью, равной неизвестной функции $\varphi(s)$:

$$\Phi(z)=\frac{1}{4\pi}\int_{L_0}\varphi(\sigma)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau}. \tag{16.2}$$

Мы уже знаем, что $\Phi(z)$ есть симметричная ограниченная функция, принимающая в точке $z=0$ чисто мнимое значение

$$\Phi(0)=\frac{1}{4\pi}\int_{L_0}\varphi(\sigma)\frac{d\tau}{\tau}=\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\,d\sigma. \tag{16.3}$$

В точках $t=e^{is}\in L_0$ ее граничные значения вычисляются по формулам

$$\Phi^{\pm}(t)=\pm\frac{i}{2}\varphi(s)+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma. \tag{16.4}$$

Из формул (16.4) находим значения

$$i\varphi(s)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma=\Phi^+(t)+\Phi^-(t) \tag{16.5}$$

и, подставляя их в уравнение (16.1), получаем

$$\Phi^+(t)=\frac{a(s)+ib(s)}{a(s)-ib(s)}\Phi^-(t)+\frac{ic(s)}{a(s)-ib(s)}. \tag{16.6}$$

Таким образом, для определения симметричной функции $\Phi(z)$ получили задачу Римана (16.6), причем надо искать лишь те ее решения, которые ограничены и принимают в точке $z=0$ чисто мнимые значения.

Легко доказать, что каждому такому решению задачи (16.6) соответствует решение интегрального уравнения (16.1). Действительно, если $\Phi(z)$ — одно из таких решений, то разность $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)$, как скачок симметричной функции, представляет чисто мнимую функцию, которую обозначим через $i\varphi(s)$. Но, как следует из результатов пункта 1° § 15, функция $\Phi(z)$ как решение задачи о скачке

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = i\varphi(s),$$

принимающее при $z = 0$ чисто мнимое значение, единственно и имеет вид (16.2). Но тогда имеют место и формулы (16.4), подстановка которых в краевое условие (16.6) приводит к исходному уравнению (16.1).

2°. Приступая к решению задачи (16.6), заметим прежде всего, что ее коэффициенты

$$G(t) = \frac{a + ib}{a - ib}, \quad g(t) = \frac{ic}{a - ib}$$

необходимым условиям разрешимости (15.2) удовлетворяют, при этом $G(t) \neq 0$ на L_0, удовлетворяет условию H и имеет четный индекс

$$\operatorname{Ind} G(t) = 2 \operatorname{Ind}(a + ib) = 2\varkappa.$$

На основании изложенного в п. 3° § 15 общее ограниченное решение задачи (16.6) при $\varkappa > 0$ имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{4\pi} \int\limits_{L_0} \frac{c(\sigma)}{(a - ib) X^+(\tau)} \frac{\tau + z}{\tau - z} \frac{d\tau}{\tau} +$$

$$+ X(z) \left\{ \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\varkappa} [\alpha_k \Omega_k(z) + \beta_k \omega_k(z)] \right\}, \tag{16.7}$$

$$X(z) = (z - 1)^{-\varkappa} \left(\frac{1}{z} - 1 \right)^{-\varkappa} e^{\Gamma(z)},$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_0} \theta(\sigma) \frac{\tau + z}{\tau - z} \frac{d\tau}{\tau}, \quad \theta(s) = \arg(a + ib).$$

Вычислим $\Phi(0)$.

$$\Phi(0) = \lim_{z \to 0} X(z) [\alpha_\varkappa \Omega_\varkappa(z) + \beta_\varkappa \omega_\varkappa(z)] =$$

$$= \lim_{z \to 0} X(z) [(\alpha_\varkappa + i\beta_\varkappa) z^\varkappa + (\alpha_\varkappa - i\beta_\varkappa) z^{-\varkappa}] =$$

$$= (-1)^\varkappa e^{\Gamma(0)} (\alpha_\varkappa - i\beta_\varkappa) = (-1)^\varkappa (\alpha_\varkappa - i\beta_\varkappa) e^{i\alpha},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \theta(\sigma) \, d\sigma. \tag{16.8}$$

Условие $\operatorname{Re} \Phi(0) = 0$ равносильно равенству

$$\alpha_\varkappa \cos\alpha + \beta_\varkappa \sin\alpha = 0. \tag{16.9}$$

Так как $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ одновременно нулями быть не могут, то одна из постоянных $\alpha_\varkappa$ или $\beta_\varkappa$ определяется, и в формуле (16.7) остается ровно $2\varkappa$ произвольных вещественных постоянных.

При $\varkappa = 0$ ограниченные решения задачи (16.6) определяются формулой

$$\Phi(z) = e^{\Gamma(z)}\left\{\alpha_0 + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{L_0} \frac{c(\sigma)}{(a-ib)X^+(\sigma)}\,\frac{\tau+z}{\tau-z}\,\frac{d\tau}{\tau}\right\}. \tag{16.10}$$

В этом случае

$$\Phi(0) = e^{i\alpha}\left\{\alpha_0 + \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{ic(\sigma)\,d\sigma}{(a-ib)X^+(\sigma)}\right\}.$$

Отношение $c(\sigma)/(a-ib)X^+(\sigma)$ является вещественным. Поэтому при выполнении равенства

$$\operatorname{Re}\Phi(0) = \alpha_0\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{c(\sigma)\,d\sigma}{(a-ib)X^+(\sigma)} = 0 \tag{16.11}$$

могут представиться две возможности:

1) $\cos\alpha \neq 0$. В этом случае из уравнения (16.11) α_0 определяется и задача (16.6) будет иметь единственное решение.

2) $\cos\alpha = 0$. Но тогда $\sin\alpha \neq 0$ и для выполнения равенства (16.11) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{c(\sigma)\,d\sigma}{(a-ib)X^+(\sigma)} = 0. \tag{16.12}$$

При выполнении этого условия задача (16.6) имеет целое однопараметрическое семейство решений (16.10).

Пусть $\varkappa < 0$. Мы знаем, что задача (16.6) будет иметь единственное ограниченное решение

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{4\pi}\int\limits_{L_0} \frac{c(\sigma)}{(a-ib)X^+(\tau)}\,\frac{\tau+z}{\tau-z}\,\frac{d\tau}{\tau} \tag{16.13}$$

лишь при выполнении $-2\varkappa-1$ дополнительных условий

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{c(\sigma)}{(a-ib)X^+(\sigma)}\begin{Bmatrix}\cos k\sigma\\ \sin k\sigma\end{Bmatrix} d\sigma = 0,\ k = 0,\ 1, \dots, -\varkappa-1. \tag{16.14}$$

Но $\Phi(0) = (-1)^\varkappa e^{i\alpha} A_{-\varkappa}$, где

$$A_{-\varkappa} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_0} \frac{c(\sigma)\,\tau^{-\varkappa-1}\,d\tau}{(a-ib)X^+(\sigma)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{ic(\sigma)\exp(-i\sigma\varkappa)}{(a-ib)X^+(\sigma)}\,d\sigma.$$

Условие $\operatorname{Re}\Phi(0)=0$ дает

$$\int_0^{2\pi} \frac{c(\sigma)}{(a-ib)\,X^+(\sigma)} (\cos\alpha\cos\varkappa\sigma - \sin\alpha\sin\varkappa\sigma)\,d\sigma = 0,$$

или, что все равно.

$$\int_0^{2\pi} \frac{c(\sigma)}{(a-ib)\,X^+(\sigma)} \cos(\alpha+\varkappa\sigma)\,d\sigma = 0. \tag{16.15}$$

Таким образом, к условиям разрешимости (16.14) добавляется в этом случае еще одно условие (16.15). Всего имеем ровно $(-2\varkappa)$ дополнительных условий, которым должна удовлетворять функция $c(s)$.

3°. Вычислим теперь общее решение уравнения (16.1). Для этого находим

$$\Phi^+(t) = X^+(t)\left\{\frac{ic(s)}{2(a-ib)\,X^+(t)} + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{c(\sigma)}{(a-ib)\,X^+(\tau)}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma + \right.$$
$$\left. + \alpha_0 + 2\sum_{k=1}^{\varkappa}(\alpha_k\cos ks + \beta_k\sin ks)\right\},$$

$$\Phi^-(t) = X^-(t)\left\{\frac{-ic(s)}{2(a-ib)\,X^+(t)} + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{c(\sigma)}{(a-ib)\,X^+(\tau)}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma + \right.$$
$$\left. + \alpha_0 + 2\sum_{k=1}^{\varkappa}(\alpha_k\cos ks + \beta_k\sin ks)\right\};$$

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{ic(s)\,[X^+(t)+X^-(t)]}{(a-ib)\,X^+(t)} +$$
$$+ \frac{X^+(t)-X^-(t)}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{c(\sigma)}{(a-ib)\,X^+(\sigma)}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma +$$
$$+ [X^+(t)-X^-(t)]\left\{\alpha_0 + 2\sum_{k=1}^{\varkappa}(\alpha_k\cos ks + \beta_k\sin ks)\right\};$$

$$X^+(t) = (t-1)^{-\varkappa}(\bar t-1)^{-\varkappa}e^{\Gamma(t)}e^{i\theta(s)},$$

$$X^-(t) = (t-1)^{-\varkappa}(\bar t-1)^{-\varkappa}e^{\Gamma(t)}e^{-i\theta(s)};$$

$$X^+(t) + X^-(t) = |t-1|^{-2\varkappa} e^{\Gamma(t)} 2\cos\theta(s) =$$
$$= |t-1|^{-2\varkappa} e^{\Gamma(t)} \frac{2a(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}},$$
$$X^+(t) - X^-(t) = |t-1|^{-2\varkappa} e^{\Gamma(t)} 2i\sin\theta(s) =$$
$$= |t-1|^{-2\varkappa} e^{\Gamma(t)} \frac{2ib(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}.$$

Пусть
$$A(s) = \frac{a(s)}{a^2(s)+b^2(s)}, \quad B(s) = \frac{b(s)}{a^2(s)+b^2(s)},$$
$$Z(s) = |t-1|^{-2\varkappa} e^{\Gamma(t)} \sqrt{a^2+b^2} = (a-ib)X^+(t).$$

Тогда
$$X^+(t) + X^-(t) = 2A(s)Z(s),$$
$$X^+(t) - X^-(t) = 2iB(s)Z(s)$$

и по первой из формул (16.5) при $\varkappa > 0$ получим:
$$\varphi(s) = c(s)A(s) + \frac{B(s)Z(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{c(\sigma)}{Z(\sigma)} \operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma +$$
$$+ 2B(s)Z(s)\left\{\alpha_0 + 2\sum_{k=1}^{\varkappa}(\alpha_k\cos ks + \beta_k \sin ks)\right\}.$$

При $\varkappa = 0$ из формулы (16.10) таким же образом найдем
$$\varphi(s) = c(s)A(s) + \frac{B(s)Z(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{c(s)}{Z(\sigma)} \operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma + 2\alpha_0 B(s)Z(s),$$

где α_0 определяется из уравнения (16.11), если $\cos\alpha \neq 0$, и является произвольной в случае $\cos\alpha = 0$, если при этом выполняется условие (16.12), которое может быть записано в таком виде
$$\int_0^{2\pi} \frac{c(\sigma)}{Z(\sigma)}\,d\sigma = 0.$$

При $\varkappa < 0$ на основании формулы (16.13) будем иметь единственное решение
$$\varphi(s) = c(s)A(s) + \frac{B(s)Z(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{c(\sigma)}{Z(\sigma)} \operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma$$

лишь при выполнении $-2\varkappa$ дополнительных условий

$$\int_0^{2\pi} \frac{c(\sigma)}{Z(\sigma)} \begin{Bmatrix} \cos k\sigma \\ \sin k\sigma \end{Bmatrix} d\sigma = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{c(\sigma)}{Z(\sigma)} \cos(\alpha + \varkappa\sigma)\, d\sigma = 0.$$

4°. Несколько иной метод решения уравнения (16.1) изложен в монографии Ф. Д. Гахова [8, с. 270—280]. Он основан на приведении уравнения (16.1) к краевой задаче Гильберта для единичного круга.

Краевой задачей Гильберта для односвязной области D^+, ограниченной гладким замкнутым контуром L, будем называть следующую задачу:

Найти аналитическую в области D^+ *функцию* $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, *непрерывно продолжимую на* L, *по граничному условию*

$$\mathrm{Re}\,[\overline{A(t)}\,F(t)] = c(s), \quad t = t(s) \in L, \tag{16.16}$$

где заданные на L *функции* $A(t) = A[t(s)] = a(s) + ib(s)$ *и* $c[t(s)] = c(s)$ *удовлетворяют условию* H, *при этом* $|A(t)| \neq 0$ *всюду на* L.

Граничное условие (16.16) можно, очевидно, переписать так

$$a(s)\,u(s) + b(s)\,v(s) = c(s). \tag{16.17}$$

Еще Риман [52], рассуждая об условиях, определяющих аналитическую функцию, предложил одну из самых общих форм такого условия в виде соотношения, связывающего между собой граничные значения вещественной и мнимой частей искомой функции

$$\Omega\,[u(s),\ v(s),\ s] = 0.$$

В граничном условии (16.17) функция $\Omega = au + bv - c$ является линейной относительно $u(s)$ и $v(s)$. Первая попытка решить эту линейную краевую задачу принадлежит Гильберту [93] и потому, следуя Пикару [96], мы будем называть ее задачей Гильберта (в монографии Н. И. Мусхелишвили [41, с. 174] она названа задачей Римана—Гильберта). При $A(t) \equiv 1$ задача состоит в восстановлении аналитической в D^+ функции по заданным граничным значениям ее вещественной части и носит название *задачи Шварца.*

Результаты Гильберта [94] оказались основополагающими в исследовании задачи (16.16). Он показал, что эта задача может быть приведена к последовательному решению двух задач Дирихле. Нётер [95] первым использовал эту краевую задачу для исследования вещественных сингулярных уравнений с ядром Гильберта и таким путем установил основные теоремы, известные сейчас под его именем.

Из работ советских математиков, посвященных задаче (16.16) и близких по идеям к работам Гильберта, следует прежде всего отметить работы С. Л. Соболева [61] и С. Н. Нумерова [44] (последняя работа, как указано в книге [51, с. 68—69], была представлена к опубликованию еще в 1936 году). Более известными являются работа И. Н. Векуа [5], где изложено полное исследование задачи (16.16) путем приведения к двум задачам Дирихле, и работа Ф. Д. Гахова [10], где задача (16.16) решена методом регуляризующего множителя, состоящего в последовательном решении двух задач Шварца. Более подробно последний метод изложен в монографии Ф. Д. Гахова [8, с. 236—270].

Задача Дирихле и задача Шварца, как известно [35, с. 202—213], решаются в замкнутой форме лишь для некоторых простейших по своим геометрическим свойствам областей, например, для единичного круга. Для любой другой односвязной области эти задачи эквивалентны задаче конформного отображения этой области на единичный круг. Отсюда следует, что задача Гильберта, в отличие от задачи Римана, может быть решена в замкнутой форме лишь для тех односвязных областей, для которых известны функции, конформно отображающие их на единичный круг.

Что касается единичного круга, то, как показал Н. И. Мусхелишвили [41, с. 168—189, 371—378], в этом случае задача Гильберта эквивалентна задаче Римана в классе симметричных функций.

Сейчас мы более детально познакомимся с решением задачи Гильберта для единичного круга. Сначала коротко изложим метод Н. И. Мусхелишвили, а затем построим решение задачи путем последовательного решения двух задач Шварца, не опираясь при этом на понятие регуляризующего множителя.

5°. Приведение задачи Гильберта (16.16) к задаче Римана в случае единичного круга осуществляется следующим образом. На комплексной плоскости z вводится вспомогательная кусочно-голоморфная функция

$$\Phi(z)=\begin{cases} F(z), & z\in D^{+}:|z|<1, \\ \overline{F\left(\frac{1}{\bar z}\right)}, & z\in D^{-}:|z|>1. \end{cases} \tag{16.18}$$

Из свойства непрерывной продолжимости функции $F(z)$ сразу следует продолжимость на единичную окружность L функции

$\Phi(z)$, и из формул (16.18) имеем $\Phi^+(t) = F(t)$, $\Phi^-(t) = \overline{F(t)}$. Эти значения вставляем в краевое условие (16.16), переписав его в такой форме

$$\overline{A(t)} F(t) + A(t) \overline{F(t)} = 2c(s).$$

Получаем краевое условие задачи Римана

$$\overline{A(t)} \Phi^+(t) + A(t) \Phi^-(t) = 2c(s). \qquad (16.19)$$

К нему надо присоединить условие симметрии

$$\Phi(z) = \overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \qquad (16.20)$$

вытекающее из равенств (16.18). Значит, функция $\Phi(z)$ должна быть ограниченным решением краевой задачи, подробно рассмотренной в § 15. Это решение можно получить по формулам (15.17) и (15.11), полагая в них $n = 0$, $\varkappa = \operatorname{Ind} A(t)$, $\theta(t) = \arg A(t)$, $g(t) = 2c(s)/\overline{A(t)}$ и присоединяя к ним при $\varkappa < 0$ условия разрешимости (15.19). Полученная таким образом функция при $z \in D^+$ в силу первой из формул (16.18) будет решением задачи Гильберта (16.16). Сформулируем получающийся таким путем общий вывод о разрешимости задачи и числе решений.

Теорема 16.1. *Если у непрерывной по Гельдеру функции $A(t) = a(s) + ib(s)$ индекс $\varkappa \geqslant 0$, то однородная задача Гильберта $(c(s) \equiv 0)$ и неоднородная $(c(s) \not\equiv 0)$ безусловно разрешимы, и имеют $2\varkappa + 1$ линейно-независимых решений. Если $\varkappa < 0$ то однородная задача неразрешима. Неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда функция $c(s)$ удовлетворяет $-2\varkappa - 1$ условиям разрешимости.*

6°. Чтобы описать второй метод решения задачи Гильберта, нам понадобится решение задачи Шварца в ее классической постановке и двух ее обобщений.

Задача Шварца, как уже говорилось, состоит в определении аналитической функции $F(z) = u + iv$ в области D^+ по заданной на ее границе вещественной части. Значит, граничное условие этой задачи имеет тот же вид (16.16), где $A(t) \equiv 1$, и в случае единичного круга на основании изложенного в предыдущем пункте она эквивалентна краевой задаче

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = 2c(s) \qquad (16.21)$$

при условии (16.20). В обозначениях § 15 здесь $G(t) = -1$, $\varkappa = 0$, $X(z) = i$, $z \in D^+$, $X(z) = -i$, $z \in D^-$, и при непрерывной по Гельдеру $c(s)$ из формулы (15.17) при $z \in D^+$ получим известную формулу Шварца

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L c(\sigma)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau}+i\beta_0,\quad \tau=e^{i\sigma}, \tag{16.22}$$

где β_0 — произвольная вещественная постоянная.

Если функция $c(s)$ в конечном числе точек $s_1, s_2 \ldots, s_m$ имеет разрывы первого рода, то ограниченное симметричное решение задачи (16.21) в D^+ будет иметь тот же вид (16.22). Следовательно, форма решения задачи Шварца с разрывной граничной функцией $c(s)$ та же самая, что и при отсутствии точек разрыва, однако теперь точки $t_k=e^{is_k}$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ являются для $F(z)$ особыми. Чтобы выяснить поведение $F(z)$ вблизи любой из этих точек, положим $\delta_k=c(s_k-0)-c(s_k+0)$, обозначим через $\ln(t-t_k)=\ln|t-t_k|+i\arg(t-t_k)$ предельное значение из D^+ определенной ветви логарифмической функции $\ln(z-t_k)$, однозначной в плоскости с разрезом по лучу (t_k, ∞), введем непрерывную на L функцию

$$c_1(s)=c(s)-\sum_{k=1}^{m}\frac{\delta_k}{\pi}\arg(t-t_k) \tag{16.23}$$

и перепишем формулу (16.22) в таком виде

$$F(z)=i\beta_0+\frac{1}{2\pi i}\int_L c_1(\sigma)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\delta_k}{\pi}\frac{1}{2\pi i}\int\arg(\tau-t_k)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau}. \tag{16.24}$$

Чтобы вычислить интеграл Шварца

$$F_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\arg(\tau-t_k)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau}=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{2\arg(\tau-t_k)}{t-z}d\tau-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\arg(\tau-t_k)}{\tau}d\tau=\varphi_k(z)-\frac{1}{2}\varphi_k(0),$$

воспользуемся соотношением $2\arg(\tau-t_k)=-i[\ln(\tau-t_k)-\ln(\bar\tau-\bar t_k)]$. При $z\in D^+$ имеем

$$\varphi_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{-i\ln(\tau-t_k)}{\tau-z}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{i\ln(\bar\tau-\bar t_k)}{\tau-z}d\tau=$$

$$=-i\ln(z-t_k)+i\ln(-\bar t_k),$$

ибо $\ln(\bar\tau-\bar t_k)$ есть граничное значение функции $\ln\left(\frac{1}{z}-\bar t_k\right)$, аналитической в D^-. Значит,

$$F_k(z) = -i\ln(z-t_k) + i\ln(-\bar{t}_k) + \frac{i}{2}\ln(-t_k) -$$
$$-\frac{i}{2}\ln(-\bar{t}_k) = -i\ln(z-t_k).$$

Подставляя это значение в формулу (16.24), получим

$$F(z) = i\beta_0 + \frac{1}{2\pi i}\int_L c_1(\sigma)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau} - \sum_{k=1}^{m}\frac{i\delta_k}{\pi}\ln(z-t_k). \quad (16.25)$$

Отсюда видно, что каждая точка $t_k = e^{is_k}$ является для $F(z)$ логарифмической особой точкой.

Иногда приходится отыскивать решение задачи Шварца с полюсом заданного порядка в точке $z=0$. Как и формула (16.22), это решение получается из формулы (15.17)

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L c(\sigma)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau} + P_n(z) - \bar{P}_n\left(\frac{1}{z}\right). \quad (16.26)$$

Оно содержит $2n+1$ произвольных вещественных постоянных.

Сейчас мы применим формулы (16.22), (16.25) и (16.26) при решении задачи (16.16) для единичного круга, предполагая по-прежнему $A(t) \in H$ и $|A(t)| \neq 0$.

7°. Следуя § 3 работы [77], положим $A(t) = |A(t)|e^{i\theta(s)}$ и запишем граничное условие (16.16) в таком виде

$$\mathrm{Re}\,[e^{-i\theta(s)}F(t)] = c(s)\,|A(t)|^{-1}. \quad (16.27)$$

Если $\varkappa = \mathrm{Ind}\,A(t)$, то функция $\theta(s)$ непрерывна на L всюду, кроме некоторой точки s_0, при переходе через которую она испытывает скачок $\delta_0 = \theta(s_0-0) - \theta(s_0+0) = 2\pi\varkappa$. Обозначим через $\Gamma(z)$ интеграл Шварца с плотностью $\theta(s)$. На основании формулы (16.25) его можно выразить через интеграл Шварца с непрерывной плотностью $\theta_1(s) = \theta(s) - 2\varkappa\arg(t-t_0)$. Имеем:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(\sigma)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \theta_1(\sigma)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau} -$$
$$-2i\varkappa\ln(z-t_0) = \Gamma_1(z) - 2i\varkappa\ln(z-t_0). \quad (16.28)$$

Однозначная функция

$$X(z) = (z-t_0)^{-\varkappa}\left(\frac{1}{z}-\bar{t}_0\right)^{-\varkappa} e^{i\Gamma(z)} = \left(\frac{z-t_0}{\frac{1}{z}-\bar{t}_0}\right)^{\varkappa} e^{i\Gamma_1(z)} \quad (16.29)$$

всюду в D^+ является аналитической и отличной от нуля, кроме точки $z=0$, в которой у нее при $\varkappa \neq 0$ нуль или плюс порядка $|\varkappa|$. При $z \to t = e^{is}$ функция $X(z)$ имеет вполне определенный отличный от нуля предел

$$X(t) = e^{i\theta(s)} \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta_1(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma\right), \tag{16.30}$$

при этом, очевидно, $X(t_0 - 0) = X(t_0 + 0) \neq 0$. Второй множитель в выражении $X(t)$ вещественный. Поэтому, выразив $e^{-i\theta(s)}$ через $X(t)$ из (16.30) и подставив в условие (16.27), получим

$$\operatorname{Re}\left[\frac{F(t)}{X(t)}\right] = c(s)\,|A(t)|^{-1}\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta_1(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma\right) = c_1(s). \tag{16.31}$$

Функция $c_1(s)$ непрерывна и, следовательно, для определения отношения $F(z)/X(z)$ получилась обычная задача Шварца.

Пусть $\varkappa \geqslant 0$. $X(z)$ в точке $z = 0$ имеет в этом случае нуль, а $F(z)/X(z)$ — полюс порядка $\varkappa$. Поэтому в силу формулы (16.26)

$$F(z) = X(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L c_1(\sigma)\frac{\tau + z}{\tau - z}\frac{d\tau}{\tau} + P_\varkappa(z) - \overline{P}_\varkappa\left(\frac{1}{z}\right)\right\},$$

где полином $P_\varkappa(z)$ имеет произвольные коэффициенты $c_k = \alpha_k + i\beta_k$. Задача (16.16) имеет $2\varkappa + 1$ линейно-независимых решений.

При $\varkappa < 0$ $X(z)$ в точке $z = 0$ имеет полюс порядка $(-\varkappa)$. Поэтому, восстановив аналитическую в D^+ функцию $F(z)/X(z)$ по условию (16.31), получим

$$F(z) = X(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L c_1(\sigma)\frac{\tau + z}{\tau - z}\frac{d\tau}{\tau} + i\beta_0\right\}.$$

Чтобы обеспечить аналитичность $F(z)$ в точке $z = 0$, разлагаем выражение в фигурных скобках в ряд Тейлора в окрестности $z = 0$ и приравниваем нулю первые $(-\varkappa)$ коэффициентов

$$i\beta_0 + \frac{1}{2\pi i}\int_L c_1(\sigma)\frac{d\tau}{\tau} = 0,$$

$$\int_L c_1(\sigma)\,\tau^{-k-1}\,d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, -\varkappa - 1.$$

Отсюда получаем $\beta_0 = 0$ и $-2\varkappa - 1$ дополнительных вещественных условий разрешимости

$$\int_0^{2\pi} c_1(\sigma)\begin{Bmatrix}\cos k\sigma\\ \sin k\sigma\end{Bmatrix} d\sigma = 0,\ k = 0,\ 1, \ldots,\ -\varkappa - 1,$$

при выполнении которых задача (16.16) при $\varkappa < 0$ имеет единственное решение.

Изложенная схема решения задачи Гильберта напоминает решение задачи Римана. Задача Шварца играет здесь ту же роль, что задача о скачке в задаче Римана, а функция $X(z)$, при помощи которой задача Гильберта сводится к задаче Шварца (16.31) — роль канонической функции. Если учесть, что на основании (16.31) и (16.30)

$$c_1(s) = \frac{c(s)}{\overline{A(t)}\,X(t)},$$

то и внешне зависимость общего решения задачи Гильберта (16.16) от $X(z)$ та же, что зависимость решения задачи Римана от канонической функции.

8°. Несколько слов об эквивалентности сингулярного уравнения (16.1) и краевой задачи Гильберта.

Возьмем формулу Шварца, восстанавливающую аналитическую функцию $F(z) = u(x,\ y) + iv(x,\ y)$ в единичном круге по заданному граничному значению $u(s) = \operatorname{Re} F(t)$:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L u(\sigma)\frac{\tau + z}{\tau - z}\frac{d\tau}{\tau} + iv_0. \tag{16.32}$$

Если положить здесь $z = 0$ и в полученном равенстве

$$u(0,\ 0) + iv(0,\ 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L u(\sigma)\frac{d\tau}{\tau} + iv_0$$

приравнять вещественные части, то получим известную теорему о среднем для гармонической в круге $|z| < 1$ функции

$$u(0,\ 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\,d\sigma,$$

на основании которой равенство мнимых частей можно записать в виде

$$v_0 = v(0,\ 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\sigma)\,d\sigma. \tag{16.33}$$

Из формулы (16.32) найдем граничное значение $F(t) = u(s) + iv(s)$:

$$u(s) + iv(s) = u(s) + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma + iv_0,$$

откуда получаем

$$v(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma + v_0. \qquad (16.34)$$

Эта формула, связывающая между собой граничные значения вещественной и мнимой частей аналитической в единичном круге функции, называется *формулой Гильберта*. Она и позволяет привести сингулярное уравнение (16.1) в краевой задаче Гильберта. Для этого надо ввести вспомогательную функцию $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, аналитическую внутри единичного круга, у которой $u(s)$ совпадает с искомой непрерывной функцией $\varphi(s)$, а $v_0 = v(0, 0) = 0$. Тогда на основании формулы (16.34) уравнение (16.1) примет вид (16.17). Значит, уравнение (16.1) эквивалентно задаче Гильберта (16.17) при дополнительном условии

$$\int_0^{2\pi} v(\sigma)\,d\sigma = 0.$$

Иной метод решения уравнения (16.1) путем приведения к краевой задаче Римана в классе периодических функций изложен в работе [78].

§ 17. ОБЩАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

1°. В теории аналитических функций понятие автоморфности является обобщением понятия периодичности. Рассматривается счетное множество дробно-линейных функций

$$\omega_k(z) = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}, \quad \Delta_k = \alpha_k\delta_k - \beta_k\gamma_k \neq 0, \qquad (17.1)$$

$$k = 0, 1, \ldots; \ \omega_0(z) \equiv z,$$

образующих группу. Однозначная аналитическая (с точностью до полюсов) функция $F(z)$ называется *автоморфной функцией*, принадлежащей рассматриваемой группе H, если она инвариантна относительно преобразований этой группы, то есть, если

$$F[\omega_k(z)] = F(z), \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (17.2)$$

Самим определением в области существования автоморфной функции допускаются в качестве особенностей только полюсы, и, следовательно, известная теория автоморфных функций есть теория одного из классов мероморфных функций. Наиболее полное изложение этой теории дано в книге Л. Р. Форда [64]. Для удобства приведем некоторые необходимые нам в дальнейшем факты этой теории.

Из условий автоморфности (17.2) следует, что если $F(z)$ имеет в некоторой точке z_0 нуль или полюс, то и во всех конгруэнтных точках $\omega_k(z_0) \neq z_0$, $k = 1, 2, \ldots$ она будет иметь нуль или полюс того же порядка. Чтобы убедиться в этом, надо принять во внимание равенство

$$\omega_k(z) - \omega_k(z_0) = \frac{\Delta_k (z - z_0)}{(\gamma_k z + \delta_k)(\gamma_k z_0 + \delta_k)}. \tag{17.3}$$

На основании этого равенства представление

$$F(z) = (z - z_0)^m \varphi(z),$$

справедливое вблизи z_0, где $\varphi(z)$ — аналитическая и $\varphi(z_0) \neq 0$, можно переписать в таком виде

$$F(z) = [\omega_k(z) - \omega_k(z_0)]^m \varphi_1(z),$$

где функция $\varphi_1(z)$ вблизи z_0 имеет те же свойства, что и $\varphi(z)$. Если в последнем равенстве заменить z на $\omega_k^{-1}(z)$, то в силу условий (17.2) левая часть останется инвариантной и мы имеем

$$F(z) = [z - \omega_k(z_0)]^m \varphi_2(z),$$

где функция $\varphi_2(z) = \varphi_1[\omega_k^{-1}(z)]$ вблизи $\omega_k(z_0)$, очевидно, аналитическая и $\varphi_2[\omega_k(z_0)] = \varphi_1(z_0) \neq 0$.

Когда точка z_0 является неподвижной точкой некоторого преобразования группы $\omega(z)$, то определять порядок нуля или полюса в z_0 по разложению $F(z)$ в ряд по степеням $z - z_0$ неудобно, ибо здесь совмещенными оказываются два нуля z_0 и $\omega(z_0)$. Более того, группе H наряду с преобразованием $\omega(z)$ принадлежат все преобразования порожденной им циклической подгруппы

$$z,\ \omega(z),\ \omega^2(z) = \omega \circ \omega(z),\ \omega^3(z) = \omega \circ \omega \circ \omega(z), \ldots,$$

для которых z_0 будет также неподвижной точкой. В общем случае циклическая группа бесконечна. Это сразу видно, если записать все преобразования $\omega^j(z)$ в канонической форме. Когда z_0' есть вторая неподвижная точка преобразования $\omega(z)$, имеем

$$\frac{\omega^j - z_0}{\omega^j - z_0'} = r^j e^{ij\theta} \frac{z - z_0}{z - z_0'}, \quad z_0,\ z_0' \neq \infty,$$

$$\omega^j - z_0 = r^j e^{ij\theta}(z - z_0),\ z_0 \neq \infty,\ z_0' = \infty. \tag{17.4}$$

Если же z_0 единственная неподвижная точка $\omega(z)$, то

$$\begin{gathered} \frac{1}{\omega^j - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + jh,\ z_0 \neq \infty,\ h \neq 0, \\ \omega^j = z + jh, \quad z_0 = \infty. \end{gathered} \tag{17.5}$$

Из формул (17.4) и (17.5) видно, что циклическая группа, порожденная преобразованием $\omega(z)$, может быть конечной и состоять из p преобразований тогда и только тогда, когда для преобразования $\omega(z)$ имеем $r=1$ и $p\theta=2\pi k$. В этом случае говорят, что преобразование $\omega(z)$ имеет период p.

В случае двух неподвижных точек преобразование $\omega(z)$ называется *эллиптическим*, если $r=1$, $\theta\neq 2\pi k$, *гиперболическим*, если $r\neq 1$, $\theta=2\pi k$ и *локсодромическим*, если $r\neq 1$, $\theta\neq 2\pi k$. Преобразование с одной неподвижной точкой называется *параболическим*. Значит, конечный период может иметь только преобразование эллиптического типа.

Поведение автоморфной функции $F(z)$ в окрестности неподвижной точки z_0 описывается с помощью униформизирующего параметра t:

$$F(z)=t^m(a_0+a_1t+\ldots),\ a_0\neq 0,\ m \text{ — целое.} \tag{17.6}$$

Если z_0 — неподвижная точка эллиптического преобразования периода p, то полагаем

$$\begin{aligned} &t=\left(\frac{z-z_0}{z-z_0'}\right)^p,\ z_0\neq\infty,\ z_0'\neq\infty,\\ &t=z^{-p},\quad z_0=\infty,\quad z_0'\neq\infty,\\ &t=(z-z_0)^p,\quad z_0\neq\infty,\ z_0'=\infty. \end{aligned} \tag{17.7}$$

Если же z_0 — неподвижная точка параболического преобразования, то

$$\begin{aligned} &t=\exp\left(\pm\frac{2\pi i}{h}\frac{1}{z-z_0}\right),\ z_0\neq\infty,\\ &t=\exp\left(\pm\frac{2\pi i}{h}z\right),\ z_0=\infty, \end{aligned} \tag{17.8}$$

выбирая знак так, чтобы $t\to 0$, когда $z\to z_0$ или когда $z\to\infty$ соответственно.

Точка ζ называется *предельной точкой группы*, если она является предельной для последовательности $\{\omega_k(z)\}$ при некотором z. Все неподвижные точки бесконечного порядка относятся к числу предельных.

Если точка ζ не является предельной, то она называется *обыкновенной точкой группы* H, а сама группа H называется в этом случае *разрывной в точке* ζ. Группа H называется *разрывной на множестве* E, если она разрывна в каждой точке этого множества.

Примеры разрывных и неразрывных групп можно найти среди самых простых групп — циклических. Легко показать, что если порождающее преобразование $\omega(z)$ не является эллиптическим, то циклическая группа H_c разрывна всюду кроме неподвижных точек $\omega(z)$; если $\omega(z)$ — эллиптическое, то H_c разрывна всюду, если H_c конечна, и не является разрывной нигде, если она бесконечна.

Автоморфные функции существуют только для разрывных групп. Область их существования является областью разрывности группы и состоит, следовательно, из обыкновенных точек. Предельные точки группы являются существенно особыми для автоморфной функции и, как правило, относятся к границе области существования $F(z)$. Особым образом ведет себя автоморфная функция лишь в неподвижной точке параболического преобразования: на основании разложения (17.6), где t определяется формулами (17.8), при $m \geqslant 0$ говорят, что она является аналитической в точке z_0, а при $m<0$ имеет полюс порядка m.

Доказано, что число предельных точек у разрывных групп может быть равно 0, 1, 2 и ∞. По числу предельных точек разрывные группы разделены на следующие три класса:

1) *Элементарные группы*, имеющие не более двух предельных точек. Эти группы хорошо изучены и все перечислены. К ним относятся не имеющие предельных точек конечные группы, состоящие из эллиптических циклических групп и групп правильных многогранников; группы с одной предельной точкой, среди которых основными являются одно-периодическая группа P_1

$$\omega_k(z) = z + kh, \ h \neq 0, \ k = 0, \ \pm 1, \dots; \qquad (17.9)$$

двоякопериодическая группа P_2

$$\omega_{k_1, k_2}(z) = z + k_1 h_1 + k_2 h_2, \ k_1, \ k_2 = 0, \ \pm 1, \dots, \qquad (17.10)$$

$$h_1/h_2 = \rho e^{i\psi}, \ \psi \neq 2\pi n,$$

и конечное число групп, состоящих из преобразований вида

$$\omega(z) = z e^{2\pi i j/\nu} + k_1 h_1 + k_2 h_2, \ j = 1, \ 2, \dots, \nu; \ \nu = 2, 3, 4, \ 6, \qquad (17.11)$$

в каждую из которых в виде подгруппы входит P_1 или P_2. Группы с двумя предельными точками $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$ состоят из таких преобразований:

$$\begin{aligned} &\text{а) } \omega = a^m z, \ \text{б) } \omega = a^m b^n z, \ |a| \neq 1, \ b = e^{2\pi i/k}, \\ &\text{в) } \omega = a^m z, \quad \omega = a^m z^{-1}, \\ &\text{г) } \omega = a^m b^n z, \quad \omega = a^m b^n z^{-1}. \end{aligned} \qquad (17.12)$$

Все остальные элементарные группы получаются из перечисленных путем дробно-линейных преобразований $T^{-1} \circ \omega_k \circ T(z)$ и являются изоморфными с ними.

2) *Фуксовы группы*, все предельные точки которых (их бесконечное множество) расположены на одной окружности и либо заполняют сплошь эту окружность (фуксовы группы

первого рода), либо образуют нигде неплотное совершенное множество (фуксовы группы второго рода). В первом случае группа имеет две различные области разрывности — внутренность и внешность предельной окружности или, как ее еще называют, *главной окружности*. Автоморфные функции, принадлежащие фуксовой группе первого рода, через главную окружность непродолжаемы и изучаются, например, только внутри окружности. У фуксовых групп второго рода область разрывности бесконечносвязна.

Перечислить все фуксовы группы невозможно. Это связано с тем, что преобразования фуксовой группы первого рода, переводящие внутренность главной окружности S в себя, можно интерпретировать как движения неевклидовой плоскости, моделью которой является S, а группы таких движений нельзя перечислить.

3) *Клейновы группы* — это все другие группы с бесконечным множеством предельных точек, отличные от фуксовых.

У разрывной группы в области разрывности S всегда имеется такая область (односвязная или многосвязная), которая не содержит ни одной пары различных между собой конгруэнтных точек. Такая область называется *фундаментальной областью группы*.

Когда группа состоит только из целых преобразований ($\gamma_k = 0$), фундаментальная область может быть просто построена на основании геометрических свойств преобразований группы. Так, для группы вращений около начала на угол, кратный $\theta = 2\pi/n$,

$$\omega_k(z) = ze^{i\theta k}, \; k = 0, \; 1, \dots, \; n-1,$$

фундаментальной областью будет любой угол с вершиной в начале величины θ. Фундаментальной областью однопериодической группы (17.9) является любая полоса, ограниченная прямыми, связанными преобразованием $\omega = z + h$. Для двоякопериодической группы (17.10) фундаментальной областью будет любой параллелограмм со сторонами, параллельными векторам h_1 и h_2 и имеющими длину этих векторов.

Если группа не содержит целых преобразований (все $\gamma_k \neq 0$), то фундаментальной областью будет внешность всех изометрических окружностей группы

$$|\gamma_k z + \delta_k| = \sqrt{|\Delta_k|}, \tag{17.13}$$

расположенная в S.

Если же группа содержит как целые, так и нецелые преобразования, фундаментальная область строится следующим образом. Все целые преобразования группы, имеющие общую неподвижную точку $z_0 = \infty$, образуют подгруппу. Пусть R_∞ есть фундаментальная область этой подгруппы. Затем строим изометрические окружности группы. Пересечение внешности всей совокупности этих окружностей с R_∞, расположенное в S, и будет фундаментальной областью всей группы.

Если над построенной таким образом фундаментальной областью R выполнить все возможные преобразования, принадлежащие группе, то получится множество конгруэнтных областей $\omega_k(R)$, не перекрывающихся попарно. Каждая из областей $\omega_k(R)$ является в свою очередь фундаментальной областью группы.

Граничные точки любой фундаментальной области образуют множество попарно конгруэнтных сторон. Когда группа не содержит целых преобразований, стороны представляют из себя дуги изометрических окружностей. Каждые две конгруэнтные стороны имеют одинаковые длины. Преобразования, связывающие конгруэнтные стороны, образуют множество порождающих преобразований группы. Внутренние точки сторон являются обыкновенными, а концы сторон либо неподвижными точками эллиптических преобразований конечного периода (они для краткости называются вершинами) либо предельными точками. Среди вершин могут быть точки конгруэнтные друг другу.

Если стороны R встречаются только в вершинах и параболических неподвижных точках и если кроме параболических точек граница не содержит никаких иных предельных точек, то R имеет конечное число сторон. Таковыми являются фундаментальные области всех элементарных и фуксовых групп.

Обычно к фундаментальной области R присоединяют некоторые точки ее границы, а именно, одну из двух конгруэнтных сторон и одну из совокупности конгруэнтных вершин. Полученное множество R_0 называют *фундаментальным многоугольником группы*, а чаще по-прежнему фундаментальной областью.

Из условий (17.2) следует, что автоморфная функция принимает в конгруэнтных точках одинаковые значения. Поэтому достаточно изучить ее лишь в фундаментальном многоугольнике группы.

Для групп, фундаментальная область которых имеет конечное число сторон, автоморфные функции, которые мы, следуя Форду, будем называть *простыми* автоморфными функциями, обладают рядом замечательных свойств.

1) Каждая простая автоморфная функция $F(z)$, ,отличная от постоянной, имеет в фундаментальной области R_0 полюсы. Число нулей и полюсов одинаково. Это число называют порядком $F(z)$. Каждое свое значение в R_0 простая автоморфная функция принимает одно и то же число раз, равное порядку.

2) Любые две простые автоморфные функции данной группы алгебраически зависимы, иными словами для любых двух

таких функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ группы H существует многочлен $Q(u, v)$ от двух переменных с постоянными коэффициентами, такой что

$$Q[(F_1(z), F_2(z)] = 0 \tag{17.14}$$

для всех значений z, при которых определены $F_1(z)$ и $F_2(z)$. Для любой группы H можно найти такие $F_1(z)$ и $F_2(z)$, через которые любая отличная от них простая автоморфная функция $F(z)$ той же группы H выражается в виде рациональной функции с постоянными коэффициентами.

В качестве примера здесь можно взять двоякопериодическую группу P_2. Все простые автоморфные функции этой группы (их называют обычно эллиптическими) являются рациональными функциями от функции Вейерштрасса

$$p(z) = z^{-2} + \sum' ((z-h)^{-2} - h^{-2}], \quad h = m_1 h_1 + m_2 h_2,$$

и ее производной $p'(z)$:

$$F(z) = \varphi_1[p(z)] + p'(z)\varphi_2[p(z)].$$

Алгебраическое уравнение, связывающее $p(z)$ и $p'(z)$, имеет следующий вид

$$[p'(z)]^2 = 4p^3(z) - g_2 p(z) - g_3,$$

где g_2 и g_3 — вполне определенные постоянные.

3) Если существует простая автоморфная функция $f(z)$ группы H, имеющая единственный простой полюс в R_0 и аналитическая во всех остальных точках, то каждая простая автоморфная функция группы является рациональной функцией от $f(z)$.

Примером может служить функция $\exp(2\pi iz/h)$, имеющая период h; параболическая точка $z_0 = \infty$ являются для нее единственным простым полюсом в полосе периода R_0; каждая периодическая с периодом h функция, имеющая в полосе периода конечный порядок, будет рациональной функцией от $\exp(2\pi iz/h)$ [37, с. 556—562]. В следующем параграфе мы познакомимся с видом функции $f(z)$ в случае любой конечной группы.

Функция $f(z)$ называется обычно *основной автоморфной функцией или основным инвариантом группы.*

Для двоякопериодической группы P_2 основного инварианта с единственным простым полюсом в параллелограмме периодов не существует. Иввестная классическая теорема устанавливает, что всякая эллиптическая функция принимает одно и то же значение по крайней мере два раза в параллелограмме периодов. Но два основных инварианта $p(z)$ и $p'(z)$, как мы уже указывали, позволяют построить любую эллиптическую функцию.

Неэлементарные группы в силу свойства 2) также характеризуются в общем случае двумя инвариантами $F_1(z)$ и $F_2(z)$, связанными алгебраическим уравнением $Q(F_1, F_2)=0$. Известно, что основной инвариант $j(z)$ с единственным простым полюсом в R_0 существует тогда и только тогда, когда род ρ алгебраического уравнения $Q(u, v)=0$ равен нулю. При $\rho \neq 0$ наименьший порядок простой автоморфной функции в R_0 равен $\rho+1$.

2°. В дальнейшем мы будем рассматривать автоморфные функции более общего класса. Их отличие от простых автоморфных функций в том, что в фундаментальной области R_0 в качестве особенностей, кроме полюсов, допускаются линии разрыва первого рода. Такие функции мы будем называть кусочно-голоморфными или кусочно-аналитическими автоморфными функциями.

Приведем более полное и точное определение кусочно-голоморфной автоморфной функции.

Пусть H есть некоторая разрывная группа дробно-линейных преобразований с областью разрывности S, фундаментальная область R_0 которой имеет конечное число сторон. Обозначим через L_0 простую гладкую линию, лежащую в R_0.

Рассмотрим в S функцию $\Phi(z)$ со следующими свойствами:

1) $\Phi(z)$ инвариантна при преобразованиях группы H

$$\Phi[\omega_k(z)] = \Phi(z); \tag{17.15}$$

2) в точках области R_0, не лежащих на линии L_0, $\Phi(z)$ является аналитической всюду, кроме, может быть, конечного числа точек, где у нее полюсы конечного порядка;

3) все существенно особые точки $\Phi(z)$ являются предельными точками группы H, отличными от параболических точек; в окрестности последних поведение $\Phi(z)$ описывается разложением вида (17.6);

4) $\Phi(z)$ имеет иепрерывные граничные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ всюду на L_0, кроме, может быть, конечного числа точек, вблизи которых $\Phi(z)$ удовлетворяет условию

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1.$$

Фунцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую перечисленным свойствам, назовем кусочно-голоморфной автоморфной функцией, принадлежащей заданной группе H, с линией скачков L_0.

Из всех задач на построение кусочно-голоморфной функции по заданным свойствам ее граничных значений мы рассмотрим только граничную задачу Римана:

Найти кусочно-голоморфную автоморфную функцию $\Phi(z)$, принадлежащую группе H, с линией скачков L_0, на которой она удовлетворяет условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L_0, \tag{17.16}$$

имеющую в точках $z_1, z_2, \ldots, z_m$ фундаментальной области R_0 полюсы порядка не выше $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ соответственно.

Заданные на L_0 функции $G(t)$ и $g(t)$ мы будем считать принадлежащими классу H_0 и $G(t) \neq 0$ всюду на L_0.

Все линии $L_k = \omega_k(L_0)$ для искомой функции $\Phi(z)$ также являются линиями скачков. Пользуясь граничным условием (17.16) и условиями автоморфности (17.15), нетрудно получить граничные условия для $\Phi(z)$ на всех этих линиях. Если функции $\omega_k(z)$ отображают линию L_0 в линию L_k с сохранением направления обхода, то из условий (17.15) имеем

$$\Phi^{\pm}(t) = \Phi^{\pm}[\omega_k(t)], \quad t \in L_0.$$

Подставляя в условие (17.16), получаем

$$\Phi^{+}(\omega_k(t)] = G(t)\,\Phi^{-}[\omega_k(t)] + g(t), \quad t \in L_0,$$

или, заменяя $t \in L_0$ на $\omega_k^{-1}(t)$, $t \in L_k$,

$$\Phi^{+}(t) = G[\omega_k^{-1}(t)]\,\Phi^{-}(t) + g[\omega_k^{-1}(t)], \tag{17.17}$$
$$t \in L_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Если преобразования группы H отображают L_0 в L_k с изменением направления обхода, то в условии (17.17) Φ^{+} и Φ^{-} надо поменять местами.

Таким образом, на линиях L_k функция $\Phi(z)$ также удовлетворяет краевым условиям задачи Римана.

К необходимости изучения краевой задачи Римана для автоморфных функций приводит попытка решить сингулярное интегральное уравнение, отличное от характеристического, путем приведения его к задаче Римана. Рассмотрим полное сингулярное уравнение

$$a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{L_0}\left[\frac{1}{\tau - t} + k(t, \tau)\right]\varphi(\tau)\,d\tau = c(t), \tag{17.18}$$

заданное на некоторой гладкой линии L_0. Допустим, что ядро $k(t, \tau)$ удовлетворяет условию Гёльдера по обеим переменным и по переменному t является аналитически продолжимым однозначным образом с линии L_0 на всю плоскость комплексного переменного z или на какую-то область S этой плоскости. Для однозначной кусочно-голоморфной функции в S

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\left[\frac{1}{\tau - z} + k(z, \tau)\right]\varphi(\tau)\,d\tau \tag{17.19}$$

линия L_0 будет линией скачков. Если функция $\varphi(t)$ на L_0 принадлежит классу H_0 или H^*, то граничные значения интеграла (17.19) в точках t, отличных от концевых, будут вычисляться по формулам Сохоцкого

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t),$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_0}\left[\frac{1}{\tau - t} + k(t, \tau)\right]\varphi(\tau)\,d\tau \qquad (17.20)$$

и из уравнения (17.18) на L_0 будем иметь

$$[a(t) + b(t)]\,\Phi^+(t) = [a(t) - b(t)]\,\Phi^-(t) + c(t). \qquad (17.21)$$

Но интеграл (17.19), кроме линии L_0, может иметь еще другие особые линии, являющиеся особыми линиями функции $k(z, \tau)$. Допустим, что все эти линии

$$L_k: z = \omega_k(\tau),\ \tau \in L_0,$$

являются аналитическими. Очевидно, на основании условия (17.21) для функции $\Phi(z)$ на каждой из особых линий L_k получится краевое условие задачи Римана тогда и только тогда, когда: 1) множество функций $\omega_k(z)$ представляет дискретную группу преобразований области S на себя и 2) значения функции $\Phi(z)$ при преобразованиях этой группы претерпевают линейные подстановки, то есть

$$\Phi[\omega_k(z)] = p_k(z)\,\Phi(z) + q_k(z). \qquad (17.22)$$

Если полученная краевая задача Римана в рассматриваемом классе кусочно-голоморфных функций решается в явном виде, то по первой из формул (17.20) в явном виде может быть найдено и решение исходного сингулярного уравнения (17.18) (при наличии эквивалентности между ними).

Условия автоморфности (17.15) являются частными случаями соотношений (17.22).

3°. Чтобы дать общую схему решения задачи Римана для автоморфных функций, проанализируем внимательно схему решения обычной задачи Римана.

При решении задачи Римана основными были два момента: 1) построение канонической функции $X(z)$, при помощи которой задача в общем случае сводилась к задаче о скачке $\psi^+(t) - \psi^-(t) = c(t)$; 2) решение задачи о скачке.

Частное решение задачи с ненулевым скачком $c(t)$, представляющее из себя интеграл типа Коши с плотностью $c(t)$, определяет тот математический аппарат, при помощи которого получается решение задачи и в общем случае.

Задача с нулевым скачком позволяет определить число линейно-независимых решений в допустимом классе кусочно-голоморфных функций и процесс ее решения сводится к построению рациональной функции с заданными полюсами в виде линейной комбинации простейших дробей. Легко убедиться, что для базиса при построении рациональных функций ядро Коши $(\tau - z)^{-1}$ служит производящей функцией. В самом деле, разложим ядро Коши по переменному τ в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки $z_0 \neq \infty$:

$$\frac{1}{\tau - z} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\tau - z_0)^j}{(z - z_0)^{j+1}}.$$

Рациональная функция $\psi(z)$ с полюсом порядка n в точке z_0 записывается через коэффициенты этого разложения

$$\xi_j(z, z_0) = \frac{1}{(z - z_0)^{j+1}}, \; j = 0, 1, \ldots,$$

взятые со знаком минус, следующим образом

$$\psi(z) = C + \sum_{j=1}^{n} a_j \xi_{j-1}(z, z_0),$$

а рациональная функция с полюсами в точках $z_1, \ldots, z_m$ порядков $n_1, \ldots, n_m$ соответственно в виде

$$\psi(z) = C + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} a_{jk} \xi_{j-1}(z, z_k).$$

При $z_0 = \infty$ разлагаем ядро Коши в ряд Лорана в окрестности $\tau = \infty$:

$$\frac{1}{\tau - z} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\tau^{j+1}}.$$

Здесь каждый коэффициент $\xi_j(z, \infty) = z^j$, $j = 0, 1, \ldots$ имеет на бесконечности полюс порядка j и любой полином степени n запишется в виде $P_n(z) = a_0 + a_1\xi_1(z, \infty) + \ldots + a_n\xi_n(z, \infty)$.

При построении канонической функции $\mathrm{X}(z)$ приходится перебрасывать нули и бесконечности функции $\exp \Gamma(z)$ порядка выше допустимого с линии скачков в некоторые точки, не лежащие на этой линии. Для этого функция $\exp \Gamma(z)$ умножается на рациональную функцию

$$\eta(z) = \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{z - t_k}{z - z_k} \right)^{-\varkappa_k}, \; t_k \in L, \; z_k \overline{\in} L,$$

имеющую нули и полюсы в известных точках. Эта рациональная функция также тесно связана с ядром Коши. Легко видеть, что

$$\frac{z - t_k}{z - z_k} = \exp \left\{ \int_{z_k}^{t_k} \frac{d\tau}{\tau - z} \right\}$$

и, значит,

$$\eta(z) = \prod_{k=1}^{m} \exp\left\{-\varkappa_k \int_{z_k}^{t_k} \frac{d\tau}{\tau - z}\right\}.$$

В следующих параграфах мы проследим внимательно за решением задачи Римана для автоморфных функций, принадлежащих различным не изоморфным друг другу элементарным группам. Мы увидим, как проявляются свойства каждой группы в процессе решения задачи, и в то же время убедимся, что общая схема решения остается той же, что и при решении обычной задачи Римана. Для каждой из рассматриваемых групп частным решением задачи о скачке будет некоторый аналог интеграла типа Коши, ядро которого либо автоморфно, либо (как в случае двоякопериодической группы P_2) изменяется при преобразованиях группы на постоянное слагаемое. Построение этого ядра $A(z, \tau)$ является одним из самых важных моментов при решении задачи и уже на этом первом этапе проявляются свойства каждой конкретной группы. Имея $A(z, \tau)$, из разложения

$$A(z, \tau) = -\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j(z, z_0)\,(\tau - z_0)^j \tag{17.23}$$

получаем линейно-независимые функции $\xi_j(z, z_0)$ для построения простой автоморфной функции группы по известным полюсам и вычисляем функции

$$E(z, t_k, z_k) = \exp\left\{\int_{z_k}^{t_k} A(z, \tau)\,d\tau\right\}, \tag{17.24}$$

необходимые при построении канонической функции. Ясно, что свойства функций $\xi_j(z, z_0)$ и $E(z, t_k, z_k)$ зависят от свойств соответствующей группы и это также приходится учитывать в процессе решения задачи.

§ 18. СЛУЧАЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Конечная группа H не имеет ни одной предельной точки и, значит, ее область разрывности S совпадает с расширенной комплексной плоскостью. Бесконечно удаленная точка принадлежит хотя бы одной из фундаментальных областей. Именно эту фундаментальную область мы и обозначим через R_0. Будем считать, как обычно, что расположенная в R_0 линия L_0 бесконечных ветвей не имеет.

1°. При постановке задачи Римана для автоморфных функций мы уже отмечали, что для искомой функции $\Phi(z)$ все линии $L_k = \omega_k(L_0)$, конгруэнтные относительно преобразований рассматриваемой группы H, являются линиями разрыва и на них $\Phi(z)$ также удовлетворяет граничным условиям вида (17.17), получающимся из граничного условия (17.16) на L_0 при помощи условий автоморфности.

Приступая к решению задачи о скачке, выпишем граничные условия на всех линиях L_k, $k=0, 1, \ldots, n-1$, предполагая ради простоты, что все преобразования $\omega_k(z)$ переводят L_0 в L_k с сохранением направления обхода:

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=g\left[\omega_k^{-1}(t)\right],\ t\in L_k,\ k=0, 1, \ldots, n-1. \quad (18.1)$$

Не заботясь пока об автоморфности, рассматриваем эту задачу как обычную задачу о скачке для совокупности непересекающихся между собой линий $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$. Частным решением этой задачи, исчезающим на бесконечности, является функция

$$\Phi_1(z)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{g\left[\omega_j^{-1}(\tau)\right]}{\tau-z}\,d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}g(\tau)\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\omega_j'(\tau)}{\omega_j(\tau)-z}\,d\tau.$$

Запишем ядро последнего интеграла

$$A(z, \tau)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\omega_j'(\tau)}{\omega_j(\tau)-z} \quad (18.2)$$

в более удобной для нас форме. Для этого из соотношения

$$\omega_j(\tau)-\omega_j(z)=\frac{\Delta_j(\tau-z)}{(\gamma_j\tau+\delta_j)(\gamma_j z+\delta_j)}$$

находим

$$\frac{\omega_j'(\tau)}{\omega_j(\tau)-\omega_j(z)}=\frac{1}{\tau-z}-\frac{\gamma_j}{\gamma_j\tau+\delta_j}, \quad (18.3)$$

откуда путем замены z на $\omega_j^{-1}(z)$ получаем

$$\frac{\omega_j'(\tau)}{\omega_j(\tau)-z}=\frac{1}{\tau-\omega_j^{-1}(z)}-\frac{\gamma_j}{\gamma_j\tau+\delta_j}.$$

Так как

$$\frac{\gamma_j}{\gamma_j\tau+\delta_j}=\frac{1}{\tau-\omega_j^{-1}(\infty)},$$

то

$$\frac{\omega_j'(\tau)}{\omega_j(\tau)-z}=\frac{1}{\tau-\omega_j^{-1}(z)}-\frac{1}{\tau-\omega_j^{-1}(\infty)}. \quad (18.4)$$

Подставим эти выражения в правую часть формулы (18.2). При этом учтем, что функция $\omega_j^{-1}(z)$ есть одно из преобразований нашей группы и совпадает, допустим, с функцией $\omega_k(z)$. Тогда будем иметь

$$A(z, \tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{\tau - \omega_k(z)} - \frac{1}{\tau - \omega_k(\infty)} \right\}. \tag{18.5}$$

Из последнего представления видно, что функция $A(z, \tau)$ по переменному z автоморфна относительно преобразований группы H; в точке $z = \infty$ и в конгруэнтных ей точках $\omega_k(\infty)$ обращается в нуль; линия L_0 и все линии L_k, $k = 1, \ldots, n-1$ являются для $A(z, \tau)$ полярными линиями первого порядка. Поэтому интеграл

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g(\tau) A(z, \tau)\, d\tau, \tag{18.6}$$

представляющий собой автоморфную функцию, обладает в фундаментальной области R_0 всеми свойствами интеграла типа Коши. В частности, его граничные значения в точках линии L_0, отличных от концевых, вычисляются по формулам

$$\Phi_1^{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} g(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g(\tau) A(t, \tau)\, d\tau. \tag{18.7}$$

Это сразу следует из представления $A(z, \tau)$ вблизи L_0 в виде

$$A(z, \tau) = \frac{1}{\tau - z} + B(z, \tau),$$

где функция $B(z, \tau)$ при $z \in L_0$ непрерывна. Такие же свойства имеет интеграл (18.6) вблизи линий L_k, $k = 1, \ldots, n-1$. Убедиться в этом можно непосредственной проверкой, опираясь на формулы (18.3) и (18.4).

Интеграл (18.6) мы будем называть *автоморфным аналогом интеграла типа Коши в случае конечной группы*, а ядро этого интеграла $A(z, \tau)$, выраженное через преобразования группы по формуле (18.5), — *автоморфным аналогом ядра Коши*.

Заметим, что свойство обращения в нуль в точке $z = \infty$ не является существенным для интеграла $\Phi_1(z)$ и ядра $A(z, \tau)$. Если взять

$$\Phi_0(z) = \Phi_1(z) - \Phi_1(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g(\tau) A_0(z, \tau)\, d\tau, \tag{18.8}$$

$$A_0(z, \tau) = A(z, \tau) - A(z_0, \tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{\tau - \omega_k(z)} - \frac{1}{\tau - \omega_k(z_0)} \right\}, \tag{18.9}$$

обращающиеся в нуль в точке $z_0 \in R_0$, $z_0 \neq \infty$, то эти функции по z автоморфны и при переходе через линию L_0 (и линии L_k) ведут себя также, как функции $\Phi_1(z)$ и $A(z, \tau)$. Поэтому $\Phi_0(z)$ и $A_0(z, \tau)$ можно также брать в качестве аналогов интеграла типа Коши и ядра Коши соответственно.

2°. Займемся теперь задачей построения простой автоморфной функции группы H, имеющей в области R_0 заданные полюсы.

Заметим, что простая автоморфная функция, принадлежащая любой конечной группе, как однозначная аналитическая функция, не имеющая в расширенной плоскости других особенностей, кроме конечного числа полюсов, является рациональной функцией. Казалось бы проще всего при известных полюсах записать эту рациональную функцию в виде суммы простейших дробей и подбором их коэффициентов обеспечить выполнение условий автоморфности. Однако, этот путь приводит к сложным, трудно обозримым вычислениям и мы при решении поставленной задачи последуем указанию предыдущего параграфа и используем в качестве производящей функции полученное нами ядро $A(z, \tau)$.

Построим сначала простую автоморфную функцию $\psi(z)$ с единственным полюсом порядка ν в точке $z = z_0 \in R_0$.

Допустим, что $z_0 \neq \infty$ и не является неподвижной точкой преобразований группы. Запишем разложение (17.23) нашего ядра $A(z, \tau)$ в окрестности $\tau = z_0$. Коэффициенты этого разложения при помощи представления (18.5) легко вычисляются:

$$\xi_j(z, z_0) = \frac{1}{(z - z_0)^{j+1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{[\omega_k(z) - z_0]^{j+1}} - \frac{1}{[\omega_k(\infty) - z_0]^{j+1}} \right\}, \quad (18.10)$$

$$j = 0, 1, \ldots$$

Мы видим, что они представляют собой простые автоморфные функции, имеющие в фундаментальной области R_0 единственный полюс z_0 порядка $j+1$ $(j = 0, 1, \ldots)$. В бесконечно удаленной точке все они обращаются в нуль.

Запишем главную часть разложения Лорана функции $\psi(z)$ в полюсе z_0 в виде

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{c_j}{(z - z_0)^j}. \quad (18.11)$$

Из свойств $\xi_j(z, z_0)$ следует, что автоморфная функция

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{\nu} c_j \xi_{j-1}(z, z_0)$$

имеет в точке z_0 полюс порядка ν с той же главной частью (18.11). Значит, разность $\psi(z)-\varphi(z)$ будет постоянной, как простая автоморфная функция, не имеющая полюсов, и мы получаем

$$\psi(z)=C+\sum_{j=1}^{\nu} c_j \xi_{j-1}(z, z_0), \tag{18.12}$$

где C — некоторая постоянная.

Если $z_0=\infty$, но по-прежнему не является неподвижной точкой группы, то из разложения $A(z, \tau)$ в окрестности $\tau=\infty$

$$A(z, \tau)=\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j(z, \infty)/\tau^{j+1}$$

имеем

$$\xi_j(z, \infty)=z^j+\sum_{k=1}^{n-1}\{[\omega_k(z)]^j-[\omega_k(\infty)]^j\}. \tag{18.13}$$

Значит, у нашей функции

$$\psi(z)=c_\nu z^\nu+c_{\nu-1} z^{\nu-1}+\ldots+c_1 z+c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\ldots$$

и у автоморфной функции

$$\varphi(z)=\sum_{j=1}^{\nu} c_j \xi_j(z, \infty)$$

на бесконечности одинаковые главные части, и эти функции отличаются друг от друга лишь постоянным слагаемым. Таким образом, в этом случае

$$\psi(z)=C+\sum_{j=1}^{\nu} c_j \xi_j(z, \infty). \tag{18.14}$$

Когда полюс z_0 является неподвижной точкой эллиптического преобразования периода p, то при определении главной части функции $\psi(z)$ мы должны ввести переменное t при помощи одного из равенств (17.7) и определить главную часть преобразованной функции в точке $t=0$

$$\frac{c_1}{t}+\frac{c_2}{t^2}+\ldots+\frac{c_\nu}{t^\nu}.$$

Отсюда, возвращаясь к переменному z, получим главную часть $\psi(z)$ в z_0

$$\begin{gathered}\frac{c_1}{(z-z_0)^p}+\frac{c_2}{(z-z_0)^{2p}}+\ldots+\frac{c_\nu}{(z-z_0)^{\nu p}}, \quad z_0 \neq \infty, \\ c_1 z^p+c_2 z^{2p}+\ldots+c_\nu z^{\nu p}, \quad z_0=\infty.\end{gathered} \tag{18.15}$$

Используя те же функции (18.10) и (18.13), получим:

$$\psi(z) = C + \sum_{j=1}^{\nu} c_j \xi_{jp-1}(z, z_0), \; z_0 \neq \infty,$$
$$\psi(z) = C + \sum_{j=1}^{\nu} c_j \xi_{jp}(z, \infty), \; z_0 = \infty. \tag{18.16}$$

При этом надо учитывать, что в случае $z_0 = \infty$ в выражении ядра (18.5) и в формулах (18.13), определяющих $\xi_j(z, \infty)$, отсутствуют члены, содержащие $\omega_k(\infty) = \infty$.

На основании изложенного легко получается следующий общий результат.

Теорема 18.1. *Пусть $\psi(z)$ есть простая автоморфная функция с полюсами $z_1, z_2, \ldots, z_m$ порядков $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ в обыкновенных точках области R_0 и полюсом порядка ν_0 в неподвижной точке z_0 эллиптического преобразования периода p. Тогда*

$$\psi(z) = C + \sum_{q=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{\nu_q} c_{j,q} \xi_{j-1}(z, z_q) + \sum_{j=1}^{\nu_m} c_{j,m} \xi_j(z, \infty) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{\nu_0} c_{j,0} \xi_{jp-1}(z, z_0), \; z_m = \infty, \; z_0 \neq \infty, \tag{18.17}$$

$$\psi(z) = C + \sum_{q=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_q} c_{j,q} \xi_{j-1}(z, z_q) + \sum_{j=1}^{\nu_0} c_j \xi_{jp}(z, \infty), \; z_0 = \infty, \tag{18.18}$$

где простые автоморфные функции $\xi_j(z, z_q)$ и $\xi_j(z, \infty)$ определяются по формулам вида (18.10) *и* (18.13) *соответственно.*

При построении простой автоморфной функции с одним полюсом в фундаментальной области мы получили попутно и простую автоморфную функцию $f(z)$ с единственным в z_0 простым полюсом, называемую основным инвариантом группы. Когда полюс находится в обыкновенной точке группы z_0, то

$$f(z) = \xi_0(z, z_0) = \frac{1}{z - z_0} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{\omega_k(z) - z_0} - \frac{1}{\omega_k(\infty) - z_0} \right\}, \; z_0 \neq \infty,$$

$$f(z) = \xi_1(z, \infty) = z + \sum_{k=1}^{n-1} \{\omega_k(z) - \omega_k(\infty)\}, \; z_0 = \infty. \tag{18.19}$$

Когда z_0 — неподвижная точка порядка p, то

$$pf(z) = \xi_{p-1}(z, z_0) = (z - z_0)^{-p} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \{[\omega_k(z) - z_0]^{-p} - [\omega_k(\infty) - z_0]^{-p}\}, \; z_0 \neq \infty,$$

$$pf(z)=\xi_p(z,\ \infty)=z^p+\sum_{k=1}\{[\omega_k(z)]^p-[\omega_k(\infty)]^p\},\ z_0=\infty. \tag{18.20}$$

Обратим внимание на последний случай, когда $f(z)$ определяется одной из формул (18.20). Легко видеть, что в этом случае $\xi_j(z,\ z_0)\equiv\text{const}$ при всех $j<p-1$ и $\xi_j(z,\ \infty)\equiv\text{const}$ при $j<p$, как простая автоморфная функция, не имеющая полюсов.

Например, у двучленной циклической группы $\omega_0\equiv z$, $\omega_1\equiv 2-z$ неподвижными точками являются $z_0=1$ и $z_0'=\infty$. Здесь

$$\xi_0(z,\ z_0)=(\omega_0-1)^{-1}+(\omega_1-1)^{-1}\equiv 0,$$

$$\xi_1(z,\ z_0')=\omega_0+\omega_1=2$$

и основными инвариантами группы с полюсами в точках $z_0=1$ и $z_0'=\infty$ соответственно будут функции

$$f(z)=\frac{1}{2}\xi_1(z,z_0)=\frac{1}{2}[(\omega_0-1)^{-2}+(\omega_1-1)^{-2}]=(z-1)^{-2},$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\xi_2(z,z_0')=\frac{1}{2}(\omega_0^2+\omega_1^2)=(z-1)^2+1.$$

В случае p-членной группы вращений

$$\omega_k(z)=ze^{2\pi ik/p},\ k=0,\ 1,\dots,\ p-1,$$

неподвижными точками порядка p являются $z_0=0$ и $z_0'=\infty$. Здесь

$$\xi_j(z,\ z_0)=\sum_{k=0}^{p-1}[\omega_k(z)]^{-(j+1)}=\frac{1}{z^{j+1}}\sum_{k=0}^{p-1}e^{-2\pi ik(j+1)/p}=$$

$$=\begin{cases}0, & j<p-1,\\ pz^{-p}, & j=p-1,\end{cases}$$

$$\xi_j(z,\ z_0')=\sum_{k=0}^{p-1}[\omega_k(z)]^j=z^j\sum_{k=0}^{p-1}e^{2\pi ikj/p}=\begin{cases}0, & j<p,\\ pz^p, & j=p,\end{cases}$$

и основными инвариантами с простыми полюсами в $z_0=0$ и $z_0'=\infty$ являются соответственно $f(z)=z^{-p}$ и $f(z)=z^p$.

В конце предыдущего параграфа мы отмечали, что любая простая автоморфная функция является рациональной функцией от основного инварианта. Получим в качестве примера связь между ядрами $A(z,\ \tau)$ и $A_0(z,\ \tau)$ и между основным инвариантом $f(z)$.

Допустим для простоты, что полюсом $f(z)$ является обыкновенная точка группы z_0, так что $f(z)$ определяется одной из формул (18.19). Рассмотрим функцию

$$\frac{f'(\tau)}{f(\tau)-f(z)}=\frac{d}{d\tau}\ln[f(\tau)-f(z)]. \qquad (18.21)$$

По переменному τ это есть рациональная функция (не автоморфная) с простыми полюсами в нулях разности $f(\tau)-f(z)$ и в полюсах $f(\tau)$. Нулями $f(\tau)-f(z)$ являются точки $\tau=\omega_k(z)$, $k=0, 1, \ldots, n-1$; в них функция (18.21) имеет вычеты $+1$. Полюсами $f(\tau)$ являются $\tau=\omega_k(z_0)$, $k=0, 1, \ldots, n-1$; в них вычеты функции (18.21) равны -1. Значит, функцию (18.21) можно представить в виде суммы простейших дробей

$$\frac{f'(\tau)}{f(\tau)-f(z)}=\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{1}{\tau-\omega_k(z)}-\frac{1}{\tau-\omega_k(z_0)}\right\}.$$

Сравнивая это равенство с формулами (18.5) и (18.9), видим, что

$$\frac{f'(\tau)}{f(\tau)-f(z)}=\begin{cases} A_0(z, \tau), & z_0\neq\infty, \\ A(z, \tau), & z_0=\infty. \end{cases} \qquad (18.22)$$

Справедливость формул (18.22) легко проверяется и в том случае, когда полюс z_0 находится в неподвижной точке группы и $f(z)$ определяется формулами (18.20).

Формулы (18.22) позволяют выразить любую простую автоморфную функцию, принадлежащую конечной группе, через основной инвариант $f(z)$.

Если взять функцию $-\xi_j(z, z_*)$, где z_* — обыкновенная точка группы и $z_*\neq z_0$, то, как коэффициент при $(\tau-z_*)^j$ в разложении $A(z, \tau)$ в ряд Тейлора в окрестности $\tau=z_0$, эту функцию можно представить в виде

$$\xi_j(z, z_*)=-\frac{d^j}{d\tau^j}[A(z, \tau)]_{\tau=z_*}=$$

$$=\frac{d^j}{d\tau^j}\left[\frac{f'(\tau)}{f(z)-f(\tau)}\right]_{\tau=z_*}=\frac{P_j[f(z)]}{[f(z)-f(z_*)]^{j+1}}, \qquad (18.23)$$

где $P_j(f)$ — полином степени j с вполне определенными коэффициентами. Если же $z_*=z_0$, то

$$\begin{aligned} &\xi_{j-1}(z, z_0)=P_j[f(z)], \quad z_0\neq\infty, \\ &\xi_j(z, z_0)=P_j[f(z)], \quad z_0=\infty. \end{aligned} \qquad (18.24)$$

Коэффициенты полиномов определяются здесь сравнением главных частей в z_0 в этих равенствах.

Из формул (18.20) следует, что соотношение (18.23) остается справедливым и в том случае, если полюсом $f(z)$ является неподвижная точка группы z_0, а вместо соотношения (18.24) имеем

$$\begin{aligned} \xi_{jp-1}(z, z_0) &= P_j[f(z)], \quad z_0 \neq \infty, \\ \xi_{jp}(z, z_0) &= P_j[f(z)], \quad z_0 = \infty. \end{aligned} \tag{18.25}$$

Отсюда вытекают:

Теорема 18.2. *Если $\psi(z)$ есть простая автоморфная функция с единственным полюсом z_* порядка ν в R_0, то*

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{P_\nu[f(z)]}{[f(z)-f(z_*)]^\nu}, \quad z_* \neq z_0, \\ \psi(z) &= P_\nu[f(z)], \qquad z_* = z_0, \end{aligned} \tag{18.26}$$

где z_0 — полюс $f(z)$ в R_0, а $P_\nu(f)$ — некоторый полином степени ν.

Теорема 18.3. *Пусть $\psi(z)$ есть простая автоморфная функция с полюсами $z_1, z_2, \ldots, z_m$ порядков $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ соответственно в фундаментальной области R_0 и $f(z)$ — основной инвариант группы с полюсом z_0. Тогда*

$$\psi(z) = \frac{P_\nu[f(z)]}{\prod\limits_{j=1}^{m} [f(z)-f(z_j)]^{\nu_j}}, \quad \nu = \nu_1 + \ldots + \nu_m, \tag{18.27}$$

если ни одна из точек $z_1, \ldots, z_m$ не совпадает с z_0, и

$$\psi(z) = \frac{P_\nu[f(z)]}{\prod\limits_{j=1}^{m-1} [f(z)-f(z_j)]^{\nu_j}}, \tag{18.28}$$

если $z_m = z_0$.

Представления (18.26) получаются на основании формул (18.23)—(18.25) из представлений (18.12), (18.14) и (18.16), а формулы (18.27) и (18.28) из формул (18.17) и (18.18).

3°. Чтобы найти общее решение задачи (18.1), рассмотрим разность $\psi(z) = \Phi(z) - \Phi_1(z)$ (или $\Phi(z) - \Phi_0(z)$). Так как обе автоморфные функции $\Phi(z)$ и $\Phi_1(z)$ (или $\Phi(z)$ и $\Phi_0(z)$) при переходе через линию L_0 имеют одинаковый скачок $g(t)$, то на линии L_0 функция $\psi(z)$ имеет равные граничные значения $\psi^+(t) - \psi^-(t)$ и, значит, $\psi(z)$ является простой автоморфной функцией группы, полная система полюсов которой в фундаментальной области R_0 совпадает с заданными полюсами искомого решения. Пришли к только что рассмотренной задаче построения простой автоморфной функции группы, имеющей в области R_0 полюсы $z_1, \dots, z_m$ порядков $\nu_1, \dots, \nu_m$ соответственно. Когда все точки $z_1, \dots, z_m$ являются обыкновенными точками группы, расположенными в R_0 на конечном расстоянии, получаем

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g(\tau) A(z, \tau) d\tau + C + \sum_{q=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_q} c_{j,q} \xi_{j-1}(z, z_q), \qquad (18.29)$$

где C и c_{jq} $(j = 0, 1, \dots, \nu_q - 1;\ q = 1, \dots, m)$ — произвольные постоянные. Если один из полюсов, например z_k, будет неподвижной точкой группы порядка p, то в формуле (18.29) $\xi_{j-1}(z, z_k)$ надо заменить на $\xi_{jp-1}(z, z_k)$. Если же $z_k = \infty$, то $\xi_{j-1}(z, z_k)$ заменяется на $\xi_j(z, \infty)$ или $\xi_{jp}(z, \infty)$ в зависимости от того, будет ли бесконечно удаленная точка обыкновенной или неподвижной точкой группы.

Если простые автоморфные функции выражать не через преобразования группы, а через основной инвариант, то вместо формулы (18.29) будем иметь

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g(\tau) \frac{f'(\tau)\, d\tau}{f(\tau) - f(z)} + \frac{P_\nu [f(z)]}{\prod\limits_{q=1}^{m} [f(z) - f(z_q)]^{\nu_q}}, \qquad (18.30)$$

$$\nu = \nu_1 + \dots + \nu_m.$$

Это в случае, когда ни один из полюсов $z_1, \dots, z_m$ не совпадает с полюсом z_0 основного инварианта $f(z)$. Если же z_k, например, совпадает с z_0, то в знаменателе второго слагаемого формулы (18.30) выражение $[f(z) - f(z_k)]^{\nu_k}$ отсутствует. Если же все точки $z_1, \dots, z_m$ совпадут с z_0, то формула (18.30) примет вид

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g(\tau) \frac{f'(\tau)\, d\tau}{f(\tau) - f(z)} + P_\nu [f(z)] \qquad (18.31)$$

и определит все решения задачи (18.1), имеющие в точке z_0 полюс порядка не выше ν. Решение, исчезающее в точке z_0, единственно и определяется той же формулой (18.31), если положить в ней $P_\nu(f) \equiv 0$.

Итогом изложенного является

Теорема 18.4. *Задача определения автоморфной кусочно-голоморфной функции, принадлежащей конечной группе и имеющей в фундаментальной области R_0 порядки не выше ν_j в z_j, по заданному скачку $g(t)$ класса H_0 на гладкой линии L_0, лежащей в области R_0, имеет $\nu + 1$ линейно-независимых решений. Все они определяются формулами* (18.29) *или* (18.30) *и* (18.31).

4°. Решение однородной задачи

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t),\ t\in L_0\in R_0, \tag{18.32}$$

проведем лишь для того случая, когда линия L_0 состоит из замкнутых контуров $l_1, \ldots, l_r$. Из-за отсутствия исключительных точек на L_0 решение задачи отыскиваем в классе кусочно-голоморфных функций, имеющих непрерывные граничные значения во всех точках линии L_0.

На каждом из контуров l_j выделим точку t_j и примем ее за начало обхода. Пусть $\varkappa_j$ — индекс функции $G(t)$ относительно l_j. Фиксируем на каждом l_j какое-либо одно значение $\ln G_j(t)$. На всей линии L_0 получим таким путем функцию $\ln G(t)$, непрерывную всюду, кроме точек $t_j (j=1, \ldots, r)$, где она претерпевает разрывы первого рода со скачками, равными

$$2\pi i\varkappa_j=\ln G(t_j-0)-\ln G(t_j+0). \tag{18.33}$$

Положим

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} A(z, \tau)\ln G(\tau)\,d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{\ln G(\tau)f'(\tau)}{f(\tau)-f(z)}\,d\tau. \tag{18.34}$$

Пользуясь формулами (18.7), нетрудно убедиться, что автоморфная кусочно-голоморфная функция $\exp\Gamma(z)$ удовлетворяет краевому условию (18.32). Однако эта функция в общем случае не будет решением однородной задачи, так как для нее может оказаться нарушенным условие существования непрерывных граничных значений в точках $t_j\in L_0$.

Чтобы убедиться в этом, выразим интеграл $\Gamma(z)$ с разрывной в точках t_j $(j=1, \ldots, r)$ плотностью через такой же интеграл

$$\Gamma_*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} A(z, \tau)\ln G_*(\tau)\,d\tau \tag{18.34}$$

с непрерывной всюду на L_0 плотностью

$$\ln G_*(t)=\ln G(t)-\varkappa_j\ln(t-z_j'),\ t\in l_j,\ j=1, \ldots, r, \tag{18.35}$$

где, как в пункте 1° § 6, под $\ln(t-z_j')$ понимается предельное значение из области D_j^+ (внутренность l_j) вполне определенной ветви логарифмической функции $\ln(z-z_j')$, $z_j'\in D_j^+$, однозначной в комплексной плоскости с разрезом (z_j', t_j, ∞). Имеем

$$\Gamma(z)=\Gamma_*(z)+\sum_{j=1}^{r}\frac{\varkappa_j}{2\pi i}\int\limits_{l_j} A(z, \tau)\ln(\tau-z_j')\,d\tau. \tag{18.36}$$

Чтобы вычислить интеграл

$$I_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_j} A(z,\ \tau)\ln(\tau-z_j')\,d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_j}\frac{\ln(\tau-z_j')}{\tau-z}\,d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{l_j}\frac{\ln(\tau-z_j')}{\tau-\omega_k(z)}\,d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_{l_j}\frac{\ln(\tau-z_j')}{\tau-\omega_k(\infty)}\,d\tau\right\},\qquad(18.37)$$

используем тот же метод, каким мы вычисляли интеграл типа Коши с плотностью $\psi_k(t)$ в п. 1° § 6. Берем интеграл по вспомогательному замкнутому контуру λ_j, состоящему из l_j, берегов разреза $(z_j',\ t_j)$ и малой окружности с центром z_j', целиком лежащей в D_j^+. По интегральной формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_j}\frac{\ln(\tau-z_j')}{\tau-z}\,d\tau=\begin{cases}\ln(z-z_j'), & z\in D_j^+,\\ 0, & z\overline{\in}D_j^+,\end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_j}\frac{\ln(\tau-z_j')}{\tau-\omega_k(z)}\,d\tau=\begin{cases}\ln[\omega_k(z)-z_j'], & z\in\omega_k^{-1}(D_j^+),\\ 0, & z\overline{\in}\omega_k^{-1}(D_j^+),\end{cases}$$

и по интегральной теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_j}\frac{\ln(\tau-z_j')}{\tau-\omega_k(\infty)}\,d\tau=0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l_j}\frac{\ln(\tau-z_j')}{\tau-z}\,d\tau=\int_{z_j'}^{t_j}\frac{d\tau}{\tau-z}+\begin{cases}\ln(z-z_j'), & z\in D_j^+,\\ 0, & z\overline{\in}D_j^+,\end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l_j}\frac{\ln(\tau-z_j')}{\tau-\omega_k(z)}\,d\tau=\int_{z_j'}^{t_j}\frac{d\tau}{\tau-\omega_k(z)}+\begin{cases}\ln[\omega_k(z)-z_j'], & z\in\omega_k^{-1}(D_j^+),\\ 0, & z\overline{\in}\omega_k^{-1}(D_j^+),\end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l_j}\frac{\ln(\tau-z_j')}{\tau-\omega_k(\infty)}\,d\tau=\int_{z_j'}^{t_j}\frac{d\tau}{\tau-\omega_k(\infty)}\,.$$

Подставляя эти интегралы в правую часть равенства (18.37), находим

$$I_j(z) = \int_{z_j'}^{t_j} A(z, \tau)\, d\tau + \ln F_j(z) =$$

$$= \ln \frac{f(z) - f(t_j)}{f(z) - f(z_j')} + \ln F_j(z), \tag{18.38}$$

где $f(z)$ — основной инвариант группы с полюсом в некоторой точке $z_0 \in R_0$, отличной от точек z_j' и t_j $(j = 1, \ldots, r)$, а $F_j(z)$ — кусочно-голоморфная функция, определенная равенствами

$$F_j(z) = \begin{cases} \omega_k(z) - z_j', & z \in \omega_k^{-1}(D_j^+), \\ 1, & z \overline{\in} \omega_k^{-1}(D_j^+), \; k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Подставим значения (18.38) в формулу (18.36). Получаем

$$\Gamma(z) = \Gamma_*(z) + \ln F(z) + \sum_{j=1}^{r} \varkappa_j \ln \frac{f(z) - f(t_j)}{f(z) - f(z_j')}, \tag{18.39}$$

где

$$F(z) = \prod_{j=1}^{r} F_j^{\varkappa_j}(z) = \begin{cases} [\omega_k(z) - z_j']^{\varkappa_j}, & z \in \omega_k^{-1}(D_j^+), \\ 1, & z \overline{\in} \omega_k^{-1}(D_j^+), \end{cases} \tag{18.40}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1; \; j = 1, 2, \ldots, r).$$

Из формулы (18.39) видно, что автоморфный аналог интеграла типа Коши $\Gamma(z)$ с плотностью, имеющей в точках $t_j \in L_0$ разрывы первого рода, имеет в этих точках логарифмические особенности. Все эти особенности в формуле (18.39) выделены одновременно в виде отдельного слагаемого по аналогии с обычным интегралом типа Коши (6.5).

При помощи формулы (18.39) функцию $\exp \Gamma(z)$ можно записать в виде

$$e^{\Gamma(z)} = F(z)\, e^{\Gamma_*(z)} \prod_{j=1}^{r} \left[\frac{f(z) - f(t_j)}{f(z) - f(z_j')} \right]^{\varkappa_j}, \tag{18.41}$$

откуда видно, что в тех точках t_j, где $\varkappa_j < 0$, граничные значения этой функции обращаются в бесконечность.

Если обе части равенства (18.41) умножим на произведение

$$\prod_{j=1}^{r} [f(z) - f(t_j)]^{-\varkappa_j},$$

то получим автоморфную каноническую функцию однородной задачи

$$X(z) = e^{\Gamma(z)} \prod_{j=1}^{r} [f(z) - f(t_j)]^{-\varkappa_j} =$$

$$= F(z)\, e^{\Gamma_*(z)} \prod_{j=1}^{r} [f(z) - f(z_j')]^{-\varkappa_j}, \qquad (18.42)$$

обладающую следующими свойствами:

1) она имеет всюду на L_0 непрерывные по Гёльдеру граничные значения $X^+(t)$ и $X^-(t)$, нигде не обращающиеся в нуль и удовлетворяющие граничному условию (18.32)

$$X^+(t) = G(t)\, X^-(t); \qquad (18.43)$$

2) во всех точках $z \in R_0$, $z \overline{\in} L_0$ она имеет нулевой порядок, кроме, может быть, точки z_0 — полюса основного инварианта, где $X(z)$ имеет порядок $(-\varkappa)$, $\varkappa = \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_r$: нуль или полюс порядка $|\varkappa|$ в зависимости от того, будет ли $\varkappa > 0$ или $\varkappa < 0$.

Порядок $X(z)$ в фундаментальной области, взятый со знаком минус, то есть число $\varkappa$, будем называть индексом задачи (18.32).

При помощи канонической функции $X(z)$ нетрудно получить общее решение однородной задачи. Из краевого условия (18.43) находим $G(t) = X^+(t)/X^-(t)$ и подставляем в условия (18.32). Получаем

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}, \quad t \in L_0.$$

Значит, отношение $\Phi(z)/X(z)$ есть простая автоморфная функция, имеющая в области R_0 полюсы порядков $\nu_1, \ldots, \nu_m$ в полюсах $z_1, \ldots, z_m$ искомой функции $\Phi(z)$ и при $\varkappa > 0$ полюс порядка $\varkappa$ в точке z_0. Функцию $\Phi(z)/X(z)$ мы можем записать в двух формах: либо через функции $\xi_j(z, z_q)$, либо через основной инвариант $f(z)$, откуда получим два представления общего решения однородной задачи

$$\Phi(z) = X(z)\left\{C + \sum_{q=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_q} c_{j,q}\, \xi_{j-1}(z, z_q) + \sum_{j=1}^{\varkappa} c_j\, \xi_{j-1}(z, z_0)\right\}, \qquad (18.44)$$

$$\Phi(z) = X(z)\, P_{\varkappa+\nu}[f(z)] \prod_{q=1}^{m} [f(z) - f(z_q)]^{-\nu_q}. \qquad (18.45)$$

Оно содержит $\varkappa + \nu + 1$ произвольных постоянных.

Если $\varkappa < 0$ и $\varkappa + \nu \geqslant 0$, то однородная задача также разрешима и ее общее решение определяется теми же формулами (18.44) и (18.45), только в первой из них надо положить $c_1 = \ldots = c_\varkappa = 0$. При $\varkappa + \nu < 0$ решений, отличных от нуля, однородная задача не имеет, ибо в этом случае $\Phi(z)/X(z) \equiv 0$ как простая автоморфная функция, имеющая в области R_0 больше нулей, чем полюсов.

При решении многих прикладных задач приходится отыскивать регулярные всюду в области R_0 решения однородной задачи. Из изложенного вытекает

Теорема 18.5. *Разрешимость и число решений однородной задачи Римана в классе регулярных кусочно-голоморфных автоморфных функций зависит только от величины индекса $\varkappa$. При $\varkappa \geqslant 0$ задача имеет $\varkappa + 1$ линейно-независимых решений, все они определяются формулой*

$$\Phi(z) = X(z)\left\{C + \sum_{j=1}^{\varkappa} c_j \xi_{j-1}(z, z_0)\right\} = X(z) P_\varkappa [f(z)]. \qquad (18.46)$$

При $\varkappa < 0$ регулярных решений однородная задача не имеет.

5°. Рассматривая неоднородную задачу Римана (18.16), ограничимся лишь отысканием регулярных в фундаментальной области R_0 решений. Для этого воспользуемся канонической функцией (18.42) и перепишем краевое условие (17.16) следующим образом

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L_0. \qquad (18.47)$$

Значит $\Phi(z)/X(z)$ есть кусочно-голоморфная функция, имеющая на L_0 скачок, равный $g(t)/X^+(t)$, и конечный порядок $\varkappa$ в фундаментальной области R_0, а именно, полюс порядка $\varkappa$ в точке z_0 при $\varkappa > 0$. На основании изложенного в п. 3° получаем при $\varkappa \geqslant 0$ общее решение неоднородной задачи в таком виде

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} A(z, \tau)\, d\tau + X(z)\left\{C + \sum_{j=0}^{\varkappa-1} c_j \xi_j(z, z_0)\right\} =$$

$$= \frac{X(z)}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{f'(\tau)\, d\tau}{f(\tau) - f(z)} + X(z) P_\varkappa [f(z)]. \qquad (18.48)$$

При $\varkappa < 0$ отношение $\Phi(z)/X(z)$ обращается в нуль в точке z_0 и потому задача (18.47) имеет единственное решение

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} A_0(z, \tau)\, d\tau, \qquad (18.49)$$

откуда получаем

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}A_0(z,\ \tau)\,d\tau=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\ \frac{f'(\tau)\,d\tau}{f(\tau)-f(z)}\ . \tag{18.50}$$

В случае $z_0=\infty$ здесь вместо $A_0(z,\tau)$ надо поставить $A(z,\tau)$. Полученная функция $\Phi(z)$ в точке z_0 в общем случае имеет полюс порядка $-\varkappa-1$ и, следовательно, регулярным решением неоднородной задачи не является. Но если разложение функции (18.49) в окрестности z_0 начинается лишь с члена, содержащего $(z-z_0)^\varkappa$ при $z_0\neq\infty$ или $z^{-\varkappa}$ при $z_0=\infty$, то формула (18.50) определит единственное регулярное решение.

Чтобы получить разложение функции (18.49) вблизи z_0, разложим сначала по степеням $z-z_0$ ядро $A_0(z,\tau)=A(z,\tau)-A(z_0,\tau)$ или по степеням z^{-1} ядро $A(z,\tau)$. Для этого воспользуемся представлением ядра $A(z,\tau)$ в виде (18.2). Получим при $z_0\neq\infty$

$$A_0(z,\ \tau)=\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j(\tau,\ z_0)\ (z-z_0)^j,$$

$$\eta_j(\tau,\ z_0)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k'(\tau)}{[\omega_k(\tau)-z_0]^{j+1}}\ ,\ j=1,\,2,\,\dots, \tag{18.51}$$

а при $z_0=\infty$

$$A(z,\ \tau)=-\sum_{j=0}^{\infty}\eta_j(\tau,\ \infty)\,z^{-(j+1)},$$

$$\eta_j(\tau,\infty)=\sum_{k=0}^{n-1}[\omega_k(\tau)]^j\,\omega_k'(\tau),\ j=0,\,1,\dots. \tag{18.52}$$

На этом основании разложение функции (18.49) вблизи z_0 можно записать в таком виде

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}a_j(z-z_0)^j, & z_0\neq\infty,\\ \displaystyle\sum_{j=0}b_j z^{-(j+1)}, & z_0=\infty,\end{cases}$$

где

$$a_j=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\eta_j(\tau,\ z_0)\,d\tau,\quad b_j=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\eta_j(\tau,\ \infty)\,d\tau.$$

Если $a_1 = \ldots = a_{-\varkappa-1} = 0$ или $b_0 = b_1 = \ldots = b_{-\varkappa-2} = 0$, то есть если

$$\int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \eta_j(\tau, z_0)\, d\tau = 0, \quad j = 1, \ldots, -\varkappa - 1, \tag{18.53}$$

$$\int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \eta_j(\tau, \infty)\, d\tau = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 2, \tag{18.54}$$

то функция (18.50) будет решением неоднородной задачи.

Нами доказана

Теорема 18.6. *При $\varkappa \geqslant 0$ неоднородная задача Римана имеет $\varkappa + 1$ линейно-независимых регулярных в фундаментальной области R_0 решений. Все они определяются формулой* (18.48). *При $\varkappa < 0$ в общем случае неоднородная задача регулярных решений не имеет. Единственное регулярное решение* (18.50) *существует тогда и только тогда, когда $g(t)$ удовлетворяет $-\varkappa - 1$ дополнительным условиям* (18.53) *или* (18.54), *в которых функции $\eta_j(\tau, z_0)$ определяются формулами* (18.51) *или* (18.52) *соответственно.*

Функции $\eta_j(\tau, z_0)$ можно выразить через основной инвариант $f(z)$ и его производную. Тогда условия разрешимости (18.53) и (18.54) примут другую эквивалентную форму

$$\int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} [f(\tau)]^k f'(\tau)\, d\tau = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 2. \tag{18.55}$$

Убедиться в справедливости этого утверждения мы предоставляем самому читателю.

6°. Когда при построении канонической функции (18.42) мы убирали нули и бесконечности у функции $\exp \Gamma(z)$ в точках $t_j \in L_0$, то суммарный порядок $\exp \Gamma(z)$ в этих точках, равный $-\varkappa$, стал порядком $X(z)$ в точке z_0 — полюсе основного инварианта $f(z)$. Можно в качестве канонической функции использовать другую функцию, которая будет отличаться от функции (18.42) лишь тем, что отличный от нуля порядок она будет иметь в нескольких точках фундаментальной области R_0, при этом ее суммарный порядок в R_0 останется по-прежнему равным $-\varkappa$. Так, если обе части равенства (18.41) умножить на

$$\prod_{j=1}^{r} \left[\frac{f(z) - f(t_j)}{f(z) - f(z_j')} \right]^{-\varkappa_j} = \exp\left(-\sum_{j=1}^{r} \varkappa_j \int_{z_j'}^{t_j} A(z, \tau)\, d\tau \right),$$

то получим функцию

$$X_1(z) = e^{\Gamma(z)} \prod_{j=1}^{r} \left[\frac{f(z) - f(t_j)}{f(z) - f(z_j')} \right]^{-\varkappa_j} = e^{\Gamma_*(z)} F(z), \qquad (18.56)$$

имеющую порядок $-\varkappa_j$ в точках $z_j' \in D_j^+$ $(j = 1, \ldots, r)$. Это сразу следует из формул (18.40), определяющих функцию $F(z)$.

Проследим за построением общего регулярного в R_0 решения задачи Римана при помощи функции (17.16).

Приводим краевое условие (17.16) к виду (18.47), где вместо $X(z)$ будет стоять $X_1(z)$. Отношение $\Phi(z)/X_1(z)$ в тех точках z_j', в которых $\varkappa_j > 0$, имеет полюсы порядка $\varkappa_j$, а в тех z_j', где $\varkappa_j < 0$, нули порядков $-\varkappa_j$. Предположим, что неотрицательными являются $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_s$ $(s \leqslant r)$, а $\varkappa_{s+1}, \ldots, \varkappa_r$ — отрицательными. Пусть $\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_s = \varkappa^+$, $\varkappa_{s+1} + \ldots + \varkappa_r = -\varkappa^-$, так что $\varkappa = \varkappa^+ - \varkappa^-$. Учитывая полюсы $\Phi(z)/X_1(z)$ в точках $z_1', \ldots, z_s'$, мы запишем эту функцию в виде

$$\frac{\Phi(z)}{X_1(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X_1^+(\tau)} A(z, \tau)\, d\tau + C + \sum_{q=1}^{s} \sum_{j=1}^{\varkappa_q} c_{j,q} \xi_{j-1}(z, z_q'). \qquad (18.57)$$

В это представление вошло $\varkappa^+ + 1$ постоянных C, $c_{j,q}$. Но среди этих постоянных не все будут произвольными, так как функция (18.57) должна в точках $z_{s+1}', \ldots, z_r'$ иметь нули порядков $-\varkappa_{s+1}, \ldots, -\varkappa_r$ соответственно. Это дает ровно $\varkappa^-$ линейных алгебраических неоднородных уравнений

$$\frac{d^p}{dz^p} \left[\frac{\Phi(z)}{X_1(z)} \right]_{z=z_j'} = 0, \quad \begin{array}{l} p = 0, 1, \ldots, -\varkappa_j - 1, \\ j = s+1, \ldots, r, \end{array} \qquad (18.58)$$

связывающих C и $c_{j,q}$.

Если $\varkappa > 0$, то $\varkappa^+ > \varkappa^-$ и всем уравнениям (18.58) можно удовлетворить подбором $\varkappa^-$ постоянных $c_{j,q}$; остальные $\varkappa^+ + 1 - \varkappa^- = \varkappa + 1$ постоянных останутся произвольными и задача будет иметь $\varkappa + 1$ регулярных линейно-независимых решений.

Если $\varkappa = 0$, то $\varkappa^+ = \varkappa^-$, так что число неизвестных в системе (18.58) лишь на единицу больше числа уравнений. Однородная система (18.58) соответствует задаче построения простой автоморфной функции $\psi(z)$, у которой известны все полюсы $z_j', \ldots, z_s'$ и все нули $z_{s+1}', \ldots, z_r'$ и их одинаковое число. Такая функция определяется с точностью до постоянного множителя и может быть записана в таком виде

$$\psi(z) = C_1 \prod_{j=1}^{r} \exp\left\{ \varkappa_j \int_{z_j'}^{z_*} A(z, \tau)\, d\tau \right\},$$

где z_* — произвольная точка области R_0. Значит, ранг системы (18.58) равен $\varkappa^-$ — числу уравнений, $\varkappa^-$ неизвестных, например, все $c_{j,q}$, можно выразить через C и задача Римана (однородная и неоднородная) имеет однопараметрическое семейство решений.

При $\varkappa < 0$ имеем $\varkappa^+ < \varkappa^-$. Возьмем любые $\varkappa^+ + 1$ уравнения системы (18.58), из них все $\varkappa^+ + 1$ постоянных C, $c_{j,q}$ определятся единственным образом, ибо соответствующая этим уравнениям однородная система представляет из себя условия обращения в нуль простой автоморфной функции

$$C + \sum_{q=1}^{s} \sum_{j=1}^{\varkappa_q - 1} c_{j,q} \xi_{j-1}(z, z_q'),$$

имеющей $\varkappa^+$ полюсов, в $\varkappa^+ + 1$ точках и отличных от нуля решений не имеет. Если эти найденные значения C, $c_{j,q}$ вставим в остальные $\varkappa^- - \varkappa^+ - 1 = -\varkappa - 1$ уравнений системы (18.58), то получим дополнительные условия, которым должна удовлетворять функция $g(t)$, чтобы неоднородная задача имела единственное регулярное решение.

Таким образом, если вместо канонической функции $X(z)$, определенной формулой (18.42), взять каноническую функцию $X_1(z)$, определенную формулой (18.56), то теоремы 18.5 и 18.6 останутся справедливыми, но при их доказательстве приходится проводить дополнительное исследование разрешимости системы (18.58).

7°. В заключение докажем такую теорему.

Теорема 18.7. *Решение задачи Римана для автоморфных функций не зависит от выбора основного инварианта.*

При доказательстве теоремы ограничимся рассмотрением регулярных решений задачи.

Пусть $f_1(z)$ есть простая автоморфная функция группы H, имеющая в фундаментальной области R_0 единственный и притом простой полюс в точке $z_1 \neq z_0$, не лежащей на линии L_0. Предположим, что принимая эту функцию за основной инвариант группы, мы получили решение неоднородной задачи Римана

$$\Phi_1(z) = \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X_1^+(\tau)} \frac{f_1'(\tau)\, d\tau}{f_1(\tau) - f_1(z)} + X_1(z)\, Q_\varkappa [f_1(z)], \qquad (18.59)$$

где

$$X_1(z) = e^{\Gamma_1(z)} \prod_{j=1}^{r} [f_1(z) - f_1(t_j)]^{-\varkappa_j},$$

$$\Gamma_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \ln G(\tau) \frac{f_1'(\tau)\, d\tau}{f_1(\tau) - f_1(z)}.$$

Покажем, что функция $\Phi_1(z)$, определенная этими формулами может отличаться от функции $\Phi(z)$, определенной формулами (18.48), (18.42), (18.33), лишь на функцию вида $X(z)\,Q_\varkappa^*[f(z)]$, где $Q_\varkappa^*$ — многочлен степени не выше $\varkappa$.

Рассуждаем следующим образом. Функция $f_1(z)$ как простая автоморфная функция с простым полюсом в фундаментальной области, будет дробно-линейной функцией от инварианта $f(z)$

$$f_1(z) = \frac{\alpha f(z) + \beta}{\gamma f(z) + \delta}, \quad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{18.60}$$

Отсюда находим

$$f_1(\tau) - f_1(z) = \frac{\Delta\,[f(\tau) - f(z)]}{[\gamma f(z) + \delta]\,[\gamma f(\tau) + \delta]}, \tag{18.61}$$

$$\frac{f_1'(\tau)}{f_1(\tau) - f_1(z)} = \frac{f'(\tau)}{f(\tau) - f(z)} - \frac{\gamma f'(\tau)}{\gamma f(\tau) + \delta} =$$

$$= \frac{\gamma f(z) + \delta}{\gamma f(\tau) + \delta}\,\frac{f'(\tau)}{f(\tau) - f(z)} \tag{18.62}$$

и, следовательно,

$$\Gamma_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \ln G(\tau)\,\frac{f'(\tau)\,d\tau}{f(\tau) - f(z)} - \frac{\gamma}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \ln G(\tau)\,\frac{f'(\tau)\,d\tau}{\gamma f(\tau) + \delta},$$

то есть

$$\Gamma_1(z) = \Gamma(z) + a, \tag{18.63}$$

где a — постоянная.

Учитывая (18.63) и (18.61), легко получаем

$$X_1(z) = M\,[\gamma f(z) + \delta]^\varkappa\,X(z), \tag{18.64}$$

где M — вполне определенная постоянная

$$M = e^a \Delta^{-\varkappa} \prod_{j=1}^{r} [\gamma f(t_j) + \delta]^{\varkappa_j}.$$

Обозначим для краткости первое слагаемое в правой части равенства (18.59) через I. На основании соотношений (18.62) и (18.64)

$$I = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\left[\frac{\gamma f(z) + \delta}{\gamma f(\tau) + \delta}\right]^{\varkappa+1} \frac{f'(\tau)\,d\tau}{f(\tau) - f(z)} =$$

$$= \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\frac{f'(\tau)\,d\tau}{f(\tau) - f(z)} +$$

$$+\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\left\{\left[\frac{\gamma f(z)+\delta}{\gamma f(\tau)+\delta}\right]^{\varkappa+1}-1\right\}\frac{f'(\tau)\,d\tau}{f(\tau)-f(z)},$$

и так как

$$\left[\frac{\gamma f(z)+\delta}{\gamma f(\tau)+\delta}\right]^{\varkappa+1}-1=\frac{[\gamma f(z)+\delta]^{\varkappa+1}-[\gamma f(\tau)+\delta]^{\varkappa+1}}{[\gamma f(\tau)+\delta]^{\varkappa+1}}=$$

$$=[f(\tau)-f(z)]\,K[\tau,\,f(z)],$$

где $K[\tau,\,f(z)]$ есть многочлен относительно $f(z)$ степени $\varkappa$, легко заключаем, что

$$I=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\frac{f'(\tau)\,d\tau}{f(\tau)-f(z)}+X(z)\,Q_\varkappa^*[f(z)],\tag{18.65}$$

где $Q_\varkappa^*$ — вполне определенный многочлен степени не выше $\varkappa$. Внося это выражение в правую часть формулы (18.59) и преобразуя на основании (18.60), (18.64) второе слагаемое в этой формуле, получим

$$\Phi_1(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\frac{f'(\tau)\,d\tau}{f(\tau)-f(z)}+X(z)\,Q_\varkappa^*[f(z)]+$$

$$+M\,[\gamma f(z)+\delta]^\varkappa\,X(z)\,Q_\varkappa\left[\frac{\alpha f(z)+\beta}{\gamma f(z)+\delta}\right]=$$

$$=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\frac{f'(\tau)\,d\tau}{f(\tau)-f(z)}+X(z)\,\widetilde{Q}_\varkappa[f(z)].$$

Сравнивая последнее выражение $\Phi_1(z)$ с представлением $\Phi(z$ по второй из формул (18.47), видим, что обе функции имеют одинаковую структуру и отличаются друг от друга лишь на некоторое регулярное решение однородной задачи. Теорема доказана.

§ 19. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ПОВТОРЯЕМОСТЬ ОСОБЫХ ЛИНИЙ

Будем рассматривать однопериодическую группу P_1 с основным периодом 2π

$$P_1:\omega_k(z)=z+2\pi k,\ \ k=0,\ \pm 1,\ \ldots$$

Через R_0 обозначим вертикальную полосу $0\leqslant \operatorname{Re} z<2\pi$, называемую часто *полосой периода.*

Бесконечно удаленная точка является неподвижной параболической точкой всех преобразований группы P_1. В области R_0 находятся две части ее окрестности: верхний конец полосы периода, где $\operatorname{Im} z=y>0$, и нижний конец полосы периода, где $y<0$. При изучении однопериодических с периодом 2π функций на верхнем конце полосы периода будем вводить параметр $t=e^{iz}=e^{ix}e^{-y}$ и исследовать преобразованную функцию вблизи $t=0$; на нижнем конце с той же целью будем полагать $t=e^{-iz}=e^{-ix}e^{y}$.

1°. Если бы мы стали отыскивать однопериодическую кусочно-голоморфную функцию по заданному скачку $g(t)$ на гладкой линии L_0, лежащей в полосе периода R_0, тем же самым приемом, что и в случае конечной группы, то вместо конечной суммы (18.2) получили бы бесконечный расходящийся ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\omega_k'(\tau)}{\omega_k(\tau)-z}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau-z+2k\pi}.$$

Из теории мероморфных функций известно, что этот ряд простейших дробей можно „подправить“ путем вычитания из общего члена его значения при $\tau=z$. В результате получится ряд

$$A(z,\ \tau)=\frac{1}{\tau-z}+{\sum_{k=-\infty}^{\infty}}'\left[\frac{1}{\tau-z+2k\pi}-\frac{1}{2\pi k}\right], \tag{19.1}$$

сходящийся абсолютно и равномерно при всех значениях аргумента $\tau-z\neq-2k\pi$, $k=0,\ \pm1,\dots$. Ряд легко суммируется и мы имеем

$$A(z,\tau)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\tau-z}{2}. \tag{19.2}$$

Полученная функция является периодической с периодом 2π и по z и по τ. Разность

$$B(z,\ \tau)=A(z,\ \tau)-\frac{1}{\tau-z}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\tau-z}{2}-\frac{1}{\tau-z}$$

при $z\to\tau$ имеет пределом нуль при любом τ. В самом деле, положим $u=(\tau-z)/2$; тогда

$$\lim_{z\to\tau}B(z,\ \tau)=\frac{1}{2}\lim_{u\to0}\left[\operatorname{ctg}u-\frac{1}{u}\right]=\frac{1}{2}\lim_{u\to0}\frac{u\cos u-\sin u}{u\sin u}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{u\to0}\frac{-u\sin u}{\sin u+u\cos u}=\frac{1}{2}\lim\frac{-\sin u-u\cos u}{2\cos u-u\sin u}=0.$$

Значит, в силу этого свойства и представления (19.1) можно написать

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\tau-z}{2}=\frac{1}{\tau-z}+B(z,\ \tau), \tag{19.3}$$

где функция $B(z,\ \tau)$ в точках линии L_0 по z непрерывна.

Из представления (19.3) следует, что функция $A(z, \tau)$, имеющая вид (19.1) или, что все равно, вид (19.2) является однопериодическим аналогом ядра Коши, а интеграл

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{L_0} g(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - z}{2} \, d\tau \tag{19.4}$$

однопериодическим аналогом интеграла типа Коши. Из представления (19.3) сразу получаются формулы Сохоцкого

$$\Phi_1^{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} g(t) + \frac{1}{4\pi i} \int_{L_0} g(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} \, d\tau. \tag{19.5}$$

Исследуем поведение интеграла (19.4) на концах полосы периода. Для этого запишем ядро интеграла в таком виде

$$\operatorname{ctg} \frac{\tau - z}{2} = i \, \frac{e^{i\tau} + e^{iz}}{e^{i\tau} - e^{iz}} \, . \tag{19.6}$$

Если положить здесь $t = e^{iz}$, то справа получим дробно-линейную функцию от t

$$\operatorname{ctg} \frac{\tau - z}{2} = i \, \frac{e^{i\tau} + t}{e^{i\tau} - t} \, ,$$

равную i при $t = 0$. Если же положить $t = e^{-iz}$, то получим функцию

$$\operatorname{ctg} \frac{\tau - z}{2} = i \, \frac{te^{i\tau} + 1}{te^{i\tau} - 1} \, ,$$

равную $-i$ при $t = 0$. Значит, на концах полосы периода имеем

$$\lim_{z \to x \pm i\infty} \operatorname{ctg} \frac{\tau - z}{2} = \pm i, \tag{19.7}$$

$$\lim_{z \to x \pm i\infty} \Phi_1(z) = \pm \frac{1}{4\pi} \int_{L_0} g(\tau) \, d\tau. \tag{19.8}$$

Таким образом, интеграл (19.4) представляет одно из регулярных в полосе периода решений задачи о скачке, принимающее на концах полосы периода значения (19.8), отличающиеся знаком.

Иногда удобно иметь дело с другим однопериодическим аналогом интеграла типа Коши, представляющим из себя частное решение задачи о скачке, обращающееся в нуль на нижнем конце полосы периода. Оно имеет вид

$$\Phi_0(z) = \Phi_1(z) - \lim_{z \to x - i\infty} \Phi_1(z) = \tag{19.10}$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \int_{L_0} g(\tau) \left[\operatorname{ctg} \frac{\tau - z}{2} + i \right] d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g(\tau) \frac{ie^{i\tau}\, d\tau}{e^{i\tau} - e^{iz}}.$$

Если здесь ввести обозначение $f(z) = \exp(iz)$, то ядро интеграла запишется в хорошо знакомой нам форме

$$\frac{1}{2} \left[\operatorname{ctg} \frac{\tau - z}{2} + i \right] = \frac{ie^{i\tau}}{e^{i\tau} - e^{iz}} = \frac{f'(\tau)}{f(\tau) - f(z)}.$$

Функция $f(z) = \exp(iz)$ имеет период 2π. В полосе периода принимает каждое свое значение один раз, что сразу видно из характера отображения $w = \exp(iz)$, осуществляемого этой функцией: внутренность полосы периода переходит в плоскость w, разрезанную вдоль положительной действительной полуоси; берега разреза являются образами прямых $x = 0$ и $x = 2\pi$, ограничивающих эту полосу. Так как точки этих прямых конгруэнтны относительно преобразования $\omega_1 = z + 2\pi$, порождающего группу P_1, а к фундаментальной области относится лишь одна из этих прямых $x = 0$, то образом полосы периода будет вся плоскость w, при этом $w = 0$ и $w = \infty$ есть предельные значения функции $\exp(iz)$, когда точка z, оставаясь в полосе периода, стремится, соответственно, к ее верхнему и нижнему концам. Значит, функция $f(z) = \exp(iz)$ обладает всеми свойствами основного инварианта группы P_1.

2°. Займемся структурой однопериодических функций с конечным числом полюсов в полосе периодов. Приведем сначала две общие теоремы.

Теорема 19.1. *Любая рациональная функция $F(e^{iz})$ от инварианта $\exp(iz)$ есть однопериодическая функция с основным периодом 2π, принимающая в полосе периода каждое свое значение одинаковое число раз, а именно, m раз, если m означает порядок рациональной функции $F(w)$.*

То, что функция $F(e^{iz})$ имеет период 2π, является очевидным; что она не имеет других периодов, отличных от $2k\pi$, следует из свойства рациональной функции $F(w)$ принимать одно и то же значение лишь в конечном числе точек w. Далее, рациональная функция $F(w)$ принимает вполне определенное конечное или бесконечное значение в каждой точке плоскости w, в том числе в точках $w = 0$ и $w = \infty$; значения $F(0)$ и $F(\infty)$ будут, таким образом, значениями $F(e^{iz})$ на концах полосы периода. Наконец, если m есть порядок функции $F(w)$, то $F(e^{iz})$ в полосе периода каждое свое значение будет принимать также m раз, так как $\exp(iz)$ принимает здесь каждое свое значение только один раз.

Число m называется порядком однопериодической функции $F(e^{iz})$ в полосе периода.

Теорема 19.2. *Любая однопериодическая с периодом* 2π *функция* $\psi(z)$, *имеющая в полосе периода конечный порядок, есть рациональная функция от* $\exp(iz)$.

Положим $w = \exp(iz)$ и рассмотрим многозначную функцию $iz = Ln\,w$ в плоскости w с двумя выброшенными точками $w = 0$ и $w = \infty$. В любой точке w рассматриваемой области $Ln\,w$ принимает счетное множество значений, попарно отличающихся на кратное $2\pi i$. Поэтому функция

$$F(w) = \psi\left(\frac{1}{i} Lnw\right) = \psi(z)$$

будет однозначной в этой области. Пусть iz_0 — одно из значений Lnw_0. При любом z

$$w - w_0 = e^{iz} - e^{iz_0} = e^{iz_0}[e^{i(z-z_0)} - 1] =$$
$$= (z - z_0)[c_0 + c_1(z - z_0) + \dots],$$

где

$$c_0 = iw_0 \neq 0, \quad c_1 = -\frac{w_0}{2!}, \dots,$$

откуда обращением ряда получим

$$z - z_0 = (w - w_0)[d_0 + d_1(w - w_0) + \dots], \quad d_0 \neq 0.$$

Значит, если $\psi(z)$ является аналитической в окрестности z_0, то $F(w)$ будет аналитической в окрестности точки w_0; если же $\psi(z)$ в точке z_0 имеет полюс некоторого порядка, то $F(w)$ в точке w_0 будет иметь полюс того же самого порядка. В точках $w = 0$ и $w = \infty$ функция $F(w)$ будет также принимать вполне определенные значения, так как по предположению $\psi(z)$ имеет в полосе периода конечный порядок и концы полосы для нее могут быть разве что полюсами. Следовательно, $F(w)$ есть рациональная функция, и теорема доказана.

Применяя последнюю теорему, построим однопериодическую функцию $\psi(z)$, которая в конечной части полосы периода не имеет ни нулей, ни полюсов. Такая функция, если она не тождественная постоянная, должна обращаться в нуль и бесконечность на концах полосы периода. Соответствующая ей функция $F(w)$ при одном из значений $w = 0$, $w = \infty$ будет иметь нуль, при другом — полюс, и так как при любом конечном значении $w \neq 0$, она не может иметь ни нуля, ни полюса, то

$$\psi(z) = F(w) = Cw^r = Ce^{irz}, \tag{19.11}$$

где r — положительное или отрицательное число или нуль, а C — произвольная постоянная.

Если однопериодическая функция $\psi(z)$ будет аналитической всюду в полосе периода, кроме концов, где у нее будут полюсы порядка не выше m, то соответствующая ей функция $F(w)$ будет рациональной функцией специального вида

$$F(w) = \sum_{k=-m}^{m} c_k w^k$$

(один из коэффициентов c_m или c_{-m} может равняться нулю). Следовательно,

$$\psi(z) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikz}. \tag{19.12}$$

Аналогичным образом строится аналитическое выражение однопериодической функции $\psi(z)$ и в общем случае, когда у нее в полосе периода имеется конечное число нулей $a_1, \ldots, a_p$ порядков $\mu_1, \ldots, \mu_p$ и конечное число полюсов $b_1, \ldots, b_m$ порядков $\nu_1, \ldots, \nu_m$ соответственно. Полагая $\alpha_k = e^{ia_k}$, $\beta_k = e^{ib_k}$, рассматриваем рациональную функцию

$$F_1(w) = \frac{(w-\alpha_1)^{\mu_1} \ldots (w-\alpha_p)^{\mu_p}}{(w-\beta_1)^{\nu_1} \ldots (w-\beta_m)^{\nu_m}}.$$

Отношение $F(w)/F_1(w)$ будет рациональной функцией, не обращающейся ни в нуль, ни в бесконечность ни в одной конечной точке $w \neq 0$ и потому имеющей вид (19.11). Значит, $F(w) = Cw^r F_1(w)$ и

$$\psi(z) = Ce^{irz} \frac{(e^{iz} - e^{ia_1})^{\mu_1} \ldots (e^{iz} - e^{ia_p})^{\mu_p}}{(e^{iz} - e^{ib_1})^{\nu_1} \ldots (e^{iz} - e^{ib_m})^{\nu_m}}. \tag{19.13}$$

Когда поведение $\psi(z)$ на концах полосы периода известно, число r без труда определяется. Так, если $\psi(z)$ на концах полосы ограничена, то $r = \mu - \nu$, где $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_p$, $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_m$.

Если учесть, что

$$e^{iz} - e^{ia_k} = 2ie^{i(z+a_k)/2} \sin\frac{z-a_k}{2},$$

$$e^{iz} - e^{ib_j} = 2ie^{i(z+b_j)/2} \sin\frac{z-b_j}{2},$$

то представление (19.13) можно переписать в виде

$$\psi(z) = Ke^{iz(2q+\varepsilon)/2} \frac{\left[\sin\frac{z-a_1}{2}\right]^{\mu_1} \ldots \left[\sin\frac{z-a_p}{2}\right]^{\mu_p}}{\left[\sin\frac{z-b_1}{2}\right]^{\nu_1} \ldots \left[\sin\frac{z-b_m}{2}\right]^{\nu_m}}, \tag{19.14}$$

где $2q+\varepsilon=2r+\mu-\nu$, q — некоторое положительное или отрицательное целое число или нуль, ε — либо нуль, либо единица в зависимости от четности или нечетности числа $\mu-\nu$, K — некоторая постоянная.

Любая дробно-линейная функция от $\exp(iz)$ в полосе периода принимает всякое значение по одному разу. Поэтому любую такую функцию можно принять за основной инвариант. В частности, основным инвариантом, ограниченным на концах полосы периода, будет функция

$$\xi_0(z)=-A(z,\ 0)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2}=\frac{i}{2}\,\frac{e^{iz}+1}{e^{iz}-1}. \tag{19.15}$$

Ее единственный простой полюс в R_0 находится в точке $z=0$.

Через функцию (19.15) удобно выражать одноперiодические функции с конечным числом полюсов в полосе периода, если известны главные части ее разложений Лорана в окрестности всех полюсов, расположенных на конечном расстоянии. Действительно, пусть функция $\psi(z)$ имеет полюсы порядков $\nu_1,\ldots,\nu_m$ в точках $z_1,\ldots,z_m$ соответственно и полюсы порядка не выше μ на концах полосы периода, причем в окрестности любого полюса имеем

$$\psi(z)=\sum_{j=1}^{\nu_q}\frac{c_{j,\,q}}{(z-z_q)^j}+d_{0,\,q}+d_{1,\,q}(z-z_q)+\ldots$$

Обозначая через

$$\xi_j(z)=\frac{(-1)^j}{j!}\,\frac{d^j}{dz^j}\,\xi_0(z), \tag{19.16}$$

видим, что все эти функции являются ограниченными на концах полосы периода и имеют внутри полосы единственный полюс порядка $j+1$ в точке $z=0$ с лорановским разложением

$$\xi_j(z)=z^{-(j+1)}+\alpha_0+\alpha_1z+\ldots \tag{19.17}$$

Поэтому функция

$$\varphi(z)=\sum_{q=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_q}c_{j,\,q}\,\xi_{j-1}(z-z_q) \tag{19.18}$$

является одноперiодической, она ограничена на концах полосы периода, имеет полюсы в точках $z_1,\ldots,z_m$, в окрестности которых в силу разложений (19.17) имеет те же главные части, что и $\psi(z)$. Значит, разность $\psi(z)-\varphi(z)$ есть одноперiодическая функция аналитическая в полосе периода всюду, кроме ее концов, где у нее будут полюсы порядка не выше μ, то есть функция вида (19.12). Отсюда для $\psi(z)$ получаем представление

$$\psi(z)=\sum_{q=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_q}c_{j;\,q}\xi_{j-1}(z-z_q)+\sum_{k=-\mu}^{\mu}c_k e^{ikz}. \tag{19.19}$$

В результате всех этих рассуждений оказалась доказанной

Теорема 19.3. *Каждая однопериодическая функция, имеющая в полосе периода конечное число полюсов (включая концы полосы), может быть представлена либо в форме* (19.12), *либо* (19.14), *либо* (19.19).

3°. Теперь не представляет труда убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 19.4. *Вся совокупность однопериодических кусочно-голоморфных функций, имеющих на линии L_0 в полосе периода R_0 заданный скачок $g(t)$, в конечных точках этой полосы $z_1, \ldots, z_m$ полюсы порядков $\nu_1, \ldots, \nu_m$ соответственно и полюсы порядка не выше μ на концах полосы R_0, определяется формулой*

$$\Phi(z)=\frac{1}{4\pi i}\int_{L_0}g(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-z}{2}\,d\tau+\sum_{q=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_q}c_{j;\,q}\xi_{j-1}(z-z_q)+$$
$$+\sum_{k=-\mu}^{\mu}c_k e^{ikz}, \tag{19.20}$$

где линейно-независимые периодические функции $\xi_j(z)$ определены равенствами (19.15) *и* (19.16). *Число произвольных постоянных, вошедших в эту формулу, на единицу превосходит заданный порядок искомого решения.*

4°. При построении канонической функции однородной задачи удобно пользоваться интегралами вида (19.10), исчезающими на нижнем конце полосы периода. Предполагая L_0 состоящей из замкнутых гладких контуров $l_1, \ldots, l_r$, расположенных вне друг друга в конечной части полосы R_0, рассмотрим интеграл

$$\Gamma_0(z)=\frac{1}{4\pi i}\int_{L_0}\ln G(\tau)\left[\operatorname{ctg}\frac{\tau-z}{2}+i\right]d\tau, \tag{19.21}$$

где однозначные ветви $\ln G(\tau)$ зафиксированы на каждом контуре $l_1, \ldots, l_r$. Чтобы избавиться от возможных разрывов первого рода у $\ln G(t)$ в произвольно выбранных точках $t_j \in l_j$, $j=1, \ldots, r$, возьмем внутри каждого l_j точку θ_j и рассмотрим функцию

$$\varkappa_j\ln(e^{it}-e^{i\theta_j}),\quad j=1, \ldots, r, \tag{19.22}$$

понимая под ней предельное значение из D_j^+ вполне определенной ветви функции $\varkappa_j\ln(e^{iz}-e^{i\theta_j})$, однозначной в полосе R_0

с разрезом (θ_j, t_j, ∞) вдоль некоторой линии, уходящей к одному из концов полосы. Из свойств $\exp(iz)$ следует, что функция (19.22) в точках контура l_j ведет себя точно так же, как $\varkappa_j \ln(t-\theta_j)$: она непрерывна всюду, кроме точки t_j; при переходе через нее функция (19.22) меняется скачкообразно и величина скачка равна $2\pi i \varkappa_j$. Поэтому функция

$$\ln G_*(t) = \ln G(t) - \varkappa_j \ln(e^{it} - e^{i\theta_j}), \quad t \in l_j, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{19.23}$$

всюду на L_0 непрерывна и, полагая

$$\Gamma_*(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{L_0} \ln G_*(\tau) \left[\operatorname{ctg} \frac{\tau - z}{2} + i\right] d\tau, \tag{19.24}$$

можно записать интеграл (19.21) в таком виде

$$\Gamma_0(z) = \Gamma_*(z) + \sum_{j=1}^{r} \varkappa_j \Omega_j(z, \theta_j),$$

$$\Omega_j(z, \theta_j) = \frac{1}{4\pi i} \int_{l_j} \ln(e^{i\tau} - e^{i\theta_j}) \left[\operatorname{ctg} \frac{\tau - z}{2} + i\right] d\tau.$$

При помощи замены $w = e^{iz}$ интеграл $\Omega_j(z, \theta_j)$ легко вычисляется

$$\Omega_j(z, \theta_j) = \int_{\theta_j}^{t_j} d_\tau \ln(e^{i\tau} - e^{iz}) + \begin{cases} \ln(e^{iz} - e^{i\theta_j}), & z \in D_j^+, \\ 0, & z \overline{\in} D_j^+, \end{cases}$$

так что окончательно имеем

$$\Gamma_0(z) = \Gamma_*(z) + \ln F(z) + \sum_{j=1}^{r} \varkappa_j \ln \frac{e^{iz} - e^{it_j}}{e^{iz} - e^{i\theta_j}}, \tag{19.25}$$

где ограниченная в полосе R_0 кусочно-голоморфная периодическая функция $F(z)$ определяется следующим образом

$$F(z) = \begin{cases} (e^{iz} - e^{i\theta_j})^{\varkappa_j}, & z \in D_j^+, \\ 1, & z \overline{\in} D_j^+, \; j = 1, \ldots, r. \end{cases} \tag{19.26}$$

Формула (19.25) выражает однопериодический аналог интеграла типа Коши (19.21) с плотностью, имеющей точки разрыва первого рода $t_j \in L_0$ $(j = 1, \ldots, r)$ через такой же интеграл (19.24) с непрерывной плотностью (19.23). В точках t_j интеграл $\Gamma_0(z)$ имеет логарифмические особенности.

Из формулы (19.25) сразу видно, что функция $\exp \Gamma_0(z)$ может иметь на линии L_0 нули или бесконечности лишь в точках t_j и что функция

$$X(z) = e^{\Gamma_0(z)} \prod_{j=1}^{r} (e^{iz} - e^{it_j})^{-\varkappa_j} \tag{19.27}$$

является одним из решений однородной задачи с отличным от нуля порядком лишь на нижнем конце полосы периода. Этот порядок, очевидно, равен $(-\varkappa)$. На верхнем конце полосы R_0 функция $X(z)$ ограничена.

Используя функцию $X(z)$ в качестве канонической и ограничиваясь лишь регулярными в R_0 решениями однородной задачи, путем известных нам рассуждений получим следующий результат.

Теорема 19.5. *Если индекс задачи* $\varkappa \geqslant 0$, *то однородная задача Римана имеет* $\varkappa + 1$ *однопериодических с периодом* 2π *регулярных решений. Все они определяются формулой*

$$\Phi(z) = X(z) \sum_{k=0}^{\varkappa} c_k e^{ikz}, \tag{19.28}$$

где $c_k (k = 0, 1, \ldots, \varkappa)$ — *произвольные постоянные, а* $X(z)$ *имеет вид* (19.27). *При* $\varkappa < 0$ *регулярных решений однородная задача не имеет.*

Решения с конечным числом полюсов в R_0 будут отличаться от решения (19.28) множителем при $X(z)$. Так, все решения однородной задачи, имеющие полюсы порядков не выше $\nu_1, \ldots, \nu_m$ в конечных точках $z_1, \ldots, z_m$ полосы периода и полюсы порядка не выше μ на концах полосы, определяются формулой

$$\Phi(z) = X(z) \left\{ \sum_{q=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_q} c_{j,q} \xi_{j-1}(z - z_q) + \sum_{k=-\mu}^{\mu+\varkappa} c_k e^{ikz} \right\}. \tag{19.29}$$

5°. Чтобы получить формулу, определяющую все регулярные решения неоднородной задачи или решения с конечным числом полюсов в полосе периода (включая концы полосы), надо к частному решению неоднородной задачи

$$\Phi_*(z) = \frac{X(z)}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \operatorname{ctg} \frac{\tau - z}{2} \, d\tau \tag{19.30}$$

прибавить общее решение (19.28) или (19.29) соответствующей однородной задачи. Анализ формулы

$$\Phi(z) = \Phi_*(z) + X(z) \sum_{k=0}^{\varkappa} c_k e^{ikz}, \tag{19.31}$$

определяющей все регулярные решения неоднородной задачи, приводит к следующему результату.

Теорема 19.6. *При $\varkappa \geqslant 0$ неоднородная задача Римана имеет $\varkappa + 1$ линейно-независимых регулярных однопериодических с периодом 2π решений. Все они определяются формулами* (19.31), (19.30). *При $\varkappa < 0$ в общем случае неоднородная задача регулярных решений не имеет; лишь при выполнении $-\varkappa - 1$ дополнительных условий*

$$\int\limits_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} e^{ik\tau} d\tau = 0, \quad k = 1, \ldots, -\varkappa - 1, \tag{19.32}$$

задача имеет единственное регулярное решение

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{4\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \left[\operatorname{ctg} \frac{\tau - z}{2} + i\right] d\tau. \tag{19.33}$$

Условия (19.32) есть условия регулярности функции (19.33) на нижнем конце полосы периода. При их получении надо в ядре интеграла положить $t = e^{-iz}$ и разложить это ядро, а затем и сам интеграл в ряд Тейлора в окрестности $t = 0$ и приравнять к нулю первые $-\varkappa - 1$ коэффициентов последнего разложения.

В качестве канонической функции вместо функции $X(z)$, определенной формулой (19.27), можно брать, например, функцию

$$X'(z) = e^{\Gamma_0(z)} \prod_{j=1}^{r} \left(\frac{e^{iz} - e^{it_j}}{e^{iz} - e^{i\theta_j}}\right)^{-\varkappa_j}.$$

Она может иметь отличный от нуля порядок лишь в конечных точках полосы периода $z = \theta_j \in D_j^+$ (при $|\varkappa_j| \neq 0$). О применении этой функции при построении общего решения задачи остается справедливым все сказанное в п. 6° § 18.

§ 20. ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА КОНТУРОВ

Двоякопериодическая группа P_2 состоит из преобразований

$$\omega(z) = z + m_1 h_1 + m_2 h_2, \quad m_1, \ m_2 = 0, \ \pm 1, \ldots,$$

где h_1 и h_2 — отличные от нуля комплексные числа, удовлетворяющие условию $\operatorname{Im}(h_1/h_2) \neq 0$. Эти числа h_1 и h_2 называются *основными периодами группы*. Через них любой период может быть представлен в виде $h = m_1 h_1 + m_2 h_2$, где m_1 и m_2 — некоторые положительные или отрицательные целые числа.

Чтобы получить одну из фундаментальных областей группы P_2, возьмем произвольную точку z_0 и построим параллелограмм с вершинами z_0, $z_0 + h_1$, $z_0 + h_1 + h_2$, $z_0 + h_2$.

Противоположные стороны этого параллелограмма связаны преобразованиями $\omega_1(z) = z + h_1$ и $\omega_2(z) = z + h_2$, порождающими всю группу P_2. Конгруэнтными между собой являются и все четыре вершины. Поэтому в R_0 войдут все внутренние точки параллелограмма, стороны $(z_0, z_0 + h_1)$, $(z_0, z_0 + h_2)$ и вершина z_0. Множество R_0 называют обычно *параллелограммом периодов.*

Для определенности будем считать в дальнейшем, что начало координат находится в R_0.

1°. Простые автоморфные функции, принадлежащие группе P_2, называют *эллиптическими функциями*. Одно из основных свойств этих функций описывает

Теорема 20.1. *Не существует эллиптической функции $f(z)$ порядка $\nu = 1$ в параллелограмме периодов.*

Условимся считать обход границы параллелограмма R_0 положительным, если ему соответствует такой порядок вершин: z_0, $z_0 + h_1$, $z_0 + h_1 + h_2$, $z_0 + h_2$. Стороны R_0 в порядке

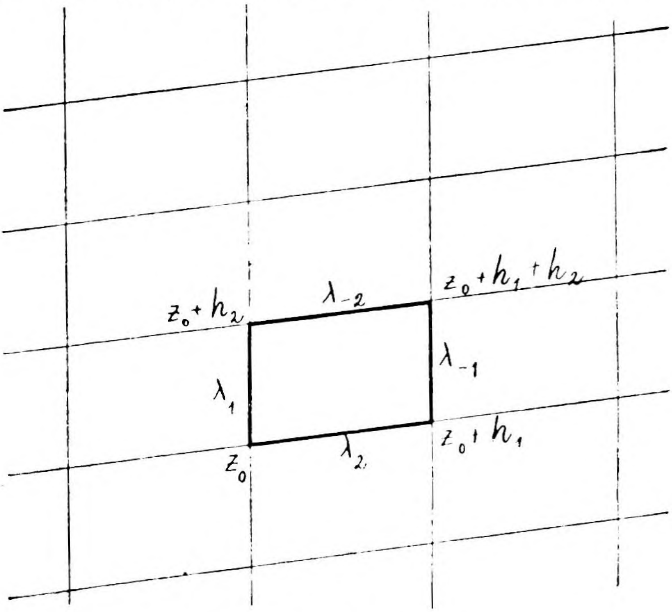

Рис. 8.

следования при таком обходе обозначим через λ_2, λ_{-1}, λ_{-2}, λ_1 (рис. 8).

Пусть $F(z)$ — некоторая эллиптическая функция. Точку z_0 всегда можно выбрать так, чтобы на ∂R_0 не было полюсов $F(z)$. Тогда

$$\int_{\partial R_0} F(z)\, dz = 2\pi i \sum_{(R_0)} \operatorname{res} F(z).$$

С другой стороны, в силу конгруэнтности сторон λ_1, λ_{-1} и λ_2, λ_{-2} имеем

$$\int_{\partial R_0} F(z)\,dz = \int_{\lambda_1} \{F(z+h_1) - F(z)\}\,dz - \int_{\lambda_2} \{F(z+h_2) - F(z)\}\,dz, \tag{20.1}$$

откуда на основании условий периодичности $F(z+h_1) = F(z)$, $F(z+h_2) = F(z)$, получаем

$$\sum_{(R_0)} \operatorname{res} F(z) = 0. \tag{20.2}$$

Из этого равенства сразу следует утверждение теоремы. Действительно, если бы существовала эллиптическая функция $f(z)$, имеющая в R_0 только один полюс и при том первого порядка, то ее главная часть в разложении Лорана имела бы вид $C/(z-a)$, где $C \neq 0$. Но на основании равенства (20.2) $C = 0$. Это противоречие и доказывает теорему.

Из теоремы 20.1 вытекает, что если при построении аналога ядра Коши для группы P_2 мы пойдем тем же путем, что и в случае однопериодической группы, а именно, построим мероморфную функцию переменного τ с простыми полюсами в точках $\tau = z + h$, $h = m_1 h_1 + m_2 h_2$, и с главными частями $(\tau - z - h)^{-1}$, то она не будет эллиптической.

На основании теоремы Миттаг-Леффлера [35, с. 397—402] такая функция будет представлять собой ряд вида

$$A(z, \tau) = \frac{1}{\tau - z} + \sum_{(h)}{}' \left\{ \frac{1}{\tau - z - h} - \Omega_h(z, \tau) \right\}, \tag{20.3}$$

где суммирование производится по всем периодам h, отличным от нуля (что отмечено штрихом у знака суммы), а функция $\Omega_h(z, \tau)$ есть отрезок ряда Тейлора в разложении функции $(\tau - z - h)^{-1}$ в окрестности $\tau = z$

$$\Omega_h(z, \tau) = -\sum_{j=0}^{q-1} \frac{(\tau - z)^j}{h^{j+1}}, \tag{20.4}$$

число членов которого q подбирается так, чтобы ряд (20.3) сходился абсолютно и равномерно при всех $\tau \neq z + h$.

Чтобы определить число q, на основании (20.4) записываем общий член ряда (20.3) в таком виде

$$U_h = \frac{1}{\tau - z - h} - \Omega_h(z, \tau) = \frac{1}{\tau - z - h} - \frac{1}{\tau - z - h}\left[1 - \left(\frac{\tau - z}{h}\right)^q\right] =$$

$$= \frac{1}{\tau - z - h}\left(\frac{\tau - z}{h}\right)^q$$

и оцениваем его по модулю. При $|\tau - z| \leqslant \rho$ и при достаточно больших $|m_1|$ и $|m_2|$ величина $|(\tau - z)/h|$ будет сколь угодно малой. Поэтому можно найти такие $\overset{0}{m}_1$ и $\overset{0}{m}_2$, чтобы при всех $m_1 \geqslant \overset{0}{m}_1$ и $m_2 \geqslant \overset{0}{m}_2$ выполнялись неравенства

$$\frac{1}{2} \leqslant \left|1 - \frac{\tau - z}{h}\right| \leqslant 2.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{\rho^q}{2\,|h|^{q+1}} \leqslant |U_h| \leqslant \frac{2\rho^q}{|h|^{q+1}}.$$

Значит, ряд (20.3) будет сходиться тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$S = \sum_{(h)}{}' \frac{1}{|h|^{q+1}}. \tag{20.5}$$

Докажем, что *ряд* (20.5) *сходится при любом* $q \geqslant 2$.

Рассмотрим те периоды $h = m_1 h_1 + m_2 h_2$, для которых

$$\left.\begin{aligned} &m_1 = \pm n, \quad -n < m_2 < n, \\ &m_2 = \pm n, \quad -n < m_1 < n, \\ &m_1 = \pm n, \quad\;\; m_2 = \pm n, \end{aligned}\right\} \tag{20.6}$$

и обозначим через S_n частную сумму ряда (20.5), распространенную на все такие периоды. Число периодов h, удовлетворяющих условиям (20.6), как легко подсчитать, равно $8n$, а их модули не меньше чем Kn, где K — некоторая постоянная, зависящая от h_1 и h_2. Поэтому для суммы S_n имеет место оценка

$$S_n \leqslant 8n \frac{1}{(Kn)^{q+1}} = \frac{M}{n^q}$$

и, следовательно, ряд (20.5) $S = S_1 + S_2 + \ldots$ сходится.

Возьмем наименьшее $q = 2$, при котором ряд (20.5) сходится. В этом случае

$$\Omega_h(z, \tau) = -\frac{1}{h} - \frac{\tau - z}{h^2}$$

и сходящийся абсолютно и равномерно при $\tau \neq z + h$ ряд (20.3) принимает такой вид

$$A(z, \tau) = \frac{1}{\tau - z} + \sum_{(h)}{}' \left\{\frac{1}{\tau - z - h} + \frac{1}{h} + \frac{\tau - z}{h^2}\right\}. \tag{20.7}$$

Полагая

$$\zeta(u)=\frac{1}{u}+\sum_{(h)}{}'\left\{\frac{1}{u-h}+\frac{1}{h}+\frac{u}{h^2}\right\}, \tag{20.8}$$

имеем

$$A(z,\tau)=\zeta(\tau-z). \tag{20.9}$$

Функция $\zeta(u)$, представляющая собой сумму ряда (20.8), называется *дзэта-функцией Вейерштрасса*. Из ее представления в виде ряда (20.8) легко получить все ее основные свойства.

1) *Функция* $\zeta(u)$ *является нечетной*: $\zeta(-u)=-\zeta(u)$.

Чтобы убедиться в этом, разложим $\zeta(u)$ в ряд в окрестности $u=0$. Получим

$$\zeta(u)=\frac{1}{u}-\frac{c_2}{3}u^3-\frac{c_3}{5}u^5-\ldots,$$

$$c_2=3\sum_{(h)}{}'h^{-4},\quad c_3=5\sum_{(h)}{}'h^{-6},\ldots \tag{20.10}$$

2) *Функция* $\zeta(u)$ *является квазипериодической: при изменении аргумента и на период* h *она приобретает некоторое постоянное слагаемое* η:

$$\zeta(u+h)=\zeta(u)+\eta. \tag{20.11}$$

Заметим сначала, что производная $\zeta'(u)$ является двоякопериодической с периодами h_1 и h_2, так как при замене u на $u+h_1$ или $u+h_2$ в выражении

$$\zeta'(u)=-\frac{1}{u^2}+\sum_{(h)}{}'\left\{\frac{1}{h^2}-\frac{1}{(u-h)^2}\right\}$$

произойдет лишь перестановка членов. Поэтому для разности

$$\eta_k=\zeta(u+h_k)-\zeta(u),\ k=1,\ 2 \tag{20.12}$$

имеем

$$\frac{d\eta_k}{du}=\zeta'(u+h_k)-\zeta'(u)=0,$$

так что величины η_1 и η_2 — постоянные. Легко получить их выражения через основные периоды. Для этого в равенстве (20.12) положим $u=-h_k/2$ и воспользуемся тем, что $\zeta(u)$ — нечетная функция. Это приведет нас к формулам

$$\eta_1=2\zeta\left(\frac{h_1}{2}\right),\quad \eta_2=2\zeta\left(\frac{h_2}{2}\right). \tag{20.13}$$

Постоянные η_1 и η_2 называются *циклическими*.

Последовательным применением равенств (20.12) мы получим соотношение (20.11), при этом

$$\zeta(u + m_1 h_1 + m_2 h_2) = \zeta(u) + m_1 h_1 + m_2 \eta_2. \qquad (20.11^*)$$

Значит, *при изменении аргумента u на период $h = m_1 h_1 + m_2 h_2$ функция $\zeta(u)$ получает приращение $\eta = m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2$, составленное из величин η_1 и η_2 по тому же закону, по какому период h составлен из основных периодов.*

3) *Величины η_1, η_2 и h_1, h_2 связаны между собой соотношением Лежандра*

$$\eta_1 h_2 - \eta_2 h_1 = 2\pi i. \qquad (20.14)$$

Для доказательства вычислим интеграл по ∂R_0 от $\zeta(u)$. Так как $\zeta(u)$ в R_0 имеет только один простой полюс $u = 0$ с вычетом, равным единице, то, как при доказательстве теоремы 20.1, получаем

$$\int_{u_0}^{u_0+h_2} \{\zeta(u + h_1) - \zeta(u)\}\, du - \int_{u_0}^{u_0+h_1} \{\zeta(u + h_2) - \zeta(u)\}\, du = 2\pi i,$$

откуда в силу соотношений (20.12) получается равенство (20.14).

Несмотря на свойство квазипериодичности, функция $\zeta(u)$ очень удобна при представлении эллиптических функций с заданными в R_0 полюсами.

Пусть $\psi(z)$ есть эллиптическая функция с основными периодами h_1 и h_2, имеющая в параллелограмме периодов R_0 только простые полюсы $z_1, \ldots, z_m$ с вычетами $c_1, \ldots, c_m$ соответственно. В силу соотношения (20.2) сумма этих вычетов равна нулю

$$c_1 + \ldots + c_m = 0. \qquad (20.15)$$

Поэтому функция

$$\varphi(z) = c_1 \zeta(z - z_1) + \ldots + c_m \zeta(z - z_m)$$

имеет периоды h_1 и h_2:

$$\varphi(z + h_k) = \varphi(z) + c_1 \eta_k + \ldots + c_m \eta_k = \varphi(z).$$

И так как функция $\varphi(z)$ имеет в R_0 те же полюсы, что и функция $\psi(z)$, и те же вычеты в этих полюсах, то разность $\psi(z) - \varphi(z)$ будет постоянной как эллиптическая функция, не имеющая полюсов. Тем самым доказана

Теорема 20.2. *Если эллиптическая функция $\psi(z)$ имеет в R_0 лишь простые полюсы $z_1, \ldots, z_m$ с главными частями*

$$\frac{c_1}{z - z_1}, \ldots, \frac{c_m}{z - z_m},$$

то

$$\psi(z)=C+c_1\zeta(z-z_1)+\ldots+c_m\zeta(z-z_m), \qquad (20.16)$$

где C — произвольная постоянная.

Когда у функции $\psi(z)$ в точках $z_1, \ldots, z_m$ параллелограмма R_0 находятся полюсы порядков $\nu_1, \ldots, \nu_m$ соответственно, и главная часть $\psi(z)$ в полюсе z_q имеет вид

$$\sum_{j=1}^{\nu_q} \frac{c_{j,\,q}}{(z-z_q)^j}, \qquad (20.17)$$

то при представлении эллиптических функций наряду с $\zeta(z)$ удобно применять эллиптические функции

$$\xi_j(z)=\frac{(-1)^j}{j!}\,\frac{d^j}{dz^j}\zeta(z),\ j=1,\ 2, \ldots \qquad (20.18)$$

с единственным полюсом порядка $j+1$ в точке $z=0$ и с лорановским разложением

$$\xi_j(z)=z^{-(j+1)}+d_0+d_1z+\ldots \qquad (20.19)$$

На основании разложения (20.19) видно, что функция

$$\sum_{j=1}^{\nu_q} c_{j,\,q}\,\xi_{j-1}(z-z_q)$$

в полюсе z_q имеет ту же главную часть (20.17), что и функция $\psi(z)$. Поэтому аналогично теореме 20.2 доказывается

Теорема 20.3. *Если эллиптическая функция $\psi(z)$ имеет в параллелограмме периодов R_0 полюсы порядков $\nu_1, \ldots, \nu_m$ в точках $z_1, \ldots, z_m$ соответственно, то она имеет вид*

$$\psi(z)=C+\sum_{q=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_q} c_{j;\,q}\,\xi_{j-1}(z-z_q), \qquad (20.20)$$

где функции $\xi_j(z)$ определяются формулами (20.18), *C — некоторая постоянная, а коэффициенты $c_{j;\,q}$ берутся из главных частей* (20.17) *функции $\psi(z)$ в соответствующих полюсах. При этом всегда*

$$c_{1;\,1}+c_{1;\,2}+\ldots+c_{1;\,m}=0. \qquad (20.21)$$

2°. Пусть линия L_0, расположенная в R_0, состоит из гладких замкнутых контуров $l_1, \ldots, l_r$, лежащих вне друг друга. Рассмотрим интеграл

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} g(\tau)\,\zeta(\tau-z)\,d\tau, \qquad (20.22)$$

где функция $g(t)$ на L_0 удовлетворяет условию H. Справедлива

Теорема 20.4. *Интеграл* (20.22) *представляет из себя квазипериодический аналог интеграла типа Коши с циклическими постоянными*

$$\alpha_1 = -\frac{\eta_1}{2\pi i}\int_{L_0} g(\tau)\,d\tau,\quad \alpha_2 = -\frac{\eta_2}{2\pi i}\int_{L_0} g(\tau)\,d\tau. \qquad (20.23)$$

Доказательство легко получается на основании свойств функции $\zeta(z)$. Из соотношений (20.7)—(20.10) заключаем, что

$$\zeta(\tau - z) = \frac{1}{\tau - z} + B(z, \tau),$$

где $B(z, \tau)$ в точках линии L_0 непрерывна по обоим аргументам и $B(t, t) = 0$. Поэтому интеграл (20.22) отличается от интеграла типа Коши с плотностью $g(t)$ слагаемым

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} B(z, \tau)\,g(\tau)\,d\tau,$$

представляющим из себя вблизи L_0 аналитическую функцию. Значит, этот интеграл есть кусочно-голоморфная функция с линией скачков L_0, на которой

$$\Phi^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} g(\tau)\,\zeta(\tau - t)\,d\tau. \qquad (20.24)$$

Принадлежность $g(t)$ классу H обеспечивает существование интеграла в правой части этой формулы в смысле главного значения.

Квазипериодичность интеграла (20.22) есть следствие квазипериодичности функции $\zeta(z)$, ибо на основании (20.12) сразу получаем

$$\Phi(z + h_k) = \Phi(z) + \alpha_k,\quad k = 1, 2.$$

Если вычислить интеграл от $\Phi(z)$ вдоль границы R_0, то с одной стороны будем иметь

$$\int_{\partial R_0} \Phi(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} g(\tau)\,d\tau \int_{\partial R_0} \zeta(\tau - z)\,dz = -\int_{L_0} g(\tau)\,d\tau.$$

С другой стороны

$$\int_{\partial R_0} \Phi(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_0+h_2} \{\Phi(z + h_1) - \Phi(z)\}\,dz -$$

$$-\int_{z_0}^{z_0+h_1} \{\Phi(z + h_2) - \Phi(z)\}\,dz = \alpha_1 h_2 - \alpha_2 h_1.$$

Отсюда для интеграла (20.22) получаем аналог соотношения Лежандра

$$\alpha_1 h_2 - \alpha_2 h_1 = -\int\limits_{L_0} g(\tau)\,d\tau. \tag{20.25}$$

Наряду с интегралом (20.22) всеми свойствами аналога интеграла типа Коши обладает интеграл

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} g(\tau)\left[\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau)\right] d\tau, \tag{20.26}$$

отличающийся от интеграла (20.22) нормировкой $\Phi_0(0) = 0$. Циклические постоянные для него определяются теми же формулами (20.23) и условие (20.25) также остается справедливым.

Очевидной является

Теорема 20.5. *Условие*

$$\int\limits_{L_0} g(\tau)\,d\tau = 0 \tag{20.27}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы интегралы (20.22) *и* (20.26) *представляли двоякопериодические кусочно-голоморфные функции с основными периодами* h_1 *и* h_2.

Рассматривая интеграл вида (20.26), нетрудно получить аналог интегральной формулы Коши и условия необходимые и достаточные, чтобы непрерывная по Гёльдеру плотность этого интеграла была граничным значением квазипериодической или двоякопериодической функции, голоморфной в бесконечносвязной области D^-, представляющей собой внешность линии L_0 и всех конгруэнтных ей линий $\omega(L_0)$, $\omega(z) \in P_2$.

Пусть $\varphi(z)$ есть квазипериодическая аналитическая в D^- функция с циклическими постоянными β_1 и β_2:

$$\varphi(z + h_1) = \varphi(z) + \beta_1, \quad \varphi(z + h_2) = \varphi(z) + \beta_2. \tag{20.28}$$

Считая точку z расположенной внутри R_0, вычислим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R_0} \varphi(\tau)\,\zeta'(\tau - z)\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{z_0}^{z_0+h_2} \{\varphi(\tau + h_1) - \varphi(\tau)\}\,\zeta'(\tau - z)\,d\tau -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{z_0}^{z_0+h_1} \{\varphi(\tau + h_2) - \varphi(\tau)\}\,\zeta'(\tau - z)\,d\tau.$$

Принимая во внимание равенства (20.28) и (20.12), получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R_0} \varphi(\tau)\,\zeta'(\tau - z)\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}(\beta_1\eta_2 - \beta_2\eta_1). \tag{20.29}$$

Отсюда интегрированием по z вдоль любого пути, лежащего в R_0 и соединяющего начало координат с произвольной точкой z, получаем соотношение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R_0}\varphi(\tau)\left[\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau)\right]d\tau=-\frac{z}{2\pi i}(\beta_1\eta_2-\beta_2\eta_1). \qquad (20.30)$$

Ломаная ∂R_0 и линия L_0 ограничивают $(r+1)$-связную область S, принадлежащую D^-. Пусть $z=0$ находится в S. Когда z лежит внутри одного из контуров l_j, то есть когда $z\in D_j^+$, то подинтегральная функция в (20.30) является аналитической в S всюду, кроме $\tau=0$, где у нее полюс первого порядка с вычетом, равным $-\varphi(0)$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S}\varphi(\tau)\left[\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau)\right]d\tau=-\varphi(0).$$

Если же $z\in S$, то у подинтегральной функции в точке $\tau=z$ находится еще один простой полюс с вычетом, равным $\varphi(z)$, и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S}\varphi(\tau)\left[\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau)\right]d\tau=\varphi(z)-\varphi(0).$$

Из последних двух равенств имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R_0}\varphi(\tau)\left[\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau)\right]d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\varphi(\tau)\left[\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau)\right]d\tau+\begin{cases}-\varphi(0), & z\in D_j^+,\ j=1,\dots,r;\\ \varphi(z)-\varphi(0), & z\in R_0\cap D^-,\end{cases}$$

и из равенства (20.30) получаем окончательно

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\varphi(\tau)\left[\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau)\right]d\tau=\varphi(0)-\frac{z}{2\pi i}(\beta_1\eta_2-\beta_2\eta_1), \qquad (20.31)$$

$$z\in D_j^+,\quad j=1,\dots,r;$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\varphi(\tau)\left[\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau)\right]d\tau=\varphi(0)-\varphi(z)-$$

$$-\frac{z}{2\pi i}(\beta_1\eta_2-\beta_2\eta_1),\ z\in D^-. \qquad (20.32)$$

В последнем равенстве и справа и слева стоят функции, аналитические в D^-. Поэтому на основании принципа аналитического продолжения мы и получаем заключение о ее справедливости всюду в D^-, а не только в $D^-\cap R_0$, как в формуле (20.30). Что касается формулы (20.31), то она распространяется на области $\omega(D_j^+)$, конгруэнтные D_j^+, путем преобразований группы; аналитическое продолжение здесь ввиду несвязности $\bigcup\omega(D_j^+)$ невозможно.

Формула (20.32) есть аналог интегральной формулы Коши для области D^-, а формулы (20.31) представляют собой необходимые условия, которым удовлетворяет граничное значение $\varphi(t)$ квазипериодической функции $\varphi(z)$, голоморфной в D^-, с циклическими постоянными β_1 и β_2. Возникает вопрос, являются ли эти условия и достаточными?

Допустим, что некоторая функция $\varphi(t) \in H$ на L_0 удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \varphi(\tau)\,[\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau)]\,d\tau = Mz + N, \tag{20.33}$$

$$z \in D_j^+, \ j = 1, \ldots, r,$$

где M и N — некоторые постоянные. Тогда

$$\varphi_*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \varphi(\tau)\,[\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau)]\,d\tau - Mz - N \tag{20.34}$$

будет кусочно-голоморфной квазипериодической функцией, равной нулю во всех областях D_j^+, $j = 1, \ldots, r$. Поэтому $\varphi_*^+(t) = 0$ на L_0 и по обобщенным формулам Сохоцкого вида (20.24) имеем $\varphi_*^-(t) = \varphi(t)$. Таким образом, при любых M и N на основании условий (20.33) $\varphi(t)$ есть граничное значение квазипериодической функции $\varphi_*(z)$, голоморфной в D^-. Чтобы циклические постоянные этой функции были равны заданным величинам β_1 и β_2, должны выполняться следующие равенства

$$\begin{cases} -\dfrac{\eta_1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{L_0} \varphi(\tau)\,d\tau - Mh_1 = \beta_1, \\ -\dfrac{\eta_2}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{L_0} \varphi(\tau)\,d\tau - Mh_2 = \beta_2. \end{cases}$$

Рассматривая их как систему уравнений с неизвестными M и $\int\limits_{L_0} \varphi(\tau)\,d\tau$, видим, что в силу соотношения Лежандра определитель системы равен единице и единственным ее решением являются величины

$$M = \frac{1}{2\pi i}(\beta_1\eta_2 - \beta_2\eta_1),$$

$$\int\limits_{L_0} \varphi(\tau)\,d\tau = -(\beta_1 h_2 - \beta_2 h_1). \tag{20.35}$$

Постоянная N определится из представления (20.34), если положить в обеих частях этого равенства $z = 0$: $N = -\varphi_*(0)$.

Нами доказана

Теорема 20.6. *Условия* (20.31) *являются необходимыми, а при дополнительном условии* (20.35) *и достаточными для того, чтобы непрерывная по Гельдеру на L_0 функция $\varphi(t)$ была граничным значением квазипериодической голоморфной в D^- функции $\varphi(z)$ с циклическими постоянными β_1, β_2. Эта единственная функция $\varphi(z)$ определяется формулой* (20.32).

Полагая $\beta_1=\beta_2=0$, получаем соответствующую теорему для двоякопериодических функций.

3°. Рассматривая простейшую краевую задачу

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=g(t),\ t\in L_0, \tag{20.36}$$

найдем сначала все ее ограниченные квазипериодические решения с циклическими постоянными α_1 и α_2.

Из формул (20.24) следует, что скачок, равный $g(t)$ на L_0, имеет каждая функция двупараметрического семейства

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} g(\tau)\,\zeta(\tau-z)\,d\tau+C+Dz.$$

Циклические постоянные любой из этих функций будут равны α_1 и α_2 тогда и только тогда, если

$$\begin{cases} -\dfrac{\eta_1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_0} g(\tau)\,d\tau+Dh_1=\alpha_1, \\ -\dfrac{\eta_2}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_0} g(\tau)\,d\tau+Dh_2=\alpha_2, \end{cases}$$

то есть если

$$\int_{L_0} g(\tau)\,d\tau=\alpha_2 h_1-\alpha_1 h_2, \tag{20.37}$$

$$D=\frac{1}{2\pi i}(\eta_1\alpha_2-\eta_2\alpha_1).$$

Значит, справедлива

Теорема 20.7. *Условие* (20.37) *является необходимым и достаточным для разрешимости задачи* (20.36) *в классе квазипериодических ограниченных функций с заданными циклическими постоянными α_1 и α_2. При выполнении этого условия общее решение задачи* (20.36) *в этом классе функций имеет вид*

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} g(\tau)\,\zeta(\tau-z)\,d\tau+\frac{z}{2\pi i}(\eta_1\alpha_2-\eta_2\alpha_1)+C, \tag{20.38}$$

где C — произвольная постоянная.

Из этой теоремы при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и из изложенного в предыдущих двух пунктах следует

Теорема 20.8. *Условие*

$$\int_{L_0} g(\tau)\, d\tau = 0 \tag{20.39}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы задача (20.36) *имела ограниченные двоякопериодические решения, определяемые формулой*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} g(\tau)\,\zeta(\tau - z)\, d\tau + C. \tag{20.40}$$

Все двоякопериодические решения задачи (20.36), *имеющие в точках* $z_1, \ldots, z_m$ *параллелограмма периодов* R_0 *полюсы порядков не выше* $\nu_1, \ldots, \nu_m$ *соответственно, определяются формулой*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} g(\tau)\,\zeta(\tau - z)\, d\tau + C + \sum_{q=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_q} c_{j,\,q}\,\xi_{j-1}(z - z_q) \tag{20.41}$$

при условии, что

$$c_{1,\,1} + \ldots + c_{1,\,m} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} g(\tau)\, d\tau. \tag{20.42}$$

Формула (20.41) *содержит* $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_m$ *произвольных постоянных.*

При построении двоякопериодических решений задачи (20.36) вместо квазипериодического аналога ядра Коши $\zeta(\tau - z)$ можно использовать ядро

$$A_0(z,\ \tau) = \zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - z_0) + \zeta(z - a_1) - \zeta(z_0 - a_1),$$

представляющее из себя по переменному z эллиптическую функцию с двумя простыми полюсами $z = \tau$ и $z = a_1$ в R_0 и обращающуюся в нуль при $z = z_0$. Решения задачи определятся теми же формулами (20.40) и (20.41), в которых вместо $\zeta(\tau - z)$ надо поставить $A_0(z,\ \tau)$, а вместо $\xi_{j-1}(z - z_q)$ — взятые со знаком минус коэффициенты разложения $A_0(z,\ \tau)$ в окрестности точки $\tau = z_q$. Условия (20.39) и (20.42), обеспечивающие ранее периодичность функций (20.40) и (20.41), будут теперь обеспечивать их регулярность в точке $z = a_1$.

4°. При решении однородной задачи нам будет полезна одна вспомогательная функция $\sigma(u)$, играющая важную роль в теории эллиптических функций. Вводится она следующим образом.

Проинтегрируем ряд

$$\zeta(u)-\frac{1}{u}=\sum_{(h)}'\left(\frac{1}{u-h}+\frac{1}{h}+\frac{u}{h^2}\right)$$

вдоль некоторого пути, соединяющего начало координат с точкой u и не проходящего через точки h. В результате получим

$$\int_0^u\left[\zeta(v)-\frac{1}{v}\right]dv=\sum_{(h)}'\left\{\ln\left(1-\frac{u}{h}\right)+\frac{u}{h}+\frac{u^2}{2h^2}\right\}, \qquad (20.43)$$

где ветвь логарифмической функции определяется контуром интегрирования.

Положим

$$\sigma(u)=u\prod_{(h)}'\left\{\left(1-\frac{u}{h}\right)\exp\left(\frac{u}{h}+\frac{u^2}{2h^2}\right)\right\}, \qquad (20.44)$$

так что равенство (20.43) примет вид

$$\int_0^u\left[\zeta(v)-\frac{1}{v}\right]dv=\ln\frac{\sigma(u)}{u} \qquad (20.45)$$

или, что все равно,

$$\zeta(u)=\frac{d}{du}\ln\sigma(u)=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}. \qquad (20.46)$$

Функция $\sigma(u)$, очевидно, представляет из себя целую функцию с простыми нулями в точках $u=h=h_1m_1+h_2m_2$ и формула (20.46) дает представление мероморфной функции $\zeta(u)$ в виде отношения целых функций.

Основные свойства функции $\sigma(u)$ описывает

Теорема 20.9. *Функция $\sigma(u)$ есть нечетная функция, значения которой при изменении u на период $h=m_1h_1+m_2h_2$ меняются по следующему закону*

$$\sigma(u+h)=\varepsilon\sigma(u)\exp\left[\eta\left(u+\frac{h}{2}\right)\right], \qquad (20.47)$$

где $\varepsilon=1$, если число $h/2$ является периодом, и $\varepsilon=-1$ в противном случае.

Свойство нечетности легко вытекает из равенства (20.45) и из разложения (20.10) функции $\zeta(u)$ в окрестности $u=0$, ибо на основании этих формул вблизи $u=0$ имеем

$$\sigma(u)=u\exp\left\{-\frac{c_2}{12}u^4-\frac{c_3}{30}u^6-\dots\right\}.$$

Чтобы убедиться в справедливости формулы (20.47), обращаемся к равенству (20.46). Заменяя в нем u на $u+h$, из свойства квазипериодичности $\zeta(u)$ получаем равенство

$$\frac{\sigma'(u+h)}{\sigma(u+h)} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + \eta,$$

интегрируя которое имеем $\ln\sigma(u+h) = \ln\sigma(u) + \eta u + c$ или

$$\sigma(u+h) = C\sigma(u)\,e^{\eta(u+h/2)}. \tag{20.48}$$

Чтобы определить C, полагаем в этом равенстве $u = -h/2$. Если $h/2$ не является периодом, то есть если хотя бы одно из чисел m_1 и m_2 будет нечетным, то

$$C = \sigma\left(\frac{h}{2}\right)\Big/\sigma\left(-\frac{h}{2}\right) = -1.$$

Если же $h/2$ является периодом, то эта формула неприменима, так как $\sigma(\pm h/2) = 0$. В этом случае мы дифференцируем равенство (20.48)

$$\sigma'(u+h) = Ce^{\eta(u+h/2)}\left[\sigma'(u) + \eta\sigma(u)\right]$$

и здесь полагаем $u = -h/2$. Все нули $\sigma(u)$ простые, поэтому $\sigma'(\pm h/2) \neq 0$ и в силу четности $\sigma'(u)$ получаем

$$C = \sigma'\left(\frac{h}{2}\right)\Big/\sigma'\left(-\frac{h}{2}\right) = 1.$$

Из формулы (20.47) в частности вытекают формулы

$$\begin{aligned} \sigma(u+h_1) &= -\sigma(u)\exp\left[\eta_1\left(u+\frac{h_1}{2}\right)\right], \\ \sigma(u+h_2) &= -\sigma(u)\exp\left[\eta_2\left(u+\frac{h_2}{2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{20.49}$$

Последовательным применением этих формул в свою очередь можно получить формулу (20.47).

Отметим, что отношение

$$\delta(u) = \frac{\sigma(u-b)}{\sigma(u-a)},$$

где a и b — различные постоянные, при изменении u на период h приобретает постоянный множитель

$$\delta(u+h) = \delta(u)\,e^{\eta(a-b)}. \tag{20.50}$$

Это сразу следует из формулы (20.47).

Через функцию $\sigma(u)$ удобно выражать эллиптические функции с известными нулями и полюсами. При этом важное значение имеет следующая

Теорема 20.10. *Если эллиптическая функция $F(z)$ порядка $\nu \geqslant 2$ имеет в параллелограмме периодов R_0 нули $b_1, \ldots, b_\nu$ и полюсы $a_1, \ldots, a_\nu$ (и среди нулей, и среди полюсов могут быть одинаковые), то имеет место соотношение*

$$b_1 + \ldots + b_\nu - (a_1 + \ldots + a_\nu) = h, \tag{20.51}$$

где $h = m_1 h_1 + m_2 h_2$ — один из периодов.

При доказательстве будем считать, что на ∂R_0 нет ни нулей, ни полюсов $F(z)$. Тогда на основании известного свойства аналитических функций [35, с. 83]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_0} z \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \sum_{q=1}^{\nu} b_q - \sum_{q=1}^{\nu} a_q.$$

С другой стороны, на основании соотношений

$$(z + h_k) \frac{F'(z + h_k)}{F(z + h_k)} - z \frac{F'(z)}{F(z)} = h_k \frac{F'(z)}{F(z)} \quad (k = 1, 2),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_0} z \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \frac{h_1}{2\pi i} \int_{z_0}^{z_0 + h_2} \frac{F'(z)}{F(z)} dz - \frac{h_2}{2\pi i} \int_{z_0}^{z_0 + h_1} \frac{F'(z)}{F(z)} dz.$$

Оба последних интеграла равны целым кратным числа $2\pi i$. В самом деле, интеграл

$$\int_{z_0}^{z_0 + h_k} \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \int_{z_0}^{z_0 + h_k} d \ln F(z)$$

равен приращению функции $\ln F(z)$ при движении точки z из точки z_0 в точку $z_0 + h_k$ вдоль соответствующей стороны R_0. Так как $F(z + h_k) = F(z)$, то точка $w = F(z)$ описывает при этом движении замкнутый путь, а изменение $\ln w$ при движении точки w по замкнутому пути равно, как известно, целому кратному $2\pi i$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_0} z \frac{F'(z)}{F(z)} dz = m_1 h_1 + m_2 h_2 = h$$

и теорема доказана.

Соотношение (20.51) приходится всегда учитывать при построении эллиптической функции по заданным нулям и полюсам. Одну из этих точек, задав произвольно все остальные, мы должны подобрать так, чтобы это соотношение выполнялось или чтобы выполнялось равенство

$$b_1 + \ldots + b_\nu = a_1 + \ldots + a_\nu. \tag{20.52}$$

Из соотношения (20.51) это равенство получается заменой одного из полюсов, например, a_ν на $a_\nu + h$. Такая замена вполне законна, ибо если точки $a_1, \ldots, a_\nu$ представляют собой полную систему полюсов некоторой эллиптической функции, то и точки $a_1, \ldots, a_\nu + h$ тоже составляют полную систему полюсов той же функции с той лишь разницей, что теперь они не все находятся в параллелограмме R_0. Легко доказывается

Теорема 20.11. *Если нули и полюсы эллиптической функции $F(z)$ выбраны так, что выполняется условие* (20.52), *то эту функцию можно представить в виде*

$$F(z) = C\prod_{q=1}^{\nu}\frac{\sigma(z-b_q)}{\sigma(z-a_q)}, \tag{20.53}$$

где C — некоторая постоянная.

5°. При построении канонической функции однородной задачи

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t\in L_0, \tag{20.54}$$

прежде всего выразим интеграл

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\ln G(\tau)\zeta(\tau - z)\,d\tau \tag{20.55}$$

с разрывной в точках $t_j\in l_j$ ($j=1,\ldots,r$) плотностью $\ln G(t)$ через подобный же интеграл с непрерывной плотностью, выделяя в явном виде логарифмические особенности у $\Gamma(z)$ в тех точках $t_j\in l_j$, где $\ln G(t_j-0) - \ln G(t_j+0) = 2\pi i\varkappa_j \neq 0$.

В данном случае в качестве функции, устраняющей разрыв первого рода у функции $\ln G(t)$, берем функцию $\varkappa_j\ln\sigma(t-\theta_j)$, понимая под ней предельное значение из D_j^+ вполне определенной ветви функции $\varkappa_j\ln\sigma(z-\theta_j)$, однозначной в параллелограмме R_0 с разрезом (θ_j, t_j, t_0) вдоль некоторой линии, соединяющей $\theta_j\in D_j^+$ с некоторой точкой t_0 границы ∂R_0. В точке t_j эта функция имеет точку разрыва первого рода с величиной скачка, равной $2\pi i\varkappa_j$. Вводя на L_0 непрерывную функцию

$$\ln G_*(t) = \ln G(t) - \varkappa_j\ln\sigma(t-\theta_j),\ t\in l_j,\ j=1,\ldots,r \tag{20.56}$$

и полагая

$$\Gamma_*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\ln G_*(\tau)\zeta(\tau - z)\,d\tau, \tag{20.57}$$

записываем интеграл (20.55) в виде

$$\Gamma(z) = \Gamma_*(z) + \sum_{j=1}^{r} \varkappa_j \Omega_j(z, \theta_j),$$

$$\Omega_j(z, \theta_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_j} \ln \sigma(\tau - \theta_j) \zeta(\tau - z) \, d\tau.$$

При вычислении $\Omega_j(z, \theta_j)$ рассматриваем вспомогательный интеграл от той же подынтегральной функции по замкнутому контуру λ_j, состоящему из l_j и малой окружности с центром в θ_j, соединенных берегами разреза (θ_j, t_j). Таким путем с учетом (20.46) легко получим

$$\Omega_j(z, \theta_j) = \begin{cases} \ln \sigma(z - t_j), & z \in D_j^+, \\ \ln \dfrac{\sigma(z - t_j)}{\sigma(z - \theta_j)}, & z \in R_0, \ z \overline{\in} D_j^+, \end{cases}$$

при этом второе из соотношений аналитически продолжимо на всю бесконечносвязную область, ограниченную контуром l_j и конгруэнтными ему контурами $\omega(l_j)$. Отсюда получаем окончательно

$$\Gamma(z) = \Gamma_*(z) + \\ + \begin{cases} \varkappa_k \ln \sigma(z - t_k) + \displaystyle\sum_{j=1, \ j \neq k}^{r} \varkappa_j \ln \frac{\sigma(z - t_j)}{\sigma(z - \theta_j)}, & z \in D_k^+, \ k = 1, \ldots, r \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \varkappa_j \ln \frac{\sigma(z - t_j)}{\sigma(z - \theta_j)}, & z \in D^-. \end{cases} \tag{20.58}$$

При построении канонической функции берем как обычно $\exp \Gamma(z)$ и убираем у нее нули и бесконечности в точках t_j. Получаем функцию

$$\chi(z) = e^{\Gamma(z)} \prod_{j=1}^{r} [\sigma(z - t_j)]^{-\varkappa_j} = \\ = e^{\Gamma_*(z)} \times \begin{cases} \displaystyle\prod_{j=1, \ j \neq k}^{r} [\sigma(z - t_j)]^{-\varkappa_j}, & z \in D_k^+, \ k = 1, \ldots, r, \\ \displaystyle\prod_{j=1}^{r} [\sigma(z - t_j)]^{-\varkappa_j}, & z \in D^-, \end{cases} \tag{20.59}$$

с непрерывными и необращающимися в нуль на L_0 граничными значениями $\chi^+(t)$ и $\chi^-(t)$, удовлетворяющими однородному краевому условию $\chi^+(t) = G(t)\chi^-(t)$. При изменении z на период h эта функция ведет себя следующим образом:

$$\chi(z+h)=\chi(z)\,\varepsilon^{-\varkappa}\,e^{-\eta\varkappa(z+h/2)}\,e^{\eta(b-a)}, \tag{20.60}$$

$$a=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\ln G(\tau)\,d\tau,\quad b=\sum_{j=1}^{r}\varkappa_j t_j. \tag{20.61}$$

Нас будут интересовать лишь двоякопериодические решения однородной задачи. Поэтому и каноническая функция, как одно из таких решений, должна иметь периоды h_1 и h_2.

Из равенства (20.60) видно, что построенная нами функция $\chi(z)$ может быть каноническим решением лишь тогда, когда $\varkappa=0$ и $a=b$. Из формул (20.59) следует, что $\chi(z)$ в R_0 особых точек не имеет и всюду отлична от нуля. Поэтому отношение $\Phi(z)/\mathrm{X}(z)$, имеющее на L_0 равные граничные значения

$$\Phi^+(t)/\chi^+(t)=\Phi^-(t)/\chi^-(t),\ \ t\in L_0,$$

может иметь особыми точками лишь заданные особенности искомого решения $\Phi(z)$. Допустим, что $\Phi(z)$ в точках $z_1,\dots,z_m$ параллелограмма периодов R_0 должна иметь полюсы порядков не выше $\nu_1,\dots,\nu_m$ соответственно. В этом случае эллиптическая функция $\Phi(z)/\chi(z)$ на основании теоремы 20.3 будет иметь вид (20.20) и общее решение однородной задачи

$$\Phi(z)=\chi(z)\Big\{C+\sum_{q=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_q}c_{j,q}\,\xi_{j-1}(z-z_q)\Big\},\ \sum_{q=1}^{m}c_{1,q}=0, \tag{20.62}$$

содержит $\nu=\nu_1+\dots+\nu_m$ произвольных постоянных.

Когда $\varkappa=0$, но $a\neq b+h$, функция $\chi(z)$ не является двоякопериодической и при изменении z на период h приобретает постоянный множитель $\exp[\eta(b-a)]$. Из отмеченного нами свойства (20.50) следует, что функция

$$\mathrm{X}(z)=\chi(z)\,\frac{\sigma(z-\theta)}{\sigma(z-\theta_1)} \tag{20.63}$$

будет двоякопериодической канонической функцией с периодами h_1 и h_2, если точки θ и θ_1 подобрать так, чтобы $\theta_1-\theta=a-b$ и чтобы ни одна из этих точек не лежала на L_0 или $\omega(L_0)$. Очевидно, такой подбор можно всегда осуществить бесчисленным множеством способов.

Если при помощи функции (20.63) отыскивать ограниченное решение $\Phi(z)$ однородной задачи, то отношение $\Phi(z)/\mathrm{X}(z)$ будет эллиптической функцией с единственным простым полюсом в точке θ и простым нулем в точке θ_1. По теореме 20.1 такая функция может быть лишь нулем тождественным и, следовательно, $\Phi(z)\equiv 0$.

Когда отыскивается решение $\Phi(z)$ с полюсами порядка не выше $\nu_1,\dots,\nu_m$ в точках $z_1,\dots,z_m$, отношение $\Phi(z)/\mathrm{X}(z)$

кроме этих полюсов, должно иметь простой полюс в точке $z=\theta$ и нуль в точке $z=\theta_1$. Поэтому в представлении

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)}=C+D\zeta(z-\theta)+\sum_{q=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_q}c_{j,q}\xi_{j-1}(z-z_q)$$

произвольные постоянные должны быть связаны двумя соотношениями

$$\left\{\begin{aligned} & D+\sum_{q=1}^{m}c_{1,q}=0, \\ & C+D\zeta(\theta_1-\theta)+\sum_{q=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_q}c_{j,q}\xi_{j-1}(\theta_1-z_q)=0, \end{aligned}\right. \tag{20.64}$$

из которых две постоянных выразятся через другие и в общее решение однородной задачи

$$\Phi(z)=X(z)\Big\{C+D\zeta(z-\theta)+\sum_{q=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_q}c_{j,q}\xi_{j-1}(z-z_q)\Big\} \tag{20.65}$$

войдут $\nu=\nu_1+\ldots+\nu_m$ произвольных постоянных.

При $\varkappa\neq 0$ каноническую функцию можно взять в таком виде

$$X(z)=\chi(z)\,[\sigma(z-\theta)]^{\varkappa}, \tag{20.66}$$

если точка $\theta=(b-a)/\varkappa$ не лежит на L_0 или на $\omega(L_0)$. Или же в виде

$$X(z)=\chi(z)\prod_{k=1}^{\pm\varkappa}[\sigma(z-\theta_k)]^{\pm 1}, \tag{20.67}$$

где $\theta_1,\ldots,\theta_{|\varkappa|}$ — некоторые точки (среди них могут быть и одинаковые), не лежащие на L_0 и на $\omega(L_0)$ и такие, что $\theta_1+\ldots+\theta_{|\varkappa|}=a-b$.

Допустим, что каноническая функция имеет вид (20.66), и пусть мы ищем решение однородной задачи с полюсами $z_1,\ldots,z_m$ порядков не выше $\nu_1,\ldots,\nu_m$ соответственно. При $\varkappa>0$ отношение $\Phi(z)/X(z)$, кроме этих полюсов, имеет еще полюс порядка $\varkappa$ в точке $\theta_\varkappa$ и общее решение задачи будет иметь вид

$$\Phi(z)=X(z)\Big\{C+\sum_{k=1}^{\varkappa}d_k\xi_{k-1}(z-\theta)+\sum_{q=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_q}c_{j,q}\xi_{j-1}(z-z_q)\Big\}, \tag{20.68}$$

где $d_1+c_{1,1}+\ldots+c_{1,m}=0$. Число произвольных постоянных равно $\varkappa+\nu$.

При $\varkappa < 0$ отношение $\Phi(z)/X(z)$ имеет полюсы в точках $z_1, \ldots, z_m$ и нуль порядка $(-\varkappa)$ в точке θ. Поэтому эллиптическая функция

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = C + \sum_{q=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_q} c_{j,q} \xi_{j-1}(z - z_q),$$

где $c_{1,1} + \ldots + c_{1,m} = 0$, должна удовлетворять еще $(-\varkappa)$ условиям

$$\frac{d^\mu}{dz^\mu} \left[\frac{\Phi(z)}{X(z)} \right]_{z=\theta} = 0, \ \mu = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1. \tag{20.69}$$

Они представляют из себя систему $(-\varkappa)$ однородных линейных алгебраических уравнений, связывающих ν постоянных C, $c_{j,q}$. Если $\varkappa + \nu > 0$, то всем уравнениям можно удовлетворить подбором $(-\varkappa)$ постоянных $c_{j,q}$; остальные $\varkappa + \nu$ постоянных останутся произвольными.

При $\varkappa + \nu < 0$ система (20.69) несовместна.

При $\varkappa + \nu = 0$ число уравнений (20.69) равно числу неизвестных: $\nu = -\varkappa$. Ранг этой системы может быть равен либо $\nu - 1$, либо ν. Действительно, так как $\nu = -\varkappa$, то у эллиптической функции $\Phi(z)/X(z)$ мы знаем полную систему полюсов и нулей и на основании теоремы 20.11 можем ее представить через функцию $\sigma(z)$ в таком виде

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = C \prod_{q=1}^{m} \left[\frac{\sigma(z-\theta)}{\sigma(z-z_q)} \right]^{\nu_q},$$

если при этом выполняется условие вида (20.52):

$$\sum_{q=1}^{m} \nu_q z_q = \nu\theta = a - b. \tag{20.70}$$

Значит, при выполнении условия (20.70) ранг системы (20.69) равен $\nu - 1$ и однородная задача имеет однопараметрическое семейство решений

$$\Phi(z) = C X(z) \prod_{q=1}^{m} \left[\frac{\sigma(z-\theta)}{\sigma(z-z_q)} \right]^{\nu_q}. \tag{20.71}$$

Если же условие (20.70) невыполнено, то эллиптическая функция $\Phi(z)/X(z)$ с указанными нулями и полюсами не существует, она есть нуль тождественный. Это означает, что система (20.69) имеет лишь нулевое решение и ее ранг равен $\nu = -\varkappa$.

Итогом наших исследований является

Теорема 20.12. *Однородная задача Римана с индексом* $\varkappa$ *в классе двоякопериодических функций с полюсами порядка не выше* $\nu_1, \ldots, \nu_m$ *в точках* $z_1, \ldots, z_m$ *соответственно при* $\varkappa + \nu > 0$, *где* $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_m$, *всегда разрешима и имеет* $\varkappa + \nu$ *линейно-независимых решений, определяемых формулами* (20.68) *и* (20.66), (20.59), (20.55).

При $\varkappa + \nu = 0$ *возможны два случая*: 1) *выполнено условие* (20.70); *однородная задача в этом случае имеет семейство решений* (20.71), *зависящее от одного произвольного параметра*; 2) *условие* (20.70) *невыполнено*; *задача отличных от нуля решений не имеет.*

При $\varkappa + \nu < 0$ *однородная задача в указанном классе функций решений не имеет.*

К этому же самому выводу можно придти, используя в качестве канонической функцию (20.67).

6°. Найдем все двоякопериодические решения неоднородной задачи Римана, имеющие в R_0 полюсы $z_1, \ldots, z_m$ порядков $\nu_1, \ldots, \nu_m$ соответственно. Как и при построении канонической функции, здесь приходится различать случаи $\varkappa = 0$ и $\varkappa \neq 0$.

При $\varkappa = 0$ с помощью канонической функции (20.63) приводим неоднородное краевое условие к виду

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L_0,$$

откуда в случае $a \neq b + h$ на основании п. 3° получаем

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \zeta(\tau - z)\, d\tau +$$

$$+ X(z) \left\{ C + D\zeta(z - \theta) + \sum_{q=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_q} c_{j,q} \xi_{j-1}(z - z_q) \right\}, \qquad (20.72)$$

при этом входящие сюда постоянные связаны двумя соотношениями

$$D + \sum_{q=1}^{m} c_{1,q} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\, d\tau, \qquad (20.73)$$

$$C + D\zeta(a - b) + \sum_{q=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_q} c_{j,q} \xi_{j-1}(\theta_1 - z_q) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \zeta(\theta_1 - \tau)\, d\tau,$$

а в случае $a=b$

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\zeta(\tau-z)\,d\tau+$$

$$+X(z)\left\{C+\sum_{q=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_q}c_{j,\,q}\xi_{j-1}(z-z_q)\right\},\tag{20.74}$$

$$\sum_{q=1}^{m}c_{1,\,q}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,d\tau.\tag{20.75}$$

И в том и в другом случае формулы (20.72) и (20.74), определяющие общее решение задачи, содержат $\nu=\nu_1+\ldots+\nu_m$ произвольных постоянных.

При $\varkappa\neq 0$ будем считать, что каноническую функцию можно построить в виде (20.66). Тогда общее решение задачи при $\varkappa>0$ запишется в таком виде

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\zeta(\tau-z)\,d\tau+$$

$$+X(z)\left\{C+\sum_{k=1}^{\varkappa}d_k\xi_{k-1}(z-\theta)+\sum_{q=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_q}c_{j,\,q}\xi_{j-1}(z-z_q)\right\},\tag{20.76}$$

$$d_1+\sum_{q=1}^{m}c_{1,\,q}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,d\tau$$

и будет содержать $\varkappa+\nu$ произвольных постоянных.

При $\varkappa<0$ имеем:

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\zeta(\tau-z)\,d\tau+$$

$$+X(z)\left\{C+\sum_{q=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_q}c_{j,\,q}\xi_{j-1}(z-z_q)\right\},\tag{20.77}$$

$$\sum_{q=1}^{m}c_{1,\,q}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,d\tau,$$

и, кроме того, должны выполняться $(-\varkappa)$ условий вида (20.69), обеспечивающие регулярность $\Phi(z)$ в точке $z=\theta$. В эти условия войдут линейно все постоянные $c_{j;\,q}$ и C. Из равенства (20.77) одну из постоянных $c_{1;\,q}$ можно выразить через остальные и подставить в эти условия. Получим систему из $(-\varkappa)$ линейных неоднородных алгебраических уравнений с ν неизвестными, для которой система (20.69) является соответствующей однородной системой. Опираясь на результат исследования системы (20.69), без труда получаем следующий общий вывод.

Теорема 20.13. *Неоднородная задача Римана в классе двоякопериодических функций с полюсами порядка не выше* $\nu_1, \ldots, \nu_m$ *в точках* $z_1, \ldots, z_m$ *соответственно при* $\nu + \varkappa > 0$, *где* $\varkappa$ — *индекс задачи, а* $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_m$, *всегда разрешима и имеет* $\nu + \varkappa$ *линейно-независимых решений, определяемых формулами* (20.76) *или* (20.77).

Когда $\varkappa + \nu = 0$ *и выполнено условие* (22.70), *задача имеет однопараметрическое семейство решений, если при этом* $g(t)$ *удовлетворяет одному дополнительному условию, обеспечивающему разрешимость неоднородной системы* (20.69); *если же условие* (20.70) *не выполняется, решение задачи единственно.*

При $\varkappa + \nu = 0$ *единственное решение существует тогда и только тогда, если* $g(t)$ *удовлетворяет* $-\varkappa - \nu$ *дополнительным условиям.*

§ 21. О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ РИМАНА В СЛУЧАЕ ФУКСОВЫХ ГРУПП

В этом параграфе мы изложим коротко основные результаты, касающиеся решения задачи Римана для автоморфных функций, принадлежащих фуксовым группам. В рамках этой книги остановиться подробно на этих вопросах, не нарушив доступности изложения, невозможно.

1°. При рассмотрении фуксовых групп существенно различными являются случаи, когда род ρ фундаментального многоугольника группы равен нулю и когда он отличен от нуля.

При $\rho = 0$ всегда существует простая автоморфная функция $f(z)$ с простым и притом единственным полюсом z_0 в фундаментальном многоугольнике, знание которой полностью характеризует группу. Группа может быть определена как совокупность операций, производимых над переменным z и не изменяющих значения $f(z)$, так что равенство $f(z) = f(z_k)$ является необходимым и достаточным условием для конгруэнтности точек z и z_k. Основной инвариант группы $f(z)$ позволяет описать все поле простых автоморфных функций, принадлежащих такой группе, как множество рациональных функций от $f(z)$ и получить решение задачи Римана в виде тех же формул, что и в случае конечных групп. Впервые этот материал изложен в работе [79], а позднее более подробно в диссертации [80].

Следует отметить, что при известном основном инварианте задачу Римана для автоморфных функций можно решать при помощи конформного отображения путем приведения к обычной задаче Римана на вспомогательной плоскости w, являющейся образом фундаментального многоугольника при отображении $w=f(z)$. Каждая пара конгруэнтных сторон границы фундаментального многоугольника перейдет при этом преобразовании в лежащие друг против друга берега некоторого разреза, но этот разрез не будет особой линией для функций, полученных из функций автоморфных. Именно этим путем решены и решаются многие прикладные задачи, связанные с изучением периодических процессов. И лишь некоторые авторы, знакомые с теорией автоморфных функций, предпочитают обходиться без конформного отображения [21—23, 57, 58, 33].

Характеристика некоторых типов прикладных задач, приводящихся к задаче Римана для автоморфных функций, имеется в работе [14].

2°. Когда род фундаментального многоугольника $\rho \neq 0$, все обстоит сложнее. В этом случае, как мы уже указывали ранее, группа характеризуется двумя простыми автоморфными функциями $f_1(z)$ и $f_2(z)$, связанными между собой некоторым неприводимым алгебраическим уравнением $Q[f_1(z), f_2(z)]=0$. Поэтому при решении задачи Римана здесь приходится обращаться к теории алгебраических функций и замкнутых римановых поверхностей.

При построении автоморфного аналога ядра Коши приходится учитывать, что при $\rho \neq 0$ минимальный порядок простой автоморфной функции в фундаментальном многоугольнике равен $\rho+1$. Поэтому у ядра $A(z, \tau)$ в виде простой автоморфной функции по z, кроме простого подвижного полюса $z=\tau$, приходится допускать еще ρ простых полюсов в фиксированных точках $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ фундаментальной области. Существование такого ядра $A(z, \tau)$ доказано еще Вейерштрассом [100, гл. II], однако единого алгоритма для построения такого ядра до сих пор нет и явное выражение $A(z, \tau)$ известно лишь в небольшом числе частных случаев.

По известному ядру $A(z, \tau)$ базис для построения простых автоморфных функций группы строится также, как в случае элементарных групп, только теперь каждая функция $\xi_j(z, z_0)$, кроме полюса z_0 порядка $j+1$, имеет еще ρ простых полюсов $a_1, \ldots, a_\rho$. Поэтому при построении простой автоморфной функции с заданными полюсами $z_1, \ldots, z_m$ порядков $\nu_1, \ldots, \nu_m$ мы можем по-прежнему записать ее в виде

$$\psi(z)=C+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_k} C_{j,k}\,\xi_{j-1}(z, z_k),$$

но постоянные $C_{j,k}$ надо взять такими, чтобы $\psi(z)$ была регулярной в точках $a_1, \ldots, a_\rho$. Это дает ρ уравнений

$$\operatorname{res}_{z=a_j} \psi(z) = 0, \quad j = 1, \ldots, \rho, \tag{21.1}$$

линейных относительно $C_{j,k}$. Если через ω $(0 \leqslant \omega \leqslant \rho)$ обозначить ранг системы (21.1), то число произвольных постоянных в выражении функции $\psi(z)$ будет равно $\nu - \omega + 1$. Это число совпадает с числом, определяемым теоремой Римана—Роха [72, с. 125—135]. Известно лишь, что при $\nu > 2\rho - 2$ всегда $\omega = \rho$ и функция $\psi(z)$ с заданными полюсами существует и содержит $\nu - \rho + 1$ произвольных постоянных. При $\nu \leqslant 2\rho - 2$ ранг ω может быть любым числом из промежутка $[0, \rho]$, зависящим не только от ν, но и от расположения точек $z_1, \ldots, z_m$. Характер зависимости ω от полюсов и их порядков до сих пор не установлен и потому при постановке задачи Римана в случае $\rho \neq 0$ точки $z_1, \ldots, z_m$ и их порядки не могут быть любыми, они должны быть полюсами некоторой простой автоморфной функции.

При построении канонической функции однородной задачи также приходится использовать свойства алгебраических функций. Так, при устранении неинтегрируемых особенностей в точках $t_k \in L$ приходится использовать трансцендентные автоморфные функции

$$E(z, \theta_k, t_k) = \exp\left[\int_{t_k}^{\theta_k} A(z, \tau)\, d\tau\right],$$

нули которых — точки θ_k — определяются из решения некоторой проблемы Якоби обращения абелевых интегралов [72, с. 296—332]. Часть этих точек будет нулями канонической функции, остальные — полюсами. Если обозначить число нулей через μ, а число полюсов — через λ, то разность этих чисел даст индекс задачи $\varkappa$.

При отыскании регулярных в фундаментальном многоугольнике решений получен следующий результат [81]:

При $\varkappa > 2\rho - 2$ и $\varkappa + 1 \geqslant \rho$ неоднородная задача разрешима при любой функции $g(t)$ и имеет при $\varkappa + 1 = \rho$ единственное решение, а в случае $\varkappa + 1 > \rho$ $\varkappa - \rho + 1$ линейно-независимых решений. Если $0 \leqslant \varkappa \leqslant 2\rho - 2$, задача будет разрешима лишь при выполнении $\rho - \omega$ дополнительных условий; число линейно-независимых решений будет $\varkappa - \omega + 1$ при $\varkappa + 1 > \omega$, и решение будет единственным при $\varkappa + 1 = \omega$. При $\varkappa + 1 < \omega$ неоднородная задача имеет единственное решение только при выполнении $\rho - \varkappa - 1$ дополнительных условий.

Из элементарных групп отличный от нуля род ($\rho = 1$) имеет лишь двоякопериодическая группа. Влияние рода на разрешимость и число решений в этом частном случае такое же, как в приведенном только что выводе, но в виду простоты группы там не приходится привлекать теорию алгебраических функций при построении решений даже тогда, когда ядро $A(z, \tau)$ выражается через два основных инварианта: функцию Вейерштрасса $p(z)$ и ее производную $p'(z)$ [79, 82].

3°. Фундаментальный многоугольник группы является одной из моделей замкнутой римановой поверхности. В последнее десятилетие изучение задачи Римана велось не только на этой плоской модели, но и на пространственной модели в виде сферы с конечным числом ручек (число их равно ρ), и на многолистной поверхности наложения алгебраической функции. Составить некоторое представление о полученных за это время результатах можно по обзорным статьям [12; 83; 24; 26; с. 250—252].

ГЛАВА IV

ЗАДАЧА РИМАНА В СЛУЧАЕ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА КОНТУРОВ

Краевая задача Римана и тесно связанные с нею простейшие сингулярные интегральные уравнения в случае счетного множества контуров изучались многими авторами: Н. И. Ахиезером [2], И. Н. Карцивадзе и Б. В. Хведелидзе [27, 28], С. А. Фрейдкиным [65—67], В. А. Пааташвили [45, 46], М. Э. Толочко [63]. Однако до сих пор эта задача не имеет еще достаточно полного решения.

В данной главе мы изложим некоторые результаты, полученные в последние годы нами и аспирантами И. Г. Салеховой, П. Х. Мкояном, М. Ф. Кулагиной. Основная часть этих результатов еще не опубликована*. В основу метода решения положена идея В. В. Голубева [18, с. 87—112], предлагавшего рассматривать каждую линию скачков как коллективную особую точку, что позволяет при построении решений задачи применить основные приемы теории мероморфных функций.

§ 22. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РИМАНА В СЛУЧАЕ МНОЖЕСТВА КОНТУРОВ С ОДНОЙ ТОЧКОЙ СГУЩЕНИЯ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СКАЧКЕ

1°. Пусть в комплексной плоскости дано счетное множество $\{L_k\}_1^\infty$ гладких простых замкнутых контуров L_k, таких, что если R_k есть кратчайшее расстояние от начала координат до L_k, то $0 < R_1 \leqslant R_2 \leqslant \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = \infty$; при этом будем считать, что в конечной части плоскости находится конечное число линий L_k и все они лежат вне друг друга. На каждом контуре L_k пусть заданы функции $G_k(t)$ и $g_k(t)$, непрерывные по Гельдеру, при этом $G_k(t) \neq 0$ всюду на L_k.

Назовем функцию $\Phi(z)$ *кусочно-голоморфной с линиями скачков* $L_1, L_2, \ldots$, если она является аналитической в лю-

* За время пребывания рукописи в издательстве значительная часть результатов, включенных в эту главу, и ряд новых опубликованы (прим. автора при корректуре).

бой ограниченной области, не содержащей точек линий L_k, а на каждой линии L_k имеет непрерывные граничные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$. Если функция $\Phi(z)$ имеет еще полюсы в некоторых точках a_j, не лежащих на контурах L_k и образующих последовательность $\{a_j\}_1^\infty$ с единственной предельной точкой $z=\infty$, то $\Phi(z)$ будем называть *кусочно-мероморфной.*

Задачу Римана сформулируем следующим образом.

Найти кусочно-мероморфную функцию $\Phi(z)$ *с линиями скачков* $\{L_k\}_1^\infty$, *имеющую полюсы заданных порядков в точках последовательности* $\{a_j\}_1^\infty$, *если на этих линиях заданы условия*

$$\Phi^+(t)=G_k(t)\Phi^-(t)+g_k(t),\ t\in L_k,\quad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{22.1}$$

Бесконечно удаленная точка, являясь точкой сгущения последовательности особых линий и последовательности полюсов, будет, конечно, особой для функции $\Phi(z)$. Если на характер роста искомой функции при больших $|z|$ будут накладываться некоторые ограничения, мы будем оговаривать их особо.

2°. При решении задачи мы воспользуемся некоторыми понятиями и результатами В. В. Голубева.

Особую линию L кусочно-голоморфной функции $\Phi(z)$, в окрестности которой она отличается от интеграла типа Коши лишь аналитическим слагаемым

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{g(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+\Omega(z), \tag{22.2}$$

будем называть *полярной особой линией первого порядка.* В. В. Голубев рассматривал такую линию как коллективную особую точку, аналогичную полюсу первого порядка, и в представлении (22.2) с этой точки зрения интеграл типа Коши называл *главной частью разложения* $\Phi(z)$ вблизи полярной линии. Чтобы подчеркнуть аналогию между изолированными особыми точками и полярными особыми линиями, он ввел понятие *вычета* $\Phi(z)$ *относительно линии* L, назвав таким образом разделенное на $2\pi i$ значение интеграла от $\Phi(z)$, взятого по некоторой замкнутой линии C, окружающей L и не содержащей внутри себя других особых точек или особых линий $\Phi(z)$. Простые вычисления показывают, что

$$\operatorname{res}_L\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{dz}{2\pi i}\int\limits_L\frac{g(\tau)\,d\tau}{\tau-z}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L g(\tau)\,d\tau \tag{22.3}$$

и что имеет место основная теорема о вычетах:

Теорема 22.1. *Пусть* Γ *есть замкнутая линия, на которой* $\Phi(z)$ *непрерывна и внутри которой находятся особые точки* $a_1, \ldots, a_m$ *и особые полярные линии* $L_1, \ldots, L_p$ *или части этих линий. Тогда*

$$\int_\Gamma \Phi(z)\,dz = 2\pi i\left\{\sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}_{a_j}\Phi(z) + \sum_{k=1}^{p} \operatorname{res}_{L_k}\Phi(z)\right\}. \tag{22.4}$$

Легко получается отсюда и другая известная теорема.

Теорема 22.2. *Если функция* $\Phi(z)$ *имеет в расширенной плоскости конечное число особых точек и особых полярных линий, то сумма всех ее вычетов, включая и вычет в бесконечности, равна нулю.*

При наличии счетного множества $\{L_k\}_1^\infty$ полярных линий первого порядка имеет место теорема, аналогичная теореме Миттаг-Леффлера.

Теорема 22.3. *Существует однозначная функция* $F(z)$, *голоморфная в любой конечной точке плоскости, не лежащей на линиях* L_k, *главная часть которой в окрестности линии* L_k *есть заданный интеграл типа Коши*

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau - z}\,d\tau. \tag{22.5}$$

Для доказательства возьмем вполне определенное положительное число $q < 1$. Интеграл $F_k(z)$ внутри круга $|z| < qR_k$ есть аналитическая функция и может быть разложен в ряд Тейлора

$$F_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{kj} z^j, \tag{22.6}$$

$$c_{kj} = \frac{1}{j!}F_k^{(j)}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau^{j+1}}\,d\tau. \tag{22.7}$$

В силу сходимости ряда (22.6) по заданному $\varepsilon_k > 0$ можно подобрать такой отрезок этого ряда

$$f_k(z) = \sum_{j=0}^{n_k} c_{kj} z^j, \tag{22.8}$$

что $|F_k(z) - f_k(z)| < \varepsilon_k$.

Возьмем теперь сходящийся ряд положительных чисел $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$ и покажем, что ряд

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} [F_k(z) - f_k(z)] \tag{22.9}$$

сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области D, если отбросить в нем некоторое конечное число членов.

Действительно, любую ограниченную область можно заключить внутрь некоторого круга $|z| < R$. Пусть m — первое число, для которого $R < qR_m$. Разобьем ряд (22.6) на две части

$$F(z) = S(z) + r(z) = \sum_{k=1}^{m-1} [F_k(z) - f_k(z)] + \\ + \sum_{k=m}^{\infty} [F_k(z) - f_k(z)]. \qquad (22.10)$$

Ряд $r(z)$ в круге $|z| < R$ сходится абсолютно и равномерно, так как

$$\sum_{k=m}^{\infty} |F_k(z) - f_k(z)| < \sum_{k=m}^{\infty} \varepsilon_k.$$

Значит, по теореме Вейерштрасса $r(z)$ в этом круге представляет аналитическую функцию. Что же касается функции $S(z)$, то она лишь на многочлен отличается от суммы интегралов типа Коши $F_1(z), \dots, F_{m-1}(z)$, и, следовательно, сумма ряда (22.9) в круге является кусочно-голоморфной с линиями скачков $L_1, \dots, L_{m-1}$ и других особенностей, кроме этих $m-1$ линий, не имеет. Так как на основании (22.10) в окрестности любой из этих линий имеем

$$F(z) = F_k(z) + \Omega(z), \qquad (22.11)$$

где $\Omega(z)$ голоморфна вблизи L_k и на L_k (и даже всюду внутри L_k), то все эти линии $L_1, \dots, L_{m-1}$ для $F(z)$ являются полярными особыми линиями первого порядка. Теорема доказана полностью.

3°. Опираясь на теорему 22.3, мы можем найти все решения простейшей задачи о построении кусочно-мероморфной функции $\Phi(z)$ по заданным на L_k скачкам

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g_k(t), \quad t \in L_k, \quad k = 1, 2, \dots \qquad (22.12)$$

В самом деле, имея функции $g_k(t)$, мы можем построить кусочно-голоморфную функцию $F(z)$, представляющую собой сумму ряда (22.9). В силу представления (22.11) имеем

$$F^+(t) - F^-(t) = F_k^+(t) - F_k^-(t) = g_k(t), \quad t \in L_k, \qquad (22.13)$$

откуда следует, что $F(z)$ есть частное решение задачи (22.12). Чтобы построить кусочно-мероморфное решение задачи с полюсами заданных порядков в точках последовательности $\{a_j\}_1^\infty$, возьмем разность $R(z) = \Phi(z) - F(z)$. В силу свойств функций $\Phi(z)$ и $F(z)$ она, очевидно, является аналитической всюду, кроме $z = \infty$ и точек a_j, причем в последних у нее могут быть только полюсы. Значит, $R(z)$ будет мероморфной функцией и общее решение задачи (22.12) запишется в виде

$$\Phi(z) = R(z) + \sum_{k=1}^{\infty} [F_k(z) - f_k(z)]. \tag{22.14}$$

Общий член этого ряда можно записать в другой форме — в форме некоторого интеграла, обобщающего интеграл типа Коши. Для этого в выражение $F_k(z) - f_k(z)$ вставляем значение $f_k(z)$ по формуле (22.8), где коэффициенты c_{kj} заменяем их выражениями (22.7). Получим

$$F_k(z) - f_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} g_k(\tau) \left[\frac{1}{\tau - z} - \sum_{j=0}^{n_k} \frac{z^j}{\tau^{j+1}} \right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z}{\tau} \right)^{n_k+1} d\tau. \tag{22.15}$$

Если главную часть функции $R(z)$ в полюсе a_j обозначить через $H_j[(z - a_j)^{-1}]$, то $R(z)$ можно также представить в виде ряда на основании теоремы Миттаг-Леффлера. На этом основании полученный результат мы можем сформулировать таким образом.

Теорема 22.4. *При любой последовательности $\{L_k\}_1^\infty$ простых гладких замкнутых контуров L_k, лежащих вне друг друга и имеющих единственную точку сгущения $z = \infty$, и при любых заданных на них непрерывных по Гельдеру функциях $g_k(t)$, задача* (22.12) *разрешима и ее общее решение может быть представлено в таком виде*

$$\Phi(z) = P(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ H_j\left(\frac{1}{z - a_j} \right) - h_j(z) \right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z}{\tau} \right)^{n_k+1} d\tau, \tag{22.16}$$

где $P(z)$ — произвольная целая функция, а целые числа n_k и число членов в отрезках $h_j(z)$ тейлоровских разложений H_j с центром в $z = 0$ подобраны так, что оба ряда *сходятся абсолютно и равномерно в любой ограниченной области, если в каждом из них отбросить конечное число членов, содержащих те точки a_j и контуры L_k, которые расположены в этой области.*

4°. Займемся решением следующего вопроса: какие дополнительные требования надо наложить на расположение контуров L_k и на поведение $\Phi(z)$, чтобы целая функция $P(z)$ в формуле (22.16) стала полиномом некоторой степени n и задача (22.12) имела бы конечное число линейно-независимых решений? Ради простоты мы будем вести речь о решениях кусочно-голоморфных.

Возьмем некоторую простую замкнутую кривую Г, не пересекающую контуров L_k, и пусть точка $z=0$ лежит внутри Г. Предполагая, что точка z лежит внутри Г, но вне всех L_k, подсчитаем интеграл

$$I(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\Phi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau$$

при помощи вычетов. На основании теоремы 22.1 будем иметь

$$I(z)=\Phi(z)+\sum_{(\Gamma)}\operatorname{res}_{L_k}\left[\frac{\Phi(\tau)}{\tau-z}\right]=\Phi(z)+S,$$

где сумма вычетов S берется по всем L_k, лежащим внутри Г. Функция $\Phi(\tau)(\tau-z)^{-1}$, как функция переменного τ, имеет внутри Г те же самые особенности (точки и линии), что и функция $\varphi(\tau)(\tau-z)^{-1}$, где $\varphi(z)=\sum\limits_{(\Gamma)}F_k(z)$. Но $\varphi(\tau)(\tau-z)^{-1}$ в расширенной плоскости имеет лишь конечное число особенностей: один простой полюс $\tau=z$ с вычетом $\varphi(z)$ и конечное число полярных линий L_k, заключенных внутри Г. Поэтому по теореме 22.2 $S+\varphi(z)+c_{-1}=0$. В бесконечно удаленной точке $\varphi(\tau)$ как конечная сумма интегралов типа Коши обращается в нуль, и, значит, в окрестности $\tau=\infty$

$$\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}=\frac{c_{-2}}{\tau^2}+\frac{c_{-3}}{\tau^3}+\dots,$$

так что вычет этой функции c_{-1} относительно $\tau=\infty$ равен нулю. Следовательно, $S=-\varphi(z)$ и $I(z)=\Phi(z)-\sum\limits_{(\Gamma)}F_k(z)$, откуда

$$\Phi(z)=\sum_{(\Gamma)}F_k(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\Phi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau. \tag{22.17}$$

Так как $z=0$ не лежит на L_k, находится внутри Γ и для $\Phi(z)$ является регулярной точкой, то в равенстве (22.17) и в равенствах, полученных из него дифференцированием по z, можно положить $z=0$. Это дает

$$\Phi^{(j)}(0)=\sum_{(\Gamma)} F_k^{(j)}(0)+\frac{j!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi(\tau)}{\tau^{j+1}}\,d\tau. \tag{22.18}$$

Вычтем почленно из (22.17) сумму равенств (22.18), умноженных соответственно на $z^j/j!$:

$$\Phi(z)-\sum_{j=0}^{n}\frac{\Phi^{(j)}(0)}{j!}z^j=\sum_{(\Gamma)}\left[F_k(z)-\sum_{j=0}^{n}\frac{F_k^{(j)}(0)}{j!}z^j\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Phi(\tau)\left[\frac{1}{\tau-z}-\sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{\tau^{j+1}}\right]d\tau.$$

Отсюда после несложных вычислений получаем

$$\Phi(z)=P_n(z)+\sum_{(\Gamma)}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{g_k(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{z}{\tau}\right)^{n+1}d\tau+I_{\Gamma}(z), \tag{22.19}$$

$$P_n(z)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\Phi^{(j)}(0)}{j!}z^j,\quad I_{\Gamma}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{z}{\tau}\right)^{n+1}d\tau.$$

Входящая в равенство (22.19) сумма представляет собой, очевидно, частную сумму ряда (22.9), когда в отличие от общего случая все отрезки рядов Тейлора $f_k(z)$ имеют одинаковое число членов $n+1$. Будем теперь расширять Γ, но так, чтобы в новом положении она по-прежнему не пересекала линий L_k и в ограниченной ею области D все время было конечное число этих линий. Ясно, что подобные положения Γ в совокупности составят некоторую последовательность $\{\Gamma_q\}_1^\infty$ вложенных друг в друга кривых. Если при таких деформациях Γ интеграл $I_\Gamma(z)$ будет стремиться к нулю, то для функции $\Phi(z)$ из (22.19) получится представление в виде условно сходящегося ряда

$$\Phi(z)=P_n(z)+\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{(D_q)}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{g_k(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{z}{\tau}\right)^{n+1}d\tau, \tag{22.20}$$

когда в один член ряда объединены все интегралы по L_k, расположенным между двумя кривыми Γ_q и Γ_{q+1} последовательности.

Чтобы оценить интеграл $I_\Gamma(z)$, обозначим через d и l, соответственно, расстояние Г до начала и длину Г. Тогда $|\tau| \geqslant d$, $|\tau - z| \geqslant d - |z|$ и

$$|I_\Gamma(z)| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{2\pi} \frac{l}{d(d-|z|)} \max_{\tau \in \Gamma} \left| \frac{\Phi(\tau)}{\tau^n} \right|. \tag{22.21}$$

Отсюда видно, что если последовательность $\{\Gamma_q\}$ такова, что отношение l_q/d_q все время не превосходит некоторое конечное число A и при больших $|\tau|$ на всех кривых Γ_q $|\Phi(\tau)| \leqslant N|\tau|^n$, $N > 0$, $n \geqslant 0$, то при любом заданном сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число d, что $|I_\Gamma(z)| < \varepsilon$, так что ряд (22.20) действительно будет сходиться. Из оценки (22.21) следует, что сходимость будет равномерной в любой ограниченной области, не содержащей точек контуров L_k.

Если совокупность контуров L_k, расположенных в D_q, обозначить через L_q^*, а через $g_q^*(t)$ обозначить функцию на L_q^*, совпадающую на каждом $L_k \subset L_q^*$ с заданным скачком $g_k(t)$, то представление (22.19) можно переписать так:

$$\Phi(z) = P_n(z) + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_q^*} \frac{g_q^*(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{n+1} d\tau. \tag{22.22}$$

Итогом изложенного является

Теорема 22.5. *Если существует последовательность* $\{\Gamma_q\}_1^\infty$ *вложенных друг в друга замкнутых кривых, содержащих внутри себя точку* $z = 0$, *не пересекающихся с контурами* L_k *и таких, что на всех* Γ_q *отношение* l_q/d_q, *где* l_q — *длина кривой* Γ_q, *а* d_q — *ее расстояние до начала, не превосходит некоторое конечное число* A, *то все решения задачи* (22.12), *удовлетворяющие на всех* Γ_q *условию*

$$|\Phi(z)| \leqslant N|z|^n, \quad N > 0, \quad n \geqslant 0, \tag{22.23}$$

определяются формулами (22.19) *или* (22.22), *в которых ряды равномерно сходятся в любой ограниченной области, не содержащей точек контуров* L_k.

Отметим два частных случая.

1. Простой гладкий замкнутый контур L_0 или конечная совокупность таких контуров лежит внутри полосы $-\pi \leqslant \operatorname{Re} z < \pi$, все остальные линии L_k получаются из L_0 преобразованиями однопериодической группы $z + 2\pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Множество $\{L_k\}_{-\infty}^\infty$ удовлетворяет условиям теоремы 22.5. В качестве системы контуров $\{\Gamma_q\}_1^\infty$ можно взять границы следующих прямоугольников с центром

в начале и сторонами, параллельными координатным осям: Γ_1 есть граница части полосы $-\pi \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \pi$, где лежит L_0; за длину основания Γ_q можно взять $2\pi(2q-1)$, а высоту — не меньше $2\pi(2q-1)$. Если отыскивать периодические решения $\Phi(z) = \Phi(z + 2\pi)$, ограниченные на всех Γ_q $(n = 0)$, что возможно лишь при $g_k(t) = g(t - 2\pi k)$, то такие решения, являясь ограниченными всюду в полосе периода, существуют (§ 19). На основании теоремы 22.5 они будут представлять собой с точностью до постоянного слагаемого равномерно сходящийся ряд

$$\Phi(z) = C + \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{g(\tau)\, d\tau}{\tau(\tau - z)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)\, d\tau}{\tau(\tau - z)} + \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{L_{-k}} \frac{g_{-k}(\tau)\, d\tau}{\tau(\tau - z)} \right\}.$$

Этот ряд легко просуммировать. Для этого в интегралах по L_k за переменное интегрирования вместо τ надо взять $\tau + 2\pi k$. Это дает

$$\Phi(z) = C + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g(\tau) \left\{ \frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2(\tau - z)}{(\tau - z)^2 - 4\pi^2 k^2} - \frac{2\tau}{\tau^2 - 4\pi^2 k^2} \right] \right\} d\tau$$

или, что все равно,

$$\Phi(z) = C + \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{L_0} g(\tau) \left[\operatorname{ctg} \frac{\tau - z}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2} \right] d\tau.$$

С точностью до постоянного слагаемого получили одно-периодически аналог интеграла типа Коши, которым мы пользовались в § 19.

2. Пусть L_0 лежит внутри параллелограмма P с вершинами 0, ω_1, $\omega_1 + \omega_2$, ω_2, а остальные линии последовательности $\{L_k\}$ конгруэнтны L_0 относительно преобразований двоякопериодической группы $z + \Omega$, $\Omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$. Примем за Γ_1 границу параллелограмма P, за Γ_2 — границу параллелограмма, составленного из 9 конгруэнтных параллелограммов периода, центром которого является P, и т. д. Будем отыскивать двоякопериодические решения с периодами ω_1 и ω_2, ограниченные на всех Γ_q. Очевидно, эти решения

совпадают с кусочно-голоморфными решениями, ограниченными в параллелограмме периодов, а они, как нам известно (§ 20), существуют лишь тогда, когда все скачки конгруэнтны друг другу $g_\Omega(t) = g(t - \Omega)$ и когда

$$\int_{L_0} g(\tau)\, d\tau = 0. \tag{22.24}$$

По теореме 22.5 все эти решения запишутся в виде ряда

$$\Phi(z) = C + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{(D_q} \frac{z}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)\, d\tau}{\tau(\tau - z)} =$$

$$= C + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{(D_q)} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g(\tau) \left[\frac{1}{\tau - z + \Omega} - \frac{1}{\tau + \Omega} \right] d\tau,$$

который с учетом условия (22.24) легко просуммировать

$$\Phi(z) = C + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} g(\tau)\, [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau)]\, d\tau.$$

Получили хорошо знакомый нам результат.

Отметим следующий интересный факт. Если от найденного решения вычислить интеграл по границе параллелограмма периодов P, то на основании теоремы 22.1 получим

$$\int_{\Gamma_1} \Phi(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{res}_{L_0} \Phi(z) = - \int_{L_0} g(\tau)\, d\tau.$$

Значит, условие (22.24) говорит о том, что для двоякопериодических решений задачи о скачке остается справедливым одно из основных свойств эллиптических функций: сумма вычетов относительно всех особенностей, лежащих внутри параллелограмма периодов, равна нулю.

5°. В представлении (22.19) интеграл $I_\Gamma(z)$ с расширением Γ может стремиться к нулю и при более слабых ограничениях на кривые Γ_q и поведение $\Phi(z)$ на этих кривых. Оценивая $I_\Gamma(z)$ по модулю, можем записать

$$|I_\Gamma(z)| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{2\pi} \int_\Gamma \left| \frac{\Phi(\tau)}{\tau^{n+2}}\, d\tau \right| \cdot \max_{\tau \in \Gamma} \left| 1 - \frac{z}{\tau} \right|^{-1}.$$

Когда $d \to \infty$, то есть, когда Γ уходит в бесконечность всеми своими точками по некоторой последовательности кривых Γ_q, не пересекающихся с контурами L_k, то при фиксированном z $\max\limits_{\tau\in\Gamma} |1-z|\tau|^{-1}\to 1$. Следовательно, представление (22.20) или (22.22) имеет место, если

$$\int\limits_{\Gamma_q}\left|\frac{\Phi(\tau)}{\tau^{n+2}}\,d\tau\right|\to 0 \quad \text{при} \quad \min_{\tau\in\Gamma}|\tau|\to\infty \ (q\to\infty). \tag{22.25}$$

Если Γ — любая кривая последовательности $\{\Gamma_q\}$ и D_Γ — область, лежащая внутри Γ, то из представления (22.20) получаем

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{\Phi(z)}{z^{n+2}}\,dz=-\sum_{L_k\in D_\Gamma}\int\limits_{L_k}\frac{g_k(\tau)}{\tau^{n+2}}\,d\tau=r_q. \tag{22.26}$$

Величина r_q представляет собой, очевидно, остаток числового ряда

$$\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{(D_q)}\int\limits_{L_k}\frac{g_k(\tau)}{\tau^{n+2}}\,d\tau. \tag{22.27}$$

Так как

$$|r_q|\leqslant\int\limits_{\Gamma}\left|\frac{\Phi(z)}{z^{n+2}}\,dz\right|\leqslant\frac{Nl}{d^2}\leqslant\frac{NA}{d},$$

то в условиях теоремы 22.5 или при выполнении условия (22.25) $|r_q|\to 0$ при $q\to\infty$. Значит, если решение задачи (22.12) удовлетворяет на некоторой последовательности кривых $\{\Gamma_q\}$ условиям (22.23) или (22.25), то скачки $g_k(t)$ *необходимо* таковы, что ряд (22.27) сходится.

Обратное несправедливо. Сходимость ряда (22.27) не обеспечивает даже существования решения задачи (22.12) вида (22.20). Действительно, оценивая общий член $u_k(z)$ ряда в формуле (22.20), имеем

$$|u_k(z)|=\left|\sum_{(D_q)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{g_k(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{z}{\tau}\right)^{n+1}d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|z|^{n+1}}{2\pi}\sum_{(D_q)}\max_{\tau\in L_k}\left|1-\frac{z}{\tau}\right|^{-1}\int\limits_{L_k}\left|\frac{g_k(\tau)}{\tau^{n+2}}\,d\tau\right|.$$

Так как $|\tau|\geqslant R_k$ при $\tau\in L_k$, то

$$\left|1-\frac{z}{\tau}\right|\geqslant\left|1-\left|\frac{z}{\tau}\right|\right|\geqslant\left|1-\frac{|z|}{R_k}\right|.$$

При достаточно большом k величина $|z|/R_k$ будет сколь угодно малой. Поэтому можно подобрать такой номер k_0, чтобы при всех $k \geqslant k_0$ выполнялись неравенства $|1-|z|/R_k| \geqslant 2^{-1}$. Тогда

$$|u_k(z)| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{\pi} \sum_{(D_q)} \int_{L_k} \left| \frac{g_k(\tau)}{\tau^{n+2}} d\tau \right|$$

и ряд в формуле (22.20) будет сходиться (равномерно), если сходится числовой ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} \sum_{(D_q)} \int_{L_k} \left| \frac{g_k(\tau)}{\tau^{n+2}} d\tau \right|, \tag{22.28}$$

а не ряд (22.27).

Заметим, что сходимость ряда (22.28) влечет абсолютную сходимость ряда (22.27).

Итогом наших рассуждений является

Теорема 22.6. *Если в краевых условиях* (22.12) *функции* $g_k(t)$ *таковы, что при некотором целом* $n \geqslant 0$ *ряд* (22.28) *сходится, то задача* (22.12) *имеет частное решение вида*

$$F(z) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{(D_q)} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{n+1} d\tau. \tag{22.29}$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области, не содержащей точек контуров L_k, *если в нем отброшено некоторое конечное число членов.*

Сходимость ряда (22.28), обеспечивая существование решения вида (22.29), недостаточна для того, чтобы это решение удовлетворяло хотя бы условиям (22.25). Это сразу следует из равенства (22.26).

6°. Тем же путем, каким мы пришли к теореме 22.6, можно конкретизировать подбор целых n_k при построении частного решения (22.9). На основании формулы (22.15) запишем это решение в виде

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{n_k+1} d\tau \tag{22.30}$$

и оценим по модулю общий член этого ряда $v_k(z)$, считая z принадлежащим некоторому кругу $|z| \leqslant r < \infty$. Так как $|\tau| \geqslant R_k$ и $|\tau - z| \geqslant |R_k - |z||$ при $\tau \in L_k$, то при $|z| \neq R_k$ получим

$$|v_k(z)| \leqslant \frac{A_k}{R_k}\left|\frac{z}{R_k}\right|^{n_k+1}\left|1-\frac{|z|}{R_k}\right|^{-1},$$

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_k} |g_k(\tau)\,d\tau|. \tag{22.31}$$

Подберем такой номер k_0, чтобы при всех $k \geqslant k_0$ выполнялись неравенства $|1-|z|/R_k| \geqslant 2^{-1}$. Тогда

$$|v_k(z)| \leqslant \frac{2A_k}{R_k}\left|\frac{z}{R_k}\right|^{n_k+1} \tag{22.32}$$

и ряд (22.30) абсолютно сходится при z из круга $|z| \leqslant r$, когда ряд

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{R_k}\left(\frac{z}{R_k}\right)^{n_k+1} \tag{22.33}$$

абсолютно сходится при любом z. Отсюда легко получается

Теорема 22.7. *Если целые числа $n_k \geqslant 0$ выбраны так, что ряд* (22.33) *абсолютно сходится при любом z, то ряд* (22.30) *равномерно сходится в любом конечном круге $|z| \leqslant r$* (*после отбрасывания определенного конечного числа членов*).

В самом деле, выбирая номер k_0 указанным выше образом, видим, что в силу неравенств (22.32) при $|z| \leqslant r$ ряд (22.30) мажорируется сходящимся числовым рядом с положительными членами

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{R_k}\left(\frac{r}{R_k}\right)^{n_k+1}.$$

Если все числа n_k положить равными одному и тому же целому $n \geqslant 0$, то ряд (22.33) превратится в произведение z^{n+1} на числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k R^{-(n+2)}. \tag{22.34}$$

Это приводит к следующей теореме.

Теорема 22.8. *Если $n \geqslant 0$ есть целое число, при котором ряд* (22.34) *сходится, то ряд* (22.30) *при всех $n_k = n$ сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области, не содержащей точек контуров L_k* (*после отбрасывания соответствующего числа членов*).

В дальнейшем мы часто за $n \geqslant 0$ будем принимать наименьшее целое число, при котором сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k R_k^{-(n+1)}, \quad a_k = \mathrm{En}(A_k) + 1, \tag{22.35}$$

где символ En означает целую часть числа A_k. Ряд (22.34) при этом n также сходится и по теореме 22.8 задача (22.12) имеет частное решение

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{n+1} d\tau. \tag{22.36}$$

На некоторых множествах M комплексной плоскости, не содержащих точек контуров L, можно изучить поведение этого частного решения при больших $|z|$.

Допустим, что $M = \{\Gamma_q\}_1^{\infty}$ есть последовательность замкнутых кривых, вложенных друг в друга и не пересекающихся с контурами L_k. Последнее свойство мы охарактеризуем существованием такого положительного числа $\delta > 0$, что при любых k и q $\min\limits_{\tau \in L_k,\ z \in \Gamma_q} |\tau - z| \geqslant \delta$. Тогда, обозначая через S сумму ряда (22.35), из формулы (22.36) получим

$$|F(z)| < S\delta^{-1} |z|^{n+1}, \quad z \in \Gamma_q, \quad q = 1, 2, \ldots \tag{22.37}$$

Сложнее получается оценка в случае, когда M есть угол $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$, а все контуры L_k расположены вне угла $\alpha - \gamma \leqslant \arg z \leqslant \beta + \gamma$, где $\gamma > 0$. При этих условиях для всех $z \in M$ и $\tau \in \{L_k\}$ имеем $\gamma < \arg(z/\tau) < 2\pi - \gamma$, откуда сразу следует, что

$$|\tau - z| \geqslant \sin\frac{\gamma}{2}(|\tau| + |z|). \tag{22.38}$$

Чтобы проверить справедливость этого неравенства, надо вычислить минимум функции $|r - e^{i\theta}|/(r + 1)$ при $0 \leqslant r < \infty$ и $\gamma < \theta < 2\pi - \gamma$.

На основании неравенства (22.38) оценка сверху для суммы ряда (22.36) получается аналогично соответствующей оценке логарифма модуля канонического произведения в теории целых функций [36, с. 18—22]. Применяя введенные ранее обозначения, получаем:

$$|F(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{n+1} d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{cosec}\frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{R_k+|z|}\left|\frac{z}{R_k}\right|^{n+1}<$$

$$<|z|^{n+1}\operatorname{cosec}\frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{(R_k+|z|)R_k^{n+1}}=$$

$$=|z|^{n+1}\operatorname{cosec}\frac{\gamma}{2}\int_0^{\infty}\frac{d\nu(t)}{(t+|z|)\,t^{n+1}}.$$

В этом интеграле Стилтьеса $\nu(t)$ есть считающая функция последовательности чисел R_k, в которой каждое R_k повторяется a_k раз:

$$\underbrace{R_1, \ldots, R_1}_{a_1}, \quad \underbrace{R_2, \ldots, R_2}_{a_2}, \ldots \tag{22.39}$$

Используя известную оценку этого интеграла [36, с. 22], будем иметь

$$|F(z)|<|z|^n\operatorname{cosec}\frac{\gamma}{2}\left(\int_0^{|z|}\frac{\nu(t)\,dt}{t^{n+1}}+|z|\int_{|z|}^{\infty}\frac{\nu(t)\,dt}{t^{n+2}}\right). \tag{22.40}$$

Чтобы коротко сформулировать выводы, получающиеся из оценки (22.40), используем следующую терминологию. Если

$$\mu(\Phi,\ r,\ \alpha,\ \beta)=\max_{\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta}|\Phi(re^{i\theta})|,$$

то величины

$$\rho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln\mu(\Phi,\ r,\ \alpha,\ \beta)}{\ln r},\quad \sigma=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\mu(\Phi,\ r,\ \alpha,\ \beta)}{r^{\rho}}$$

называются, соответственно, *порядком* и *типом* функции $\Phi(z)$ внутри угла $\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta$.

Теорема 22.9. *В рассматриваемом угле функция* $\exp F(z)$, *где* $F(z)$ *есть сумма ряда* (22.36), *имеет тот же порядок* ρ, *что и считающая функция* $\nu(t)$ *последовательности* (22.39), *и тот же тип, если* ρ *— нецелое.*

7°. Если в ряду (22.33) положить $n_k=k$, то этот ряд становится степенным

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{R_k}\left(\frac{z}{R_k}\right)^{k+1}.$$

Он будет сходиться при любом z, если

$$\lim_{k\to\infty} R_k^{-1} \sqrt[k+1]{A_k} = 0.$$

Это условие будет выполненным, если $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k+1]{A_k} < \infty$ и, в частности, если все A_k ограничены. Значит, справедлива

Теорема 22.10. *Ограниченность последовательности чисел A_k, определенных формулой* (22.31), *является достаточным условием для того, чтобы задача* (22.12) *имела частное решение* (22.30), *где $n_k = k$.*

Можно указать необходимые и достаточные условия, при которых целые числа n_k в ряду (22.30) образуют неограниченную возрастающую последовательность.

Теорема 22.11. *Для того чтобы решение задачи* (22.12) *имело вид* (22.30), *где целые числа n_k, обеспечивающие абсолютную и равномерную сходимость ряда, составляли последовательность вида*

$$-1 = n_1 < n_2 < n_3 < \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} n_k = \infty, \tag{22.41}$$

необходимо и достаточно, чтобы сумма этого ряда удовлетворяла условиям

$$\int_{\Gamma_q} F(z)\, z^{-(j+1)} dz = 0, \quad j = n_q + 1, \ldots, n_{q+1}; \; q = 1, 2, \ldots, \tag{22.42}$$

если интегрирование производится по любому замкнутому контуру Γ_q, внутри которого лежат точка $z = 0$ и все контуры L_k, $k \leqslant q$.

Допустим, что задача (22.12) имеет решение вида (22.30) с целыми n_k, удовлетворяющими условиям (22.41). В силу равномерной сходимости ряда $F(z)$ ряды $F(z)\, z^{-(j+1)}$ можно интегрировать почленно вдоль любой кривой, не пересекающейся с контурами L_k. Запишем равенство

$$\frac{F(z)}{z^{j+1}} = \Big(\sum_{k=1}^{q} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \Big) \frac{z^{n_k - j}}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)\, d\tau}{\tau^{n_k+1}(\tau - z)} .$$

Интеграл от первой суммы по Γ_q можно вычислить при помощи вычетов, при этом по теореме 22.2 надо подсчитать лишь вычет относительно точки $z = \infty$; но этот вычет равен нулю, так как наша первая сумма на бесконечности имеет нуль не ниже второго порядка. Во второй сумме каждое слагаемое представляет функцию, аналитическую внутри Γ_q и интеграл по Γ_q будет нулем по теореме Коши. Необходимость условий (22.42) доказана.

При доказательстве достаточности берем общее кусочно-голоморфное решение задачи (22.12), которое на основании теоремы 22.4 можно записать в виде

$$\Phi(z) = P(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{m_k+1} d\tau, \qquad (22.43)$$

где $P(z)$ — произвольная целая функция, а последовательность целых чисел $m_k \geqslant 0$ подобрана так, что ряд (22.43) сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области, не содержащей точек контуров L_k. Покажем, что формула (22.43) определяет единственное решение, удовлетворяющее условиям (22.42), и это решение имеет вид (22.30) с заданными n_k, удовлетворяющими условиям (22.41).

Для этого запишем $P(z)$ в виде ряда с неопределенными коэффициентами

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k.$$

Тогда

$$\int_{\Gamma_q} \frac{\Phi(z)}{z^{j+1}} dz = 2\pi i \alpha_j + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Gamma_q} \frac{z^{m_k-j}\, dz}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)\, d\tau}{\tau^{m_k+1}(\tau - z)} =$$

$$= 2\pi i \alpha_j + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)\, d\tau}{\tau^{m_k+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_q} \frac{z^{m_k-j}\, dz}{\tau - z}.$$

Легко подсчитать, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_q} \frac{z^{m_k-j} dz}{\tau - z} = \begin{cases} 0, & \text{когда } m_k < j \text{ и } L_k \text{ внутри } \Gamma_q, \\ \tau^{m_k-j}, & \text{когда } m_k < j \text{ и } L_k \text{ вне } \Gamma_q, \\ -\tau^{m_k-j}, & \text{когда } m_k \geqslant j \text{ и } L_k \text{ внутри } \Gamma_q, \\ 0, & \text{когда } m_k \geqslant j \text{ и } L_k \text{ вне } \Gamma_q, \end{cases}$$

и условия (22.42) приводят к равенствам

$$2\pi i \alpha_j - \sum_{m_k \geqslant j} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)\, d\tau}{\tau^{j+1}} + \sum_{m_k < j} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)\, d\tau}{\tau^{j+1}} = 0,$$

откуда находим

$$\alpha_j = \sum_{m_k \geqslant j} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)\, d\tau}{\tau^{j+1}} - \sum_{m_k < j} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)\, d\tau}{\tau^{j+1}},$$

$$j = n_q + 1, \ldots, n_{q+1}; \; q = 1, 2, \ldots$$

Эти формулы определяют все коэффициенты α_j, $j=0, 1, \ldots$ Вставим значения α_j в выражение $P(z)$ и, чтобы объединить оба ряда в формуле (22.43), перепишем $P(z)$ в другой форме, когда каждый член ряда содержит интеграл лишь по одному контуру L_k. Нетрудно видеть, что интеграл по L_1 будет входить до тех пор в формулы, определяющие коэффициенты α_j, пока $j \leqslant m_1$, и обязательно со знаком плюс, ибо L_1 лежит внутри всех Γ_q. Интеграл по L при $m_2 < n_2$ будет входить со знаком минус во все α_j с номерами $j = m_2 + 1, \ldots, n_2$, а при $m_2 > n_2$ со знаком плюс во все α_j, $j = n_2 + 1, \ldots, m_2$. При $m_2 = n_2$ интеграл по L_2 вообще не войдет в формулы для α_j, ибо со знаком минус он мог войти лишь при $j = 1, \ldots, n_2$, но здесь $j \leqslant m_2$, а со знаком плюс при $j = n_2 + 1$, $n_2 + 2, \ldots$, но здесь $j > m_2$. В общем случае интеграл по L_k при $m_k < n_k$ войдет со знаком минус во все α_j с номерами $j = m_k + 1, \ldots, n_k$, а при $m_k > n_k$ со знаком плюс во все α_j с номерами $j = n_k + 1, \ldots, m_k$. Поэтому функцию $P(z)$ можно записать в виде такого ряда

$$P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z), \quad u_1(z) = \sum_{j=0}^{m_1} \frac{z^j}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g_1(\tau)\, d\tau}{\tau^{j+1}},$$

$$\underset{k \geqslant 2}{u_k(z)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=n_k+1}^{m_k} \frac{z^j}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)\, d\tau}{\tau^{j+1}}, & m_k > n_k; \\ \displaystyle -\sum_{j=m_k+1}^{n_k} \frac{z^j}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)\, d\tau}{\tau^{j+1}}, & m_k < n_k. \end{cases}$$

Отсюда сразу видно, что правая часть формулы (22.43) равна функции $F(z)$, представляющей сумму ряда (22.30) при условиях (22.41). Доказательство теоремы завершено.

Из приведенного доказательства следует, что если в условии теоремы вместо $n_1 = -1$ взять любое $n_1 \geqslant 0$, то в формуле (22.43) из условий (22.42) определятся все коэффициенты α_j, начиная с номера $n_1 + 1$. Первые $n_1 + 1$ коэффициентов останутся произвольными. Поэтому в этом случае в условии теоремы ряд (22.30) надо заменить другим решением задачи (22.12), а именно, решением

$$F(z) = P_{n_1}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{n_k+1} d\tau, \tag{22.44}$$

где $P_{n_1}(z)$ есть произвольный многочлен степени n_1.

Ничем не отличается доказательство аналогичной теоремы для обычных мероморфных функций с простыми полюсами.

Теорема 22.12. *Для того чтобы мероморфная функция $F(z)$ с простыми полюсами $a_1, a_2, \ldots$ и главными частями*

$$\frac{c_1}{z-a_1}, \quad \frac{c_2}{z-a_2}, \ldots$$

имела вид

$$F(z) = P_{n_1}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z-a_k} \left(\frac{z}{a_k}\right)^{n_k+1}, \tag{22.45}$$

где целые числа n_k образуют возрастающую последовательность вида

$$-1 \leqslant n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

и обеспечивают абсолютную и равномерную сходимость ряда (22.45) *в любом конечном круге (после отбрасывания членов, имеющих в этом круге полюсы), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (22.42), *где замкнутый контур Γ_q не проходит ни через один из полюсов и содержит внутри себя те полюсы a_k, для которых $n_k \leqslant n_q$.*

В следующем параграфе мы применим две последних теоремы при построении одного класса решений однородной задачи.

§ 23. ОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА

Сформулированную в пункте 1° предыдущего параграфа задачу мы будем называть однородной, если в граничных условиях (22.1) все $g_k(t) \equiv 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, так что речь будет идти о построении кусочно-голоморфной или кусочно-мероморфной функции $\Phi(z)$, непрерывные граничные значения которой на каждом замкнутом контуре L_k из заданного множества $\{L_k\}_1^\infty$ связаны соотношением

$$\Phi^+(t) = G_k(t)\,\Phi^-(t), \quad t \in L_k, \tag{23.1}$$

при условии, что $G_k(t) \in H$ и $G_k(t) \neq 0$ всюду на L_k.

Мы покажем, что схема решения однородной задачи в случае счетного множества контуров остается той же самой, что и в случае конечного числа контуров: строится каноническая функция, то есть частное кусочно-голоморфное решение задачи (23.1), нигде на конечном расстоянии не имеющее нулей, в том числе и на контурах L_k, при помощи которого задача сводится к построению аналитической функции, имеющей в расширенной плоскости лишь известные особые точки.

1°. Прежде чем строить каноническую функцию, обратим внимание на следующее обстоятельство. Если в краевых условиях (22.12) каждая из функций $g_k(t)$ имеет на соответствующем контуре L_k конечное число точек разрыва первого рода $t_{k,1}, \ldots, t_{k,m_k}$, так что

$$\Delta_{kj} = g_k(t_{kj} - 0) - g_k(t_{kj} + 0) \neq 0, \quad j = 1, \ldots, m_k,$$

а на каждой замкнутой дуге $t_{k,j}t_{k,j+1} \in L_k$ по-прежнему $g_k(t) \in H$, то теоремы 22.3 и 22.4 остаются справедливыми и, следовательно, решениями задачи (22.12) будут функции, представляющие из себя суммы рядов (22.9) или (22.14) с той лишь разницей, что теперь эти функции непрерывно продолжимы на контуры L_k всюду, кроме точек $t_{k,1}, \ldots, t_{k,m_k}$, где они имеют логарифмические особенности, что сразу видно из представления (22.11).

В дальнейшем нам понадобится такое представление функции (22.9) или, что все равно, функции (22.30), когда все ее логарифмические особенности выделены одновременно в явном виде. Для этого, используя формулы (6.5), запишем интеграл типа Коши $F_k(z)$ в таком виде

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\widetilde{g}_k(\tau)\, d\tau}{\tau - z} +$$

$$+ \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m_k} \dfrac{\Delta_{kj}}{2\pi i} \ln(z - t_{kj}), & z \in D_k^+, \\ \sum\limits_{j=1}^{m_k} \dfrac{\Delta_{kj}}{2\pi i} \ln \dfrac{z - t_{kj}}{z - z_k}, & z \in D_k^-, \end{cases} \tag{23.2}$$

где z_k — произвольная точка области D_k^+, а

$$\widetilde{g}_k(t) = g_k(t) - \sum_{j=1}^{m_k} \varphi_{kj}(t)$$

непрерывная всюду на L_k функция, если $\varphi_{kj}(t) = \dfrac{\Delta_{kj}}{2\pi i} \ln(t - z_k)$ есть граничное значение из D_k^+ одной из однозначных ветвей функции $\dfrac{\Delta_{kj}}{2\pi i} \ln(z - z_k)$, на которые она распадается в плоскости с разрезом (z_k, t_{kj}, ∞), соединяющим z_k и $z=\infty$ и проходящим через t_{kj}, ибо при этом $\varphi_{kj}(t_{kj}-0)-\varphi_{kj}(t_{kj}+0)=\Delta_{kj}$. Возьмем теперь общий член ряда (22.9)

$$F_k(z)-f_k(z)=F_k(z)-\sum_{l=0}^{n_k} c_{kl}z^l$$

и, используя (23.2), подсчитаем

$$c_{kl}=\frac{1}{l!}F_k^{(l)}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\widetilde{g}_k(\tau)\,d\tau}{\tau^{l+1}}+$$

$$+\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dz^l}\left(\sum_{j=1}^{m_k}\frac{\Delta_{kj}}{2\pi i}\ln\frac{z-t_{kj}}{z-z_k}\right)_{z=0}.$$

После элементарных преобразований получим

$$c_{k0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\widetilde{g}_k(\tau)\,d\tau}{\tau}+\sum_{j=1}^{m_k}\frac{\Delta_{kj}}{2\pi i}\left[\ln(-t_{kj})-\ln(-z_k)\right],$$

$$c_{kl}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\widetilde{g}_k(\tau)\,d\tau}{\tau^{l+1}}+\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{\Delta_{kj}}{2\pi i}\left(\frac{1}{z_k^l}-\frac{1}{t_{kj}^l}\right),\quad l=1,\ldots,n_k$$

и тогда

$$F_k(z)-f_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\widetilde{g}_k(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{z}{\tau}\right)^{n_k+1}d\tau+$$

$$+\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{m_k}\frac{\Delta_{kj}}{2\pi i}\left[\ln\left(1-\frac{z}{t_{kj}}\right)+\sum_{l=1}^{n_k}\frac{z^l}{lt_{kj}^l}\right]+p_{n_k}(z), & z\in D_k^+,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m_k}\frac{\Delta_{kj}}{2\pi i}\left[\ln\left(1-\frac{z}{t_{kj}}\right)+\sum_{l=1}^{n_k}\frac{z^l}{lt_{kj}^l}\right]- & \\ \displaystyle-\sum_{j=1}^{m_k}\frac{\Delta_{kj}}{2\pi i}\left[\ln\left(1-\frac{z}{z_k}\right)+\sum_{l=1}^{n_k}\frac{z^l}{lz_k^l}\right], & z\in D_k^-.\end{cases}$$

Здесь

$$p_{n_k}(z)=\sum_{j=1}^{m_k}\frac{\Delta_{kj}}{2\pi i}\left[\ln(-z_k)-\sum_{l=1}^{n_k}\frac{z^l}{lz_k^l}\right]$$

есть полином степени n_k. Применяя интегральную формулу Коши и интегральную теорему Коши, видим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{p_{n_k}(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{z}{\tau}\right)^{n_k+1}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{p_{n_k}(\tau)\,d\tau}{\tau-z}-$$

$$-\sum_{l=0}^{n_k}\frac{z^l}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{p_{n_k}(\tau)\,d\tau}{\tau^{l+1}}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{p_{n_k}(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=$$

$$=\begin{cases}p_{n_k}(z), & z\in D_k^+,\\ 0\;, & z\in D_k^-.\end{cases}$$

Поэтому $p_{n_k}(z)$ можно ввести под знак интеграла, присоединив его в качестве слагаемого в $\tilde{g}_k(t)$. Если для удобства использовать первичные множители Вейерштрасса

$$E(u,\ q)=(1-u)\exp\left(\sum_{l=1}^{q}u^l|l\right),\quad E(u,\ 0)=1-u,$$

то $F_k(z)-f_k(z)$ можно записать в таком виде

$$F_k(z)-f_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{g_k^*(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{z}{\tau}\right)^{n_k+1}d\tau+$$

$$+\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{m_k}\frac{\Delta_{kj}}{2\pi i}\ln E\left(\frac{z}{t_{kj}},\ n_k\right), & z\in D_k^+,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m_k}\frac{\Delta_{kj}}{2\pi i}\ln E\left(\frac{z}{t_{kj}},\ n_k\right)-\sum_{j=1}^{m_k}\frac{\Delta_{kj}}{2\pi i}\ln E\left(\frac{z}{z_k},\ n_k\right) & z\in D_k^-,\end{cases}\tag{23.3}$$

где

$$g_k^*(t)=\tilde{g}_k(t)+p_{n_k}(t)=g_k(t)-\sum_{j=1}^{m_k}\psi_{kj}(t),\tag{23.4}$$

$$\psi_{kj}(t)=\frac{\Delta_{kj}}{2\pi i}\ln E\left(\frac{t}{z_k},\ n_k\right).\tag{23.5}$$

На основании формул (23.3) частное решение (22.9) задачи (22.12) представится в следующей форме

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{g_k^*(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{z}{\tau}\right)^{n_k+1}d\tau+$$

$$+\begin{cases}\ln\omega(z)+\ln\Omega(z)+\sum\limits_{j=1}^{m_k}\dfrac{\Delta_{kj}}{2\pi i}\ln E\left(\dfrac{z}{z_k},\ n_k\right),\\ \qquad z\in D_k^+,\ k=1,\ 2,\dots\\ \ln\omega(z)+\ln\Omega(z),\quad z\in D^-=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}D_k^-.\end{cases}\tag{23.6}$$

Числа n_k в этом представлении таковы, что абсолютно и равномерно сходятся одновременно и ряд из интегралов, и оба бесконечных произведения

$$\omega(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m_k}\left\{E\left(\frac{z}{t_{kj}},\ n_k\right)\right\}^{\Delta_{kj}/2\pi i},$$

$$\Omega(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m_k}\left\{E\left(\frac{z}{z_k},\ n_k\right)\right\}^{-\Delta_{kj}/2\pi i}.$$

2°. Займемся построением канонической функции. Положим $\varkappa_k=\operatorname{Ind}G_k(t)$ и, выбрав на каждом L_k некоторую точку t_k за начало обхода, фиксируем вполне определенную ветвь $\ln G_k(t)$. При $\varkappa_k\neq 0$ t_k для этой функции будет единственной на L_k точкой разрыва первого рода, в которой

$$\Delta_k=\ln G_k(t_k-0)-\ln G_k(t_k+0)=2\pi i\varkappa_k.$$

Принимая $\ln G_k(t)$ за скачок некоторой кусочно-голоморфной функции $\gamma(z)$, на основании вышеизложенного будем иметь

$$\ln G_k(t)=\gamma^+(t)-\gamma^-(t),\quad t\in L_k,\tag{23.7}$$

$$\gamma(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\ln G_k(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{z}{\tau}\right)^{n_k+1}d\tau=\gamma_*(z)+$$

$$+\begin{cases}\ln\omega(z)+\ln\Omega(z)+\varkappa_k\ln E\left(\dfrac{z}{z_k},\ n_k\right),\ z\in D_k^+,\ k=1,2,\dots\\ \ln\omega(z)+\ln\Omega(z),\quad z\in D^-,\end{cases}\tag{23.8}$$

где $\gamma_*(z)$ есть ряд из интегралов того же самого вида, что и ряд (23.8), только плотностями их являются непрерывные на L_k функции $\ln G_k(t)-\psi_k(t)$, если под $\psi_k(t)=\varkappa_k\ln E\left(\dfrac{t}{z_k},\ n_k\right)$

понимать значение на L_k одной из однозначных ветвей функции $\varkappa_k \ln E\left(\frac{z}{z_k}, n_k\right)$ в плоскости с разрезом (z_k, t_k, ∞); при этом часть разреза (t_k, ∞) есть простая линия, лежащая в D^- без пересечений с другими разрезами (z_j, t_j, ∞); бесконечные произведения

$$\omega(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E^{\varkappa_k}\left(\frac{z}{t_k}, n_k\right), \quad \Omega(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E^{-\varkappa_k}\left(\frac{z}{z_k}, n_k\right) \tag{23.9}$$

сходятся одновременно с рядами $\gamma(z)$ и $\gamma_*(z)$ абсолютно и равномерно в любой ограниченной замкнутой области, не содержащей линий L_k и точек z_k.

Из соотношений (23.7) имеем на всех L_k $(k = 1, 2, \ldots)$

$$G_k(t) = e^{\gamma^+(t)} e^{-\gamma^-(t)}. \tag{23.10}$$

Но это представление $G_k(t) \in H$ в виде произведения граничных значений кусочно-голоморфной функции $e^{\gamma(z)}$ неудобно тем, что по крайней мере одна из функций $e^{\gamma^+(t)}$ и $e^{-\gamma^-(t)}$ при наличии $\varkappa_k \neq 0$ обращается в бесконечность в t_k. Избежать этого в данном случае просто. Точки t_k являются нулями и полюсами функции $\omega(z)$, и потому отношение

$$\mathrm{X}(z) = \frac{e^{\gamma(z)}}{\omega(z)} = \begin{cases} e^{\gamma_*(z)}\,\Omega(z)\, E^{\varkappa_k}\left(\frac{z}{z_k}, n_k\right), \\ \qquad z \in D_k^+, \ k = 1, 2, \ldots \\ e^{\gamma_*(z)}\,\Omega(z), \ z \in D^- \end{cases} \tag{23.11}$$

имеет непрерывные граничные значения $\mathrm{X}^+(t)$ и $\mathrm{X}^-(t)$, нигде не обращающиеся в нуль и удовлетворяющие условиям (23.1), или, что все равно, условиям

$$G_k(t) = \mathrm{X}^+(t)/\mathrm{X}^-(t), \quad t \in L_k. \tag{23.12}$$

Из формул (23.11) видно, что и вне контуров L_k на конечном расстоянии у $\mathrm{X}(z)$ нет ни особых точек, ни нулей. Эту функцию $\mathrm{X}(z)$ мы и будем называть *канонической функцией однородной задачи* (23.1).

При помощи $\mathrm{X}(z)$, используя соотношения (23.12), граничные условия (23.1) можно записать в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\mathrm{X}^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\mathrm{X}^-(t)}, \ t \in L_k, \ k = 1, 2, \ldots,$$

откуда следует, что отношение $\Phi(z)/\mathrm{X}(z)$ является аналитической функцией всюду, исключая разве бесконечно удаленную точку и заданную последовательность полюсов

$\{a_j\}$, если решение $\Phi(z)$ отыскивается в классе кусочно-мероморфных функций. Значит, это отношение представляет собой некоторую мероморфную функцию $R(z)$, и любое решение однородной задачи будет иметь такой вид

$$\Phi(z) = R(z)\,\mathrm{X}(z). \tag{23.13}$$

В общем кусочно-голоморфном решении вместо $R(z)$ будет стоять некоторая целая функция $P(z)$.

Определить более точно структуру $R(z)$ или $P(z)$ и полностью решить вопрос о разрешимости и числе решений однородной задачи можно, очевидно, лишь в том случае, когда некоторыми дополнительными условиями более точно описан класс искомых функций и когда наложены определенные ограничения на расположение контуров L_k и коэффициенты $G_k(t)$. Сейчас мы получим общее решение задачи в двух специальных классах кусочно-голоморфных функций.

3°. Пусть $\{\Gamma_q\}$ есть множество замкнутых кривых с теми же свойствами, что в теореме 22.5. На взаимное расположение множеств $\{\Gamma_q\}$ и $\{L_k\}$ наложим следующее дополнительное условие: существует такая постоянная $\delta > 0$, что $|\tau - z| \geqslant \delta$ при всех $\tau \in \{L_k\}$ и $z \in \{\Gamma_q\}$. Непрерывные по Гёльдеру и необращающиеся в нуль коэффициенты $G_k(t)$ будем считать такими, чтобы при некотором целом $n \geqslant 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k R_k^{-n} = N < \infty, \quad \eta_k = \max\{B_k, |\varkappa_k|\},$$
$$B_k = \frac{1}{2\pi}\int_{L_k} |\ln G_k(\tau)\, d\tau|. \tag{23.14}$$

При этих условиях будем искать решения однородной задачи, удовлетворяющие условию

$$\int_{\Gamma_q} \left| \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} z^{-(n+1)} dz \right| \to 0, \quad q \to \infty. \tag{23.15}$$

Числовой ряд (23.14) является мажорантным для ряда

$$\Gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\ln G_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{n-1} d\tau, \tag{23.16}$$

так что последний сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области, не содержащей точек контуров L_k, в том числе и на всех кривых Γ_q. Вычислим на Γ_q производную $\Gamma'(z)$ и оценим ее по модулю. На основании теоремы Вейерштрасса $\Gamma'(z)$ можно найти почленным дифференцированием ряда (23.16):

$$\Gamma'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\ln G_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{\tau - z} + \frac{n-1}{z}\right) d\tau.$$

Отсюда сразу получаем

$$|\Gamma'(z)| \leqslant \delta^{-1} N |z|^{n-1} \{\delta^{-1} + (n-1)|z|^{-1}\}. \tag{23.17}$$

Пусть $\Phi(z)$ есть необращающееся в нуль решение однородной задачи. Функция

$$\psi(z) = \Phi(z) \exp[-\Gamma(z)], \tag{23.18}$$

как отношение двух функций, удовлетворяющих краевым условиям (23.1), будет мероморфной. Точки t_k на тех L_k, где $\varkappa_k \neq 0$, будут ее нулями и полюсами порядка $|\varkappa_k|$, а для ее логарифмической производной — простыми полюсами с вычетами $(-\varkappa_k)$. В силу условия (23.15) и оценки (23.17)

$$\int_{\Gamma_q} \left| \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} z^{-(n+1)} dz \right| \leqslant \int_{\Gamma_q} \left| \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} z^{-(n+1)} dz \right| + \\ + \int_{\Gamma_q} \left| \Gamma'(z) z^{-(n+1)} dz \right|_{q \to \infty} \to 0.$$

Значит, по известной теореме теории мероморфных функций $\psi'(z)/\psi(z)$ имеет такую форму:

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = P_{n-1}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\varkappa_k}{z - t_k} \left(\frac{z}{t_k}\right)^n = \\ = P_{n-1}(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k \left\{ \frac{1}{z - t_k} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{z^j}{t_k^{j+1}} \right\}.$$

Этот ряд сходится равномерно в любой ограниченной области, не содержащей точек t_k, что вытекает из условия (23.14). Поэтому интегрированием вдоль любой кривой, не проходящей через точки t_k и соединяющей $z = 0$ с любой точкой z, получаем

$$\ln \psi(z) = P_n(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k \left\{ \ln\left(1 - \frac{z}{t_k}\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{z^{j+1}}{(j+1) t_k^{j+1}} \right\} = \\ = P_n(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k \ln E\left(\frac{z}{t_k}, n\right).$$

Потенцированием находим

$$\psi(z)=e^{P_n(z)}\prod_{k=1}^{\infty}E^{-\varkappa_k}\left(\frac{z}{t_k},\ n\right).$$

Подставив это выражение в формулу (23.18), получим общее решение однородной задачи в таком виде

$$\Phi(z)=e^{P_n(z)}e^{\Gamma(z)}\prod_{k=1}^{\infty}E^{-\varkappa_k}\left(\frac{z}{t_k},\ n\right). \tag{23.19}$$

Принимая во внимание формулы (23.9) и (23.11), легко видеть, что в данном случае

$$\mathrm{X}(z)=e^{\Gamma(z)}\prod_{k=1}^{\infty}E^{-\varkappa_k}\left(\frac{z}{t_k},\ n\right) \tag{23.20}$$

и формула (23.19) может быть переписана таким образом:

$$\Phi(z)=e^{P_n(z)}\mathrm{X}(z). \tag{23.21}$$

При такой записи свойство необращения в нуль найденных решений видно отчетливо, ибо этим свойством обладают оба множителя.

Когда искомая функция $\Phi(z)$ имеет нули в конечном числе точек $a_1, \ldots, a_m$, не лежащих на $\{L_k\}$ и $\{\Gamma_q\}$ (среди этих точек могут быть и одинаковые), то функция

$$\Phi_1(z)=\Phi(z)\prod_{j=1}^{m}(z-a_j)^{-1}$$

удовлетворяет краевым условиям (23.1), условию (23.15) и не имеет нулей. По только что доказанному она имеет вид (23.19) или (23.21) и, значит,

$$\Phi(z)=e^{P_n(z)}\mathrm{X}(z)\prod_{j=1}^{m}(z-a_j). \tag{23.22}$$

Когда точек $\{a_j\}$ счетное множество $(0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\ldots,$ $|a_j|\to\infty$ при $j\to\infty)$, положим

$$\psi(z)=\Phi(z)\,e^{-\Gamma(z)}/Q(z),$$

где $Q(z)$ — целая функция, имеющая нулями лишь точки $\{a_j\}$. Из (23.15) и (23.17) следует, что

$$\int_{\Gamma_q}\left|\left\{\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}+\frac{Q'(z)}{Q(z)}\right\}z^{-(n+1)}dz\right|\to 0,\quad q\to\infty.$$

Значит, если мероморфная функция, стоящая под знаком интеграла в фигурных скобках, существует, то она имеет такой вид

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}+\frac{Q'(z)}{Q(z)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-\varkappa_k}{z-t_k}\left(\frac{z}{t_k}\right)^n+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{z-a_j}\left(\frac{z}{a_j}\right)^n. \quad (23.23)$$

Мы уже знаем, что равномерная сходимость первого из этих рядов обеспечивается сходимостью числового ряда (23.14). Следовательно, существование нашей функции зависит от свойств последовательности $\{a_j\}$. Если она такова, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^{-(n+1)} \quad (23.24)$$

сходится, то второй ряд в равенстве (23.23) сходится равномерно. В этом случае все решения однородной задачи с нулями в точках $\{a_j\}$ определяются формулой

$$\Phi(z)=e^{P_n(z)}\,\mathrm{X}(z)\prod_{j=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{a_j},\ n\right). \quad (23.25)$$

Если же ряд (23.24) расходится, то однородная задача решений с нулями $\{a_j\}$ не имеет.

Будем теперь, не меняя условий задачи, отыскивать ее решения, удовлетворяющие соотношению (23.15), в котором вместо n стоит некоторое целое $\nu\geqslant 0$. Для функции $\psi(z)$, определенной формулой (23.18), условие (23.15) с ν вместо n будет выполняться, если оно выполняется для $\Gamma'(z)$. На основании оценки (23.17)

$$\int_{\Gamma_q}\left|\Gamma'(z)z^{-(\nu+1)}\,dz\right|\leqslant\delta^{-1}N\{\delta^{-1}+(n-1)d_q^{-1}\}\int_{\Gamma_q}|z|^{n-\nu-2}|dz|,$$

откуда видно, что лишь при $n-\nu\leqslant 0$ предел этого интеграла при $q\to\infty$ будет равен нулю. При таких $\nu\geqslant n$ решение задачи будет определяться теми же формулами (23.21), (23.22) или (23,25), где вместо произвольного полинома $P_n(z)$ степени n надо поставить $P_\nu(z)$. При $\nu<n$ задача решений не имеет.

Формулы (23.19), (23.22), (23.25) аналогичны представлениям целых и мероморфных функций конечного порядка [36, с. 38; 19, с. 80]. И это не случайно. Для решений задачи Римана при рассматриваемом нами расположении контуров $\{L_k\}$ можно ввести понятие порядка на множестве $\{\Gamma_q\}$ аналогично тому, как вводится это понятие для целых функций на комплексной плоскости или какой-то ее части.

Пусть $\Phi(z)$ есть кусочно-голоморфное решение задачи Римана в случае счетного множества особых контуров $\{L_k\}$ и пусть при некотором $\sigma > 0$ имеет место асимтотическая оценка

$$\max_{z \in \Gamma_q} |\Phi(z)| < \exp(|z|^\sigma), \ q \geqslant q_0(\sigma).$$

Тогда точная нижняя грань ρ множества чисел $\{r\}$, для которых

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{\ln |\Phi(z)|}{|z|^r} = 0, \quad z \in \{\Gamma_q\},$$

называется порядком функции $\Phi(z)$ на множестве $\{\Gamma_q\}$.

Мы не имеем возможности изложить здесь свойства решений задачи Римана, опираясь на это понятие. Заметим лишь, что построенные нами решения, удовлетворяющие условию (23.15), имеют на $\{\Gamma_q\}$ конечный порядок ν. Это сразу следует из соотношения

$$(n+1) \int_{\Gamma_q} \frac{\ln |\Phi(z)|}{z^{n+2}} dz = -\left\{\frac{\ln |\Phi(z)|}{z^{n+1}}\right\}_{\Gamma_q} + \\ + \int_{\Gamma_q} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} z^{-(n+1)} dz.$$

4°. Предположим, что целые числа n_k, удовлетворяющие условиям

$$n_1 \geqslant 0, \ n_k < n_{k+1}, \quad \lim_{k \to \infty} n_k = \infty, \tag{23.26}$$

подобраны так, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \left(\frac{z}{R_k}\right)^{\overline{n_k+1}}, \quad \eta_k = \max\{B_k, |\varkappa_k|\} \tag{23.27}$$

сходится абсолютно при любом z. При этих условиях легко найти все кусочно-голоморфные решения однородной задачи (23.1), удовлетворяющие условиям

$$\int_{\Gamma_q} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} z^{-(j+1)} dz = 0, \ j = n_q, \dots, n_{q+1} - 1; \ q = 1, 2, \dots, \tag{23.28}$$

где Γ_q — некоторый замкнутый контур, охватывающий $z = 0$ и контуры $L_1, \dots, L_q$.

Рассмотрим задачу

$$\gamma^+(t) - \gamma^-(t) = \ln G_k(t), \ t \in L_k, \ k = 1, 2, \dots$$

Когда ряд (23.27) абсолютно сходится при любом z, эта задача имеет частное решение вида (23.8), где числа n_k те же самые, что и в ряду (23.27). Так как эти числа n_k удовлетворяют условиям (23.26), то на основании теоремы 22.11 функция $\gamma(z)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\Gamma_q} \gamma(z) z^{-(j+1)} dz = 0, \quad j = n_q + 1, \dots, n_{q+1}; \quad q = 1, 2, \dots \tag{23.29}$$

Допустим, что $\Phi(z)$ есть не обращающееся в нуль решение задачи (23.1). Функция

$$\psi(z) = \Phi(z) e^{-\gamma(z)}, \tag{23.30}$$

как отношение двух решений однородной задачи, будет мероморфной. Точки t_k на тех L_k, где $\varkappa_k \neq 0$, будут ее нулями и полюсами порядка $|\varkappa_k|$, а для ее логарифмической производной — простыми полюсами с вычетами $(-\varkappa_k)$. В силу соотношений (23.28) и (23.29)

$$\int_{\Gamma_q} \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} z^{-(j+1)} dz = \int_{\Gamma_q} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} z^{-(j+1)} dz - \int_{\Gamma_q} \gamma'(z) z^{-(j+1)} dz = 0,$$

$$j = n_q, \dots, n_{q+1} - 1; \quad q = 1, 2, \dots$$

Значит, по теореме 22.12

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = P_{n_1 - 1}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\varkappa_k}{z - t_k} \left(\frac{z}{t_k}\right)^{n_k} =$$

$$= P_{n_1 - 1}(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k \left\{ \frac{1}{z - t_k} + \sum_{j=0}^{n_k - 1} \frac{z^j}{t_k^{j+1}} \right\}.$$

Этот ряд сходится равномерно в любой ограниченной области, не содержащей точек t_k, что вытекает из условий сходимости ряда (23.27). Поэтому интегрированием вдоль любой кривой, не проходящей через точки t_k и соединяющей $z = 0$ с любой точкой z, получаем

$$\ln \psi(z) = P_{n_1}(z) -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k \left\{ \ln\left(1 - \frac{z}{t_k}\right) + \sum_{j=0}^{n_k - 1} \frac{z^{j+1}}{(j+1) t_k^{j+1}} \right\} =$$

$$= P_{n_1}(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k \ln E\left(\frac{z}{t_k}, n_k\right).$$

Потенцированием находим

$$\psi(z) = e^{P_{n_1}(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E^{-\varkappa_k}\left(\frac{z}{t_k},\ n_k\right),$$

откуда

$$\Phi(z) = e^{P_{n_1}(z)} e^{\gamma(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E^{-\varkappa_k}\left(\frac{z}{t_k},\ n_k\right). \tag{23.31}$$

Такова структура общего решения однородной задачи, не имеющего нулей и удовлетворяющего условиям (23.28).

Пусть искомая функция имеет нули и полюсы в точках последовательности $\{a_\nu\}$. Их можно всегда считать нулями и полюсами некоторой мероморфной функции $Q(z)$. Положим

$$\psi(z) = \Phi(z)\, e^{-\gamma(z)}/Q(z).$$

На основании условий (23.28) и (23.29) будем иметь

$$\int_{\Gamma_g} \left\{\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} + \frac{Q'(z)}{Q(z)}\right\} z^{-(j+1)} dz = 0,$$

$$j = n_q, \dots, n_{q+1} - 1; \quad q = 1,\ 2, \dots \tag{23.32}$$

Чтобы определить вид мероморфной функции, стоящей в фигурных скобках под знаком интеграла, запишем ее на основании теоремы Миттаг-Леффлера в такой форме

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} + \frac{Q'(z)}{Q(z)} = P(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\varkappa_k}{z - t_k}\left(\frac{z}{t_k}\right)^{m_k+1} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{r_\nu}{z - a_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{p_\nu+1}, \tag{23.33}$$

где $P(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots$ — целая функция, а последовательности чисел $\{m_k\}$ и $\{p_\nu\}$ обеспечивают абсолютную и равномерную сходимость рядов в любой ограниченной области без точек t_k и a_ν. Далее поступаем как при доказательстве достаточности в теореме 22.12: из условий (23.32) для определения коэффициентов α_j получаем уравнения

$$2\pi i \alpha_j + \sum_{m_k < j} \varkappa_k t_k^{-(j+1)} - \sum_{m_k \geqslant j} \varkappa_k t_k^{-(j+1)} -$$

$$-\sum_{p_\nu<j} r_\nu a_\nu^{-(j+1)} + \sum_{p_\nu\geqslant j} r_\nu a_\nu^{-(j+1)} = 0,$$

$$j = n_q, \dots, n_{q+1}-1, \quad q = 1, 2, \dots,$$

откуда найдем все α_j с номерами $j \geqslant n_1$. Первые n_1 коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_1-1}$ останутся произвольными. Найденные значения α_j вставляем в выражение $P(z)$, отделяем здесь отрезок $P_{n_1-1}(z)$ из n_1 первых членов с произвольными α_j и остаток ряда $P(z)$ складываем с рядами правой части формулы (23.33) так, чтобы все слагаемые в $P(z)$, содержащие t_k, присоединились к общему члену второго ряда, а слагаемые, содержащие a_ν — к общему члену третьего ряда. Получим

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} + \frac{Q'(z)}{Q(z)} = P_{n_1-1}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\varkappa_k}{z-t_k}\left(\frac{z}{t_k}\right)^{n_k} +$$

$$+\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{(D_q)} \frac{r_\nu}{z-a_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{n_q}, \tag{23.34}$$

где D_q — область, заключенная между Γ_{q+1} и Γ_q, и суммирование во внутренней сумме производится по всем $a_\nu \in D_q$. Однако следует помнить, что при получении представления (23.34) мы производили не обычное почленное сложение рядов в правой части (23.33), и потому все произведенные операции будут законными лишь тогда, когда имеет место абсолютная сходимость обоих рядов в представлении (23.34). Первый из этих рядов сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области без точек t_k в силу сходимости ряда (23.27). Второй будет сходиться абсолютно и равномерно в любой ограниченной области без точек a_ν, если абсолютно сходится при любом конечном z ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{(D_q)} r_\nu\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{n_q}. \tag{23.35}$$

Это — ограничение на расположение нулей и полюсов у искомого решения.

Если ряд (23.35) абсолютно сходится при всех конечных z, то интегрированием равенства (23.34) вдоль любого пути, соединяющего $z=0$ и z и не проходящего через точки t_k и a_ν, и последующим потенцированием найдем произведение $\psi(z)\,Q(z)$ и общее решение однородной задачи в этом случае получим в такой форме

$$\Phi(z)=\exp\{P_{n_1}(z)\}\,X(z)\prod_{q=1}^{\infty}\prod_{(D_q)}E^{r_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu},\ n_q\right),$$

$$X(z)=e^{\gamma(z)}\prod_{k=1}^{\infty}E^{-\varkappa_k}\left(\frac{z}{t_k},\ n_k\right).$$

5°. Остановимся коротко на решении однородной задачи еще в одном классе функций, более узком по сравнению с рассмотренными, где разрешимость и число решений задачи, как в случае конечного числа контуров, зависят и от величин $|\varkappa_k|$ и от знаков $\varkappa_k$.

Пусть множества $\{L_k\}$ и $\{\Gamma_q\}$ обладают теми же свойствами, что в 3°. Предполагая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}B_k=N<\infty,\ B_k=\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}|\ln G_k(\tau)\,d\tau|, \tag{23.36}$$

будем искать решения задачи (23.1), растущие на $\{\Gamma_q\}$ не быстрее, чем целая степень z^n, то есть решения, удовлетворяющие условию

$$|\Phi(z)|<M|z|^n,\quad M>0,\quad n\geqslant 0,\quad z\in\{\Gamma_q\}. \tag{23.37}$$

При условии (23.36) ряд

$$\gamma(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\ln G_k(\tau)}{\tau-z}\,\frac{z}{\tau}\,d\tau \tag{23.38}$$

сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области, не содержащей точек контуров L_k, и сумма его $\gamma(z)$ на множестве $\{\Gamma_q\}$ ограничена:

$$|\gamma(z)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left|\int_{k}\ln G_k(\tau)\left(\frac{1}{\tau-z}-\frac{1}{\tau}\right)d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant\delta^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}B_k+\sum_{k=1}^{\infty}B_kR_k^{-1}=\delta^{-1}N+N_1. \tag{23.39}$$

Поэтому для мероморфной функции $\psi(z)=\Phi(z)\,e^{-\gamma(z)}$ имеем

$$|\psi(z)|\leqslant M_1|z|^n,\ M_1>0,\quad z\in\{\Gamma_q\}. \tag{23.40}$$

Рассмотрим отдельные случаи.

1) Все $\varkappa_k = 0$. В этом случае на основании известного свойства [36, с. 10] целая функция $\psi(z)$, удовлетворяющая условию (23.40), может быть только многочленом степени не выше n и задача (23.1) имеет $n+1$ линейно-независимых решений

$$\Phi(z) = P_n(z)\, e^{\gamma(z)}. \tag{23.41}$$

2) Все $\varkappa_k < 0$. В этом случае $\psi(z)$ опять целая функция, но с бесконечным множеством нулей $t_1, t_2, \ldots$ кратностей $-\varkappa_1, -\varkappa_2, \ldots$ соответственно, а такая функция на основании той же теоремы [36, с. 10] возрастает быстрее любой положительной степени z. Значит, здесь $\psi(z) \equiv 0$ и задача (23.1) отличных от нуля решений не имеет.

3) Все $\varkappa_k > 0$. В этом случае $\psi(z)$ есть мероморфная функция с бесконечным множеством полюсов $t_1, t_2, \ldots$ порядков не выше $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ соответственно. По теореме Коши [35, с. 398—400], если такая функция существует, то она обязательно представляет собой сумму следующего равномерно сходящегося ряда

$$\psi(z) = P_n(z) + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{(D_q)} \{H_k(z) - h_k(z)\}, \tag{23.42}$$

где $P_n(z)$ — произвольный полином степени n; $H_k(z)$ — главная часть $\psi(z)$ в полюсе t_k

$$H_k(z) = \sum_{j=1}^{\varkappa_k} \frac{A_{kj}}{(z - t_k)^j} \tag{23.43}$$

с произвольными A_{kj}; $h_k(z)$ есть отрезок ряда Тейлора функции $H_k(z)$ с центром $z = 0$, состоящий из $n+1$ первых членов; D_q — область, заключенная между Γ_q и Γ_{q+1}; внутренняя сумма берется по всем номерам k, для которых $t_k \in D_q$.

Обеспечить существование функции $\psi(z)$ вида (23.42) можно за счет произвола коэффициентов A_{kj}. Так, положив $A_{k2} = \ldots = A_{k,\varkappa_k} = 0$, будем иметь

$$H_k(z) - h_k(z) = \frac{A_{k1}}{z - t_k} \left(\frac{z}{t_k}\right)^{n+1}, \tag{23.44}$$

и, чтобы обеспечить существование функции (23.42) и выполнимость условия (23.40), достаточно взять A_{k1} такими, чтобы

$$\sum_{q=1} \sum_{(D_q)} |A_{k1}| R_k^{-n} = N_{01} < \infty. \tag{23.45}$$

При условии (23.45) сразу видно, что ряд (23.42) с общим членом (23.44) равномерно сходится в любой ограниченной области без точек t_k, а на множестве $\{\Gamma_q\}$ имеет место оценка

$$|H_k(z) - h_k(z)| = \left| A_{k1}\left(\frac{z}{t_k}\right)^n \left(\frac{1}{z-t_k} + \frac{1}{t_k}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |z|^n |A_{k1}| R_k^{-n} (\delta^{-1} + R_k^{-1}),$$

на основании которой получается неравенство (23.40). Задача (23.1) имеет в этом случае счетное множество решений

$$\Phi(z) = e^{\gamma(z)} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{(D_q)} \frac{A_{k1}}{z-t_k}\left(\frac{z}{t_k}\right)^{n+1}. \qquad (23.46)$$

В общем случае, когда $H_k(z)$ имеет вид (23.43), сходимость ряда (23.42) будет иметь место, если постоянные A_{kj} таковы, что

$$\sum_{q=1}^{\infty} \sum_{(D_q)} \sum_{j=1}^{\varkappa_k} |A_{kj}| R_k^{-n} < \infty.$$

А выполнимость условия (23.40) отсюда следует лишь в том случае, когда множество $\{\varkappa_k\}$ ограничено сверху некоторым целым числом $\varkappa$. В противном случае постоянные A_{kj} должны удовлетворять еще одному достаточно сложному условию

$$\sum_{q=1}^{\infty} \sum_{(D_q)} \sum_{j=1}^{\varkappa_k} (j-1)!\delta^{-j} |A_{kj}| R_k^{-n} < \infty.$$

При выполнении двух последних условий однородная задача имеет счетное множество линейно-независимых решений.

4) Среди чисел $\varkappa_k$ есть и $\varkappa_k > 0$ и $\varkappa_k < 0$. Здесь мероморфная функция $\psi(z)$ имеет полюсы в тех t_k, где $\varkappa_k > 0$, и нули при $\varkappa_k < 0$. Такая функция, удовлетворяющая условию (23.40), может существовать, а может и не существовать.

Действительно, пусть $\varkappa_k < 0$ лишь при $k = 1, 2, \ldots, \mu$, а все остальные $\varkappa_k > 0$. В этом случае можно взять $\psi(z)$ в виде ряда (23.42) с общим членом (23.44), где постоянные A_{k1}, кроме условия (23.45), удовлетворяют еще равенствам

$$\psi^{(p)}(t_k) = 0, \quad p = 0, 1, \ldots, -\varkappa_k - 1; \quad k = 1, 2, \ldots, \mu.$$

Задача будет иметь бесконечное множество решений (23.46).

Если число положительных индексов конечно, а остальные отрицательны, то задача не имеет решений, так как в этом случае

$$\psi(z) \prod_{\varkappa_k > 0} (z - t_k)^{\varkappa_k}$$

есть целая функция, растущая быстрее любого полинома.

Конечное число решений получим в случае, когда имеется конечное число положительных и отрицательных индексов, а все остальные — нули. Можно построить примеры с конечным числом решений и при наличии счетного множества $\varkappa_k > 0$ и $\varkappa_k < 0$. Условия на $G_k(t)$, при которых задача (23.1) обязательно имеет конечное число решений, удовлетворяющих условию (23.37), пока не установлены.

§ 24. НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА

1°. Опираясь на решение однородной задачи, просто определить структуру любого решения неоднородной задачи. Пусть $X(z)$ есть каноническая функция. Используя равенства (23.12), перепишем краевые условия (22.1) в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g_k(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{24.1}$$

Опираясь на результаты § 22, мы можем при любых непрерывных по Гёльдеру $g_k(t)$ построить частное кусочно-голоморфное решение задачи (24.1) в виде ряда (22.9) и получить таким путем частное решение неоднородной задачи (22.1) в такой форме

$$\Phi_1(z) = X(z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - z)} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{\nu_k + 1} d\tau, \tag{24.2}$$

где последовательность целых чисел ν_k подбирается так, чтобы ряд сходился абсолютно и равномерно в любой ограниченной области, не содержащей точек контуров L_k. Чтобы получить общее решение неоднородной задачи, надо к $\Phi_1(z)$ прибавить общее решение (23.13) соответствующей однородной задачи

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + X(z) R(z). \tag{24.3}$$

2°. Если отыскивать решения неоднородной задачи в каком-то специальном классе, то на свободные члены $g_k(t)$ в краевых условиях (22.1) приходится накладывать дополнительные ограничения. Так, если при некотором целом $\nu \geqslant 0$ сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k R_k^{-\nu}, \quad M_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} \left| \frac{g_k(\tau)}{X^+(\tau)}\, d\tau \right|,$$

то неоднородная задача имеет частное решение

$$\Phi_1(z) = X(z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - z)} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{\nu-1} d\tau,$$

удовлетворяющее на множестве $\{\Gamma_k\}$ условию

$$\int\limits_{\Gamma_q} \left| \frac{\Phi_1(z)}{X(z)} z^{-(\nu+1)}\, dz \right| \to 0, \quad q \to \infty.$$

Чтобы получить общее решение неоднородной задачи, удовлетворяющее на множестве $\{\Gamma_q\}$ этому же условию, надо построить мероморфную функцию $\psi(z) = \{\Phi(z) - \Phi_1(z)\} X(z)$ такого же класса. Если искомое решение $\Phi(z)$ кусочно-голоморфно, то $\psi(z)$ будет полиномом степени не выше $\nu - 1$ и неоднородная задача будет иметь ν линейно-независимых решений

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + X(z) P_{\nu-1}(z).$$

Если же у искомой функции $\Phi(z)$ в точках заданного множества $\{a_p\}$ должны быть полюсы не выше заданных порядков, то $\psi(z)$ будет иметь такую форму

$$\psi(z) = P_{\nu-1}(z) + \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ H_p\left(\frac{1}{z - a_p}\right) - h_p(z) \right\},$$

где каждая функция $h_p(z)$, являясь отрезком тейлоровского разложения с центром в $z = 0$ главной части $H_p\{(z - a_p)^{-1}\}$, состоит из ν слагаемых и имеет ту же форму, что и $P_{\nu-1}(z)$. В этом случае у неоднородной задачи — счетное множество линейно-независимых решений.

3°. При решении неоднородной задачи в классе функций, удовлетворяющих условию (23.37), вместо построенной ранее кусочно-голоморфной канонической функции $X(z)$, нигде в конечной плоскости не обращающейся в нуль, удобно использовать некоторое кусочно-мероморфное решение однородной задачи $X(z)$, не имеющее нулей и полюсов на множествах $\{L_k\}$ и $\{\Gamma_q\}$ и ограниченное на $\{\Gamma_q\}$. При условии (23.36) такое решение строится следующим образом. Берем удовлетворяющую однородным краевым условиям функцию $\exp \gamma(z)$, где $\gamma(z)$ есть сумма ряда (23.38).

На основании оценки (23.39) на $\{\Gamma_q\}$ она ограничена, но в точках $t_k \in L_k$ у нее могут быть и нули (при $\varkappa_k > 0$) и полюсы (при $\varkappa_k < 0$). Поэтому за $X(z)$ можно взять произведение

$$X(z) = \Omega(z) \exp \gamma(z), \tag{24.4}$$

где $\Omega(z)$ есть мероморфная функция, ограниченная на $\{\Gamma_q\}$ и обязательно имеющая в точках t_k при $\varkappa_k > 0$ полюсы, а при $\varkappa_k < 0$ нули тех же порядков $|\varkappa_k|$.

Чтобы построить $\Omega(z)$, возьмем последовательность таких точек $\{z_k\}$, не лежащих на $\{L_k\}$ и $\{\Gamma_q\}$, чтобы при некотором целом $p \geqslant 0$ сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varkappa_k| \Delta_k^{p+1}, \quad \Delta_k = |z_k - t_k|. \tag{24.5}$$

Тогда бесконечное произведение

$$\Omega(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E^{\varkappa_k}\left(\frac{z_k - t_k}{z - t_k}, \ p\right) \tag{24.6}$$

сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области, не содержащей точек t_k и z_k, если в нем отбросить некоторое конечное число членов. Действительно, для множителей Вейерштрасса имеет место оценка [36, с. 21; 71, с. 51]

$$|\ln E(u, \ p)| \leqslant A(p) |u|^{p+1}.$$

Поэтому в нашем случае

$$\left| \varkappa_k \ln E\left(\frac{z_k - t_k}{z - t_k}, \ p\right)\right| \leqslant A(p) |\varkappa_k| \left|\frac{z_k - t_k}{z - t_k}\right|^{p+1}. \tag{24.7}$$

Но при всех k, начиная с некоторого k_0,

$$|z - t_k| \geqslant ||z| - R_k| = R_k \left| 1 - \frac{|z|}{R_k}\right| \geqslant R_k/2$$

и в силу этого

$$\left| \varkappa_k \ln E\left(\frac{z_k - t_k}{z - t_k}, \ p\right)\right| \leqslant 2^{p+1} A(p) |\varkappa_k| \Delta_k^{p+1} R_k^{-(p+1)}, \quad k \geqslant k_0.$$

Из сходимости ряда (24.5) и свойств чисел R_k следует, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varkappa_k| \Delta_k^{p+1} R_k^{-(p+1)}$$

сходится. Значит, сходится и произведение (24.6).

Когда $z \in \{\Gamma_q\}$, то $|z - t_k| \geqslant \delta$ и из неравенства (24.7) получаем

$$\left| \varkappa_k \ln E\left(\frac{z_k - t_k}{z - t_k},\ p \right) \right| \leqslant A(p)\, \delta^{-(p+1)} |\varkappa_k| \Delta_k^{p+1}.$$

Отсюда следует ограниченность $\Omega(z)$ на $\{\Gamma_q\}$:

$$|\Omega(z)| \leqslant \exp\left\{ A(p)\, \delta^{-(p+1)} \sum_{k=1}^{\infty} |\varkappa_k| \Delta_k^{p+1} \right\}. \tag{24.8}$$

У функции $\Omega(z)$, кроме точек t_k, нули и полюсы тех же порядков $|\varkappa_k|$ (при $\varkappa_k \neq 0$) находятся в точках z_k. Они, очевидно, будут нулями и полюсами построенной канонической функции $X(z)$.

При помощи $X(z)$ решение неоднородной задачи получается по схеме, изложенной в п. 1° этого параграфа. Краевые условия (22.1) записываются в виде (24.1), где вместо $X(z)$ ставится (24.4), откуда при выполнении условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k R_k^{-l} < \infty, \quad l \leqslant n, \quad D_k = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \left| \frac{g_k(\tau)}{X^+(\tau)}\, d\tau \right| \tag{24.9}$$

сразу получается одно из частных решений неоднородной задачи

$$\Phi_1(z) = X(z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - z)} \left(\frac{z}{\tau} \right)^{l+1} d\tau. \tag{24.10}$$

Обозначим через K верхнюю грань функции (24.4) на множестве $\{\Gamma_q\}$. Ее величина легко получается из оценок (23.39) и (24.8). Учитывая также условие (24.9), на $\{\Gamma_q\}$ будем иметь

$$|\Phi_1(z)| \leqslant |X(z)| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^l}{2\pi} \left| \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau^l X^+(\tau)} \left(\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau} \right) d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant K |z|^l \left\{ \delta^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} D_k R_k^{-l} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k R_k^{-(l+1)} \right\} = K_1 |z|^l. \tag{24.11}$$

При исследовании вопроса о разрешимости и числе решений неоднородной задачи, рассмотрим те же отдельные случаи, что и в п. 5° § 23.

1) Все $\varkappa_k = 0$. В этом случае $X(z) = e^{\gamma(z)}$ не имеет ни нулей, ни полюсов в конечной плоскости и общее решение, кусочно-голоморфное и удовлетворяющее условию (23.37), имеет такой вид

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - z)} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{l+1} d\tau + X(z) P_n(z).$$

2) Все $\varkappa_k < 0$. Мы уже знаем, что в этом случае соответствующая однородная задача решений, удовлетворяющих условию (23.37), не имеет. Что касается функции (24.10), то она также в общем случае не будет кусочно-голоморфным решением задачи (22.1), ибо в точках z_k функция $X(z)$ имеет полюсы порядков $(-\varkappa_k)$. Единственным кусочно-голоморфным решением неоднородной задачи (22.1), удовлетворяющим условию (23.37), функция (24.10) будет тогда и только тогда, когда $\Phi_1(z)\, z^{-(l+1)} X(z)$ в точках z_k будет иметь нули порядка не ниже $(-\varkappa_k)$. Разлагая эту функцию в ряд Тейлора в окрестности z_λ и приравнивая к нулю коэффициенты $(z - z_\lambda)^j$, $j = 0, 1, \ldots, -\varkappa_\lambda - 1$, приходим к дополнительным условиям

$$\sum_{k=1} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)\, d\tau}{\tau^{l+1} X^+(\tau)(\tau - z_\lambda)^j} = 0,$$

$$j = 0, 1, \ldots, -\varkappa_\lambda - 1; \quad \lambda = 1, 2, \ldots, \tag{24.12}$$

которым должны удовлетворять свободные члены $g_k(t)$.

3) Все $\varkappa_k > 0$. В этом случае неоднородная задача имеет бесконечное множество кусочно-голоморфных линейно-независимых решений. Чтобы выписать всю совокупность этих решений, надо к частному решению (24.10) прибавить общее решение соответствующей однородной задачи.

4) При наличии $\varkappa_k > 0$ и $\varkappa_k < 0$ функция (24.10) всегда имеет полюсы в тех точках z_k, порядок которых $\varkappa_k < 0$. Поэтому при построении общего кусочно-голоморфного решения неоднородной задачи обязательно приходится заботиться о его голоморфности в этих точках z_k. В некоторых случаях этого можно добиться за счет подбора произвольных постоянных, входящих в общее решение (например, при конечном числе отрицательных индексов); в других за счет выполнения конечного или бесконечного множества дополнительных условий вида (24.12), налагаемых на свободные члены $g_k(t)$. Число линейно-независимых решений может быть как конечным, так и бесконечным.

§ 25. СЛУЧАЙ, КОГДА МНОЖЕСТВО КОНТУРОВ ИМЕЕТ НЕСКОЛЬКО ТОЧЕК СГУЩЕНИЯ

Будем считать, что множество $\{L_k\}$ состоит из замкнутых гладких контуров, расположенных вне друг друга и имеющих конечное число точек сгущения $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Среди точек сгущения может быть и бесконечно удаленная точка; ей мы будем приписывать наибольший номер $\alpha_m = \infty$.

Множество $\{L_k\}$ можно всегда представить в виде объединения m последовательностей $\{L_{kj}\}_{k=1}^{\infty}$, $j = 1, \ldots, m$, имеющих лишь по одной точке сгущения α_j. Когда $\alpha_m = \infty$, мы будем предполагать контуры последовательности $\{L_{km}\}$ пронумерованными так, что если R_{km} есть расстояние от $z = 0$ до L_{km}, то:

$$0 < R_{1m} \leqslant R_{2m} \leqslant \ldots, \quad \lim_{k \to \infty} R_{km} = \infty. \tag{25.1}$$

Что касается нумерации контуров остальных подпоследовательностей $\{L_{kj}\}$, $j < m$, то она такова, что при отображении

$$w = \frac{1}{z - \alpha_j} \tag{25.2}$$

контуры последовательности с номером j переходят в последовательность замкнутых же контуров $\{\lambda_{kj}\}$ с точкой сгущения $w = \infty$, для которых расстояния d_{kj} от $w = 0$ до λ_{kj} удовлетворяют условиям (25.1).

Определение кусочно-голоморфной или кусочно-мероморфной функции, имеющей множество линий скачков с несколькими точками сгущения, ничем не отличается от случая одной точки сгущения. Остается прежней и постановка задачи Римана. Только при разбиении последовательности $\{L_k\}$ на подпоследовательности $\{L_{kj}\}_{k=1}^{\infty}$ $(j = 1, \ldots, m)$ граничные условия (22.1) мы будем записывать в таком виде

$$\Phi^+(t) = G_{kj}(t)\,\Phi^-(t) + g_{kj}(t), \quad t \in L_{kj}, \tag{25.3}$$
$$j = 1, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots$$

1°. Приступая к решению задачи о скачке, рассмотрим сначала случай, когда заданное множество контуров $\{L_k\}_{-\infty}^{\infty}$ имеет две точки сгущения $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \infty$. В этом случае одно из частных решений задачи

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g_k(t), \quad t \in L_k, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

можно построить также, как в случае одной точки сгущения, только вместо разложений в ряды Тейлора использовать разложения в ряды Лорана.

Действительно, интеграл типа Коши $F_k(z)$ по контуру L_k с плотностью $g_k(t)$ внутри любого кольца $0 < r < |z| < R < \infty$, не содержащего точек контура L_k, представляет аналитическую функцию и потому может быть разложен в ряд Лорана

$$F_k(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{kj} z^j. \tag{25.4}$$

В силу сходимости этого ряда по заданному $\varepsilon_k > 0$ можно подобрать такой его отрезок

$$f_k(z) = \sum_{j=-m_k}^{n_k} c_{kj} z^j, \tag{25.5}$$

чтобы

$$|F_k(z) - f_k(z)| < \varepsilon_k.$$

Если из чисел $\varepsilon_k > 0$ составить сходящийся ряд, то функциональный ряд

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [F_k(z) - f_k(z)] \tag{25.6}$$

будет сходиться абсолютно и равномерно в любой ограниченной области D, не содержащей L_k, если отбросить в нем некоторое конечное число членов. Чтобы убедиться в этом, заключим область D внутрь некоторого кругового кольца $r < |z| < R$, пусть только контуры $L_{\nu_1}, \ldots, L_{\nu_p}$ имеют точки, принадлежащие этому кольцу. Разобьем ряд (25.6) на два слагаемых

$$F(z) = S(z) + \rho(z) =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} [F_{\nu_j}(z) - f_{\nu_j}(z)] + \sum_{k \neq \nu_j} [F_k(z) - f_k(z)]. \tag{25.7}$$

Ряд $\rho(z)$ в кольце $r < |z| < R$ сходится абсолютно и равномерно, так как

$$|\rho(z)| \leqslant \sum_{k \neq \nu_j} |F_k(z) - f_k(z)| < \sum_{k \neq \nu_j} \varepsilon_k < \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_k.$$

Значит, $\rho(z)$ в этом кольце представляет аналитическую функцию. Что касается функции $S(z)$, то она лишь на рациональную отличается от суммы интегралов типа Коши

$F_{\nu_1}(z), \ldots, F_{\nu_p}(z)$. Следовательно, сумма ряда (25.6) в кольце $r < |z| < R$ является кусочно-голоморфной функцией с линией скачков $L_{\nu_1} \cup \ldots \cup L_{\nu_p}$ и других особенностей, кроме контуров $L_{\nu_1}, \ldots, L_{\nu_p}$ (или их частей), не имеет. Так как на основании (25.7) в окрестности любого из этих контуров L_k $(k = \nu_1, \ldots, \nu_p)$ имеет место представление $F(z) = F_k(z) + \Omega(z)$, где $\Omega(z)$ голоморфна вблизи L_k и на L_k (и даже всюду внутри L_k) то все эти контуры для $F(z)$ являются особыми полярными линиями первого порядка и в силу свойств интегралов типа Коши на каждом из контуров $F^+(t) - F^-(t) = F_k^+(t) - F_k^-(t) = g_k(t)$. Значит, сумма ряда (25.6) есть частное решение задачи о скачке.

Общий член ряда (25.6) можно записать в виде интеграла, обобщающего интеграл типа Коши. Для этого вычислим коэффициенты Лорана

$$c_{kj} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{F_k(z)}{z^{j+1}}\, dz, \quad j = 0, \ \pm 1, \ldots,$$

где Γ — любая окружность $|z| = \rho$, $r < \rho < R$. Подставляя сюда значение $F_k(z)$ и изменяя порядок интегрирования, имеем

$$c_{kj} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} g_k(\tau)\, d\tau\, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{d\tau}{z^{j+1}(\tau - z)}.$$

Внутренний интеграл легко вычисляется при помощи вычетов:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^{j+1}(\tau - z)} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{когда } j \geqslant 0 \text{ и } L_k \text{ внутри } \Gamma, \\ \tau^{-(j+1)}, & \text{когда } j \geqslant 0 \text{ и } L_k \text{ вне } \Gamma, \\ -\tau^{-(j+1)}, & \text{когда } j < 0 \text{ и } L_k \text{ внутри } \Gamma, \\ 0, & \text{когда } j < 0 \text{ и } L_k \text{ вне } \Gamma. \end{cases}$$

Поэтому

$$\underset{j \geqslant 0}{c_{kj}} = \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau^{j+1}}\, d\tau, \ L_k \text{ вне } |z| = R; \ 0, \ L_k \text{ внутри } |z| = r \right\},$$

$$\underset{j < 0}{c_{kj}} = \left\{ 0, \ L_k \text{ вне } |z| = R, \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau^{j+1}}\, d\tau, \ L_k \text{ внутри } |z| = r \right\}.$$

Подставив эти значения в формулу (25.5), получим для z из рассматриваемого кольца $0<r<|z|<R<\infty$:

$$f_k(z)=\left\{\sum_{j=0}^{n_k}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{z^j g_k(\tau)}{\tau^{j+1}}\,d\tau,\quad L_k \text{ вне } |z|=R;\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{m_k}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\tau^{j-1}g_k(\tau)}{z_j}\,d\tau,\quad L_k \text{ внутри } |z|=r\right\}$$

и в соответствии с этим

$$F_k(z)-f_k(z)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_k}\frac{g_k(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{z}{\tau}\right)^{n_k+1}d\tau, & L_k \quad \text{вне} \quad |z=R,\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_k}\frac{g_k(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{\tau}{z}\right)^{m_k}d\tau, & L_k \text{ внутри } |z=r.\end{cases}$$

Обе последние формулы можно объединить в одну, положив $-m_k=n_k+1$:

$$F_k(z)-f_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{g_k(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{z}{\tau}\right)^{n_k+1}d\tau, \tag{25.8}$$

но при этом надо помнить, что $n_k+1\geqslant 0$, если L_k находится вне окружности $|z|=R$, и $n_k+1<0$, если L_k внутри $|z|=r$.

Что касается членов ряда, у которых L_k лежит внутри кольца $r<|z|<R$, то их можно взять в виде интегралов типа Коши $F_k(z)$, а можно в форме (25.8), на сходимость ряда (25.6) это не влияет.

Разность $R(z)=\Phi(z)-F(z)$ между любым кусочно-голоморфным решением $\Phi(z)$ и построенным частным решением $F(z)$ есть, очевидно, аналитическая функция в плоскости с двумя выколотыми точками $z=0$ и $z=\infty$ и, следовательно, представляет собой произвольный ряд Лорана

$$R(z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\beta_j z^j, \tag{25.9}$$

сходящийся в любом круговом кольце $0<r<|z|<R<\infty$. Значит, справедлива

Теорема 25.1. *Когда заданное множество замкнутых контуров* $\{L_k\}_{-\infty}^{\infty}$ *имеет две точки сгущения* $z=0$ и $z=\infty$, *задача* $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=g_k(t)$, $t\in L_k$, $k=0, \pm 1, \ldots$ *разрешима при любых функциях* $g_k(t)$, *удовлетворяющих условию* H, *и ее общее кусочно-голоморфное решение имеет вид*

$$\Phi(z)=R(z)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{g_k(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{z}{\tau}\right)^{n_k+1}d\tau, \qquad (25.10)$$

где $R(z)$ — *произвольный ряд Лорана* (25.9), *а множество целых чисел* $\{n_k\}_{-\infty}^{\infty}$ (*положительных и отрицательных*) *подобрано так, что ряд в формуле* (25.10) *сходится абсолютно и равномерно внутри любого кольца* $0<r<|z|<R<\infty$, *если в нем оторосить конечное число членов, содержащих* L_k *из этого кольца.*

Чтобы построить кусочно-мероморфное решение задачи о скачке с полюсами заданных порядков в точках a_j, не лежащих на контурах L_k и образующих последовательность с двумя предельными точками $z=0$ и $z=\infty$, приходится опираться на теорему Миттаг-Леффлера для мероморфных функций в плоскости с двумя выколотыми точками.

Теорема 25.2. *Какова бы ни была заданная последовательность точек* $\{a_j\}_{-\infty}^{\infty}$ *с двумя предельными точками* $z=0$ *и* $z=\infty$ *и последовательность полиномов* H_j *от* $(z-a_j)^{-1}$, *в плоскости с выколотыми точками* $z=0$ *и* $z=\infty$ *существует мероморфная функция*

$$\psi(z)=\sum_{j=-\infty}\{H_j((z-a_j)^{-1})-h_j(z)\} \qquad (25.11)$$

с полюсами в точках a_j, *и только в них, и главными частями* H_j *соответственно. Здесь*

$$h_j(z)=\sum_{j=-q_j}^{p_j}\delta_{jl}z^l \qquad (25.12)$$

есть отрезки лорановских разложений функций $H_j((z-a_j)^{-1})$ *с центром в* $z=0$, *в которых целые числа* p_j *и* q_j *подобраны так, что ряд* (25.11) *сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области, не содержащей полюсов, если в нем отброшено некоторое конечное число членов.*

При отыскании кусочно-мероморфной функции $\Phi(z)$ по заданным скачкам $g_k(t)$ на контурах L_k и заданным главным частям $H_j((z-a_j)^{-1})$ в полюсах a_j сначала надо построить функции $F(z)$ и $\psi(z)$ в виде рядов (25.6) и (25.11) и взять разность $R(z)=\Phi(z)-F(z)-\psi(z)$. Она будет аналитической функцией в плоскости с выколотыми точками $z=0$ и $z=\infty$ и общее кусочно-мероморфное решение будет иметь такой вид

$$\Phi(z)=R(z)+F(z)+\psi(z), \tag{25.13}$$

где $R(z)$ — произвольный ряд Лорана (25.9).

2°. При наличии более двух точек сгущения у контуров L_k изложенный метод построения частных решений задачи о скачке неприменим, так как в круговых областях связности больше двух для представления аналитических функций нет столь же удобного аппарата, каким являются ряды Лорана в круговых кольцах. Поэтому мы предлагаем здесь другой прием, справедливый и в случае двух точек сгущения.

Представим множество заданных контуров $\{L_k\}$ в виде объединения m последовательностей $\{L_{kj}\}_{k=1}^{\infty}$ $(j=1, \ldots, m)$, имеющих лишь по одной точке сгущения, и рассмотрим задачу о скачке для каждой из этих последовательностей контуров отдельно

$$\Phi_j^+(t)-\Phi_j(t)=g_{kj}(t), \quad t\in L_{kj}, \quad k=1, 2, \ldots \tag{25.14}$$

Если подвергнуть плоскость z дробно-линейному преобразованию (25.2), то на последовательности контуров $\{\lambda_{kj}\}_{k=1}^{\infty}$ с точкой сгущения $w=\infty$ из условий (25.14) получим краевые условия

$$\psi_j^+(\zeta)-\psi_j^-(\zeta)=g_{kj}(\alpha_j+\zeta^{-1}), \quad \zeta\in\lambda_{kj}, \quad k=1, 2, \ldots, \tag{25.15}$$

где $\psi_j(w)=\Phi_j(\alpha_j+w^{-1})$. Опираясь на результаты п. 2° § 22, запишем частное решение задачи (25.15)

$$\psi_j(w)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda_{kj}}\frac{g_{kj}(\alpha_j+\zeta^{-1})}{\zeta-w}\left(\frac{w}{\zeta}\right)^{n_{kj}+1}d\zeta, \tag{25.16}$$

где целые числа $n_{kj}\geqslant 0$ подберем так, чтобы этот ряд сходился абсолютно и равномерно в любой ограниченной области, например, в круге $|w|\leqslant R$, если в нем отбросить конечное число членов с особыми линиями λ_{kj}, лежащими в этом круге. Возвращаясь опять на плоскость z, из формулы (25.16) получим частное решение задачи (25.14) в таком виде

$$\Phi_j(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{kj}}\frac{g_{kj}(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{\tau-\alpha_j}{z-\alpha_j}\right)^{n_{kj}}d\tau. \tag{25.17}$$

Чтобы получить частное решение задачи о скачке для исходного множества контуров $\{L_k\}$, надо взять сумму $\Phi_*(z) = \Phi_1(z) + \ldots + \Phi_m(z)$. В результате получим ряд

$$\Phi_*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{kj}} \frac{g_{kj}(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{\tau - \alpha_j}{z - \alpha_j} \right)^{n_{kj}} d\tau, \qquad (25.18)$$

сходящийся абсолютно и равномерно в любой области, не содержащей точек $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, если в нем отбросить конечное число членов с линиями L_{kj} из этой области.

Как и в случае одной точки сгущения, подбор чисел n_{kj} можно производить в зависимости от свойств функций $g_{kj}(t)$ и расположения контуров L_{kj}. Чтобы установить эту связь, возьмем некоторое число $r_j < \infty$ и при z из области $|z - \alpha_j| \geqslant r_j$ оценим по модулю общий член ряда (25.17). Если через d_{kj} обозначить максимум расстояний точек контура L_{kj} до точки α_j, то при $\tau \in L_{kj}$

$$|\tau - \alpha_j| \leqslant d_{kj},$$

$$|\tau - z| = |z - \alpha_j| \left| 1 - \frac{\tau - \alpha_j}{z - \alpha_j} \right| \geqslant r_j \left| 1 - \frac{d_{kj}}{r_j} \right|. \qquad (25.19)$$

Мы условились считать контуры последовательности с номером j пронумерованными в порядке невозрастания расстояний d_{kj}, так что $d_{1j} \geqslant d_{2j} \geqslant \ldots$ и $\lim\limits_{k \to \infty} d_{kj} = 0$. Поэтому при достаточно большом k величина d_{kj}/r_j будет сколь угодно малой и по заданному ε, $0 < \varepsilon < 1$, можно подобрать такой номер N, чтобы при всех $k \geqslant N$ выполнялось неравенство

$$|1 - d_{kj}/r_j| \geqslant 1 - \varepsilon. \qquad (25.20)$$

На основании неравенств (25.19) и (25.20) для общего члена ряда (25.17) получаем такую оценку

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{kj}} \frac{g_{kj}(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{\tau - \alpha_j}{z - \alpha_j} \right)^{n_{kj}} d\tau \right| \leqslant \frac{r_j^{-1}}{1 - \varepsilon} \left(\frac{d_{kj}}{r_j} \right)^{n_{kj}} A_{kj},$$

где

$$A_{kj} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_{kj}} |g_{kj}(\tau)\, d\tau|.$$

Значит, ряд (24.17) при $|z-\alpha_j| \geqslant r_j$ мажорируется числовым рядом с положительными членами

$$r_j^{-1}(1-\varepsilon)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} A_{kj} \left(\frac{d_{kj}}{r_j}\right)^{n_{kj}}. \tag{25.21}$$

Если числа n_{kj} таковы, что этот ряд сходится, тогда ряд (25.17) при $|z-\alpha_j| \geqslant r_j$ сходится абсолютно и равномерно (после отбрасывания конечного числа членов с номерами $j < N$, для которых неравенство (25.20) не выполняется).

Если в ряду (25.21) все числа n_{kj} положить равными одному и тому же целому числу $n \geqslant 0$, то он превратится в ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{kj} d_{kj}^{n}, \tag{25.22}$$

умноженный на константу $r_j^{-n-1}(1-\varepsilon)^{-1}$. Отсюда получается такой вывод: если при всех $j=1, \ldots, m$ числовые ряды (25.22) сходятся, то все n_{kj} в формуле (25.18) можно взять равными n. Ряд (25.18) в этом случае будет сходиться абсолютно и равномерно при всех z, удовлетворяющих одновременно m условиям $|z-\alpha_j| \geqslant r_j$, $j=1, \ldots, m$, если в нем отброшено соответствующее конечное число членов.

3°. Для решений задачи о скачке в случае нескольких точек сгущения имеет место теорема, аналогичная теореме 22.5. Приведем ее доказательство.

На расположение контуров заданного множества $\{L_k\}$ наложим такие ограничения. Допустим, что существуют последовательности непересекающихся между собой замкнутых контуров γ_{j, p_j} $(p_j=0, 1, \ldots;\ j=1, \ldots, m)$ со следующими свойствами:

1) все γ_{j, p_j} $(p_j=0, 1, \ldots)$ содержат внутри точку α_j и не пересекаются с контурами L_k;

2) γ_{j, p_j} содержит внутри себя γ_{j, p_j+1};

3) если l_{j, p_j} — длина γ_{j, p_j}, а $r_{j, p_j}=\max|\tau-\alpha_j|$ при $\tau \in \gamma_{j, p_j}$, то отношение этих двух чисел в совокупности ограничено:

$$l_{j, p_j}/r_{j, p_j} \leqslant a_j, \quad a_j > 0 \quad (j=1, \ldots, m). \tag{25.23}$$

Неограниченную m-связную область, представляющую собой внешность контуров $\gamma_{1, p_1}, \gamma_{2, p_2}, \ldots, \gamma_{m, p_m}$, обозначим через $D_{p_1, \ldots, p_m}$, а внешность всех $\gamma_{1,0}, \gamma_{2,0}, \ldots, \gamma_{m,0}$ — через D_0. В области $D_{p_1, \ldots, p_m}$ находится лишь конечное число контуров L_k. Каждый из них заключим внутрь некоторой замкнутой кривой $\Gamma_k \subset D_{p_1, \ldots, p_m}$. Тогда для любого кусочно-голоморфного решения $\Phi(z)$ задачи о скачке по интегральной формуле Коши, примененной к области, лежащей вне всех γ_{j, p_j} и вне всех Γ_k, имеем:

$$\Phi(z) = \Phi(\infty) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_{p_1, \ldots, p_m}} \frac{\Phi(t)}{t-z}\, dt -$$

$$- \sum_{(D_{p_1, \ldots, p_m})} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} \frac{\Phi(t)}{t-z}\, dt,$$

где сумма берется по всем $\Gamma_k \subset D_{p_1, \ldots, p_m}$. Так как кривая Γ^k находится в окрестности контура L_k, то на Γ_k имеет место соотношение $\Phi(t) = F_k(t) + \Omega_k(t)$, где $\Omega_k(z)$ является аналитической внутри Γ_k и на Γ_k. Поэтому по интегральной формуле Коши, примененной к внешности Γ_k и к внутренности Γ_k, получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} \frac{\Phi(t)}{t-z}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} \frac{F_k(t)}{t-z}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} \frac{\Omega_k(t)}{t-z}\, dt = -F_k(z),$$

так что

$$\Phi(z) = \Phi(\infty) + \sum_{(D_{p_1, \ldots, p_m})} F_k(z) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_{p_1, \ldots, p_m}} \frac{\Phi(t)}{t-z}\, dt. \quad (25.24)$$

При вычислении интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_{p_1, \ldots, p_m}} \frac{\Phi(t)}{t-z}\, dt = -\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{j, p_j}} \frac{\Phi(t)}{t-z}\, dt$$

учитываем, что при $t \in \gamma_{j, p_j}$ и $z \in D_{p_1, \ldots, p_m}$

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t - a_j - (z - a_j)} = -\frac{1}{z - a_j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{t - a_j}{z - a_j} \right)^{\nu} =$$

$$= -\sum_{\nu=0}^{n_j - 1} \frac{(t - a_j)^{\nu}}{(z - a_j)^{\nu+1}} + \frac{1}{t-z} \left(\frac{t - a_j}{z - a_j} \right)^{n_j},$$

где n_j — некоторое пока неопределенное целое число. На основании этого представления

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j, p_j}\frac{\Phi(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j, p_j}\frac{\Phi(t)}{t-z}\left(\frac{t-a_j}{z-a_j}\right)^{n_j}dt-$$

$$-\sum_{\nu=0}^{n_j-1}\frac{(z-a_j)^{-(\nu+1)}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j, p_j}\Phi(t)(t-a_j)^{\nu}\,dt$$

и, значит,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_{p_1,\ldots,p_m}}\frac{\Phi(t)}{t-z}\,dt=$$

$$=-\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{n_j-1}\frac{(z-a_j)^{-(\nu+1)}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j, p_j}\Phi(t)(t-a_j)^{\nu}\,dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j, p_j}\frac{\Phi(t)}{t-z}\left(\frac{t-a_j}{z-a_j}\right)^{n_j}dt. \tag{25.25}$$

Чтобы вычислить интеграл

$$I_{\nu, j, p_j}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j, p_j}\Phi(t)(t-a_j)^{\nu}dt,$$

записываем его в таком виде

$$I_{\nu, j, p_j}=I_{\nu, j, 0}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta_{p_j}}\Phi(t)\,(t-a_j)^{\nu}\,dt,$$

где Δ_{p_j} — двухсвязная область, ограниченная $\gamma_{j, 0}$ и γ_{j, p_j}. Интеграл по границе этой области вычисляем при помощи вычетов. Учитывая, что особенностями подынтегральной функции являются лишь контуры L_k, лежащие в Δ_{p_j} и что

$$\operatorname{res}_{L_k}\{\Phi(t)(t-a_j)^{\nu}\}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k}\Phi(t)\,(t-a_j)^{\nu}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k}\{F_k(t)+\Omega_k(t)\}(t-a_j)^{\nu}\,dt=$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} g_k(\tau)\, d\tau \, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} \frac{(t-\alpha_j)^\nu}{\tau - t}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} g_k(\tau) (\tau - \alpha_j)^\nu \, d\tau,$$

получаем

$$I_{\nu, j, p_j} = I_{\nu, j, 0} + \sum_{(\Delta_{p_j})} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} g_k(\tau) (\tau - \alpha_j)^\nu \, d\tau.$$

Здесь постоянные $I_{\nu, j, 0}$ остаются произвольными. Значения I_{ν, j, p_j} подставим в формулу (25.25). Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_{p_1, \ldots, p_m}} \frac{\Phi(t)}{t-z}\, dt = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{j, p_j}} \frac{\Phi(t)}{t-z} \left(\frac{t-\alpha_j}{z-\alpha_j} \right)^{n_j} dt -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{n_j-1} I_{\nu, j, 0} (z-\alpha_j)^{-(\nu+1)} -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{n_j-1} (z-\alpha_j)^{-(\nu+1)} \sum_{(\Delta_{p_j})} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} g_k(\tau) (\tau - \alpha_j)^\nu d\tau.$$

Если в последнем слагаемом поменять местами две внутренние суммы и учесть, что

$$\sum_{\nu=0}^{n_j-1} (z-\alpha_j)^{-(\nu+1)} (\tau-\alpha_j)^\nu = \frac{1}{z-\tau} \left[1 - \left(\frac{\tau-\alpha_j}{z-\alpha_j} \right)^{n_j} \right],$$

то окончательно будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_{p_1, \ldots, p_m}} \frac{\Phi(t)}{t-z}\, dt = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{j, p_j}} \frac{\Phi(t)}{t-z} \left(\frac{t-\alpha_j}{z-\alpha_j} \right)^{n_j} dt -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{n_j-1} I_{\nu, j, 0} (z-\alpha_j)^{-(\nu+1)} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{(\Delta_{p_j})}\left[F_k(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{g_k(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{\tau-\alpha_j}{z-\alpha_j}\right)^{n_j}d\tau\right].$$

Подставляя это значение в равенство (25.24), получаем

$$\Phi(z)=\Phi(\infty)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{n_j-1}I_{\nu,j,0}(z-\alpha_j)^{-(\nu+1)}+\sum_{(D_0)}F_k(z)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\left\{\sum_{(\Delta_{p_j})}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{g_k(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{\tau-\alpha_j}{z-\alpha_j}\right)^{n_j}d\tau+\right. \tag{25.26}$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{j,p_j}}\frac{\Phi(t)}{t-z}\left(\frac{t-\alpha_j}{z-\alpha_j}\right)^{n_j}dt\right\}.$$

В правой части этой формулы (25.26) заставим все числа $p_1, \ldots, p_m$ независимо друг от друга безгранично возрастать (по целым положительным значениям). При этом каждая из сумм

$$\sum_{(\Delta_{p_j})}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{g_k(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{\tau-\alpha_j}{z-\alpha_j}\right)^{n_j}d\tau$$

превратится в ряд вида

$$\sum_{p_j=1}^{\infty}\sum_{(D_{p_j})}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{g_k(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{\tau-\alpha_j}{z-\alpha_j}\right)^{n_j}d\tau,$$

где в один член ряда объединены все интегралы, взятые по контурам L_k, расположенным в двусвязной области D_{p_j} между двумя соседними кривыми γ_{j,p_j} и γ_{j,p_j+1}. Таким путем, полагая

$$R(z)=\Phi(\infty)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{n_j-1}I_{\nu,j,0}(z-\alpha_j)^{-(\nu+1)},$$

из формулы (25.26) для функции $\Phi(z)$ получим представление

$$\Phi(z)=R(z)+\sum_{(D_0)}F_k(z)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{p_j=1}^{\infty}\sum_{(D_{p_j})}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{g_k(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{\tau-\alpha_j}{z-\alpha_j}\right)^{n_j}d\tau, \qquad (25.27)$$

если целые числа $n_j \geqslant 0$ таковы, что

$$\lim_{p_j\to\infty}\int_{\gamma_{j,\,p_j}}\frac{\Phi(t)}{z-t}\left(\frac{t-\alpha_j}{z-\alpha_j}\right)^{n_j}dt=0 \qquad (25.28)$$

для всех $j=1,\ 2,\ldots,\ m$.

Нетрудно указать некоторые ограничения на функцию $\Phi(z)$, при которых соотношения (25.28) будут иметь место. Для этого оценим интеграл в левой части равенства (25.28) по модулю. Учитывая условие (25.23), получим

$$\left|\int_{\gamma_{j,\,p_j}}\frac{\Phi(t)}{z-t}\left(\frac{t-\alpha_j}{z-\alpha_j}\right)^{n_j}dt\right|\leqslant\max_{t\in\gamma_{j,\,p_j}}|\Phi(t)(t-\alpha_j)^{n_j}|\times$$

$$\times\frac{l_{j,\,p_j}}{|z-\alpha_j|^{n_j}(|z-\alpha_j|-r_{j,\,p_j})}\leqslant\frac{M_ja_jr_{j,\,p_j}}{|z-\alpha_j|^{n_j}(|z-\alpha_j|-r_{j,\,p_j})},$$

если на последовательности контуров $\{\gamma_{j,\,p_j}\}$, $p_j=0,\ 1,\ldots$

$$|\Phi(t)(t-\alpha_j)^{n_j}|\leqslant M_j,\quad j=1,\ldots,\ m. \qquad (25.29)$$

Так как $r_{j,\,p_j}\to 0$ при $p_j\to\infty$, то при условиях (25.29) все равенства (25.28) будут иметь место.

Легко видеть, что равенства (25.28) будут иметь место и при более слабых ограничениях на $\Phi(z)$:

$$\lim_{p_j\to\infty}\int_{\gamma_{j,\,p_j}}|\Phi(t)(t-\alpha_j)^{n_j}\,dt|=0,\quad j=1,\ldots,\ m. \qquad (25.30)$$

Итогом изложенного является

Теорема 25.3. *Если функция $\Phi(z)$ имеет счетное множество $\{L_k\}$ полярных линий первого порядка с $m\geqslant 2$ точками сгущения $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ и с главными частями в виде интегралов типа Коши $F_k(z)$ и, кроме того, существуют такие последовательности замкнутых контуров $\{\gamma_{j,\,p_j}\}$ ($p_j=0,\ 1,\ldots;\ j=1,\ 2,\ldots,\ m$) со свойствами* 1) — 3), *на которых при некоторых целых $n_j\geqslant 0$ выполняются условия* (25.29) *или* (25.30), *то $\Phi(z)$ представляется формулой* (25.27), *где $R(z)$ — произвольная рациональная функция* *с полюсами в точках α_j порядков n_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ и все m рядов при $z \in L_k$ сходятся при условии, что в один член объединяются все интегралы по контурам L_k, лежащим между двумя линиями γ_{j, p_j} и γ_{j, p_j+1}.*

Если одна из точек α_j является бесконечно удаленной, например, $\alpha_m = \infty$, то в представлении (25.27) в соответствующих этой точке слагаемых надо заменить $(z-\alpha_m)^{-1}$ на z. Таким путем для случая двух точек сгущения $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \infty$ из формулы (25.27) получаем

$$\Phi(z) = R(z) + \sum_{(D_0)} F_k(z) +$$

$$+ \sum_{p_1=1}^{\infty} \sum_{(D_{p_1})} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{\tau}{z}\right)^{n_1} d\tau +$$

$$+ \sum_{p_2=1}^{\infty} \sum_{(D_{p_2})} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{n_2+1} d\tau, \qquad (25.31)$$

где

$$R(z) = \sum_{q=-n_1}^{n_2} \beta_q z^q.$$

Если $\gamma_{1;\,0} \equiv \gamma_{2;\,0}$, то первой суммы по $L_k \subset D_0$ не будет.

4°. Применим теорему 25.3 при решении однородной и неоднородной задачи Римана. Чтобы избежать громоздких записей, ограничимся случаем двух точек сгущения $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \infty$.

Краевые условия однородной задачи запишем в виде

$$\Phi^+(t) = G_k(t)\,\Phi^-(t), \quad t \in L_k, \quad k = 0, \pm 1, \ldots \qquad (25.32)$$

и будем считать, что непрерывные по Гёльдеру и не обращающиеся в нуль функции $G_k(t)$ таковы, что при некоторых целых $n \geqslant 0$ и $m \geqslant 2$

$$N = \sum_{k>0} \xi_k R_k^{-n} < \infty, \quad N_1 = \sum_{k \leqslant 0} \xi_k r_k^{m-2} < \infty,$$

$$\xi_k = \max\{B_k, |\varkappa_k|\}, \quad B_k = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} |\ln G_k(\tau)\, d\tau|, \qquad (25.33)$$

$$r_k = \max_{\tau \in L_k} |\tau|.$$

Пусть $\{\Gamma_q\}_{-\infty}^{\infty}$ есть счетное множество замкнутых кривых, уходящих при $q \to +\infty$ всеми своими точками в бесконечность так, что отношение l_q/d_q длины l_q кривой Γ_q к ее расстоянию d_q до начала остается ограниченным, а при $q \to -\infty$ стягивающихся в точку $z=0$. При этом взаимное расположение множеств $\{L_k\}$ и $\{\Gamma_q\}$ характеризуется следующим свойством: существуют такие постоянные $\delta > 0$ и $\delta_1 > 0$, что при всех $\tau \in \{L_k\}$

$$|\tau - z| \geqslant \delta, \quad z \in \{\Gamma_q\}, \quad q > 0, \tag{25.34}$$
$$|\tau - z| \geqslant \delta_1 |\tau| |z|, \quad z \in \{\Gamma_q\}, \quad q \leqslant 0.$$

Будем искать кусочно-голоморфное решение задачи (25.32), не имеющее нулей и удовлетворяющее условиям

$$\int_{\Gamma_q} \left| \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} z^{-(n+2)} dz \right|_{q \to +\infty} \to 0,$$
$$\int_{\Gamma_q} \left| \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} z^{m+2} dz \right|_{q \to -\infty} \to 0. \tag{25.35}$$

При выполнении условий (25.33) задача (25.32) имеет частное решение $\exp \gamma(z)$, где

$$\gamma(z) = \sum_{k>0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\ln G_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z}{\tau}\right)^n d\tau +$$
$$+ \sum_{k \leqslant 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\ln G_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{\tau}{z}\right)^m d\tau. \tag{25.36}$$

Здесь оба ряда сходятся равномерно в любой ограниченной области, не содержащей $z=0$ и точек контуров L_k, в том числе и на всех кривых Γ_q. Возьмем

$$\gamma'(z) = \sum_{k>0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\ln G_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z}{\tau}\right)^n \left(\frac{1}{\tau - z} + \frac{n}{z}\right) d\tau +$$
$$+ \sum_{k \leqslant 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\ln G_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{\tau}{z}\right)^m \left(\frac{1}{\tau - z} - \frac{m}{z}\right) d\tau.$$

Учитывая первое из условий (25.34), на кривых Γ_q с номерами $q > 0$ получим

$$|\gamma'(z) z^{-(n+2)}| \leqslant \delta^{-1} N |z|^{-2} [\delta^{-1} + n |z|^{-1}] +$$
$$+ \delta^{-1} N_1 |z|^{-(m+n-2)} [\delta^{-1} + m |z|^{-1}],$$

а на кривых Γ_q с номерами $q \leqslant 0$ в силу второго условия (25.34)

$$|\gamma'(z) z^{m+2}| \leqslant \delta_1^{-1} N^* |z|^{n+m-2} + \delta_1^{-1} N_1^*,$$

где N^* и N_1^* суть суммы рядов

$$N^* = \sum_{k>0} B_k R_k^{-(n+1)} (\delta_1^{-1} R_k^{-1} + n),$$

$$N_1^* = \sum_{k\leqslant 0} B_k r_k^{m-1} (\delta_1^{-1} r_k^{-1} + m).$$

На основании этих оценок и условий (25.35) для функции $\psi(z) = \Phi(z) e^{-\gamma(z)}$ легко получаем

$$\int_{\Gamma_q} \left| \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} z^{-(n+2)} dz \right| \leqslant \int_{\Gamma_q} \left| \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} z^{-(n+2)} dz \right| +$$

$$+ \int_{\Gamma_q} |\gamma'(z) z^{-(n+2)} dz| \to 0, \quad q \to +\infty$$

$$\int_{\Gamma_q} \left| \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} z^{m+2} dz \right| \to 0, \quad q \to -\infty.$$

Следовательно, мероморфная в плоскости с выколотыми точками $z = 0$ и $z = \infty$ функция $\psi'(z)/\psi(z)$ представляет собой сумму ряда

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \sum_{i=-(m+2)}^{n} \alpha_i z^i + \sum_{k>0} \frac{-\varkappa_k}{z - t_k} \left(\frac{z}{t_k}\right)^n + \sum_{k\leqslant 0} \frac{-\varkappa_k}{z - t_k} \left(\frac{t_k}{z}\right)^{m+1} =$$

$$= \sum_{i=-(m+2)}^{n} \alpha_i z^i - \sum_{k>0} \varkappa_k \left\{ \frac{1}{z - t_k} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{z^j}{t_k^{j+1}} \right\} -$$

$$- \sum_{k\leqslant 0} \varkappa_k \left\{ \frac{1}{z - t_k} - \sum_{j=0} \frac{t_k^j}{z^{j+1}} \right\},$$

где α_i — произвольные постоянные. Эти ряды на основании условий (25.33) равномерно сходятся в любой ограниченной области, не содержащей точек $z = 0$ и t_k. Поэтому интегрированием вдоль любой кривой, не проходящей через эти точки и соединяющей фиксированную точку z_0 с любой точкой z, получим

$$\ln \psi(z) = \ln \psi(z_0) + \alpha_{-1} \ln \frac{z}{z_0} + \sum_{i=-m-1}^{n+1} \beta_i z^i -$$

$$- \sum_{k>0} \varkappa_k \ln \left\{ E\left(\frac{z}{t_k},\ n\right) \Big/ E\left(\frac{z_0}{t_k},\ n\right) \right\} -$$

$$- \sum_{k \leqslant 0} \varkappa_k \ln \left\{ E\left(\frac{t_k}{z},\ m\right) \Big/ E\left(\frac{t_k}{z_0},\ m\right) \right\}.$$

Чтобы найденная отсюда потенцированием функция $\psi(z)$ была однозначной, надо положить $\alpha_{-1} = 0$. Включив в состав β_0 постоянную $\ln \psi(z_0)$ и суммы рядов с общими членами $\varkappa_k \ln E(z_0/t_k,\ n)$ и $\varkappa_k \ln E(t_k/z_0,\ m)$, получим

$$\psi(z) = e^{Q(z)} \prod_{k>0} E^{-\varkappa_k}\left(\frac{z}{t_k},\ n\right) \prod_{k \leqslant 0} E^{-\varkappa_k}\left(\frac{t_k}{z},\ m\right),$$

если через $Q(z)$ обозначить произвольную рациональную функцию

$$Q(z) = \sum_{i=-m-1}^{n+1} \beta_i z^i.$$

Значит, общее решение однородной задачи, удовлетворяющее условиям (25.35), определяется формулой

$$\Phi(z) = e^{Q(z)} e^{\gamma(z)} \prod_{k>0} E^{-\varkappa_k}\left(\frac{z}{t_k},\ n\right) \prod_{k \leqslant 0} E^{-\varkappa_k}\left(\frac{t_k}{z},\ m\right), \qquad (25.37)$$

где $\gamma(z)$ есть сумма ряда (25.36).

При решении неоднородной задачи

$$\Phi^+(t) = G_k(t) \Phi^-(t) + g_k(t), \quad t \in L_k \quad k = 0,\ \pm 1, \ldots \qquad (25.38)$$

любое из решений (25.37), если, конечно, выполнены условия (25.33), можно принять за каноническое, положив, например,

$$\mathrm{X}(z) = e^{\gamma(z)} \prod_{k>0} E^{-\varkappa_k}\left(\frac{z}{t_k},\ n\right) \prod_{k \leqslant 0} E^{-\varkappa_k}\left(\frac{t_k}{z},\ m\right), \qquad (25.39)$$

и при помощи этой функции привести краевое условие (25.38) к виду

$$\frac{\Phi^+(t)}{\mathrm{X}^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\mathrm{X}^-(t)} = \frac{g_k(t)}{\mathrm{X}^+(t)},\ t \in L_k,\ k = 0,\ \pm 1, \ldots$$

Отсюда, если функции $g_k(t)$ таковы, что при некоторых целых $\nu \geqslant 0$ и $\mu \geqslant 2$ сходятся числовые ряды

$$\sum_{k>0} M_k R_k^{-\nu}, \quad \sum_{k\leqslant 0} M_k r_k^{\mu-2}, \quad M_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \left| \frac{g_k(\tau)}{X^+(\tau)} \, d\tau \right|,$$

легко получаем частное решение неоднородной задачи

$$\Phi_1(z) = X(z) \left\{ \sum_{k>0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - z)} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{\nu} d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{k\leqslant 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - z)} \left(\frac{\tau}{z}\right)^{\mu-1} d\tau \right\},$$

удовлетворяющее на множестве $\{\Gamma_q\}$ условиям

$$\int_{\Gamma_q} \left| \frac{\Phi_1(z)}{X(z)} z^{-(\nu+2)} dz \right|_{q\to+\infty} \to 0, \quad \int_{\Gamma_q} \left| \frac{\Phi_1(z)}{X(z)} z^{\mu} dz \right|_{q\to-\infty} \to 0.$$

Чтобы получить общее решение неоднородной задачи, удовлетворяющее на множестве $\{\Gamma_q\}$ этим же условиям, надо построить мероморфную функцию $\psi(z) = \{\Phi(z) - \Phi_1(z)\}/X(z)$ такого же класса. Если искомое решение $\Phi(z)$ кусочно-голоморфно, то $\psi(z)$ будет рациональной функцией вида

$$\psi(z) = \sum_{j=-\mu}^{\nu} \alpha_j z^j = Q(z)$$

и неоднородная задача будет иметь $\nu + \mu + 1$ линейно-независимых решений

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + X(z) Q(z).$$

Если же у искомого решения $\Phi(z)$ в точках множества $\{a_p\}_{-\infty}^{\infty}$ должны быть полюсы не выше заданных порядков, то $\psi(z)$ будет иметь такую форму

$$\psi(z) = Q(z) + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left\{ H_p\left(\frac{1}{z - a_p}\right) - h_p(z) \right\},$$

где каждая функция $h_p(z)$, являясь отрезком лорановского разложения с центром в $z = 0$ главной части $H_p[(z - a_p)^{-1}]$, состоит из $\nu + \mu + 1$ слагаемых и имеет ту же форму, что и функция $Q(z)$. В этом случае у неоднородной задачи счетное множество линейно-независимых решений.

5°. Для случая двух точек сгущения остаются справедливыми теоремы, аналогичные теоремам 22.12 и 22.11. Формулируются они следующим образом.

Теорема 25.4. *Для того чтобы мероморфная функция* $F(z)$ *с простыми полюсами* a_k, $k=0, \pm 1, \ldots$, *имеющими две точки сгущения* $z=0$ *и* $z=\infty$, *и главными частями* $A_k(z-a_k)^{-1}$, $k=0, \pm 1, \ldots$ *имела вид*

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{z-a_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{n_k+1}, \tag{25.40}$$

где целые числа n_k *образуют возрастающую последовательность вида*

$$n_k < n_{k+1}, \quad n_0=-1, \lim_{k \rightarrow \pm \infty} n_k=\pm \infty, \tag{25.41}$$

и обеспечивают абсолютную и равномерную сходимость ряда (25.40) *в любом кольце* $r<|z|<\infty$ *(после отбрасывания членов, имеющих в этом кольце полюсы), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\int_{C_q} F(z) z^{-(j+1)} dz=0,$$

$$j=n_q+1, \ldots, \quad n_{q+1}; \quad q=0, \quad \pm 1, \ldots, \tag{25.42}$$

где замкнутый контур C_q *содержит внутри себя* $z=0$ *и те полюсы* a_k, *для которых* $k \leqslant q$.

Теорема 25.5. *Для того чтобы кусочно-голоморфная функция* $F(z)$, *имеющая счетное множество полярных линий первого порядка* L_k *с двумя точками сгущения* $z=0$ *и* $z=\infty$ *и с главными частями* $F_k(z)$ *вблизи этих линий, имела вид*

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\tau-z}\left(\frac{z}{\tau}\right)^{n_k+1} d\tau,$$

где целые числа n_k, *обеспечивающие абсолютную и равномерную сходимость этого ряда, образуют последовательность со свойствами* (25.41), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (25.42), *где* C_q *есть любой замкнутый контур, содержащий внутри себя* $z=0$ *и все* L_k *при* $k \leqslant q$.

Доказательство этих теорем проводится по тем же схемам, по которым доказываются соответствующие теоремы в случае одной точки сгущения. Небольшое отличие имеется лишь при доказательстве достаточности, когда из условий (25.42) приходится определять коэффициенты некоторого ряда Лорана, а не ряда Тейлора.

Таким же образом доказывается теорема 25.4 в случае кратных полюсов. А вот в случае более двух точек сгущения проверить справедливость этих теорем мы не можем из-за отсутствия удобного аналога рядов Лорана.

Покажем, как применяются теоремы 25.4 и 25.5 при решении однородной задачи в одном из классов кусочно-голоморфных функций.

Пусть целые числа

$$\ldots < n_{-1} < n_0 < -1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots$$

подобраны так, чтобы ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \left(\frac{z}{\rho_k}\right)^{n_k+1}, \quad \xi_k = \max\{B_k, |\varkappa_k|\}, \tag{25.43}$$

где $\rho_k = R_k$ при $k > 0$ и $\rho_k = r_k$ при $k \leqslant 0$, сходился абсолютно и равномерно при любом z, $0 < |z| < \infty$. Найдем не обращающееся в нуль решение однородной задачи, удовлетворяющее условиям

$$\int\limits_{C_q} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\, z^{-(j+1)} dz = 0,$$

$$j = n_q, \ldots, n_{q+1} - 1; \quad q = 0, \quad \pm 1, \ldots, \tag{25.44}$$

где C_q — некоторый контур, охватывающий $z = 0$ и все L_k, $k \leqslant q$.

Из условия (25.43), следует, что задача (23.7) имеет частное решение

$$\gamma(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{\ln G_k(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{n_k+1} d\tau,$$

где целые числа n_k удовлетворяют условиям теоремы 25.5. Поэтому имеют место соотношения

$$\int\limits_{C_q} \gamma(z)\, z^{-(j+1)} dz = 0, \ j = n_q + 1, \ldots, n_{q+1}; \ q = 0, \ \pm 1, \ldots \tag{25.45}$$

Рассмотрим отношение двух решений однородной задачи $\psi(z) = \Phi(z) \exp\{-\gamma(z)\}$, представляющее собой мероморфную функцию с нулями и полюсами в тех точках $t_k \in L_k$, где $\varkappa_k \neq 0$. В силу соотношений (25.44) и (25.45) для ее логарифмической производной имеем

$$\int\limits_{C_q} \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} z^{-(j+1)} dz = \int\limits_{C_q} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} z^{-(j+1)} dz - $$

$$- \int\limits_{C_q} \gamma'(z) z^{-(j+1)} dz = 0,$$

$$j = n_q, \ldots, n_{q+1} - 1; \quad q = 0, \ \pm 1, \ldots$$

Значит, по теореме 25.4

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-\varkappa_k}{z - t_k} \left(\frac{z}{t_k}\right)^{n_k} =$$

$$= - \sum_{k>0} \varkappa_k \left\{ \frac{1}{z - t_k} + \sum_{j=0}^{n_k - 1} \frac{z^j}{t_k^{j+1}} \right\} -$$

$$- \sum_{k \leqslant 0} \varkappa_k \left\{ \frac{1}{z - t_k} - \sum_{j=0}^{m_k} \frac{t_k^j}{z^{j+1}} \right\}.$$

Этот ряд сходится равномерно в любой ограниченной области, не содержащей точек t_k, что вытекает из сходимости ряда (25.43). Поэтому интегрированием вдоль любой кривой, не проходящей через точки $z = 0$ и t_k и соединяющей произвольную точку z с некоторой фиксированной точкой $z_0 \neq 0$, получаем

$$\ln \psi(z) = \ln \psi(z_0) -$$

$$- \sum_{k>0} \varkappa_k \left\{ \ln \frac{z - t_k}{z_0 - t_k} + \sum_{j=0}^{n_k - 1} \frac{z^{j+1} - z_0^{j+1}}{(j+1) t_k^{j+1}} \right\} -$$

$$- \sum_{k \leqslant 0} \varkappa_k \left\{ \ln \frac{z - t_k}{z_0 - t_k} - \ln \frac{z}{z_0} + \sum_{j=1}^{m_k} \frac{t_k^j}{j} \left(\frac{1}{z^j} - \frac{1}{z_0^j} \right) \right\} =$$

$$= \ln \psi(z_0) - \sum_{k>0} \varkappa_k \ln \left\{ E\left(\frac{z}{t_k}, \ n_k\right) \Big/ E\left(\frac{z_0}{t_k}, \ n_k\right) \right\} -$$

$$- \sum_{k \leqslant 0} \varkappa_k \ln \left\{ E\left(\frac{t_k}{z}, \ m_k\right) \Big/ E\left(\frac{t_k}{z_0}, \ m_k\right) \right\}.$$

Потенцированием находим

$$\psi(z) = C \prod_{k>0} E^{-\varkappa_k}\left(\frac{z}{t_k}, \ n_k\right) \prod_{k \leqslant 0} E^{-\varkappa_k}\left(\frac{t_k}{z}, \ m_k\right).$$

Значит, условиями (25.44) решение однородной задачи определяется с точностью до постоянного множителя.

$$\Phi(z) = Ce^{\gamma(z)} \prod_{k>0} E^{-\varkappa_k}\left(\frac{z}{t_k},\ n_k\right) \prod_{k<0} E^{-\varkappa_k}\left(\frac{t_k}{z},\ m_k\right).$$

Очевидно, это решение может быть записано в таком виде: $\Phi(z) = CX(z)$.

6°. При любом числе точек сгущения (конечном) влияние знаков индексов $\varkappa_k$ на разрешимость и число решений задачи Римана проще всего проследить на классе ограниченных кусочно-голоморфных функций в условиях теоремы 25.3, однако из-за громоздкости выкладок мы эти рассуждения не приводим. К сожалению, мы не имеем возможности изложить здесь также ряд интересных результатов, касающихся решения рассматриваемой задачи в классе функций, имеющих в некоторых углах с вершиной в начале заданный конечный порядок, и связи между задачей Римана для счетного множества разомкнутых контуров и задачей Римана для одного бесконечного контура, исследованной подробно Н. В. Говоровым. Это потребовало бы изложения значительного по объему вспомогательного материала. Заметим лишь, что между задачей, исследованной Н. В. Говоровым [15—17], и рассмотренной нами задачей Римана для счетного множества контуров существует большое внутреннее сходство. Они относятся, по терминологии Н. В. Говорова, к числу граничных задач с бесконечным индексом. С другой стороны, задачу Римана для счетного множества контуров можно рассматривать как граничную задачу для аналитических функций на открытой римановой поверхности, граница которой состоит из конечного числа точек — точек сгущения особых контуров.

Из опубликованных работ при написании этой главы использовались работы [84—88].

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев А. Д. Об одном случае разрывной задачи Римана.— ДАН, 1966, **167**, № 2, с. 255—258.

2. Ахиезер Н. И. О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов.— ИАН СССР, сер. матем., 1945, **9**, № 4, с. 275—290.

3. Векуа И. Н. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с интегралами в смысле главного значения по Коши.— Сообщения АН ГрузССР, 1941, **2**, № 7, с. 579—586.

4. Векуа И. Н. Интегральные уравнения с особым ядром типа Коши. — Труды Тбилисского Матем. ин-та АН ГрузССР. 1941, **10**, с. 45—72.

5. Векуа И. Н. Об одной линейной граничной задаче Римана.— Труды Матем. ин-та ГрузССР, 1942, **11**, с. 109—139.

6. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М., „Наука" 1970.

7. Векуа Н. П. Интегральные уравнения Фредгольма с интегралами в смысле Адамара.— Труды Матем. ин-та АН ГрузССР, 1939, **7**, с. 113—146.

8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.

9. Гахов Ф. Д. Линейные краевые задачи теории функций комплексного переменного.— Изв. Казанского физ.-мат. об-ва и НИИММ при Казанском ун-те, 1938, сер. 3, 10, с. 39—79.

10. Гахов Ф. Д. Краевые задачи аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения.— Изв. Казанского физ-мат. об-ва при Казанском ун-те, 1949, сер. 3, **14**, с. 75—160.

11. Гахов Ф. Д. О новых типах интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме.— Сб. Проблемы механики сплошной среды. М., Изд-во АН СССР, 1961, с. 101—113.

12. Гахов Ф. Д. О современном состоянии теории краевых задач аналитических функций и особых интегральных уравнений.— Труды семинара по краевым задачам. Казань, Изд-во КГУ, 1970, вып. 7, с. 3—17.

13. Гахов Ф. Д., Чибрикова Л. И. О краевой задаче Римана для случая пересекающихся контуров.— Учен. зап. КГУ. Казань, Изд-во КГУ, 1953, **113**, кн. 10, с.107—110.

14. Гахов Ф. Д., Чибрикова Л. И. Решение задач механики сплошной среды сведением к краевым задачам для автоморфных функций.— Труды Международного симпозиума в Тбилиси „Приложения теории функций в механике сплошной среды", 1965, **2**, с. 208—218.

15. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом степенного порядка меньше 1/2.— Сб. Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1968, вып. 6, с.151—176.

16. Говоров Н. В. Об ограниченных решениях однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом степенного порядка.— Сб. Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, Изд-во ХГУ, 1970, вып. 2, с. 3—34.

17. Говоров Н. В. О решении в классе функций вполне регулярного роста однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом. —Сб. Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, Изд-во ХГУ, вып. 25, 1972, с. 213—243.

18. Голубев В. В. Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции. М., Физматгиз, 1961.

19. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., „Наука", 1970.

20. Гордадзе Э. Г. О сингулярных интегралах с ядром Коши. — Сообщения АН ГрузССР, 1965, **37**, № 3, с. 521—526.

21. Емец Ю. П. Распределение тока в плоском магнитогидродинамическом канале при движении электропроводной среды в сильном магнитном поле.— ПМТФ, 1967, № 3, с. 3—11.

22. Емец Ю. П. Решение задачи о распределении тока в магнитогидродинамическом канале с проницаемыми электродами при тензорном характере проводимости движущейся среды. — ПММ, 1968, **32**, с. 353—359.

23. Емец Ю. П. Периодическая структура электрического поля в стратифицированной плазме с тензорной проводимостью. — ПММ, 1972, **36**, с. 617—625.

24. Зверович. Э. И. Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях. — УМН, **26**, вып. 1 (157), 1971, с. 113—179.

25. Исаханов Р. С. Об одном классе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. — ДАН, 1960, **132**, № 2, с. 264—267.

26. История Отечественной математики (1917—1967). Киев, „Наукова Думка", 1970, **4**, кн. 1.

27. Карцивадзе И. Н., Хведелидзе Б. В. Об одной формуле обращения. — Сообщения АН ГрузССР, 1949, **10**, № 10, с. 587—591.

28. Карцивадзе И. Н., Хведелидзе Б. В. Об интеграле типа Коши. — Труды Матем. ин-та АН ГрузССР, 1954, **20**, с. 211—244.

29. Квеселава Д. А. Некоторые граничные задачи теории функций. — Труды Матем. ин-та ГрузССР, 1948, **16**, с. 39—90.

30. Квеселава Д. А. Граничная задача Гильберта и сингулярные интегральные уравнения в случае пересекающихся контуров.— Труды Матем. ин-та АН ГрузССР, 1949, **17**, с. 1—27.

31. Крикунов Ю. М. Дифференцирование особых интегралов с ядром Коши и одно граничное свойство голоморфных функций. — Сб. Краевые задачи теории ф. к. п. Казань, Изд-во КГУ, 1962, с. 17—24.

32. Крикунов Ю. М. Дифференцирование интегралов с логарифмическим ядром и с ядром Коши.— Труды семинара по краевым задачам. Казань, Изд-во КГУ, 1966, вып. 3, с. 68—74.

33. Кудрявцев Б. А., Партон В. З. Первая основная задача теории упругости для двоякопериодической системы разрезов.— В кн.: Кудрявцев Б. А., Партон В. З. Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., „Наука", 1972, с. 251—258.

34. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.—.Л., ГИТТЛ, 1950.

35. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.

36. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956.

37. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М.—Л., ГИТТЛ, 1950.

38. Мельник И. М. Исключительный случай краевой задачи Римана. — Труды Матем. ин-та АН ГрузССР, 1957, **24**, с. 149—162.

39. Мерлин А. В. Об одном классе интегральных уравнений I рода с многозначным логарифмическим ядром. — Сб. Теория функций комплексных переменных и краевые задачи. Чебоксары, Изд-во Чувашского ун-та. 1972, с. 19—36.

40. Михлин С. Г. Сингулярные интегральные уравнения.— УМН, 1948, **3**, вып. 3 (25), с. 29—112.

41. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.

42. Мусхелишвили Н. И. Приложение интеграла типа Коши к одному классу сингулярных интегральных уравнений.— Труды Матем. ин-та АН ГрузССР, 1941, **10**, с. 1—43.

43. Мусхелишвили Н. И., Квеселава Д. А. Сингулярные интегральные уравнения с ядром типа Коши на разомкнутых контурах. — Труды Матем. ин-та АН ГрузССР, 1942, **11**, с. 141—172.

44. Нумеров С. Н. О фильтрации в земляных плотинах с дренажем на водонепроницаемом основании.— Изв. НИИ гидротехники, 1939, **25**, с. 115—136.

45. Пааташвили В. А. О линейной задаче сопряжения в случае счетного множества замкнутых контуров. — Сообщения АН ГрузССР, 1965, **37**, № 1, с. 31—36.

46. Пааташвили В. А. О линейной задаче сопряжения в случае счетного множества замкнутых контуров.— Труды матем. ин-та АН ГрузССР, 1968, **34**, с. 103—122.
47. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
48. Привалов И. И. Интеграл Коши.— Изв. Саратовского ун-та, физ.-мат. фак-т, 1918, вып. 1.
49. Привалов И. И. Об интегралах типа Коши.— ДАН, 1939, **23**, № 9, с. 859—862.
50. Привалов И. И. Граничные свойства однозначных аналитических функций. Изд. 2. М.—Л.. ГИТТЛ, 1950.
51. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. (1917—1967). Под ред. П. Я. Полубариновой-Кочиной. М., „Наука", 1969.
52. Риман Б. Сочинения. М., Гостехиздат, 1948.
53. Рогожин В. С. О решении краевых задач аналитических функций в пространстве функционалов.— Труды семинара по краевым задачам. Казань, Изд-во КГУ, 1970, вып. 7, с. 225—231.
54. Сакалюк К. Д. Обобщенные интегральные уравнения Абеля.— ДАН, 1960, **131**, № 4, с. 748—751.
55. Сакалюк К. Д. Интегральные уравнения со степенными, логарифмическими и полярными ядрами, разрешаемые в замкнутой форме. Автореф. дисс. на соискание учен. степени канд. физ.-мат. наук. Минск, 1963.
56. Салимов Р. Б. К вычислению интегралов типа Коши.— Изв. вузов. Математика, 1972, № 10, с. 81—87.
57. Салихов Н. Ф. Обтекание решеток, составленных из дужек с произвольным углом выноса.— Изв. вузов. Авиационная техника, 1959, № 4, с. 133—138.
58. Салихов Н. Ф. Приближенный расчет обтекания однорядной и многорядной решеток профилей методом особенностей.— Изв. вузов. Математика, 1960, № 4, с. 170—172.
59. Самко С. Г. Обобщенное уравнение Абеля и уравнение с ядром Коши.— ДАН, 1967, **176**, № 5, с. 1019—1022.
60. Самко С. Г. Интегральные уравнения первого рода с ядром типа потенциала.— Материалы Всесоюзной конференции по краевым задачам. Казань, Изд-во КГУ, 1970, с. 216—220.
61. Соболев С. Л. Об одной предельной задаче теории логарифмического потенциала и ее применении к отражению плоских упругих волн. Труды Сейсмологического ин-та АН СССР, 1930, № 11, с. 1—9.
62. Сохоцкий Ю. В. Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды. Спб, 1873.
63. Толочко М. Э. О краевой задаче Римана для бесконечносвязной области.— ИАН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1970, № 2, с. 70—78.
64. Форд Л. Р. Автоморфные функции. М.—Л., ОНТИ НКТП СССР, 1936.
65. Фрейдкин С. А. Решение одного класса сингулярных интегральных уравнений.— Учен. зап. Кишиневского ун-та, 1954, **11**, с. 13—17.
66. Фрейдкин С. А. Краевая задача Римана и сингулярные интегральные уравнения с кусочнопостоянными коэффициентами в случае счетного множества интервалов.— Учен. зап. Кишиневского ун-та, 1964, **70**, с. 27—38.
67. Фрейдкин С. А. Дальнейшие исследования задач сопряжения и сингулярных интегральных уравнений в случае счетного множества контуров.— Учен. зап. Кишиневского ун-та, 1967, **91**.
68. Хведелидзе Б. В. О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала.— ДАН, 1941, **30**, № 3, с. 195—198.
69. Хведелидзе Б. В. Некоторые свойства особых интегралов в смысле главного значения Коши — Лебега.— Сообщения АН ГрузССР, 1947, **8**, № 5, с. 283—290.

70. Хведелидзе Б. В. Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения.— Труды Матем. ин-та АН ГрузССР, 1957, **23**, с. 3—158.

71. Хейман У. Мероморфные функции. М., „Мир“, 1966.

72. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.

73. Чернецкий В. А. О конформной эквивалентности краевой задачи Карлемана краевой задаче Римана на разомкнутом контуре.— ДАН, 1970, **190**, № 1, с. 54—56.

74. Чибрикова Л. И. К решению задачи Римана в особых случаях, I.— Изв. вузов. Математика, 1971, № 3, с. 101—113.

75. Чибрикова Л. И. К решению задачи Римана в особых случаях. II.— Изв. вузов. Математика, 1972, № 12, с. 95—101.

76. Чибрикова Л. И. К решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта.— Сб. Теория функций комплексного переменного и краевые задачи. Чебоксары, Изд-во Чувашского ун-та. 1972, вып. 1, с. 76—98.

77. Чибрикова Л. И., Салехов Л. Г. К решению краевой задачи Гильберта.— Труды семинара по краевым задачам. Казань, Изд-во КГУ, 1971, вып. 8, с. 155—175.

78. Чибрикова Л. И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений.— Сб. Краевые задачи теории аналитических функций. Казань, Изд-во КГУ, 1962, с. 95—124.

79. Чибрикова Л. И. О краевой задаче Римана для автоморфных функций.— Учен. зап. КГУ, Казань, 1956, **116**, кн. 4, с. 59—110.

80. Чибрикова Л. И. Краевая задача Римана для автоморфных функций. Автореф. дисс. на соискание ученой степени д-ра физ.-мат. наук. Минск. 1962.

81. Чибрикова Л. И. Краевая задача Римана для автоморфных функций в случае групп с двумя инвариантами.— Изв. вузов. Математика, 1961, № 6, с. 121—131; 1962, № 3, с. 195—196.

82. Чибрикова Л. И. О граничных задачах для прямоугольника.— Учен. зап. КГУ. Казань, 1964, **123**, кн. 9, с. 15—39.

83. Чибрикова Л. И. О применении римановых поверхностей при исследовании плоских краевых задач и сингулярных интегральных уравнений.— Труды семинара по краевым задачам. Казань, Изд-во КГУ, 1970, вып. 7, с. 28—44.

84. Чибрикова Л. И., Салехова И. Г. Задача Римана в случае счетного множества контуров.— Труды семинара по краевым задачам. Казань, Изд-во КГУ, 1972, вып. 9, с. 216—233.

85. Чибрикова Л. И., Мкоян П. Х. Задача Римана в случае счетного множества контуров с двумя предельными точками. I.— Изв. вузов. Математика, 1972, № 3, с. 90—102.

86. Чибрикова Л. И. Задача Римана в случае счетного множества контуров.— Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа (23—29 IX. 1971 г.). Тбилиси, 1973. с. 342—361.

87. Чибрикова Л. И. К решению задачи Римана в случае счетного множества контуров.— Труды семинара по краевым задачам. Казань, Изд-во КГУ, 1973, вып. 10.

88. Чибрикова Л. И., Салехов Л. Г. Применение метода симметрии при решении одной задачи линейного сопряжения.— Изв. вузов. Математика, 1968, № 9, с. 94—105.

89. Чикин Л. А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений. — Учен. зап. КГУ, Казань, 1952, **113**, кн. **10**, с. 57—105.

90. Чумаков Ф. В. Характеристическое уравнение с логарифмическим ядром. — ИАН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1967, № 3, с. 118—120.

91. Чумаков Ф. В. Интегральные уравнения с логарифмическим ядром.— ДУ, 1968, **4**, № 2, с. 336—346.

92. Aczel J. Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. Berlin, 1961.
93. Hilbert D. Uber eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie.— Verhandl. des III Internat. Math. Kongr. Heidelberg, 1904.
94. Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig—Berlin, 1912 (2 Aufl., 1924).
95. Noether D. Uber eine Klasse singularer Integralgleichungen. — Math. Ann., 1921. **82**, s. 42—63.
96. Picard E. Legons sur quelques types simples d'equations aux dérivês partielles. Paris, 1927.
97. Plemely J. Ein Ergänzungssatz sur Cauchy'scher Integrald rstellung analytisher Funktionen, Randwerte betreffend, Monatsh. für Math. und Phys., 1908, **19**, s. 205—210.
98. Trjizinsky W. Singular integral equations.— Trans. Amer. Math. Soc., 1946, **60**, № 2.
99. Walsh J. L., Sewell W. E. Sufficient conditions for various degrees of approximation by polynomials.— Duke Math. J. 1940, **6**, № 3. p. 658—705.
100. Weierstrass K. Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten.— Ges. Math. Werke. Berlin, 1902, **4**.
101. Zakowsky W. Sur une generalisation de la transformation de Poincaré — Bertrand. Ann. polon. math., 1961, **10**, № 2, p. 115—122.

Любовь Ивановна Чибрикова

ОСНОВНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Редактор *Е. А. Кириллович*
Обложка художника *Б. А. Чукомина*
Техн. редактор *Г. П. Кузьмина*
Корректоры *Л. С. Губанова, С. А. Филиппова*

Сдано в набор **7/V-75 г.** Подписано в печать 20/IV-77 г. ПФ 10042. Формат бумаги **60×90$^1/_{16}$.** Печ. л. 19. Уч.-изд. л. 18,2. Заказ Л-448. Тираж 600. Цена без переплета 1 р. 82 к. Переплет 14 к.

Издательство Казанского университета, г. Казань, ул. Ленина, д. 4/5.

Полиграфкомбинат им. К. Якуба Управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Совета Министров ТАССР. г. Казань, ул. Баумана, д. 19.

1 р. 96 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
КАЗАНСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Я, Плещинский Николай Борисович, сын Чибриковой Любови Ивановны, не возражаю против публикации ее книги "Основные граничные задачи для аналитических функций" в ресурсах Интернета с публичным доступом.

12.12.2022